Quasi-extensions de Lovász et leur version symétrique

Miguel Couceiro and Jean-Luc Marichal

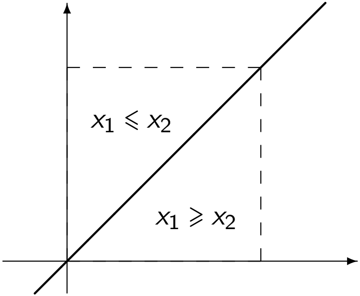
Université du Luxembourg

Triangulation standard de $[0, 1]^n$

Soit σ une permutation sur $[n] = \{1, \ldots, n\}$

$$[0,1]^n_\sigma \;=\; \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \;:\; x_{\sigma(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{\sigma(n)}\right\}$$

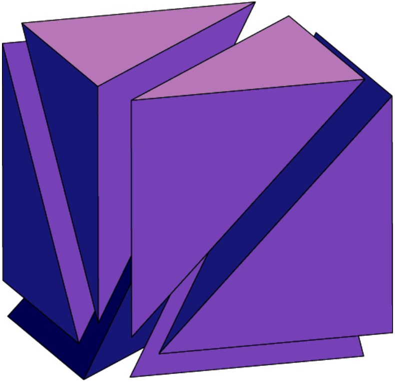
Exemple : $n = 2$



$2! = 2$ *permutations* (2 *triangles*)

Triangulation standard de $[0, 1]^n$

Exemple : $n = 3$



$3! = 6$ *permutations* (6 *simplexes*)

Extension de Lovász

Note : Chaque simplexe $[0,1]^n_\sigma$ a exactement $n+1$ sommets

Considerons une fonction $\phi\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(\mathbf{0}) = 0$

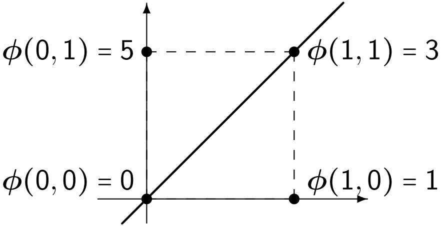
Définition (Lovász, 1983)

L'*extension de Lovász* d'une fonction $\phi\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction $f_\phi\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ dont la restriction à chaque simplexe $[0,1]^n_\sigma$ est l'unique fonction linéaire qui coïncide avec ϕ aux $n+1$ sommets de ce simplexe.

Par définition, $f_\phi|_{\{0,1\}^n} = \phi$

Extension de Lovász

Exemple :



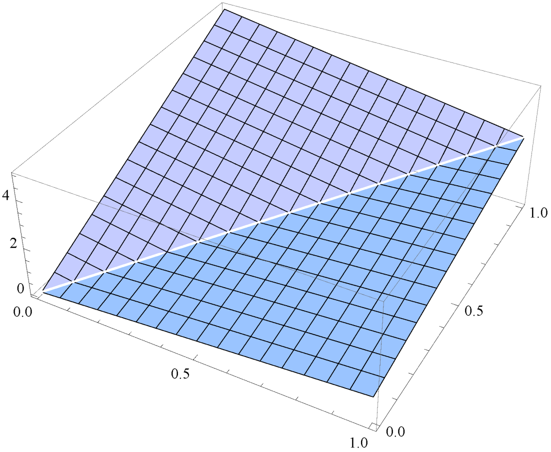
$$x_1 \geqslant x_2 \quad \Rightarrow \quad f_\phi(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Rightarrow \quad f_\phi(x_1, x_2) = -2x_1 + 5x_2$$

Sur $[0,1]^2$:

$$\boxed{f_\phi(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 - 3\min(x_1, x_2)}$$

$\Rightarrow$ *f_ϕ est linéaire par morceaux et continu*

Extension de Lovász



$$f_\phi(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 - 3\min(x_1, x_2)$$

Extension de Lovász

En général :

f_ϕ peut toujours être écrit sous la forme

$$\boxed{f_\phi(\mathbf{x}) = \sum_{S \subseteq [n]} a_\phi(S) \min_{i \in S} x_i}$$

où les coefficients $a_\phi(S)$ sont des nombres réels

$\Rightarrow$ *f_ϕ est toujours linéaire par morceaux et continu*

L'intégrale de Choquet

Nous disons qu'une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ est une *extension de Lovász* s'il existe une fonction $\phi\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f = f_\phi$.

Définition

Une *intégrale de Choquet* de n variables est une extension de Lovász non décroissante (sur chaque variable) qui s'annule à l'origine

Additivité comonotone

Deux n-uples $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in [0,1]^n$ sont dits *comonotone* s'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in [0,1]^n_\sigma$

Additivité comonotone (Dellacherie, 1971)

Une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ est dite *comonotonement additive* si, pour tous n-uples comonotones $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in [0,1]^n$, on a

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$$

Proposition. (Schmeidler, 1986)
Toute intégrale de Choquet de n variables est comonotonement additive

Additivité comonotone

Extensions de Lovász (Couceiro et M., 2011)

Une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ *est une* **extension de Lovász** *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(*i*) *f est comonotonement additif*

(*ii*) $f(x\,\mathbf{e}) = x\,f(\mathbf{e})$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *et tout* $\mathbf{e} \in \{0,1\}^n$

Axiomatisation de l'intégrale de Choquet :
→ ajouter simplement la monotonie (Schmeidler)

Quasi-extension de Lovász

Définition

Une *quasi-extension de Lovász* est une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\mathbf{x}) \;=\; f_\phi\big(\psi(x_1),\ldots,\psi(x_n)\big)$$

où $f_\phi\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ est une extension de Lovász et $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ est une fonction non décroissante vérifiant $\psi(0) = 0$

Modularité

Définition

Une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ est dite *modulaire* si

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') \;=\; f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + f(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}')$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in [0,1]^n$

Modularité

Fonctions modulaires (Topkis, 1978)

Une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ *est modulaire si et seulement s'il existe* n *fonctions* $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *telles que*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

Modularité comonotone

Définition (Mesiar et Mesiarová, 2011)

Une fonction $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ est dite *comonotonement modulaire* si

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') \;=\; f(\mathbf{x}\wedge\mathbf{x}') + f(\mathbf{x}\vee\mathbf{x}')$$

pour tous *n*-uples comonotone $\mathbf{x},\mathbf{x}' \in [0,1]^n$

Quasi-extension de Lovász

Quasi-extensions de Lovász

Une fonction $f\colon[0,1]^n \to \mathbb{R}$ *est une quasi-extension de Lovász si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(*i*) f *est comonotonement modulaire*

(*ii*) *il existe une fonction non décroissante* $\psi\colon[0,1] \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $\psi(0) = 0$ *telle que*

$$f(x\,\mathbf{e}) = \psi(x)\,f(\mathbf{e})$$

pour tout $x \in [0,1]$ *et tout* $\mathbf{e} \in \{0,1\}^n$

Extension de Lovász symétrique

Pour tout $\mathbf{x} \in [-1,1]^n$, posons

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} \vee \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{x}^- = (-\mathbf{x})^+$$

Definition

L'*extension de Lovász symétrique* d'une fonction $\phi\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction $\check{f}_\phi\colon [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ définie par

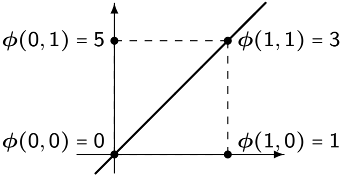
$$\check{f}_\phi(\mathbf{x}) = f_\phi(\mathbf{x}^+) - f_\phi(\mathbf{x}^-)$$

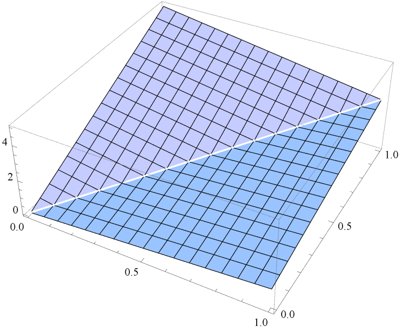
Conséquences :

- $\check{f}_\phi$ est linéaire par morceaux et continu
- $\check{f}_\phi(-\mathbf{x}) = -\check{f}_\phi(\mathbf{x})$

Extension de Lovász symétrique

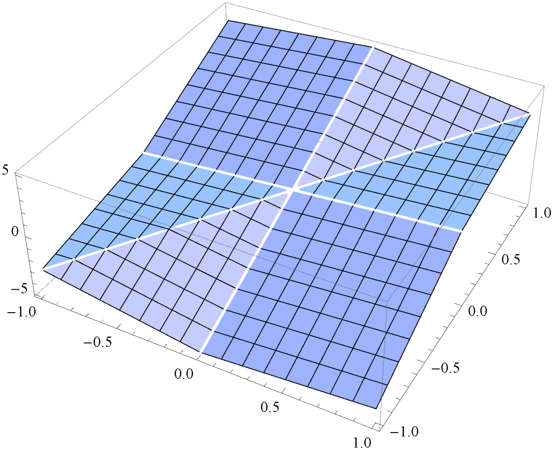
Exemple :





$$f_\phi(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 - 3\min(x_1, x_2)$$

Extension de Lovász symétrique



$$\check{f}_\phi(\mathbf{x}) = f_\phi(\mathbf{x}^+) - f_\phi(\mathbf{x}^-)$$

Extension de Lovász symétrique

Nous disons qu'une fonction $f\colon [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ est une *extension de Lovász symétrique* s'il existe une fonction $\phi\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f = \check{f}_\phi$.

Définition (Šipoš, 1979)

Une *intégrale de Choquet symétrique* de n variables est une extension de Lovász symétrique non décroissante (sur chaque variable) qui s'annule à l'origine

Quasi-extension de Lovász symétrique

Définition

Une *quasi-extension de Lovász symétrique* est une fonction $f\colon [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\mathbf{x}) \;=\; \check{f}_\phi\big(\psi(x_1),\ldots,\psi(x_n)\big)$$

où $\check{f}_\phi\colon [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ est une extension de Lovász symétrique et $\psi\colon [-1,1] \to [-1,1]$ est une fonction non décroissante et <u>impaire</u>

Quasi-extension de Lovász symétrique

Quasi-extensions de Lovász symétriques

Une fonction $f\colon [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ est une quasi-extension de Lovász symétrique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) *f est comonotonement modulaire*

(ii) *il existe une fonction non décroissante et impaire $\psi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x\,\mathbf{e}) = \psi(x)\, f(\mathbf{e})$$

pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\mathbf{e} \in \{0,1\}^n$

Remarque finale

Nos résultats s'étendent aux fonctions $f\colon I^n \to \mathbb{R}$,
où I est un intervalle réel contenant $[0,1]$
($[-1,1]$ pour les versions symétriques)

De plus, la condition $f(\mathbf{0}) = 0$ peut être ignorée