Analyse de fiabilité des systèmes semicohérents et description par des polynômes latticiels

Alexander Dukhovny[1] and Jean-Luc Marichal[2]

[1] Mathematics Department, San Francisco State University, San Francisco, CA 94132, USA.
dukhovny[at]math.sfsu.edu
[2] Mathematics Research Unit, University of Luxembourg, L-1511 Luxembourg, Luxembourg.
jean-luc.marichal[at]uni.lu

Résumé

Considérons un système semicohérent consistant en un certain nombre de composants interconnectés. Un tel système peut être décrit par sa fonction de structure qui exprime, à chaque instant, l'état du système en termes des états de ses composants. De manière équivalente, le système peut aussi être décrit au moyen d'un polynôme latticiel qui exprime la durée de vie du système en termes des durées de vie des composants. Par exemple, lorsque des composants sont connectés en série, la durée de vie du segment ainsi constitué est le minimum de durées de vie des composants.

Dans notre présentation, nous mettons en évidence le parallélisme formel entre ces deux descriptions et nous montrons que les langages correspondants sont équivalents sur plusieurs aspects. Nous montrons aussi que le langage des polynômes latticiels offre des avantages significatifs. Par exemple, en exploitant la propriété de distributivité de la fonction indicatrice par rapport aux opérations latticielles, nous montrons que la description par les polynômes latticiels constitue un outil très naturel pour mettre en relation la structure du système avec le treillis des événements typiques de fiabilité de la forme $T \leq t$, où T est une durée de vie aléatoire. Cet outil met donc en relation l'objectif du système, qui est encodé dans le polynôme latticiel, avec l'équipement du système, qui est exprimé dans la distribution des durées de vie des composants.

Ensuite, nous établissons une liste de formules exactes pour le calcul de la fiabilité du système, aussi bien dans le cas où les durées de vie des composants sont indépendantes que dans le cas général dépendant. Ces formules permettent alors de fournir des expressions exactes de certains paramètres de fiabilité tels que la durée de vie moyenne du système.

Un autre avantage du langage des polynômes latticiels est qu'il nous permet d'étendre notre étude au cas plus général où nous considérons des bornes supérieures collectives sur la durée de vie de certains sous-ensembles de composants imposées par des conditions externes (telles que des propriétés physiques de l'assemblage) ou même des bornes inférieures imposées par exemple par des dispositifs de sécurité ayant une durée de vie constante. En termes de durées de vie, de tels systèmes peuvent être décrits par des polynômes latticiels pondérés. En termes de variables d'état, nous verrons qu'une “version pondérée” des fonctions de structure est alors requise. Nous en déduisons alors des formules exactes généralisées pour le calcul de la

fiabilité et de la durée de vie moyenne de ces systèmes ainsi dotés de bornes supérieures et inférieures.

Finalement, nous montrons comment nos résultats peuvent fournir des formules exactes pour exprimer la fonction de répartition et les moments des polynômes latticiels pondérés de variables aléatoires.

Références

1. G. Birkhoff. *Lattice theory*. Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
2. A. Dukhovny. Lattice polynomials of random variables. *Statistics & Probability Letters*, 77(10) :989–994, 2007.
3. A. Dukhovny and J.-L. Marichal. System reliability and weighted lattice polynomials. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 22(3) :373–388, 2008.
4. A. Dukhovny and J.-L. Marichal. Reliability analysis of semicoherent systems through their lattice polynomial descriptions. Submitted. (`http://arxiv.org/abs/0809.1332`).
5. R. L. Goodstein. The solution of equations in a lattice. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 67 :231–242, 1965/1967.
6. M. Grabisch, J.-L. Marichal, and M. Roubens. Equivalent representations of set functions. *Math. Oper. Res.*, 25(2) :157–178, 2000.
7. G. Grätzer. *General lattice theory*. Birkhäuser Verlag, Berlin, 2003. Second edition.
8. P. Hammer and S. Rudeanu. *Boolean methods in operations research and related areas*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1968.
9. J.-L. Marichal. Weighted lattice polynomials. *Discrete Mathematics*, to appear. (`http://arxiv.org/abs/0706.0570`).
10. J.-L. Marichal. On Sugeno integral as an aggregation function. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(3) :347–365, 2000.
11. J.-L. Marichal. Cumulative distribution functions and moments of lattice polynomials. *Statistics & Probability Letters*, 76(12) :1273–1279, 2006.
12. J.-L. Marichal. Weighted lattice polynomials of independent random variables. *Discrete Applied Mathematics*, 156(5) :685–694, 2008.
13. S. Ovchinnikov. Means on ordered sets. *Math. Social Sci.*, 32(1) :39–56, 1996.
14. G. Owen. Multilinear extensions of games. *Management Sci.*, 18 :P64–P79, 1972.
15. K. G. Ramamurthy. *Coherent structures and simple games*, volume 6 of *Theory and Decision Library. Series C : Game Theory, Mathematical Programming and Operations Research*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.
16. M. Rausand and A. Høyland. *System reliability theory*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, second edition, 2004.
17. S. Rudeanu. *Lattice functions and equations*. Springer Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer-Verlag London Ltd., London, 2001.