Quasi-extensions de Lovász et leur version symétrique

M. Couceiro J.-L. Marichal
Université du Luxembourg, Unité de Recherche en Mathématiques

6, rue Richard Coudenhove-Kalergi, L-1359 Luxembourg, Luxembourg
{miguel.couceiro, jean-luc.marichal}@uni.lu

Résumé :
Nous présentons une étude de la classe des quasi-extensions de Lovász (c'est-à-dire des fonctions obtenues en composant une extension de Lovász avec une function non décroissante qui s'annule à l'origine) et de celle de leur version symétrique. Ces fonctions apparaissent naturellement dans le cadre de l'aide à la décision dans l'incertain car elles contiennent les fonctionnelles de préférence globales associées respectivement à des intégrales de Choquet discrètes et à des intégrales de Choquet discrètes symétriques dont les variables sont transformées par une fonction d'utilité donnée.

Mots-clés :
Fonction d'agrégation, intégrale de Choquet discrète, extension de Lovász, modularité comonotone, invariance par différences horizontales.

Abstract:
We present a study of the class of quasi-Lovász extensions (i.e. functions which are a composition of a Lovász extension with a nondecreasing function vanishing at the origin) as well as that of their symmetric variants. These functions appear naturally within the scope of decision making under uncertainty since they subsume overall preference functionals associated with discrete Choquet integrals and symmetric discrete Choquet integrals, respectively, whose variables are transformed by a given utility function.

Keywords:
Aggregation function, discrete Choquet integral, Lovász extension, comonotonic modularity, invariance under horizontal differences.

1 Introduction

Les fonctions d'agrégation apparaissent chaque fois qu'une fusion d'informations est nécessaire : en mathématiques pures et appliquées (théorie des probabilités, statistique, théorie de la décision, équations fonctionnelles), en recherche opérationnelle, en informatique, ainsi que dans beaucoup d'autres domaines appliqués (économie et finance, reconnaissance de formes, traitement d'images, fusion de données, etc.). Pour des références récentes, voir Beliakov et col. [1] et Grabisch et col. [7].

L'intégrale de Choquet discrète a été largement étudiée en théorie de l'agrégation en raison de ses nombreuses applications, par exemple, en aide à la décision (voir le livre édité [8]). Une manière commode d'introduire l'intégrale de Choquet discrète consiste à considérer le concept d'extension de Lovász. Une extension de Lovász à n variables est une fonction continue $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont la restriction à chacun des $n!$ sous-domaines

$$\mathbb{R}^n_\sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \\ x_{\sigma(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{\sigma(n)}\}, \quad \sigma \in S_n,$$

est une fonction affine, où S_n représente l'ensemble des permutations sur $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Une intégrale de Choquet à n variables est simplement une extension de Lovász non décroissante (sur chaque variable) qui s'annule à l'origine. Pour un cadre général, voir [7, §5.4].

La classe des extensions de Lovász à n variables a été axiomatisée par les auteurs [4] au moyen de deux propriétés remarquables de l'agrégation, à savoir l'additivité comonotone et la min-additivité horizontale (pour des axiomatizations antérieures des intégrales de Choquet à n variables, voir par exemple [2, 6]). Rappelons qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *comonotonement additive* si, pour tout $\sigma \in S_n$ et tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n_\sigma$, nous avons

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}').$$

La fonction f est dite *horizontalement min-additive* si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $c \in \mathbb{R}$, nous avons

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} \wedge c) + f(\mathbf{x} - (\mathbf{x} \wedge c)),$$

où $\mathbf{x}\wedge c$ représente le n-uple dont la i-ième composante est $x_i \wedge c = \min(x_i, c)$.

Dans cet article, nous considérons une généralisation des extensions de Lovász que nous appelons quasi-extensions de Lovász et qui est décrite par l'équation

$$f(x_1, \ldots, x_n) = L(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)),$$

où L est une extension de Lovász et φ est une fonction non décroissante telle que $\varphi(0) = 0$. Une telle fonction d'agrégation est utilisée en aide à la décision dans l'incertain, où φ est une fonction d'utilité et f est une fonctionnelle de préférence globale. Elle est aussi utilisée en aide multicritère à la décision où les critères sont commensurables (i.e., exprimés sur une même échelle). Pour une référence récente sur ce sujet, voir Bouyssou et col. [3].

Pour axiomatiser la classe des quasi-extensions de Lovász, nous proposons les généralisations suivantes de l'additivité comonotone et de la min-additivité horizontale, à savoir la modularité comonotone et l'invariance par rapport aux min-différences horizontales (ainsi que sa version duale), que nous allons maintenant brièvement décrire. Nous disons qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is *comonotonement modulaire* si, pour tout $\sigma \in S_n$ et tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n_\sigma$, nous avons

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + f(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}'),$$

où $\mathbf{x}\wedge\mathbf{x}'$ (resp. $\mathbf{x}\vee\mathbf{x}'$) représente le n-uple dont la i-ième composante est $x_i \wedge x'_i = \min(x_i, x'_i)$ (resp. $x_i \vee x'_i = \max(x_i, x'_i)$). Nous disons que f est *invariant par rapport aux min-différences horizontales* si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $c \in \mathbb{R}$, nous avons

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} \wedge c) = f([\mathbf{x}]_c) - f([\mathbf{x}]_c \wedge c),$$

où $[\mathbf{x}]_c$ représente le n-uple dont la i-ième composante est 0, si $x_i \leqslant c$, et x_i, sinon.

La structure de l'article est la suivante. À la section 2, nous rappelons les définitions des extensions de Lovász, des intégrales de Choquet discrètes et de leur version symétrique. Nous présentons aussi des représentations de ces fonctions. À la section 3, nous définissons le concept de quasi-extension de Lovász et celui de sa version symétrique, nous introduisons des relaxations naturelles de l'homogénéité, à savoir l'homogénéité faible et l'homogénéité impaire, et nous présentons des caractérisations des quasi-extensions de Lovász (resp. des quasi-extensions de Lovász symétriques) qui sont faiblement homogènes (resp. impairement homogènes). À la section 4, nous définissons les concepts de modularité comonotone, d'invariances par rapport aux min-différences horizontales et aux max-différences horizontales, et nous présentons une description complète des classes de fonctions axiomatisées par chacune de ces propriétés. À la section 5, nous donnons des axiomatisations des classes des quasi-extensions de Lovász au moyen des propriétés ci-dessus et donnons toutes les factorisations possibles des quasi-extensions de Lovász en des compositions d'extensions de Lovász avec des fonctions à une variable. Finalement, à la section 6, nous présentons des résultats analogues pour les quasi-extensions de Lovász symétriques.

Nous utilisons les notations suivantes. Soient $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$. Le symbole I représente un intervalle réel non vide, éventuellement non borné, contenant 0. Nous introduisons aussi les notations $I_+ = I \cap \mathbb{R}_+$, $I_- = I \cap \mathbb{R}_-$ et $I^n_\sigma = I^n \cap \mathbb{R}^n_\sigma$. Une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où I est centré en 0, est dite *impaire* si $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$. Pour toute fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, nous définissons $f_0 = f - f(\mathbf{0})$. Pour tout $A \subseteq [n]$, le symbole $\mathbf{1}_A$ représente le n-uple dont la i-ième composante est 1, si $i \in A$, et 0, sinon. Soient aussi $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{[n]}$ et $\mathbf{0} = \mathbf{1}_\varnothing$. Les symboles $\wedge$ et $\vee$ représentent respectivement les fonctions minimum and maximum. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, soient $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} \vee 0$ et $\mathbf{x}^- = (-\mathbf{x})^+$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $c \in \mathbb{R}_+$ (resp. $c \in \mathbb{R}_-$) nous notons $[\mathbf{x}]_c$ (resp. $[\mathbf{x}]^c$) le n-uple dont la i-ième composante est 0, si $x_i \leqslant c$ (resp. $x_i \geqslant c$), et x_i, sinon.

Pour ne pas restreindre notre cadre aux seules fonctions définies sur $\mathbb{R}$, nous considérons des fonctions définies sur des intervalles I contenant 0, en particulier des intervalles de la forme I_+, I_-, et ceux centrés en 0.

Une version complète de cet article a été publiée dans [5].

2 Extensions de Lovász et extensions de Lovász symétriques

Rappelons les concepts d'extension de Lovász et d'extension de Lovász symétrique.

Considérons une *fonction pseudo-booléenne* de n variables, c'est-à-dire une fonction $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$, et définissons la fonction d'ensemble $v_\psi\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ par $v_\psi(A) = \psi(\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \subseteq [n]$. Hammer et Rudeanu [9] ont montré qu'une telle fonction possède une représentation unique en tant que polynôme multilinéaire de n variables

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{A\subseteq[n]} a_\psi(A) \prod_{i\in A} x_i\,,$$

où la fonction d'ensemble $a_\psi\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$, appelée la *transformée de Möbius* de v_ψ, est définie par

$$a_\psi(A) = \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|A|-|B|}\, v_\psi(B).$$

L'*extension de Lovász* d'une fonction pseudo-booléenne $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction $L_\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont la restriction à chaque sous-domaine $\mathbb{R}^n_\sigma$ ($\sigma \in S_n$) est l'unique fonction affine qui prend les mêmes valeurs que ψ aux $n+1$ sommets du n-simplexe $[0,1]^n \cap \mathbb{R}^n_\sigma$ (voir [10, 12]). Nous avons donc $L_\psi|_{\mathbb{B}^n} = \psi$.

On peut montrer (voir [7, §5.4.2]) que l'extension de Lovász d'une fonction pseudo-booléenne $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction continue

$$L_\psi(\mathbf{x}) = \sum_{A\subseteq[n]} a_\psi(A) \bigwedge_{i\in A} x_i\,, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Sa restriction à $\mathbb{R}^n_\sigma$ est la fonction affine

$$L_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + \sum_{i\in[n]} x_{\sigma(i)} \big(v_\psi(A^\uparrow_\sigma(i)) - v_\psi(A^\uparrow_\sigma(i+1))\big), \quad (1)$$

ou, de façon équivalente,

$$L_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + \sum_{i\in[n]} x_{\sigma(i)} \big(L_\psi(\mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(i)}) - L_\psi(\mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(i+1)})\big), \quad (2)$$

où $A^\uparrow_\sigma(i) = \{\sigma(i),\ldots,\sigma(n)\}$, avec la convention que $A^\uparrow_\sigma(n+1) = \varnothing$. En effet, pour tout $k \in [n+1]$, les deux membres de chacune des équations (1) et (2) prennent les mêmes valeurs aux points $\mathbf{x} = \mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(k)}$. Notons que L_ψ peut aussi être représenté par

$$L_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + \sum_{i\in[n]} x_{\sigma(i)} \big(L_\psi(-\mathbf{1}_{A^\downarrow_\sigma(i-1)}) - L_\psi(-\mathbf{1}_{A^\downarrow_\sigma(i)})\big),$$

où $A^\downarrow_\sigma(i) = \{\sigma(1),\ldots,\sigma(i)\}$, avec la convention que $A^\downarrow_\sigma(0) = \varnothing$. De fait, pour tout $k \in [n+1]$, par (2) nous avons $L_\psi(-\mathbf{1}_{A^\downarrow_\sigma(k-1)}) = \psi(\mathbf{0}) + L_\psi(\mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(k)}) - L_\psi(\mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(1)})$.

Soit ψ^d le *dual* de ψ, c'est-à-dire la fonction $\psi^d\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi^d(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + \psi(\mathbf{1}) - \psi(\mathbf{1}-\mathbf{x}).$$

Le résultat suivant fournit des représentations alternatives de L_ψ.

Proposition 1. *L'extension de Lovász d'une fonction pseudo-booléenne $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ est donnée par*

$$L_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + \sum_{A\subseteq[n]} a_{\psi^d}(A) \bigvee_{i\in A} x_i\,,$$

et

$$L_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + L_\psi(\mathbf{x}^+) - L_{\psi^d}(\mathbf{x}^-).$$

Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une *extension de Lovász* s'il existe une fonction pseudo-Booléenne $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f = L_\psi$.

Une *intégrale de Choquet* à n variables est une extension de Lovász non décroissante $L_\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $L_\psi(\mathbf{0}) = 0$. Il est aisé de voir qu'une extension de Lovász $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une intégrale de Choquet à n variables si et seulement si la fonction pseudo-booléenne sous-jacente $\psi = L|_{\mathbb{B}^n}$ est non décroissante et s'annule à l'origine (voir [7, §5.4]).

L'*extension de Lovász symétrique* d'une fonction pseudo-booléenne $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction $\check{L}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par (voir [4])

$$\check{L}_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + L_\psi(\mathbf{x}^+) - L_\psi(\mathbf{x}^-)\,.$$

En particulier, nous voyons que $\check{L}_\psi - \check{L}_\psi(\mathbf{0}) = \check{L}_\psi - \psi(\mathbf{0})$ est une fonction impaire.

Il est aisé de voir que la restriction de $\check{L}_\psi$ à $\mathbb{R}^n_\sigma$ est la fonction

$$\begin{aligned}
&\check{L}_\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0})\\
&+ \sum_{1\leqslant i\leqslant p} x_{\sigma(i)}\,\big(L_\psi(\mathbf{1}_{A^\downarrow_\sigma(i)}) - L_\psi(\mathbf{1}_{A^\downarrow_\sigma(i-1)})\big)\\
&+ \sum_{p<i\leqslant n} x_{\sigma(i)}\,\big(L_\psi(\mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(i)}) - L_\psi(\mathbf{1}_{A^\uparrow_\sigma(i+1)})\big),
\end{aligned}$$

où l'entier $p \in \{0,\ldots,n\}$ est tel que $x_{\sigma(p)} < 0 \leqslant x_{\sigma(p+1)}$.

Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une *extension de Lovász symétrique* s'il existe une fonction pseudo-Booléenne $\psi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f = \check{L}_\psi$. Les extensions de Lovász symétriques qui s'annulent à l'origine, aussi appelées *intégrales de Choquet discrètes symétriques*, ont été introduites par Šipoš [13] (voir aussi [7, §5.4]).

3 Quasi-extensions de Lovász et leur version symétrique

Dans cette section, nous introduisons les concepts de quasi-extension de Lovász et de quasi-extension de Lovász symétrique. Nous introduisons également des relaxations naturelles de l'homogénéité, à savoir l'homogénéité faible et l'homogénéité impaire, et nous présentons une caractérisation des quasi-extensions de Lovász (resp. quasi-extensions de Lovász symétriques) qui sont faiblement homogènes (resp. impairement homogènes). Rappelons que I est un intervalle réel contenant 0.

Une *quasi-extension de Lovász* est une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f = L \circ (\varphi,\ldots,\varphi),$$

que l'on écrit aussi $f = L \circ \varphi$, où $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une extension de Lovász et $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction non décroissante vérifiant $\varphi(0) = 0$. Nous observons qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ est une quasi-extension de Lovász si et seulement si $f_0 = L_0 \circ \varphi$, où $f_0 = f - f(\mathbf{0})$ et $L_0 = L - L(\mathbf{0})$.

Lemme 2. *Supposons que $I \subseteq \mathbb{R}_+$. Pour toute quasi-extension de Lovász $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, $f = L \circ \varphi$, nous avons*

$$f_0(x\mathbf{1}_A) = \varphi(x)L_0(\mathbf{1}_A), \tag{3}$$

pour tous $x \in I$ et $A \subseteq [n]$.

Nous observons que si $[0,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_+$ et $\varphi(1) = 1$, alors l'équation (3) devient

$$f_0(x\mathbf{1}_A) = \varphi(x)f_0(\mathbf{1}_A).$$

Ceci motive la définition suivante. Nous disons qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où $I \subseteq \mathbb{R}_+$, est *faiblement homogène* s'il existe une fonction non décroissante $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(0) = 0$ telle que

$$f(x\mathbf{1}_A) = \varphi(x)f(\mathbf{1}_A),$$

pour tout $x \in I$ et tout $A \subseteq [n]$.

Il est clair que toute fonction faiblement homogène f vérifie $f(\mathbf{0}) = 0$ (prendre $x = 0$ dans la définition).

Proposition 3. *Supposons $[0,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_+$. Soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une quasi-extension de Lovász non constante, $f = L \circ \varphi$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f_0 est faiblement homogène.*

(ii) *Il existe $A \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_A) \neq 0$.*

(iii) $\varphi(1) \neq 0$.

Dans ce cas, nous avons $f_0(x\mathbf{1}_A) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(1)}\, f_0(\mathbf{1}_A)$ *pour tout* $x \in I$ *et tout* $A \subseteq [n]$.

Remarque 1. (a) Si $[0,1] \subsetneq I \subseteq \mathbb{R}_+$, alors la quasi-extension de Lovász $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(\mathbf{x}) = \bigwedge_{i\in[n]} \varphi(x_i)$, où $\varphi(x) = 0 \vee (x-1)$, n'est pas faiblement homogène.

(b) Lorsque $I = [0,1]$, l'hypothèse que f est non constant implique immédiatement que $\varphi(1) \neq 0$. Nous voyons alors par la Proposition 3 que f_0 est faiblement homogène. Notons aussi que, si f est constant, alors $f_0 \equiv 0$ est clairement faiblement homogène. Ainsi, pour toute quasi-extension de Lovász $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$, la fonction f_0 est faiblement homogène.

Supposons à présent que $-x \in I$ chaque fois que $x \in I$, c'est-à-dire que I est centré en 0. Une *quasi-extension de Lovász symétrique* est une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ définie par $f = \check{L} \circ \varphi$, où $\check{L}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une extension de Lovász symétrique et $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire non décroissante.

Nous disons qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où I est centré en 0, est *impairement homogène* s'il existe une fonction impaire non décroissante $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x\mathbf{1}_A) = \varphi(x) f(\mathbf{1}_A)$ pour tout $x \in I$ et tout $A \subseteq [n]$.

Il est clair que, pour toute fonction impairement homogène f, les fonctions $f|_{I_+^n}$ et $f|_{I_-^n}$ sont faiblement homogènes.

Proposition 4. *Supposons que* I *soit centré en* 0 *et que* $[-1,1] \subseteq I$. *Soit* $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ *une quasi-extension de Lovász symétrique,* $f = \check{L} \circ \varphi$, *telle que* $f|_{I_+^n}$ *ou* $f|_{I_-^n}$ *est non constant. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f_0 *est impairement homogène.*

(ii) *Il existe* $A \subseteq [n]$ *tel que* $f_0(\mathbf{1}_A) \neq 0$.

(iii) $\varphi(1) \neq 0$.

Dans ce cas, nous avons $f_0(x\mathbf{1}_A) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(1)}\, f_0(\mathbf{1}_A)$ *pour tout* $x \in I$ *et tout* $A \subseteq [n]$.

Remarque 2. Tout comme dans la Remarque 1(b), nous voyons que, pour toute quasi-extension de Lovász symétrique $f\colon [-1,1]^n \to \mathbb{R}$, la fonction f_0 est impairement homogène.

4 Modularité comonotone

Rappelons qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ est dite *modulaire* (ou une *valuation*) si

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + f(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') \quad (4)$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in I^n$. Il a été démontré (voir Topkis [14, Thm 3.3]) qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ est modulaire si et seulement si elle est *séparable*, c'est-à-dire qu'il existe n fonctions $f_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i \in [n]$, telles que $f = \sum_{i\in[n]} f_i$. En particulier, toute fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ d'une seule variable est modulaire.

Deux n-uples $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in I^n$ sont dits *comonotone* s'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in I^n_\sigma$. Une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ est dite *comonotonement modulaire* (ou une *valuation comonotone*) si (4) est vrai pour tous n-uples comonotones $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in I^n$. Cette notion a été considérée dans [11] dans le cas spécial où $I = [0,1]$. Nous remarquons que, pour toute fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, la condition (4) est valide pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in I^n$ de la forme $\mathbf{x} = x\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{x}' = x'\mathbf{1}_A$, où $x, x' \in I$ et $A \subseteq [n]$.

Nous remarquons aussi que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ et tout $c \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \wedge c = [\mathbf{x}]_c - [\mathbf{x}]_c \wedge c.$$

Ceci motive la définition suivante. Nous disons qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où $I \subseteq \mathbb{R}_+$, est *invariante par rapport aux min-différences horizontales* si, pour tout $\mathbf{x} \in I^n$ et tout $c \in I$, nous avons

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} \wedge c) = f([\mathbf{x}]_c) - f([\mathbf{x}]_c \wedge c). \quad (5)$$

Dualement, nous disons qu'une fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où $I \subseteq \mathbb{R}_-$, est *invariante par rapport aux max-différences horizontales* si, pour tout $\mathbf{x} \in I^n$ et tout $c \in I$, nous avons

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} \vee c) = f([\mathbf{x}]^c) - f([\mathbf{x}]^c \vee c). \quad (6)$$

Nous observons que, pour toute fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où $I \subseteq \mathbb{R}_+$, la condition (5) est valide pour tous les $\mathbf{x} \in I^n$ de la forme $\mathbf{x} = x\mathbf{1}_A$, où $x \in I$ et $A \subseteq [n]$. Dualement, pour toute fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, où $I \subseteq \mathbb{R}_-$, la condition (6) est valide pour tout $\mathbf{x} \in I^n$ de la forme $\mathbf{x} = x\mathbf{1}_A$, où $x \in I$ et $A \subseteq [n]$.

Nous observons aussi qu'une fonction f est comonotonement modulaire (resp. invariante par rapport aux min-différences horizontales, invariante par rapport aux max-différences horizontales) si et seulement si la fonction f_0 l'est aussi.

Théorème 5. *Supposons que $I \subseteq \mathbb{R}_+$ et soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est comonotonement modulaire.*

(ii) *f est invariant par rapport aux min-différences horizontales.*

(iii) *Il existe une fonction $g\colon I^n \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\sigma \in S_n$ et tout $\mathbf{x} \in I^n_\sigma$, nous avons*

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{0}) + \sum_{i\in[n]} \big(g(x_{\sigma(i)}\mathbf{1}_{A^{\uparrow}_{\sigma}(i)}) - g(x_{\sigma(i)}\mathbf{1}_{A^{\uparrow}_{\sigma}(i+1)})\big).$$

Dans ce cas, nous pouvons choisir $g = f$.

Remarque 3. L'équivalence entre (i) and (iii) dans le Théorème 5 généralise le Théorème 1 de l'article [11] qui décrit la classe des fonctions comonotonement modulaires $f\colon [0,1]^n \to [0,1]$ sous les conditions additionnelles de symétrie et d'idempotence.

Nous remarquons que, si $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ est comonotonement modulaire alors nécessairement

$$f_0(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}^+) + f_0(-\mathbf{x}^-)$$

(prendre simplement $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ dans (4)).

Nous pouvons maintenant présenter une caractérisation de la classe des fonctions comonotonement modulaires sur un intervalle arbitraire I contenant 0.

Théorème 6. *Pour toute fonction $f\colon I^n \to \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est comonotonement modulaire.*

(ii) *Il existe $g\colon I^n_+ \to \mathbb{R}$ comonotonement modulaire (ou invariant par rapport aux min-différences horizontales) et $h\colon I^n_- \to \mathbb{R}$ comonotonement modulaire (ou invariant par rapport aux max-différences horizontales) tels que $f_0(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}^+) + h_0(-\mathbf{x}^-)$ pour tout $\mathbf{x} \in I^n$. Dans ce cas, nous pouvons choisir $g = f|_{I^n_+}$ et $h = f|_{I^n_-}$.*

(iii) *Il existe $g\colon I^n_+ \to \mathbb{R}$ et $h\colon I^n_- \to \mathbb{R}$ tels que, pour tous $\sigma \in S_n$ et $\mathbf{x} \in I^n_\sigma$,*

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) = &\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \big(h(x_{\sigma(i)}\mathbf{1}_{A^{\downarrow}_{\sigma}(i)}) - h(x_{\sigma(i)}\mathbf{1}_{A^{\downarrow}_{\sigma}(i-1)})\big)\\ &+ \sum_{p<i\leqslant n} \big(g(x_{\sigma(i)}\mathbf{1}_{A^{\uparrow}_{\sigma}(i)}) - g(x_{\sigma(i)}\mathbf{1}_{A^{\uparrow}_{\sigma}(i+1)})\big),\end{aligned}$$

où $p \in \{0,\ldots,n\}$ est tel que $x_{\sigma(p)} < 0 \leqslant x_{\sigma(p+1)}$. Dans ce cas, nous pouvons choisir $g = f|_{I^n_+}$ et $h = f|_{I^n_-}$.

Remarque 4. En utilisant la condition (iii) des Théorèmes 5 et 6, nous pouvons aisément déduire de nouvelles caractérisations des intégrales de Choquet et des intégrales de Choquet symétriques en termes de modularité comonotone. De fait, nous devons simplement supposer que $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ est non décroissant, que

$$f(x\mathbf{1}_A) = xf(\mathbf{1}_A),$$

pour tout $x \in I$ et tout $A \subseteq [n]$, et que $[0,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_+$ (dans le Théorème 5) ou que I est centré en 0 avec $[-1,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ (dans le Théorème 6).

Du Théorème 6 nous obtenons l'analogue "comonotone" de la caractérisation de Topkis [14] des fonctions modulaires en tant que fonctions séparables, ce qui fournit une description alternative des fonctions comonotonement modulaires.

Corollaire 7. *Soit J un intervalle réel non vide, éventuellement non borné. Une fonction*

$f\colon J^n \to \mathbb{R}$ est comonotonement modulaire si et seulement si elle est comonotonement séparable ; c'est-à-dire, pour tout $\sigma \in S_n$, il existe des fonctions $f_i^\sigma\colon J \to \mathbb{R}$, $i \in [n]$, telles que pour tout $\mathbf{x} \in J^n \cap \mathbb{R}^n_\sigma$,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{n} f^\sigma_{\sigma^{-1}(i)}(x_i).$$

5 Axiomatisation et représentation des quasi-extensions de Lovász et de leur version symétrique

Nous présentons maintenant une axiomatisation de la classe des quasi-extensions de Lovász et décrivons toutes les factorisations possibles de ces fonctions en une composition d'extension de Lovász avec une fonction non décroissante à une variable.

Théorème 8. *Supposons que $[0,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_+$ et soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une fonction non constante. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *f est une quasi-extension de Lovász et il existe $A \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_A) \neq 0$.*
- (ii) *f est comonotonement modulaire (ou invariant par rapport aux min-différences horizontales) et f_0 est faiblement homogène.*
- (iii) *Il existe une fonction non décroissante $\varphi_f\colon I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi_f(0) = 0$ et $\varphi_f(1) = 1$ telle que $f = L_{f|_{\mathbb{B}^n}} \circ \varphi_f$.*

Soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une quasi-extension de Lovász, où $[0,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_+$, pour laquelle il existe $A^* \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_{A^*}) \neq 0$. Alors la fonction interne φ_f introduite au Théorème 8 est unique. De fait, par la Proposition 3, nous avons

$$f_0(x\mathbf{1}_A) = \varphi_f(x) f_0(\mathbf{1}_A)$$

pour tout $x \in I$ et tout $A \subseteq [n]$. La fonction φ_f est alors définie par

$$\varphi_f(x) = \frac{f_0(x\mathbf{1}_{A^*})}{f_0(\mathbf{1}_{A^*})},$$

pour tout $x \in I$.

Théorème 9. *Supposons que $[0,1] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}_+$ et soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une quasi-extension de Lovász, $f = L \circ \varphi$. Alors, il existe $A^* \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_{A^*}) \neq 0$ si et seulement s'il existe $a > 0$ tel que $\varphi = a\,\varphi_f$ et $L_0 = \frac{1}{a}(L_{f|_{\mathbb{B}^n}})_0$.*

Nous présentons maintenant une axiomatisation de la classe des quasi-extensions de Lovász symétriques et décrivons toutes les factorisations possibles de ces fonctions en une composition d'extension de Lovász symétrique avec une fonction impaire non décroissante à une variable.

Théorème 10. *Supposons que I soit centré en 0 avec $[-1,1] \subseteq I$ et soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f|_{I^n_+}$ ou $f|_{I^n_-}$ est non constant. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *f est une quasi-extension de Lovász symétrique et il existe $A \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_A) \neq 0$.*
- (ii) *f est comonotonement modulaire et f_0 est impairement homogène.*
- (iii) *Il existe une fonction impaire non décroissante $\varphi_f\colon I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi_f(1) = 1$ telle que $f = \check{L}_{f|_{\mathbb{B}^n}} \circ \varphi_f$.*

Supposons à nouveau que I soit centré en 0 avec $[-1,1] \subseteq I$ et soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une quasi-extension de Lovász symétrique pour laquelle il existe $A^* \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_{A^*}) \neq 0$. Alors la fonction interne φ_f introduite au Théorème 10 est unique. De fait, par la Proposition 4, nous avons

$$f_0(x\mathbf{1}_A) = \varphi_f(x) f_0(\mathbf{1}_A)$$

pour tout $x \in I$ et tout $A \subseteq [n]$. La fonction φ_f est alors définie par

$$\varphi_f(x) = \frac{f_0(x\mathbf{1}_{A^*})}{f_0(\mathbf{1}_{A^*})},$$

pour tout $x \in I$.

Théorème 11. *Supposons que I soit centré en 0 avec $[-1,1] \subseteq I$ et soit $f\colon I^n \to \mathbb{R}$ une quasi-extension de Lovász symétrique, $f = \check{L} \circ \varphi$.*

Alors, il existe $A^* \subseteq [n]$ tel que $f_0(\mathbf{1}_{A^*}) \neq 0$ si et seulement s'il existe $a > 0$ tel que $\varphi = a\,\varphi_f$ et $\check{L}_0 = \frac{1}{a}(\check{L}_{f|_{\mathbb{B}^n}})_0$.

Remarque 5. Si $I = [-1, 1]$, alors l'hypothèse "non constant" ainsi que la seconde condition de l'assertion (i) du Théorème 10 peuvent être ignorées.

Remerciements :
Cette recherche est financée par le projet interne de recherche F1R-MTH-PUL-12RDO2 de l'Université du Luxembourg.

Références

[1] G. Beliakov, A. Pradera, and T. Calvo. *Aggregation Functions : A Guide for Practitioners*. Studies in Fuziness and Soft Computing. Springer, Berlin, 2007.

[2] P. Benvenuti, R. Mesiar, and D. Vivona. Monotone set functions-based integrals. In *Handbook of measure theory, Vol. II*, pages 1329–1379. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[3] D. Bouyssou, D. Dubois, H. Prade, and M. Pirlot, editors. *Decision-Making Process - Concepts and Methods*. ISTE/John Wiley, London, 2009.

[4] M. Couceiro and J.-L. Marichal. Axiomatizations of Lovász extensions and symmetric Lovász extensions of pseudo-Boolean functions, *Fuzzy sets and Systems* 181(1) : 28-38, 2011.

[5] M. Couceiro and J.-L. Marichal. Axiomatizations of quasi-Lovász extensions of pseudo-Boolean functions, *Aequationes Mathematicae* **82** 213-231, 2011.

[6] L. M. de Campos and M. J. Bolaños. Characterization and comparison of Sugeno and Choquet integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 52(1) : 61-67, 1992.

[7] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 127. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

[8] M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno, editors. *Fuzzy measures and integrals - Theory and applications*, volume 40 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[9] P. Hammer and S. Rudeanu. *Boolean methods in operations research and related areas*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1968.

[10] L. Lovász. Submodular functions and convexity. In *Mathematical programming, 11th int. Symp., Bonn 1982, 235–257*. 1983.

[11] R. Mesiar and A. Mesiarová-Zemánková. The ordered modular averages. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 19(1) : 42-50, 2011.

[12] I. Singer. Extensions of functions of 0-1 variables and applications to combinatorial optimization. *Numer. Funct. Anal. Optimization*, 7 : 23-62, 1984.

[13] J. Šipoš. Integral with respect to a pre-measure. *Mathematica Slovaca*, 29(2) : 141-155, 1979.

[14] D. M. Topkis. Minimizing a submodular function on a lattice. *Operations Research*, 26(2) : 305-321, 1978.