

UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTE DES SCIENCES



**MODELE GLOBAL DES MAREES OCEANIQUES
OBTENU PAR INVERSION DE MESURES
MAREGRAPHIQUES, GRAVIMETRIQUES
ET ALTIMETRIQUES**

Dissertation présentée
en vue de l'obtention du grade
de Docteur en Sciences

par Olivier FRANCIS

Louvain-la-Neuve
Septembre 1993

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, nous exprimons notre respectueuse et sincère gratitude au Professeur Paul Melchior pour la grande confiance qu'il nous a toujours accordée et l'intérêt qu'il a sans cesse témoigné pour nos recherches. Il fut notre mentor et nous en sommes fier. Nous sommes aussi reconnaissant au Professeur Paul Pâquet qui nous a toujours apporté son soutien et à Monsieur Bernard Ducarme dont les avis éclairés sont irremplaçables.

Nous remercions Monsieur Jean-François Minster de nous avoir accueilli au sein de son laboratoire l'Unité Mixte 39 du C.N.R.S. à Toulouse. Nous lui sommes très reconnaissant pour l'aide qu'il nous a toujours donnée aux moments opportuns. Nous remercions également Monsieur Pierre Mazzega, notre premier contact à Toulouse, qui a longtemps guidé une collaboration fructueuse. Nous exprimons aussi notre profonde reconnaissance à Monsieur Patrick Vincent pour son dévouement et l'aide précieuse qu'il nous a apportée dans la phase terminale de notre thèse.

Durant les nombreuses années passées à Toulouse, beaucoup de nos collègues, dont certains sont devenus des amis, ont permis de mener à bien ce travail. Que tous en soient remerciés. Nous n'oubliions pas non plus ceux qui, lors de nos fréquents retours à l'Observatoire Royal de Belgique, nous ont toujours réservé un accueil chaleureux et manifesté leur amitié.

Toute notre reconnaissance va également à la famille Mathy pour la sympathie et l'amitié qu'elle nous témoigne presque quotidiennement depuis notre arrivée à Toulouse.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à la Commission des Communautés Européennes qui, par l'attribution d'une bourse, a permis notre séjour prolongé à Toulouse. Enfin, nous avons bénéficié dans une large mesure des moyens informatiques que le Centre National d'Etudes Spatiales a mis à notre disposition et qui ont permis de concrétiser notre projet de recherche. Nous l'en remercions.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....7

CHAPITRE I : LES PHENOMENES DE MAREES

I.1 - Le potentiel générateur des marées.....	11
I.1.1 - Le développement de Laplace.....	11
I.1.2 - Le développement de Doodson.....	13
I.2 - Les marées terrestres.....	15
I.2.1 - Terre élastique.....	15
I.2.2 - Terre élastique, elliptique et en rotation.....	17
I.2.3 - Terre inélastique.....	19
I.2.4 - Terre elliptique et inélastique.....	19
I.2.5 - Hétérogénéités latérales de la structure terrestre.....	19
I.3 - Les marées de surcharge océanique.....	19
I.3.1 - Les fonctions de Green.....	21
I.3.2 - Cartes globales d'effets de surcharge océanique.....	23
I.4 - Les marées océaniques.....	23
I.4.1 - Les équations hydrodynamiques de Laplace.....	25
I.4.2 - Solutions analytiques.....	27
I.4.3 - Solutions globales de marées océaniques.....	29
I.5 - Conclusions.....	33

CHAPITRE II : L'OBSERVATION DES MAREES

II.1 - La marégraphie et la gravimétrie.....	37
II.1.1 - Les marégraphes.....	37
II.1.1.1 - Echelles de marée.....	37
II.1.1.2 - Marégraphes à flotteurs.....	39
II.1.1.3 - Marégraphes à pression.....	39
II.1.2 - Les gravimètres.....	41
II.1.2.1 - Gravimètres LaCoste Romberg.....	41
II.1.2.2 - Gravimètres supraconducteurs.....	43
II.1.3 Méthodes d'analyse.....	43
II.1.3.1 - Analyse harmonique.....	43
II.1.3.1.1 - Généralités.....	43
II.1.3.1.2 - Méthode d'élimination.....	46
II.1.3.1.3 - Méthode des moindres carrés.....	46
II.1.3.2 - Analyse non-harmonique.....	47
II.1.3.2.1 - Méthode des concordances.....	47
II.1.3.2.2 - Méthode de réponse.....	47
II.1.4 Banques de données.....	49
II.1.4.1 - Marégraphie.....	49
II.1.4.2 - Gravimétrie.....	51
II.2 - L'altimétrie par satellite.....	55
II.2.1 - La mesure altimétrique.....	55
II.2.2 - Les erreurs et les corrections de la mesure altimétrique.....	57

II.2.3 - Calcul de l'orbite.....	59
II.2.4 - Bilan d'erreur et signal océanique.....	61
II.3 - Conclusions.....	62
 CHAPITRE III : ESTIMATION DE L'ERREUR RADIALE D'ORBITE PAR DEMODULATION COMPLEXE	
III.1 - Introduction.....	67
III.2 - Analyse de Fourier des mesures altimétriques.....	68
III.3 - Démodulation complexe.....	71
III.3.1 - Principe.....	71
III.3.2 - Cas particulier des mesures altimétriques.....	71
III.3.3 - Démodulation d'une série simulée.....	73
III.3.4 - Démodulation des mesures altimétriques.....	73
III.4 - Caractéristiques spectrales de l'erreur d'orbite.....	77
III.5 - Autres contributions aux modulations apparentes.....	87
III.5.1 - Théorie.....	87
III.5.2 - La surface moyenne océanique.....	87
III.5.3 - Les marées océaniques.....	89
III.5.4 - Autres contributions.....	89
III.5.5 - Conclusion.....	89
III.6 - La démodulation et réduction de l'erreur d'orbite.....	93
III.7 - Les orbites GEM-T2.....	93
III.8 - Conclusions.....	97
 CHAPITRE IV: METHODES INVERSES ET RESTITUTION DES MAREES OCEANIQUES	
IV.1 - Introduction.....	101
IV.2 - Interpolation par moindres carrés.....	102
IV.3 - Solution générale des problèmes inverses linéaires par moindres carrés.....	103
IV.3.1 - Solution générale.....	103
IV.3.2 - Les fonctions de covariance.....	104
IV.4 - Formule d'inversion des mesures marégraphiques.....	106
IV.5 - Formule d'inversion des mesures gravimétriques.....	107
IV.6 - Formule d'inversion conjointe des mesures marégraphiques et gravimétriques.....	111
IV.7 - Formule d'inversion des mesures altimétriques.....	111

IV.7.1 - Le tenseur des covariances a priori des marées.....	113
IV.7.2 - Covariances a priori des erreurs sur les données.....	117
IV.7.3 - Le problème de l'aliasing.....	121
IV.8 - Formule d'inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques.....	123
IV.9 - Résolution numérique.....	125
IV.10 - Conclusions.....	126
 CHAPITRE V: MODELES INVERSES DES MAREES OCEANIQUES	
V.1 - Introduction.....	129
V.2 - Résultats des inversions marégraphiques et gravimétriques.....	131
V.2.1 - Inversions des mesures marégraphiques.....	131
V.2.2 - Inversion des mesures gravimétriques.....	137
V.2.3 - Inversion conjointe des mesures marégraphiques et gravimétriques....	141
V.3 - Résultats des inversions des mesures altimétriques et marégraphiques.....	143
V.3.1 - Inversion des mesures altimétriques.....	143
V.3.2 - Inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques.....	147
V.3.2.1 - Atlas OMP1/2.....	147
V.3.2.2 - Analyse des erreurs internes de l'atlas OMP1/2.....	163
V.3.2.3 - Comparaison externe de l'atlas OMP1/2.....	165
V.4 - Conclusions.....	171
CONCLUSION.....	175
ANNEXE.....	179
REFERENCES.....	191

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'altimétrie par satellite a relancé la recherche en océanographie. La mission altimétrique Topex/Poseidon, qui est actuellement en phase opérationnelle, apporte chaque jour une moisson considérable d'informations nouvelles sur les variations de la surface océanique. Ce satellite est une composante du programme WOCE (World Ocean Circulation Experiment) qui associe données satellites, observations in-situ et modèles numériques. Ces informations sont une composante essentielle à la description de la circulation générale océanique, dont la compréhension est fondamentale pour la prédiction climatique.

*

La couverture des mesures altimétriques est fonction des caractéristiques de l'orbite du satellite porteur de l'instrument de mesure radar. Par exemple, l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite Topex/Poseidon au-dessus d'un même point, appelé période de répétitivité, est de l'ordre de 10 jours. La couverture des mesures altimétriques est synoptique pour les phénomènes océaniques dont les temps caractéristiques sont supérieurs à 10 jours. Par contre, les mouvements océaniques, dont les périodes caractéristiques sont de l'ordre ou inférieures à 10 jours, ne sont plus observés de manière synoptique et sont vus par le satellite comme des variations lentes de la hauteur de la surface océanique. Ainsi, les marées océaniques, dont les principaux constituants ont des périodes voisines de la journée et de la demi-journée, voient leurs spectres repliés vers les longues périodes (de quelques semaines à quelques années) masquant, dans les mesures altimétriques, les signaux de la dynamique océanique mensuelle à interannuelle. Le problème est sérieux puisque l'amplitude des marées en plein océan (de l'ordre de 50 cm) est comparable ou supérieure aux topographies dynamiques associées à la circulation méso-échelle et aux grands systèmes de courants océaniques. Il est donc nécessaire de corriger les mesures altimétriques des marées océaniques pour atteindre la mesure directe des variations du niveau des océans. Leur détermination avec une précision centimétrique est un des principaux objectifs de la mission Topex/Poseidon. Cet objectif devrait être atteint compte tenu de la précision instrumentale des altimètres qui est d'environ 2 cm et de la précision du calcul d'orbite qui est aujourd'hui meilleure que 8 cm rms [Nouel, 1993]. Dans ce contexte, un modèle de marées océaniques d'une précision centimétrique s'avère indispensable.

*

La précision des modèles globaux de marée océanique n'est pas suffisante pour répondre aux besoins de la mission Topex/Poseidon. Ainsi, par exemple, un contrôle sur un ensemble de mesures pélagiques [Woodworth, 1985] montre que la précision globale de la prédiction de la marée à partir du modèle de Schwiderski [1980a-b], qui est actuellement un des meilleurs modèles, serait de l'ordre de 15 cm avec toutefois des erreurs plus importantes dans les mers littorales. C'est dans ce contexte qu'a été entrepris le développement d'une modélisation par éléments finis des marées océaniques [Vincent, 1987] dont les premières solutions pour les océans Atlantique [Genco, 1993], Indien [Lyard, 1992] et Pacifique [Caneill, 1993] devraient être d'une précision meilleure que celle des modèles existants. Cependant, la précision ultime de ce modèle hydrodynamique dépend en partie des paramètres d'entrée qui sont des données externes telles que les conditions spécifiées aux limites ouvertes et la bathymétrie dont la méconnaissance en certaines régions empêche d'atteindre la précision centimétrique.

Pour échapper au type de contraintes externes que subissent les modèles en raison de l'incertitude sur les données d'entrée, nous avons tenté de restituer la marée à l'aide d'une approche empirique. Cette démarche, complémentaire de la modélisation hydrodynamique,

présente le grand intérêt de fournir une évaluation directe de la marée océanique qui n'est pas basée sur des hypothèses controversées concernant la modélisation de la friction ou le choix du coefficient de viscosité. De plus, le problème de la méconnaissance de la bathymétrie est éludé.

L'analyse des mesures altimétriques pour en extraire le signal des marées océaniques n'est pas une démarche nouvelle. Des résultats qualitatifs obtenus entre autres par Mazzega [1983] à partir des données du satellite Seasat ont montré la faisabilité de cette approche. Depuis, Cartwright et Ray [1991] ont calculé à partir des mesures altimétriques du satellite Geosat des solutions de la marée océanique dont les précisions décimétriques sont comparables aux solutions du modèle hydrodynamique de Schwiderski. A la suite des premières tentatives et sur la base des enseignements que l'on peut en tirer, nous présentons dans cette thèse une nouvelle méthode d'analyse des mesures altimétriques pour restituer les marées océaniques avec une précision subdécimétrique. Nous montrons que cette méthode, basée sur la théorie du problème inverse, est une généralisation des méthodes développées précédemment; elle permet, de plus, d'analyser conjointement aux mesures altimétriques des mesures de natures différentes comme, par exemple, les observations marégraphiques. Les méthodes inverses permettent en outre l'estimation du bilan d'erreur formelle sur la solution, information qui est tout aussi importante que la solution elle-même et qui est fondamentale pour son exploitation ultérieure.

*

En raison de la complexité des traitements de la mesure altimétrique, la restitution des marées avec une précision centimétrique ne peut être garantie. Nous avons vu que les modèles hydrodynamiques ont leurs propres limitations. Les solutions issues d'une modélisation hydrodynamique et de l'analyse de mesures, ayant été calculées de manière indépendante, se prêtent à un mélange harmonieux au travers de techniques d'assimilation [Bennett et McIntosh, 1982; Jourdin, 1992]. Ces techniques devraient permettre d'obtenir des modèles de marées avec une précision centimétrique. Cet objectif ultime motive le développement en parallèle de modèles hydrodynamiques et de modèles empiriques.

*
* * *

Dans le premier chapitre, les modèles de marée terrestre, de marée océanique ainsi que de leurs interactions sont passés en revue. Le second chapitre décrit l'ensemble des mesures directes ou indirectes des marées océaniques : marégraphiques, gravimétriques de marée terrestre et d'altimétrie par satellite. Nous décrivons brièvement les instruments et les méthodes d'analyse afin de mieux appréhender le bilan d'erreur de ces mesures. Nous insistons sur leur complémentarité pour la restitution des marées océaniques et nous présentons les caractéristiques spatiales et spectrales remarquables des marées qui sont exploitées dans les différentes méthodes d'analyse. Les mesures altimétriques sont fortement contaminées par l'erreur radiale d'orbite et nous exposons dans le troisième chapitre une méthode originale de correction de l'erreur d'orbite que nous avons appliquée aux données du satellite Geosat. Le quatrième chapitre présente de manière heuristique la méthode d'analyse par inversion des mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques. Les solutions obtenues pour différentes combinaisons de mesures sont discutées dans le dernier chapitre. Un premier atlas des principales ondes de marées océaniques a été calculé par inversion conjointe de mesures marégraphiques et altimétriques du satellite Geosat. Des tests pour évaluer la précision sont présentés et une discussion sur les améliorations potentielles est amorcée.

CHAPITRE I

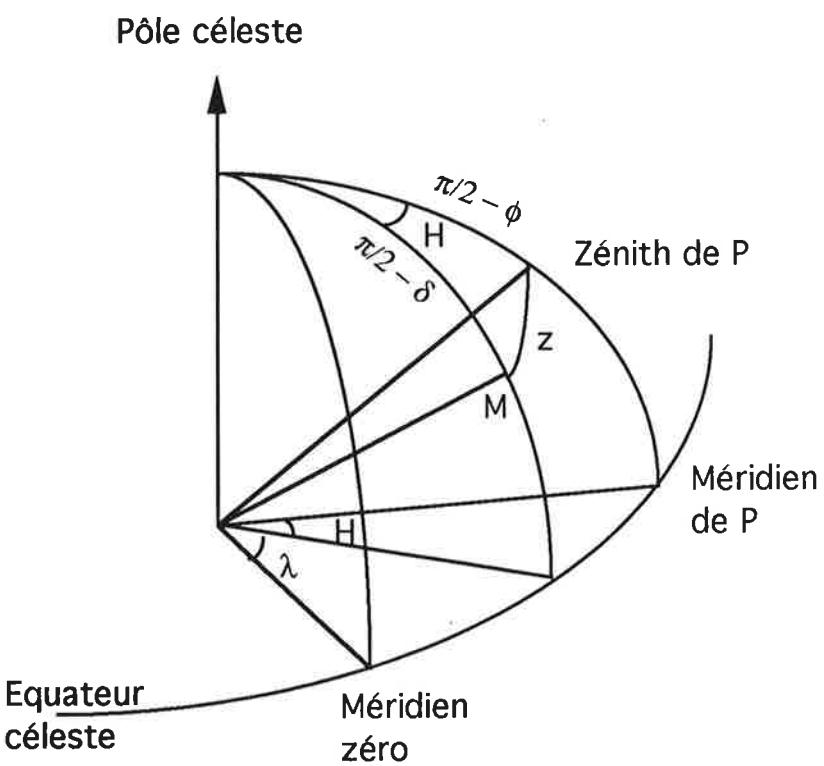
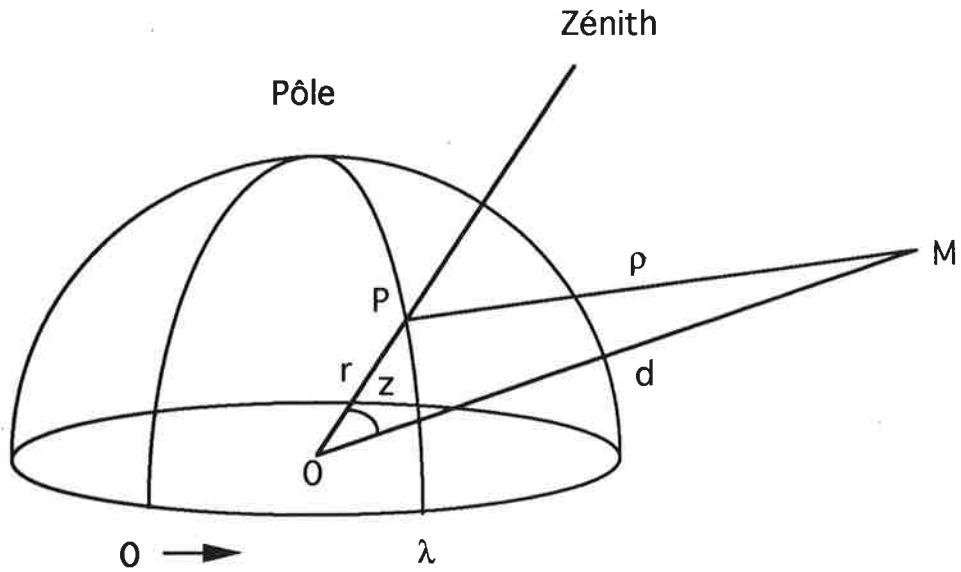


Figure I.1 : Repère de centre O (centre de la Terre). M est l'astre perturbateur (Lune ou Soleil) à la distance ρ de T et une distance zénithale z de P .

CHAPITRE I : LES PHENOMENES DE MAREES

Dans ce chapitre, nous rappelons l'expression des développements classiques du potentiel génératriceur des marées. Ensuite, nous passons en revue les différentes manifestations des marées : marées terrestres, marées de surcharge océanique et marées océaniques.

I.1 - Le potentiel générateur des marées

Dans un système planétaire (Soleil-Terre ou Terre-Lune), il y a un équilibre global entre la force centrifuge et la force gravitationnelle. Cependant, des forces de marées apparaissent à l'intérieur des corps célestes à cause des inégalités locales entre la force gravitationnelle différente en tout point de l'astre et la force axifuge uniforme due à la révolution képlérienne.

Le potentiel des marées, dans un repère géocentrique, s'écrit au point P de coordonnées (r, ϕ, λ) [Melchior, 1983] :

$$W(P) = GM \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n (\cos z) \quad (1.1)$$

où r , ϕ , λ sont le rayon, la latitude et la longitude, G la constante d'attraction universelle, M la masse de l'astre perturbateur, d la distance de l'astre au centre de la Terre (Figure I.1), P_n est le polynôme de Legendre d'ordre n , et z la distance zénithale de l'astre au point P. Les deux premiers termes d'ordre 2 et 3 s'écrivent :

$$W_2(P) = \frac{GM}{2} \left[\frac{r^2}{d^3} (3 \cos^2 z - 1) \right] \quad (1.2)$$

$$W_3(P) = \frac{GM}{2} \left[\frac{r^3}{d^4} (5 \cos^3 z - 3 \cos z) \right] \quad (1.3)$$

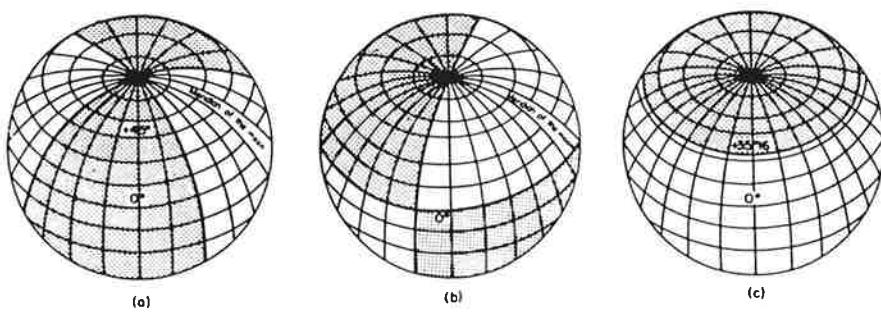
Au premier ordre, le rapport M/d^3 détermine l'influence des astres. Bien que sa masse soit beaucoup plus faible, la Lune a une influence double de celle du Soleil en raison de sa plus grande proximité de la Terre. Les autres planètes ont des influences par rapport à l'effet total de l'ordre de 10^{-4} et la galaxie entière de seulement 10^{-18} . La faible valeur du rapport r/d ($\approx 1/60$ pour la Lune) permet de négliger les termes d'ordre supérieur à 3. A titre indicatif, le potentiel d'ordre 2 contient 98% de l'effet total de la Lune et 99% de l'effet du Soleil. Toutefois, les observations des marées terrestres étant de plus en plus précises grâce aux gravimètres supraconducteurs, les termes d'ordre 3 et 4 sont parfois considérés [Ducarme, 1989].

I.1.1 - Le développement de Laplace

La formule du triangle de position de l'astronomie sphérique,

$$\cos z = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H(P) \quad (1.4)$$

fait apparaître les coordonnées astronomiques (ϕ, λ) du point P ainsi que δ et $H(P)$ qui sont respectivement la déclinaison et l'angle horaire de l'astre perturbateur. En introduisant cette nouvelle expression dans le terme d'ordre 2 du potentiel des marées (éq. 1.2), on obtient le développement classique de Laplace :



Figures I.2 : Distribution géographique du potentiel des marées : (a) fonction sectorielle; (b) Fonction tesserale; (c) fonction zonale [tiré de Melchior, 1983].

$$W_2(P) = \frac{3}{4} GM \frac{r^2}{d^3} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2\phi \cos^2\delta \cos 2H(P) \\ \sin 2\phi \sin 2\delta \cos H(P) \\ 3 \left(\sin^2\phi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2\delta - \frac{1}{3} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sectorielles} \\ \text{tesserales} \\ \text{zonales} \end{array} \quad (1.5)$$

permettant de séparer les marées en trois familles de fonctions harmoniques, appelées espèces. Les marées de périodes voisines de 12 heures, appelées marées semi-diurnes, sont sectorielles. Les marées diurnes de périodes voisines de 24 heures sont tesserales tandis que les marées à longues périodes (14 jours, 6 mois,...) sont zonales. Les Figures I.2 montrent la distribution géographique du potentiel des marées pour chacune des trois familles.

Les forces de marées sectorielles (semi-diurnes) sont responsables du freinage séculaire de la vitesse de la rotation de la Terre. Les couples dus aux forces de marées tesserales (diurnes) provoquent une déviation de l'axe d'inertie polaire (c'est-à-dire l'axe de symétrie) de la Terre dans l'espace. Enfin, les forces de marées zonales (longues périodes) font varier périodiquement l'aplatissement de la Terre provoquant des variations de sa vitesse de rotation qui se traduisent par une variation de la longueur du jour.

La composante verticale de la force de marée est

$$\frac{\partial W_2}{\partial r} = \frac{GMr}{d^3} (3 \cos^2 z - 1) \quad (1.6)$$

C'est l'expression de la marée gravimétrique que mesurerait un gravimètre si la Terre était parfaitement rigide. Par ailleurs, à la surface terrestre (en $r=a$), le potentiel de marée W_2 déplace la surface équipotentielle par rapport au centre de masse d'une distance donnée par l'expression :

$$\frac{W_2}{g} = \frac{GMa^2}{2gd^3} (3 \cos^2 z - 1) \quad (1.7)$$

où g est l'accélération gravitationnelle de la Terre. Ce déplacement de la surface équipotentielle est appelée marée d'équilibre.

I.1.2 - Le développement de Doodson

Le développement de Laplace, bien qu'il ait le mérite de faire apparaître les trois espèces de marées, est d'un usage difficile. En effet, les termes en (r/d) , δ et H subissent des variations temporelles complexes dues aux mouvements orbitaux du Soleil et de la Lune autour de la Terre. Ces termes peuvent être calculés avec une grande précision à partir de 6 variables indépendantes :

τ	le temps lunaire moyen compté à partir de la culmination inférieure de la Lune
s	la longitude moyenne de la Lune
h	la longitude moyenne du Soleil
p	la longitude du périgée lunaire
$N' = -N$	où N est la longitude du noeud ascendant de la Lune
ps	la longitude moyenne du périhélie

Table I.1 : Les principales ondes de marée.

Notation de Darwin	Nombre caractéristique de Doodson	Nature	Vitesse angulaire en degrés par heure solaire moyenne	Période en heures	Amplitude (=A) de la marée d'équilibre (cm)
Ondes semi-diurnes : A cos²φ cos(argument)					
N ₂	245.655	lunaire elliptique	28.4397	12.66	4.7
M ₂	255.555	lunaire principale	28.9841	12.42	24.3
S ₂	273.555	solaire principale	30.0000	12.00	11.3
K _{2M}	275.555	lunaire déclinationnelle	30.0821	11.97	2.1
K _{2S}	275.555	solaire déclinationnelle	30.0821	11.97	1.0
Ondes diurnes : A sin 2φ sin(argument)					
Q ₁	135.655	lunaire elliptique	13.3987	26.87	1.9
O ₁	145.555	lunaire principale	13.9430	25.82	10.1
P ₁	163.555	solaire principale	14.9589	24.07	4.7
K _{1M}	166.555	lunaire déclinationnelle	15.0411	23.93	9.7
K _{1S}	166.555	solaire déclinationnelle	15.0411	23.93	4.5
Ondes de longue période : A (1 - 3 sin²φ) cos(argument)					
S _{sa}	057.555	solaire déclinationnelle	0.0821	182.70j	1.0
M _m	065.455	lunaire elliptique	0.5444	27.55j	1.1
M _f	075.555	lunaire déclinationnelle	1.0980	13.66j	2.1

dont les périodes connues à sept décimales près sont respectivement 24.84 heures, 27.32 jours, 365.24 jours, 8.85 ans, 18.61 ans et 20942 ans. Les expressions de ces variables en fonction du temps furent établies par Newcomb en 1895 pour le Soleil et par Brown [1919] pour la Lune à partir de réductions d'un grand nombre d'observations méridiennes absolues du Soleil et de la Lune. Le grand intérêt de ces nouvelles variables provient du fait que ce sont des fonctions quasi-linéaires du temps.

En introduisant ces formules dans le développement de Laplace, Doodson [1921] obtint un développement purement harmonique du potentiel des marées. Ce développement comportait 386 ondes dont les constituants harmoniques ont des arguments combinaisons linéaires des 6 variables indépendantes. Le potentiel des marées s'exprime alors sous la forme d'une somme de termes du type :

$$A(r, \phi, t) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} [(a_1 \dot{t} + a_2 \dot{s} + a_3 \dot{h} + a_4 \dot{p} + a_5 \dot{N} + a_6 \dot{p_s})_t] \quad (1.8)$$

où \cdot est la dérivée par rapport au temps. En général, les coefficients a_i (entiers) sont compris entre -4 et +4. Cette constatation inspira à Doodson une codification pour l'argument sous forme d'un nombre caractéristique défini par la suite de 6 entiers :

$$a_1 (a_2 + 5) (a_3 + 5) . (a_4 + 5) (a_5 + 5) (a_6 + 5) \quad (1.9)$$

Cette classification a l'avantage de ranger les arguments dans l'ordre croissant de leurs vitesses angulaires. Les espèces d'ondes sont différenciées par la valeur de a_1 ; à l'intérieur des espèces, les groupes se différencient par la valeur de a_2 et les divers constituants des groupes par la valeur de a_3 . Les espèces d'ondes sont séparables par l'analyse harmonique sur des séries d'observation de quelques jours. Il faut 1 mois d'enregistrement pour séparer les groupes et 1 an pour séparer les constituants. G.H. Darwin [1883] baptisa par des symboles les harmoniques de marées les plus énergétiques dont les plus importants sont reproduits dans la Table I.1.

Les calculs de Doodson ont été vérifiés par Cartwright et Tayler [1971] ainsi que par Cartwright et Edden [1973] qui ont réactualisé les constantes astronomiques et utilisé une méthode de décomposition spectrale. On trouvera dans Ducarme [1989] une comparaison des performances et des précisions des développements du potentiel des marées les plus récents de Xi Qin Wen [1987] et Tamura [1987].

I.2 - Les marées terrestres

A la suite de ce bref rappel sur le potentiel et les forces de marées, nous discutons la modélisation des déformations de marée d'une Terre sans océan. Nous verrons que, pour une Terre à symétrie sphérique et stratifiée, les déformations sont complètement caractérisées par trois paramètres sans dimension, appelés nombres de Love. L'ellipticité, l'inélasticité de la Terre et les hétérogénéités latérales de la structure terrestre influent sur les déformations de marées et sont prises en compte dans les modèles.

1.2.1 - Terre élastique

Les forces de marées déforment la Terre solide, engendrant ce que l'on appelle les marées terrestres. A la fréquence des marées, la réponse de la Terre est statique et dépend principalement de son élasticité. Un modèle de Terre à symétrie sphérique, sans rotation, dont les paramètres d'élasticité de Lamé et la densité ne dépendent que de la distance par rapport

au centre de la Terre, constitue une très bonne approximation au premier ordre. Le calcul des marées terrestres requiert la résolution des équations du mouvement formulées pour un corps élastique, auto-gravitant, sphérique et stratifié [voir par exemple, Melchior, 1983]. Les forces extérieures sont dérivées du potentiel de marée d'ordre 2, $W_2(r,\phi,\lambda)$. Les solutions, en raison de la symétrie sphérique, s'expriment uniquement en fonction du second degré du développement en harmonique sphérique sous la forme :

pour le déplacement radial

$$u = h_2(r) \frac{W_2(r,\phi,\lambda)}{g} \quad (1.10)$$

pour le déplacement horizontal nord-sud

$$v = \frac{l_2(r)}{g} \frac{\partial W_2(r,\phi,\lambda)}{\partial \phi} \quad (1.11)$$

pour le déplacement horizontal est-ouest

$$w = \frac{l_2(r)}{g \cos\phi} \frac{\partial W_2(r,\phi,\lambda)}{\partial \lambda} \quad (1.12)$$

et le potentiel gravifique dû à la déformation

$$\psi = k_2(r) W_2(r,\phi,\lambda) \quad (1.13)$$

Les valeurs des fonctions radiales $h_2(r)$, $l_2(r)$ et $k_2(r)$ à la surface de la Terre ($r=a$) sont appelés nombres de Love (l_2 est aussi appelé nombre de Shida). Ces nombres de Love sont sans dimension et pratiquement sans dépendance en fréquence (sauf en cas de résonance).

Dans l'équation (1.10), on peut remarquer que le déplacement radial dû à la marée en surface est proportionnel à la marée d'équilibre. Cela permet d'interpréter d'une manière très simple le nombre de Love h_2 , comme étant le rapport entre le déplacement vertical à la surface de la Terre et l'élévation de la marée d'équilibre. Le résultat essentiel de cette théorie est que tout paramètre de déformation due aux marées, observable à la surface de la Terre considérée comme sphérique, peut être écrit sous la forme d'une combinaison de nombres de Love. Une des plus importantes est le facteur gravimétrique δ :

$$\delta_2 = 1 + h_2 - \frac{3}{2} k_2 \quad (1.14)$$

La marée gravimétrique théorique s'écrit alors :

$$\Delta g = \delta_2 \frac{\partial W_2}{\partial r} \quad (1.15)$$

Ainsi, le facteur gravimétrique est défini comme le rapport de l'amplitude de marée observée sur l'amplitude théorique de la marée sur une Terre parfaitement rigide.

Les nombres de Love sont calculés à partir d'un modèle sismique de la constitution interne de la Terre. Nous reproduisons ci-dessous les valeurs numériques des nombres de Love pour une Terre élastique, qui sont aujourd'hui les plus largement utilisées [Wahr, 1981]:

$$\begin{aligned} h_2 &= 0.609 \\ k_2 &= 0.302 \\ l_2 &= 0.0852 \\ \delta_2 &= 1.156 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Les valeurs des nombres de Love sont relativement bien contraintes malgré notre connaissance incomplète de la structure interne de la Terre. Le facteur gravimétrique est connu à $\pm 0.5\%$. En cas de désaccord entre la prédition théorique et l'observation, on ne met généralement pas en cause le modèle théorique de marées terrestres, mais on incrimine plutôt des effets dus aux hétérogénéités latérales et à la surcharge des marées océaniques. Un modèle de Terre élastique, à symétrie sphérique et stratifiée est assez précis pour la plupart des applications. Cependant, les effets de l'ellipticité de la Terre et de sa rotation ainsi que de son inélasticité doivent être considérés si l'on désire atteindre des précisions meilleures que 1%.

I.2.2 - Terre élastique, elliptique et en rotation

Wahr [1981] a résolu les équations du mouvement pour une Terre élastique, elliptique, en rotation et auto-gravitante. En raison de la perte de la symétrie sphérique, les solutions ne peuvent plus être exprimées par une combinaison simple des trois nombres de Love. Les paramètres équivalents aux nombres de Love deviennent dépendants de la latitude ainsi que le facteur gravimétrique dont l'expression théorique est :

$$\delta_2 = 1.160 - 0.005 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (7 \sin^2 \phi - 1) \right] \quad (1.17)$$

L'introduction de l'ellipticité et de la rotation dans les équations modifient de 1% le facteur gravimétrique. Wahr fit une étude de sensibilité des solutions en fonction des modèles de Terre élastique calculés à partir de données récentes d'oscillations libres, d'ondes internes (body wave) et d'ondes de surface. Il trouva que la marée gravimétrique varie d'environ 0.1% selon le modèle choisi.

Le noyau liquide terrestre, enfermé dans le manteau ellipsoïdal, possède un mode propre consistant en une précession rétrograde de son axe de rotation due au couple de pression du fluide exercé sur la frontière elliptique. Ce mode libre, appelé "Free Core Nutation" (FCN) ou "nearly diurnal Free Wobble" en anglais, engendre une résonance dans la bande de fréquence des marées diurnes. Le modèle elliptique de Wahr permet d'obtenir la résonance du noyau. La Figure I.3 montre l'effet de la résonance dans la bande diurne des marées sur le facteur gravimétrique δ . La fréquence de marée ψ_1 est très proche de la fréquence de résonance FCN; son facteur gravimétrique est amplifié d'une dizaine de pour-cent alors que celui des harmoniques P_1 et K_1 est atténué de quelques pour-cent. Matthew et al. [1991], considérant que la graine solide peut avoir des mouvements propres et indépendants du noyau liquide et du manteau, ont trouvé deux nouvelles fréquences. Celles-ci dépendent de l'ellipticité dynamique de la graine et du couple gravitationnel exercé par le noyau et le manteau ainsi que du couple de pression du fluide à la frontière graine-noyau. Ils trouvèrent un "Inner Core Wobble" prograde qui ne contribue pas aux marées terrestres et un "diurnal Free Inner Core Nutation" (FICN) rétrograde en plein milieu de la bande diurne des marées. Comme on peut le voir dans la Figure I.3, l'effet de cette résonance sur les marées est tout à fait négligeable.

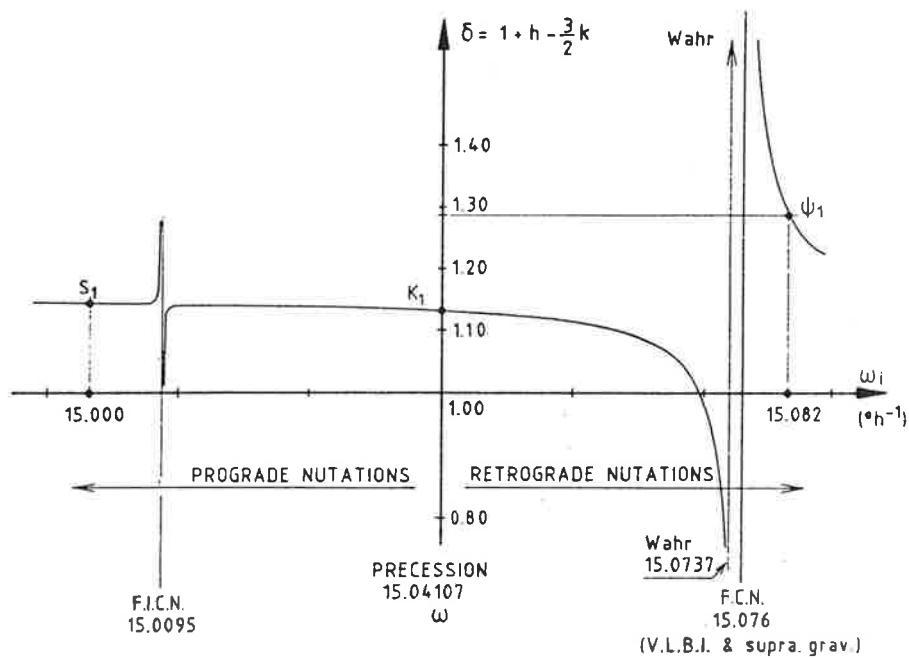


Figure I.3 : Effet des résonances dues au Free Core Nutation (FCN) et au Free Inner Core Nutation (FICN) sur le facteur gravimétrique δ dans la bande de fréquence des marées diurnes [tiré de Melchior, 1992].

I.2.3 - Terre inélastique

Les modèles que nous avons discutés jusqu'à présent, qu'ils soient sphériques ou elliptiques, considèrent la Terre comme un corps parfaitement élastique. Cependant, le comportement viscoélastique de la Terre, dans la bande des fréquences des marées, joue un rôle important dans la compréhension des mécanismes de dissipation de l'énergie des marées et de l'évolution de l'orbite lunaire. En raison de son inélasticité, la Terre répond avec un léger retard aux forces de marées. Ce déphasage crée un couple agissant sur la Terre et sur la Lune qui ralentit la rotation de la Terre et accélère la Lune sur son orbite provoquant son éloignement de notre planète d'environ 3.7 cm par an [Lambeck, 1988]. Pour calculer les effets de l'inélasticité de la Terre, on introduit des nombres de Love complexes et on doit formuler des hypothèses sur les mécanismes de dissipation aux périodes des marées. Zschau [1978] a trouvé que la partie imaginaire des nombres de Love est 1000 fois plus petite que la partie réelle. La dissipation de l'énergie des marées dans la Terre solide est donc très faible et ne représente que quelques pour-cent de la dissipation totale. La quasi totalité de l'énergie dissipée provient des marées océaniques. Le retard de phase de la marée gravimétrique est inférieure à 0.01°. Les déphasages observés dans les enregistrements de marées gravimétriques sont de l'ordre de 0.4° [Melchior, 1989]. Ceux-ci ne sont pas attribués à des effets provoqués par les propriétés visqueuses de la Terre, mais plutôt aux conséquences de la dissipation de l'énergie par le travail de la pression des marées océaniques, exercée sur le fond des océans, contre la marée de la Terre solide [Schwiderski, 1985].

Les nombres de Love complexes sont fonctions de la fréquence à cause de l'inélasticité et du processus de dissipation qui lui est associé. Pour les ondes diurnes et semi-diurnes, les modèles montrent une augmentation de la valeur des nombres de Love d'environ 2% (par rapport aux nombres de Love pour une Terre élastique) qui se répercute sur le facteur gravimétrique qui augmente d'environ 0.2%. Les effets de l'inélasticité sont plus importants pour les marées à longues périodes.

I.2.4 - Terre elliptique et inélastique

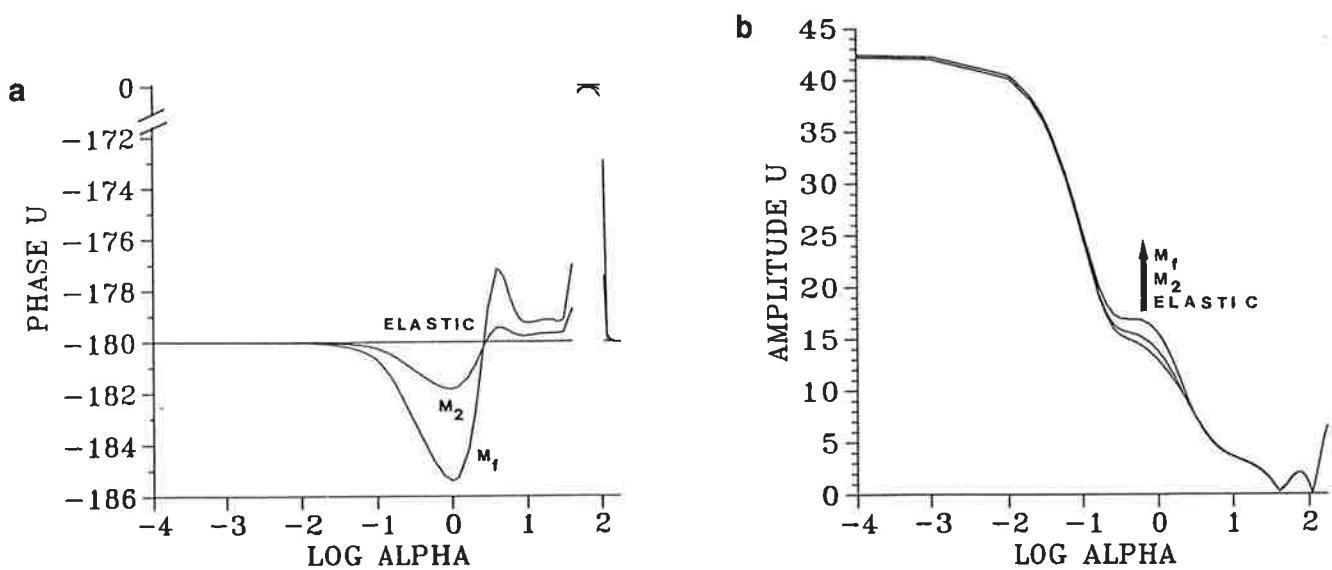
L'effet de l'inélasticité du manteau a été incorporé dans le modèle de Wahr par Dehant [1987] qui a utilisé des profils de paramètres rhéologiques complexes. Les équations différentielles deviennent complexes ainsi que les paramètres de marée. Cette étude a conduit à une augmentation du facteur gravimétrique de l'ordre de quelques dixièmes de pour-cent expliquant une partie de l'écart entre les observations et les modèles théoriques.

I.2.5 - Hétérogénéités latérales de la structure terrestre

Zürn et al.[1976] ont montré avec un modèle aux éléments finis qu'une zone de subduction provoque une anomalie dans la composante verticale du déplacement de marée de l'ordre de 0.8%. Beaumont et Berger [1974] trouvèrent qu'une inhomogénéité dans la croûte terrestre peut modifier cette même composante jusqu'à 0.3%. Par ailleurs, Molodensky et Kramer [1980] ont calculé que les variations latérales de la structure du manteau supérieur terrestre changent le facteur gravimétrique de seulement 0.3%.

I.3 - Les marées de surcharge océanique

Jusqu'à présent, nous avons considéré les déformations de marées pour une Terre sans océan. Comme les modes normaux des océans couvrent les bandes de fréquences occupées par les marées, les océans répondent dynamiquement au forçage des marées et présentent les mêmes périodicités que les marées terrestres. Les marées océaniques représentent une charge



Figures I.4 : Fonctions de Green du déplacement radial élastique et inélastique calculées avec le modèle PREM pour les ondes de marées M_2 et M_f : (a) phases en degrés et (b) amplitudes normalisées selon Farrell [1972].

Table I.2 : Effets gravimétriques de surcharge océanique pour l'onde principale de marée M_2 . Les amplitudes sont en microgal et les phases en degrés [tiré de Francis et Mazzega, 1990].

Station	Gutenberg-Bullen	PREM	PREM Inelastic
Bruxelles	1.880 (63.1)	1.885 (62.9)	1.856 (63.0)
Kiev	0.631 (11.8)	0.624 (11.6)	0.620 (11.4)
Novosibirsk	0.219 (-133.1)	0.219 (-133.1)	0.216 (-133.2)
Madrid	4.067 (100.4)	3.964 (100.5)	4.035 (100.2)
M'Bour	3.797 (-29.8)	3.776 (-29.8)	3.804 (-29.8)
Bangui	1.670 (67.4)	1.687 (67.5)	1.671 (67.3)
Cartagena	2.649 (76.6)	2.656 (76.6)	2.623 (76.6)
Manaus	2.377 (56.1)	2.376 (56.3)	2.359 (56.1)
Alice Springs	0.543 (-78.9)	0.562 (-80.5)	0.554 (-80.6)
South Pole	0.738 (-45.7)	0.738 (-45.4)	0.731 (-45.7)

périodique sur le fond des océans qui déforme la Terre dans son ensemble. Cette marée additionnelle est appelée marée de surcharge océanique ou effet indirect. L'analyse spectrale d'enregistrements de marées terrestres ne permet pas de séparer les contributions de la marée directe de celles de la marée de surcharge océanique. Diverses méthodes ont été développées afin d'évaluer les effets de surcharge océanique à partir de modèles spectraux de marée océanique et d'un modèle de Terre [voir Baker, 1985]. En 1972, Farrell a publié la méthode la plus précise et la plus couramment utilisée : la réponse de la Terre soumise au poids d'une charge ponctuelle en surface est calculée pour un modèle donné de la structure interne de la Terre. Les fonctions de Green des différentes composantes de la déformation sont tabulées en fonction de la distance angulaire α entre le point d'application de la charge et la station d'observation. Nous reproduisons ci-dessous les expressions des fonctions de Green pour le déplacement radial:

$$u(\alpha) = \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos \alpha) \quad (1.18)$$

l'accélération gravitationnelle:

$$\gamma(\alpha) = \frac{g}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} [n + 2h'_n - n(n+1) k'_n] P_n(\cos \alpha) \quad (1.19)$$

et le potentiel:

$$\phi(\alpha) = \frac{ag}{m_e} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + k'_n] P_n(\cos \alpha) \quad (1.20)$$

où m_e est la masse de la Terre, h'_n et k'_n sont les nombres de Love de charge dont les valeurs dépendent du modèle de Terre considéré, et P_n les polynômes de Legendre. Ensuite, le modèle de marée océanique est convolué avec une des fonctions de Green pour obtenir l'effet total de surcharge correspondant:

$$\vec{L}(\varphi, \lambda) = \rho_w \int \int_{\text{ocean}} G(\alpha) \vec{h}(\varphi', \lambda') dS' \quad (1.21)$$

où φ, λ sont la latitude et la longitude de la station, ρ_w la densité moyenne de l'eau de mer, G une des fonctions de Green et h l'élévation de marée sur l'élément de surface dS' de coordonnées géographiques φ', λ' . L'angle α est calculé par la formule du triangle sphérique:

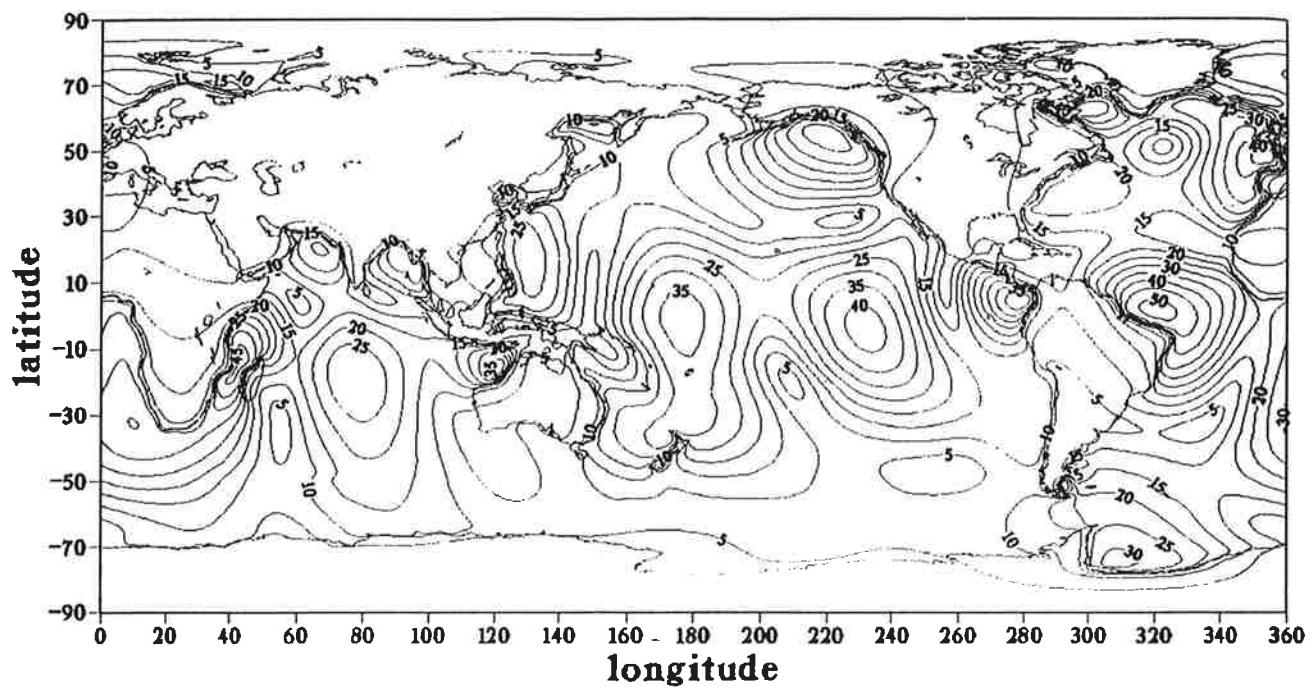
$$\cos \alpha = \sin \varphi' \sin \varphi + \cos \varphi' \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda') \quad (1.22)$$

L'intégrale doit être calculée séparément pour chaque onde de marée.

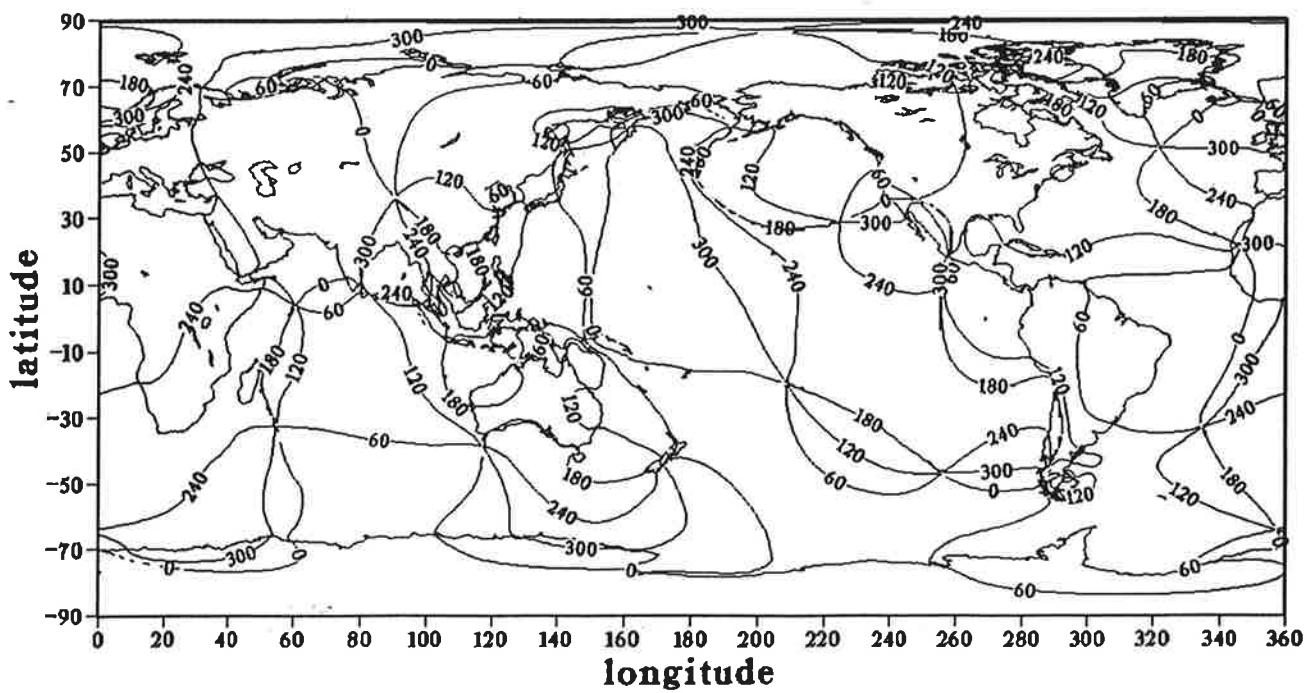
I.3.1 - Les fonctions de Green

Les fonctions de Green, comme nous l'avons vu, traduisent la réponse de la Terre au poids d'une charge ponctuelle en surface. La résolution numérique de l'équation du mouvement, de la relation tension-déformation et de l'équation de Poisson pour une Terre sphérique, stratifiée et gravitante soumise à une charge unitaire et ponctuelle en surface fournit les valeurs des nombres de Love de charge. Ces équations prennent en compte les propriétés rhéologiques de la Terre. Les nombres de Love de charge sont donc fonctions du modèle sismologique utilisé. A courte distance, les fonctions de Green sont sensibles aux structures

A



B



Figures I.5 : Cartes cotidales du déplacement vertical induit par la surcharge océanique de l'onde de marée M_2 : (a) amplitudes en millimètres; (b) phase en degrés.

régionales de la croûte terrestre et du manteau, tandis que pour des distances supérieures à 500 km, une structure stratifiée comme celle décrite par les modèles globaux sans inhomogénéité latérale suffit amplement. Cela signifie qu'une description plus réaliste de la réponse à une charge en surface peut être obtenue grâce à un raffinement local du modèle de Terre près du site d'observation.

Les fonctions de Green peuvent être classées suivant deux types : celles qui ont été calculées en faisant l'hypothèse que la Terre répond de manière élastique dans la bande des fréquences des marées et celles qui ont été calculées en tenant compte de la viscoélasticité du manteau. Les principales différences entre les fonctions de Green élastiques et viscoélastiques (voir Figures I.4) apparaissent pour des distances entre le point d'application de la charge et le site d'observation inférieures à 1°. La faible viscosité de l'asthénosphère en est la cause. Tous les travaux effectués sur les fonctions de Green montrent que les estimations des effets de surcharge varient suivant le type de fonction de Green utilisé de l'ordre du pour-cent, c'est-à-dire de quelques centièmes de microgal pour les effets gravimétriques et de quelques centièmes de millimètres pour les déplacements [Francis, 1992]. A titre d'exemple, les estimations des effets gravimétriques de surcharge océanique en différentes stations pour les deux types de fonctions de Green sont reproduites dans la Table I.2. Les amplitudes varient de 1 à 2 % et les phases de seulement 1°. Nous avons choisi une station côtière et une station continentale sur chaque continent afin d'assurer la généralisation des conclusions. Les différences observées correspondent au niveau de précision des performances instrumentales actuelles. En l'absence de grosses hétérogénéités locales dans la structure terrestre dont l'impact sur les effets de surcharge océanique est mal connu, l'incertitude sur les estimations des effets de surcharge est due au premier chef aux erreurs des modèles de marée océanique.

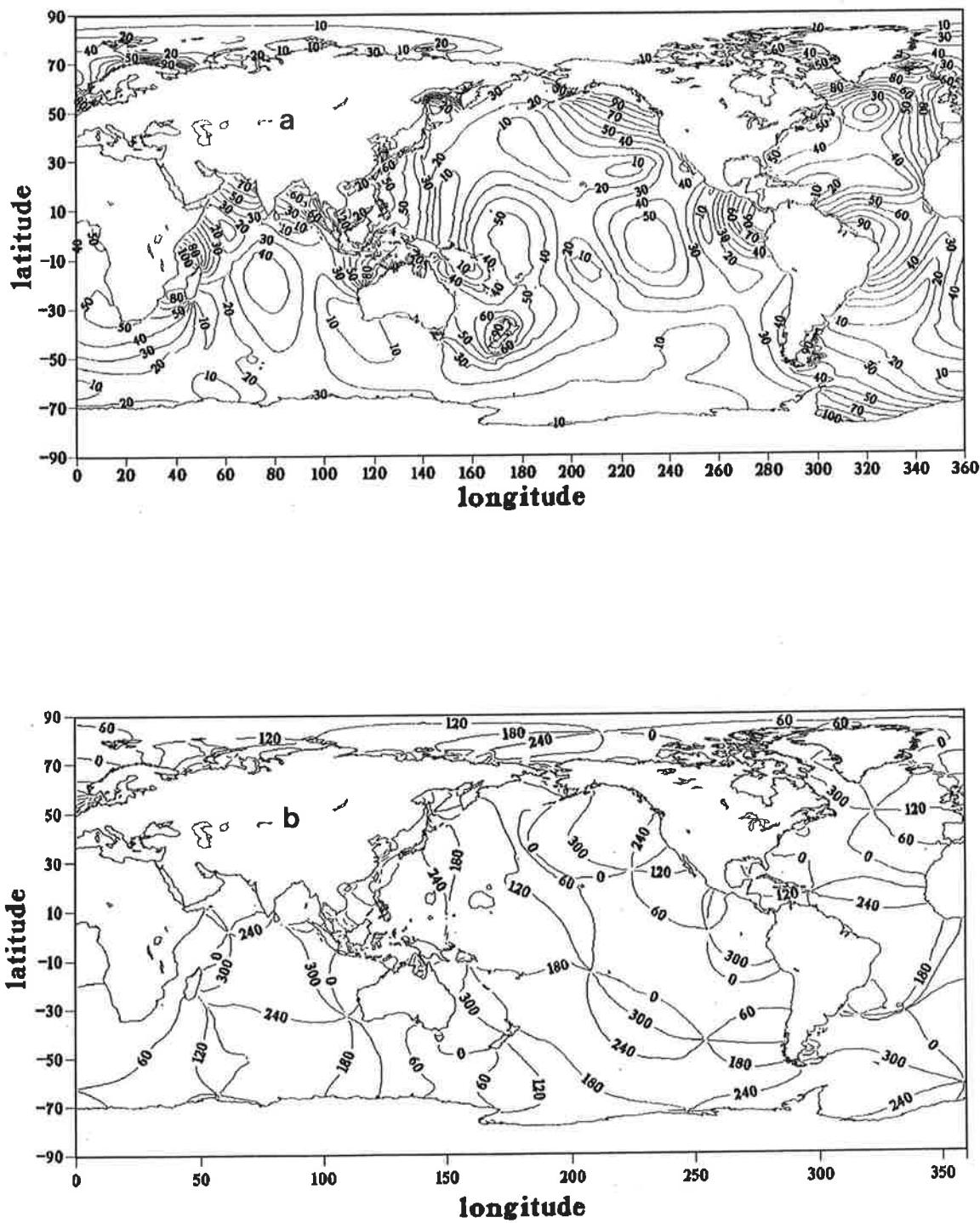
I.3.2 - Cartes globales d'effets de surcharge océanique

Francis et Mazzega [1990] ont calculé des cartes d'effets de surcharge océanique à partir du modèle hydrodynamique de marée de Schwiderski [1980a et b] et des fonctions de Green calculées à partir de PREM pour une Terre élastique [Francis et Dehant, 1987]. Les cartes mondiales d'amplitude et de phase du déplacement vertical induit par la surcharge océanique de l'onde semi-diurne principale M_2 sont reproduites dans les Figures I.5. L'amplitude peut atteindre 5 cm en plein océan et exceptionnellement jusqu'à 10 cm là où les marées sont les plus fortes. Sur les continents, l'effet est de l'ordre du centimètre et diminue en fonction de l'éloignement des côtes d'environ 1 cm par 1000 km. La carte de l'effet gravimétrique présente des contours similaires avec des amplitudes sur les continents de quelques microgals. Les cartes des effets de surcharge pour deux ondes de même espèce se ressemblent et ressemblent aux cartes de marée océanique à partir desquelles elles ont été calculées, car la convolution est un opérateur linéaire qui agit comme un filtre passe-bas.

I.4 - Les marées océaniques

Les marées océaniques sont des mouvements périodiques et réguliers du niveau de la mer. La force dominante responsable dérive du potentiel gravitationnel luni-solaire à la surface de la Terre qui varie de manière périodique. Les mouvements engendrés par cette force sont appelés marées gravitationnelles pour les différencier des mouvements plus faibles engendrés par des forces d'origine météorologique ou des marées radiationnelles causées par le rayonnement solaire.

En 1790, Laplace déclare les marées océaniques comme étant "... ce problème, le plus épineux de toute la mécanique céleste". Ses travaux, parmi lesquels un essai sur le "Flux et reflux des marées" ainsi que le chapitre sur les marées dans son "Traité de Mécanique



Figures I.6: Cartes cotidiales de l'onde lunaire M_2 . Amplitudes en cm (a) et phases en degrés (b) d'après Schwiderski [1980].

céleste" [1799-1823], sont à la base de la recherche moderne en ce domaine. Ses principales contributions sont : (1) la séparation des marées en trois espèces distinctes (cfr. §I.1) ; (2) la formulation des équations dynamiques liant les déplacements verticaux et horizontaux aux composantes horizontales de la force génératrice des marées; (3) l'hypothèse que la marée, quel que soit l'endroit, présente toujours le même contenu spectral que celui de la force génératrice des marées car les phénomènes linéaires jouent un rôle dominant dans les équations. Laplace obtint des solutions des équations dynamiques pour un océan couvrant tout le globe et trouva que les solutions dépendent fortement de la profondeur du fluide. Il en vint à la conclusion qu'un traitement réaliste de la bathymétrie et des frontières continentales détruit tout espoir d'obtenir une solution analytique.

En 1868, William Thomson (Lord Kelvin), inspiré par l'hypothèse (3) formulée par Laplace, proposa une expression empirique pour décrire la hauteur de la marée ζ en n'importe quel point P :

$$\zeta_P(t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n t - G_n + \chi_n) \quad (1.23)$$

où ω_n est la vitesse angulaire de l'onde n donnée par la mécanique céleste, A_n et G_n l'amplitude et la phase de l'onde n qui sont déterminées empiriquement à partir de l'analyse d'enregistrement de marée au point P, et χ_n l'argument astronomique ou phase à l'instant origine. Cette représentation, à la base de la méthode harmonique d'analyse et de prédiction de la marée, s'avéra rapidement bien plus efficace que toute autre formulation.

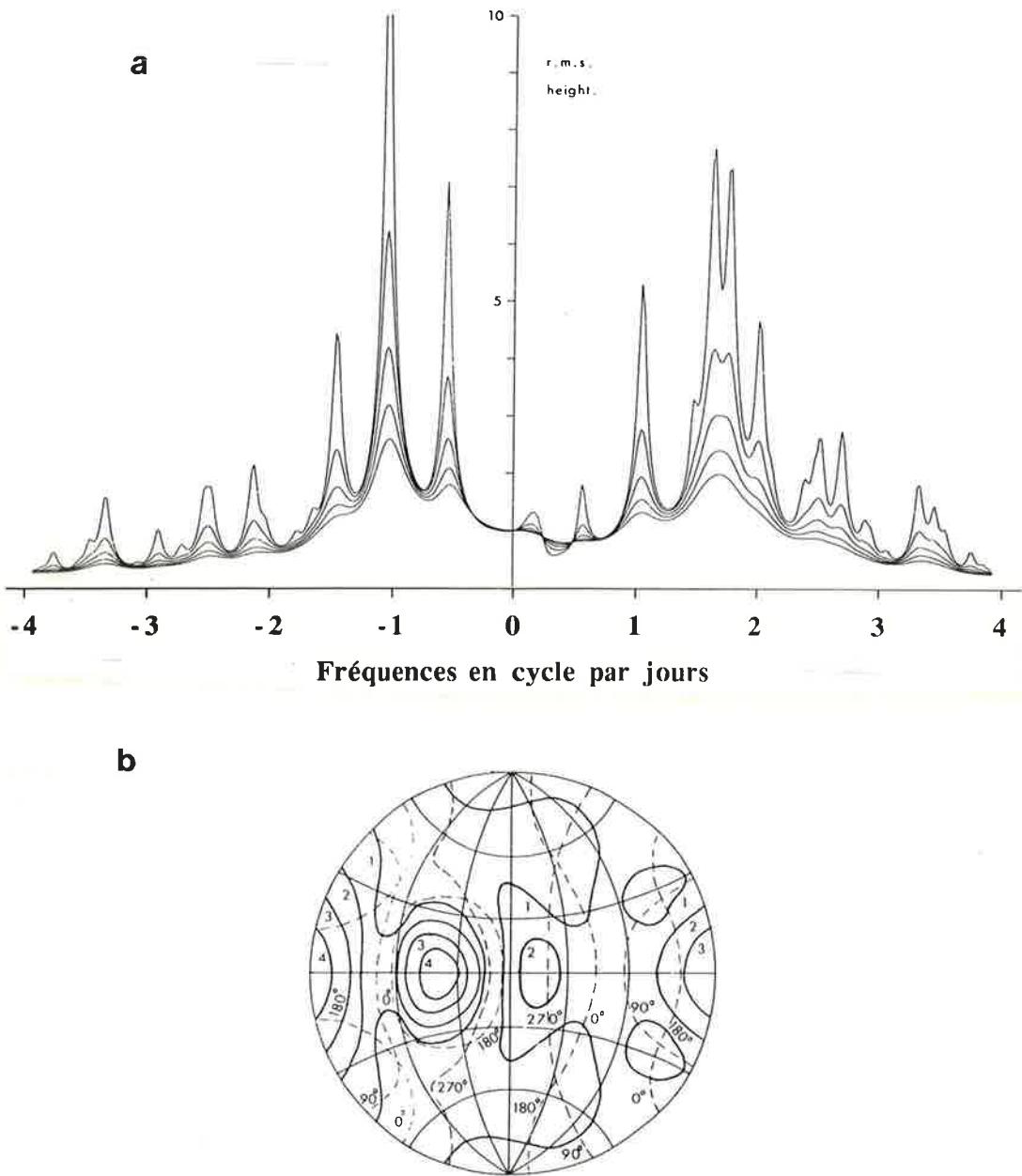
I.4.1 - Les équations hydrodynamiques de Laplace

Les équations générales de Navier-Stokes, qui permettent de décrire la dynamique des océans, en considérant, dans le cadre de l'étude des marées, les hypothèses simplificatrices suivantes :

1. Fluide homogène et incompressible
2. Rotation uniforme (permettant la linéarisation des équations)
3. Terre sphérique
4. Terre rigide
5. Champ gravitationnel terrestre uniforme à la surface et invariant dans le temps
6. Océan peu profond pour lequel la force de Coriolis associée à la composante horizontale de la rotation terrestre et l'accélération verticale des particules du fluide peuvent être négligées. Les vitesses verticales sont négligeables par rapport aux vitesses horizontales (hypothèse de base des ondes longues)

deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2 \Omega \cos \theta v = - \frac{\partial}{a \partial \theta} [g \zeta - \Gamma] - F_\theta \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2 \Omega \cos \theta u = - \frac{\partial}{a \sin \theta \partial \lambda} [g \zeta - \Gamma] - F_\lambda \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial (h u \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (h v)}{\partial \lambda} \right] = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$



Figures I.7 : (a) Rms de l'amplitude de la marée forcée par l'harmonique sphérique P_{22} du potentiel des marées pour un océan hémisphérique d'une profondeur de 4,4 km. Chaque courbe correspond à un choix différent du coefficient de friction. Les coefficients utilisés correspondent respectivement à des temps d'amortissement de 60, 30, 20, 15 et 12 heures. Ce dernier donne les pics de résonance dont les amplitudes sont les plus faibles. Plus le coefficient de friction est important, plus les différents pics de résonance se confondent. Les fréquences positives correspondent à la marée provoquée par un astre se déplaçant de l'est vers l'ouest, les fréquences négatives à un mouvement de l'astre de l'ouest vers l'est. (b) Cartes cotidales pour une fréquence quasi résonante à 2 cycles par jour (S_2) avec un coefficient de friction d'un temps d'amortissement de 15 heures. (a). Les lignes continues sont les amplitudes par rapport à la marée d'équilibre (c'est-à-dire pour une fréquence nulle) et les lignes pointillées représentent les phases 0, 90, 180 et 270 degrés avec le sens de rotation indiqué par les flèches. La solution n'est pas symétrique par rapport au méridien central à cause de la dissipation par frottement [Figures tirées de Webb, 1980].

avec

(θ, λ)	colatitude et longitude est
(u, v)	composantes sud et est de la vitesse moyennée sur la profondeur
ζ	élévation de la surface libre au-dessus du niveau de référence (surface non perturbée)
Γ	potentiel des forces extérieures
g	accélération de pesanteur en surface
a	rayon terrestre moyen
Ω	vitesse angulaire de la rotation de la Terre
$h(\theta, \lambda)$	profondeur de l'océan (non perturbé)
F	composantes de la dissipation par friction généralement spécifiées en fonction de (u, v)

Les deux premières équations expriment la conservation de la quantité du mouvement pour un fluide homogène sur une sphère en rotation. La troisième équation exprime la conservation de la masse dans un fluide homogène incompressible. Ces équations hydrodynamiques de Laplace forment un système d'équations différentielles hyperboliques et sont linéaires à conditions de linéariser les termes de dissipation. Dans ce cas, les solutions présentent les mêmes caractéristiques temporelles que celle du potentiel des marées dont dérivent les forces extérieures. En décomposant le potentiel des marées en ses différents harmoniques, on obtient une équation elliptique en θ et λ pour chaque fréquence de marée. La solution est obtenue par superposition linéaire des solutions calculées séparément pour chaque fréquence du potentiel génératrice des marées.

Les équations de Laplace sont assorties de conditions aux limites qui peuvent être de natures diverses :

1. Problème de Dirichlet : les valeurs observées de la marée sont incorporées dans le modèle soit le long des côtes soit le long des frontières ouvertes.
2. Problème de Neumann : La composante de la vitesse normale à la limite du domaine d'intégration est nulle. Cette condition d'imperméabilité est équivalente à une réflexion de l'onde incidente par la côte.
3. Condition type mixte : l'élévation de marée est imposée en certains points et les courants en d'autres.

Les solutions spectrales de marée océanique sont présentées sous forme de cartes cotidales (Figures I.6). On appelle ligne cotidale le lieu des points où la pleine mer de l'onde se produit au même instant. Le lieu des points tels que l'amplitude soit constante s'appelle ligne d'isomarnage (ou ligne d'égale amplitude). Les points amphidromiques sont les points où l'amplitude est nulle.

I.4.2 - Solutions analytiques

Plusieurs travaux ont été publiés sur la résolution analytique des équations linéaires de Laplace. La solution générale du problème est la somme de la solution des équations sans second membre et d'une solution particulière des équations complètes. Ces deux solutions partielles correspondent respectivement aux oscillations libres ou modes propres dont les fréquences dépendent de la géométrie des bassins, et aux oscillations entretenues ou modes forcés dont les fréquences sont celles du potentiel générateur. Si une de ces fréquences est proche d'une fréquence propre, il y a résonance, ce qui se traduit par une amplification de l'oscillation entretenue. Ce dernier point justifie l'intérêt de l'étude des oscillations libres des bassins océaniques.

Les études menées concernent uniquement des océans hémisphériques à profondeur constante et limités par des méridiens distants de 180° . Doodson [1938] obtint les premières

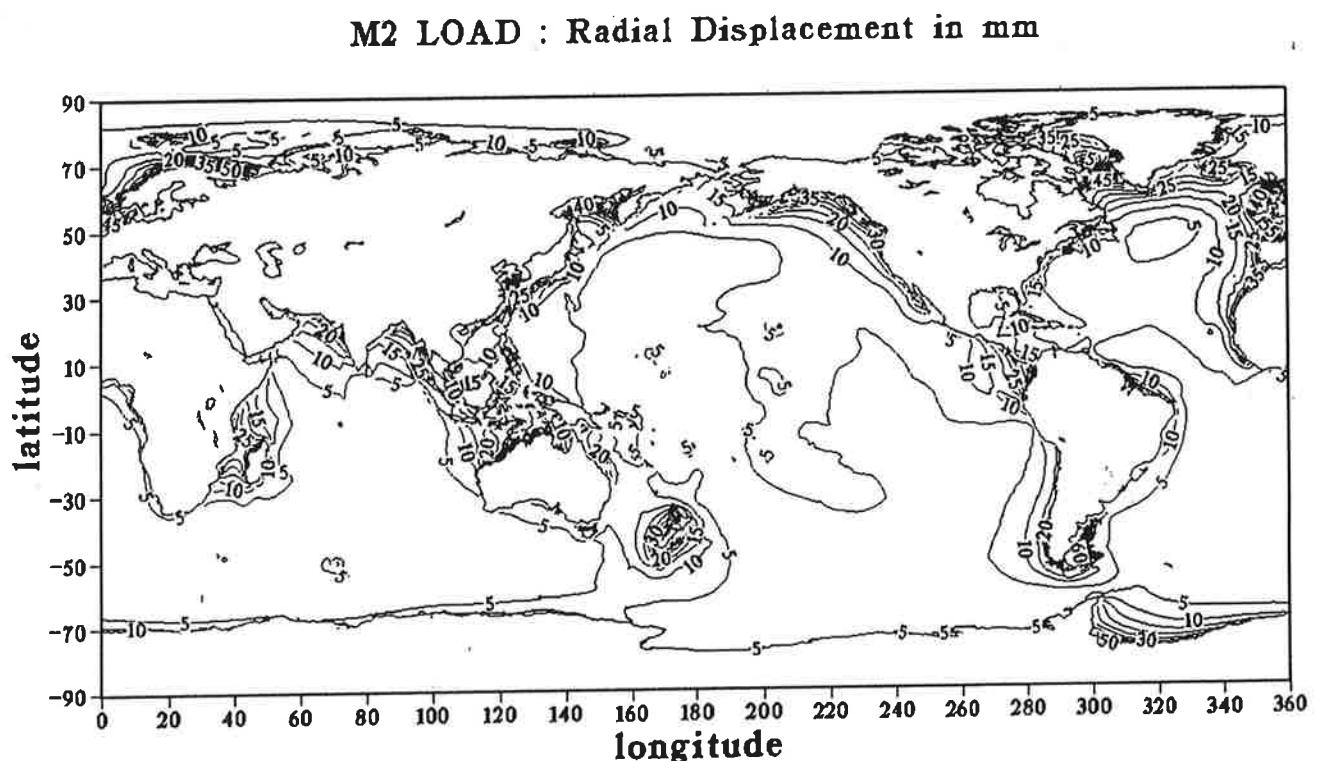


Figure I.8 : Carte de la différence entre l'estimation de l'effet de surcharge par l'intégrale de convolution et par un simple coefficient proportionnel à la marée océanique. L'amplitude du déplacement radial pour l'onde M_2 est en millimètres [tiré de Francis et Mazzega, 1990].

solutions pour une fréquence donnée sans dissipation d'énergie. Proudman [1917] exprima les marées sous la forme d'un développement en fonction des modes normaux lagrangiens des océans, valide, en principe, quelle que soit la forme de l'océan. Le spectre complet des fréquences propres a été calculé par Longuet-Higgins et Pond [1970]. Enfin, Webb [1980] calcule une solution de marée forcée par une variable continue en fréquence avec un terme de dissipation par frottement linéaire. Les résultats obtenus (Figures I.7) confirment que les fréquences des ondes semi-diurnes tombent effectivement dans le domaine des fréquences propres ce qui laisse présager l'existence de phénomènes de résonance. Ils montrent aussi que les élévations de la surface libre ont tendance à être plus fortes près la côte, ce qui est cohérent avec les observations. L'introduction de conditions aux limites plus réalistes augmente très rapidement la complexité des calculs et nécessite une résolution numérique.

I.4.3 - Solutions globales de marées océaniques

Depuis 1970, grâce aux calculateurs de plus en plus puissants, de nombreux modèles globaux de marées océaniques ont vu le jour. Nous ne présenterons que certains d'entre-eux afin d'illustrer les différentes approches. On trouvera une présentation plus détaillée de certains modèles dans Cartwright [1977] et Hendershott [1977].

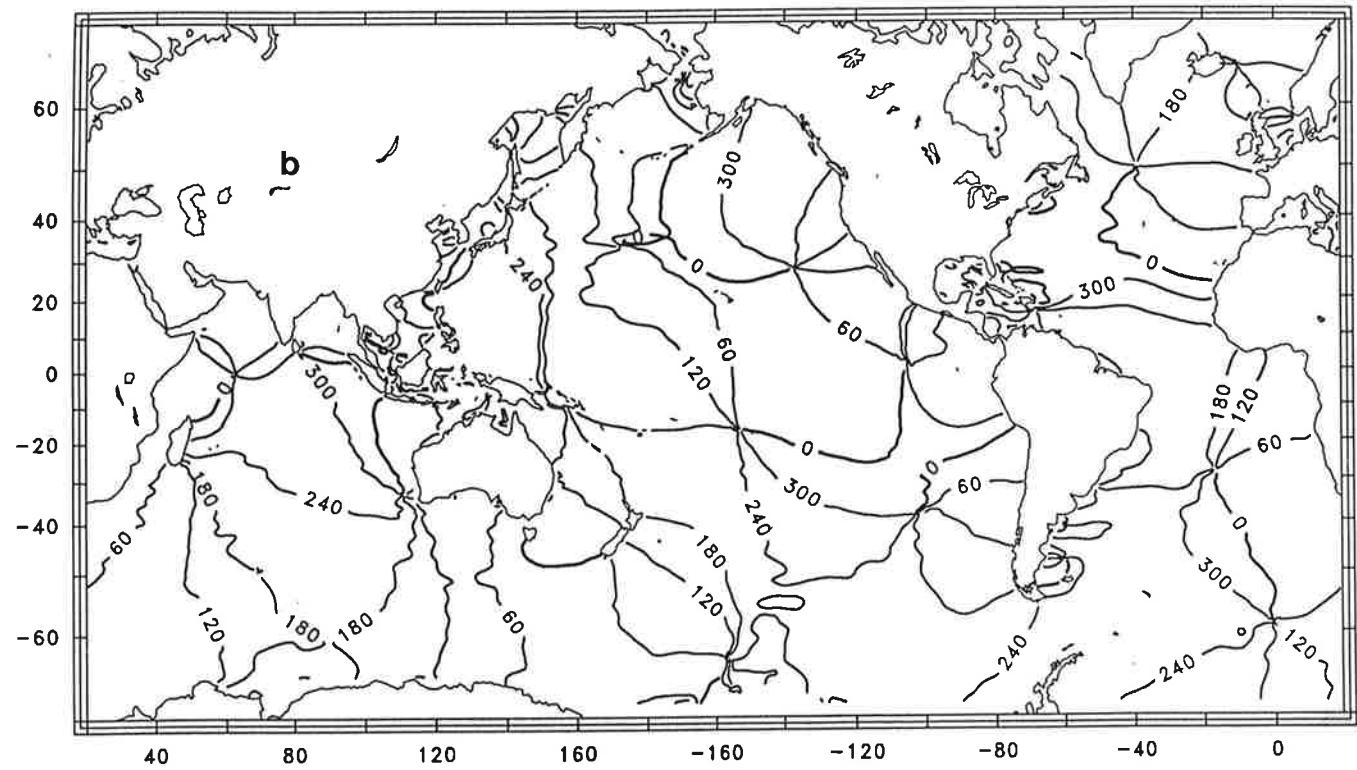
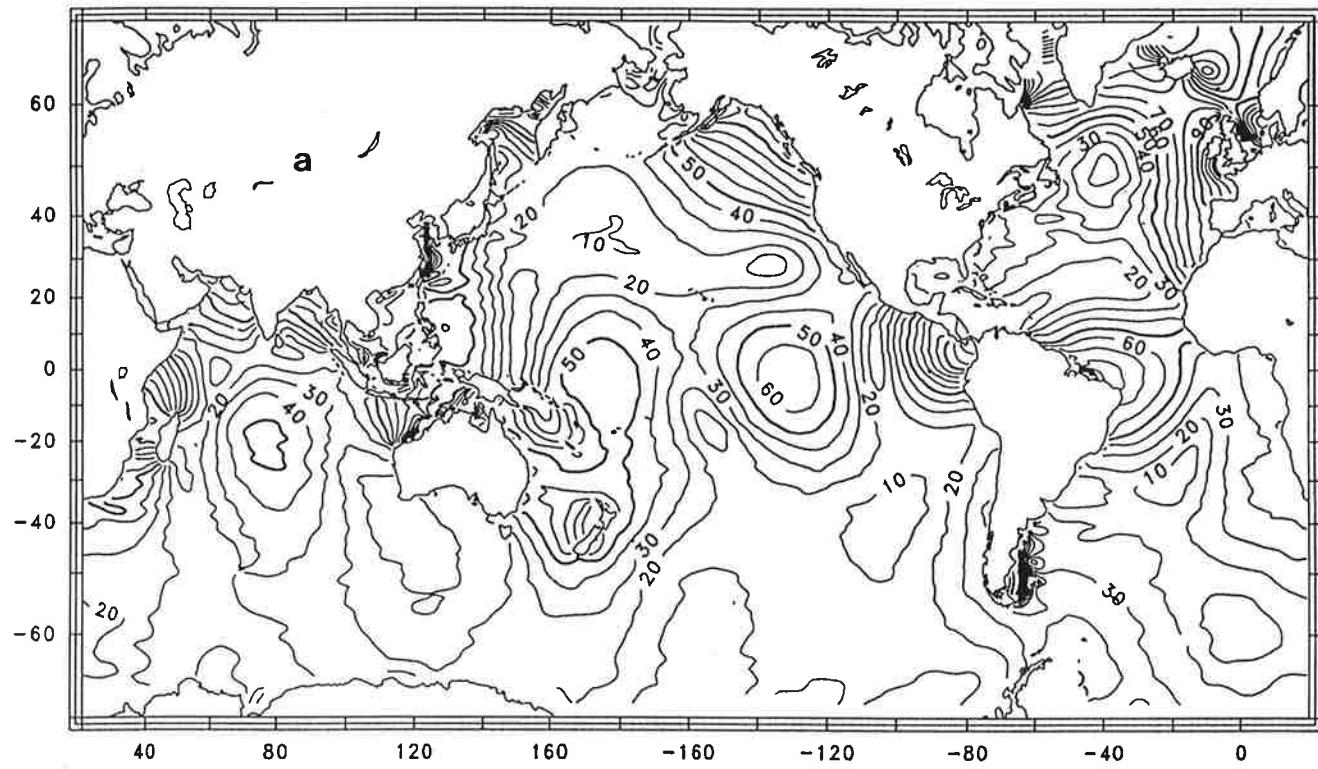
Un modèle obtenu à partir d'observations seules (par exemple par interpolation des données) est dit empirique. Si les données d'observation sont incluses dans un modèle numérique pour le contraindre, le modèle est alors qualifié de modèle semi-empirique. Si, par contre, les données ne servent que comme points de comparaison entre le résultat numérique et la nature, le modèle est dit purement hydrodynamique. Les meilleures solutions actuelles sont du type semi-empirique; leurs précisions sont voisines des modèles empiriques calculés à partir de données des satellites altimétriques. Les développements actuels en modélisation des marées océaniques sont orientés vers les méthodes d'assimilation qui ont pour but de contraindre les modèles hydrodynamiques par les observations à l'aide de méthodes d'optimisation.

Nous présentons succinctement les différents modèles en évoquant les différentes options qui ont été choisies pour traiter le terme de dissipation par friction et le potentiel des effets de surcharge. Les modèles basés sur des décompositions en modes normaux ou en fonctions de Proudman de l'océan mondial seront abordés ainsi que les modèles d'assimilation.

Des études sur les courants dans les rivières et les chenaux ont permis de dériver une expression empirique des termes de dissipation par frottement qui s'écrit :

$$\begin{aligned} F_\theta &= \frac{c}{h+\zeta} u \sqrt{u^2 + v^2} \\ F_\lambda &= \frac{c}{h+\zeta} v \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

où c est une constante universelle égale à 0.0025 ± 0.0005 . La profondeur h qui apparaît dans l'expression reflète bien le rôle important que jouent les mers littorales dans la dissipation de l'énergie. La plupart des modèles utilisent l'expression (1.25) telle quelle tant pour les mers littorales que celles qui couvrent des régions profondes et peu profondes. Sa forme non-linéaire interdit en général toute décomposition spectrale en les différents constituants harmoniques. Les solutions ne peuvent être obtenues que par une intégration spatiale et temporelle incluant les principaux harmoniques de marée. Sous l'hypothèse de l'existence d'une onde dominante (généralement M_2), LeProvost [1973a-b] a montré que l'expression des termes de dissipation peut être linéarisée par un développement en série de Fourier. Ce



Figures I.9: Cartes cotidales de l'onde lunaire M_2 . Amplitudes en cm (a) et phases en degrés (b) d'après Cartwright et Ray [1991]

résultat permet de linéariser également les équations de Laplace et donc de rechercher des solutions spectrales [Vincent et LeProvost, 1988]. A l'inverse, Accad et Pekeris [1978] et Parke et Hendershott [1980] éliminent les termes de dissipation dans les équations, mais permettent à l'énergie de se dissiper au travers de certaines frontières ouvertes dans des zones littorales. Pour cela, ils relâchent la contrainte d'imperméabilité aux frontières continentales. D'autres auteurs [par exemple, Zahel, 1977 et Schwiderski, 1980a] introduisent en plus du terme de dissipation par frottement, un terme représentant la dissipation de l'énergie par viscosité latérale traduisant que les courants des marées peuvent injecter de l'énergie dans les tourbillons horizontaux. Le formalisme comprend un coefficient arbitraire dont la valeur varie dans une fourchette assez large. Ce terme a l'avantage d'assurer à la solution une stabilité numérique.

La surcharge océanique produit une variation du potentiel qui agit sur la marée océanique elle-même. Tenir compte de ce potentiel additionnel complique grandement la résolution des équations. Le potentiel de surcharge est calculé, comme nous l'avons déjà vu, par intégration de la solution de la marée en hauteur sur tous les océans transformant l'équation de Laplace en une équation intégro-différentielle. Hendershott [1972] proposa un schéma itératif qui ne converge qu'en présence d'un terme de dissipation de l'énergie. Parke et Hendershott [1980], bien que leur modèle soit non dissipatif, utilisèrent ce schéma itératif pour construire à partir d'une première solution un ensemble de fonctions de base leur permettant d'interpoler au sens des moindres carrés les données sur les îles. Accad et Pekeris [1978] proposèrent une procédure qui converge lentement mais dont la convergence peut être accélérée en remplaçant l'intégrale de charge par un terme proportionnel à la hauteur de marée. Cette approximation a aussi été utilisée par Schwiderski [1980a-b] pour simplifier les équations. Elle donne de bons résultats en plein océan mais est discutable en mers littorales (Figure I.8) où les modèles sont généralement contraints par des données de marégraphie côtière. Actuellement, les modélisateurs introduisent dans les équations l'effet de surcharge calculé à partir des cartes de Schwiderski [LeProvost et Vincent, 1991].

Une alternative à la résolution des équations hydrodynamiques consiste à déterminer les modes normaux des océans et leurs fréquences de résonance. Les modes normaux ont été calculés par Gotlib et Kagan [1980] sur une grille $5^\circ \times 5^\circ$ et par Platzman et al. [1981] avec un modèle aux éléments finis sur une grille $3^\circ \times 3^\circ$. Sanchez [1991] calcule les fonctions de Proudman pour tous les océans sur une grille $4^\circ \times 4^\circ$ avec des conditions réalistes. Il a résolu l'équation 1.24 sans terme de potentiel générateur avec une condition d'imperméabilité le long des frontières continentales. Aucun terme de dissipation par frottement n'est inclus; toutefois, il semblerait que les fréquences propres ne soient que faiblement affectées par les effets dissipatifs. Sanchez et al. [1985] optèrent pour une décomposition des marées océaniques sur les fonctions de Proudman calculées au préalable sur l'entièreté des océans. Les fonctions de Proudman sont fondamentalement les fonctions propres de l'équation de conservation de la masse avec des frontières continentales imperméables. Elles sont encore plus élémentaires que les modes normaux et en un sens moins restrictives en ce qui concerne les hypothèses physiques. Sanchez [1991] compte calculer des solutions globales en décomposant les marées sur une base de fonctions de Proudman dont les coefficients seront obtenus par un ajustement par moindres carrés d'observations altimétriques et/ou marégraphiques. L'avantage d'une telle décomposition par rapport une décomposition classique en polynômes de Legendre est que l'on peut obtenir la même précision en ajustant un plus petit nombre de coefficients.

La tendance actuelle de la recherche en marée océanique porte sur l'utilisation de méthodes d'assimilation. Garrett et Greenberg [1977] ont publié la première étude théorique sur l'assimilation en marées océaniques. Les techniques d'assimilation sont en quelque sorte une généralisation des méthodes semi-empiriques qui présentent l'avantage d'être plus

Table I.3 : Caractéristiques des principaux modèles numériques de marée océanique que nous avons discutés.

Modèle	Type	Résolution spatiale	Conditions limites	Mode de dissipation	Onde	Potentiel
Zahel (1977)	semi-empirique	1 degré	imperméabilité + glissement	frottement linéaire + viscosité latérale	M ₂	potentiel complet + charge
Accad et Pekeris (1978)	hydrodynamique	2 degrés	radiation	rien	M ₂ , S ₂	potentiel complet + charge
Parke et Hendershot (1980)	semi-empirique	6 degrés	élévations aux côtes	rien	M ₂ , S ₂ , K ₁	potentiel complet + charge
Schwiderski (1980)	semi-empirique	1 degré	interpolation données + condition de flux entrant / flux sortant	frottement linéaire + viscosité latérale	M ₂ , S ₂ , N ₂ , K ₂ , O ₁ , K ₁ , P ₁ , Q ₁ , M _m , M _f , S _{sa}	potentiel complet + charge
Platzman (1981)	modes normaux	4,5 degrés	rien	rien	M ₂	rien
Gotlib et Kagan (1982)	hydrodynamique + modes normaux	5 degrés	réflexion et paramétrisation de l'effet de plateaux	frottement quadratique	M ₂	potentiel complet pas de charge

rigoureuses et plus complètes. De premières solutions sur les océans ont été obtenues par Zahel [1991] et Jourdin [1992] en perturbant l'équation de continuité et les conditions aux limites de type Dirichlet aux frontières ouvertes afin de minimiser l'écart aux données. Le problème ainsi formulé est linéaire. Dans l'avenir, d'autres paramètres seront relâchés tels que la bathymétrie et les coefficients de friction rendant le problème non-linéaire.

L'altimétrie par satellite a ouvert de nouveaux sentiers en recherche sur les marées océaniques à l'échelle globale. Certains auteurs [Mazzega, 1985; Woodworth et Cartwright, 1986] ont construit des cartes cotidales de l'onde M_2 à partir des données du satellite altimétrique Seasat. Ces cartes sont qualitativement correctes mais n'égalent pas en précision les derniers modèles semi-empiriques. Les raisons principales sont le manque de données (Seasat n'a fonctionné que quatre mois) et les erreurs trop importantes affectant les données. Ces travaux n'étaient que préliminaires. En effet, depuis, Cartwright et Ray [1991] ont publié à partir des données altimétriques de Geosat des solutions (Figures I.9) pour les 8 ondes principales de marée, qui semblent être de qualité équivalente au modèle de Schwiderski, meilleur modèle semi-empirique à ce jour.

I.5 - Conclusions

Parmi les différentes manifestations des marées que nous avons présentées, les marées terrestres apparaissent comme le phénomène le mieux connu ou du moins le mieux modélisé. Les marées de surcharge océanique sont relativement bien modélisées. Cependant, la précision des estimations des effets de surcharge dépend essentiellement de la précision des modèles globaux des marées océaniques. Modéliser les marées océaniques est un problème plus compliqué. Les approches théoriques aident à la compréhension physique du phénomène, mais ne permettent pas de les calculer et de les prédire avec une précision subdécimétrique. Les approches semi-empiriques donnent les meilleurs résultats et connaissent aujourd'hui un regain d'intérêt au travers des méthodes d'assimilation. Enfin, les modèles purement empiriques actuels obtenus par analyse de mesures altimétriques sont aussi précis que les meilleurs modèles semi-empiriques. Dans l'avenir, il semblerait qu'une amélioration des modèles des marées passe par des méthodes d'assimilation de données de tous ordres (gravimétriques, marégraphiques et altimétriques) dans les modèles hydrodynamiques.

CHAPITRE II

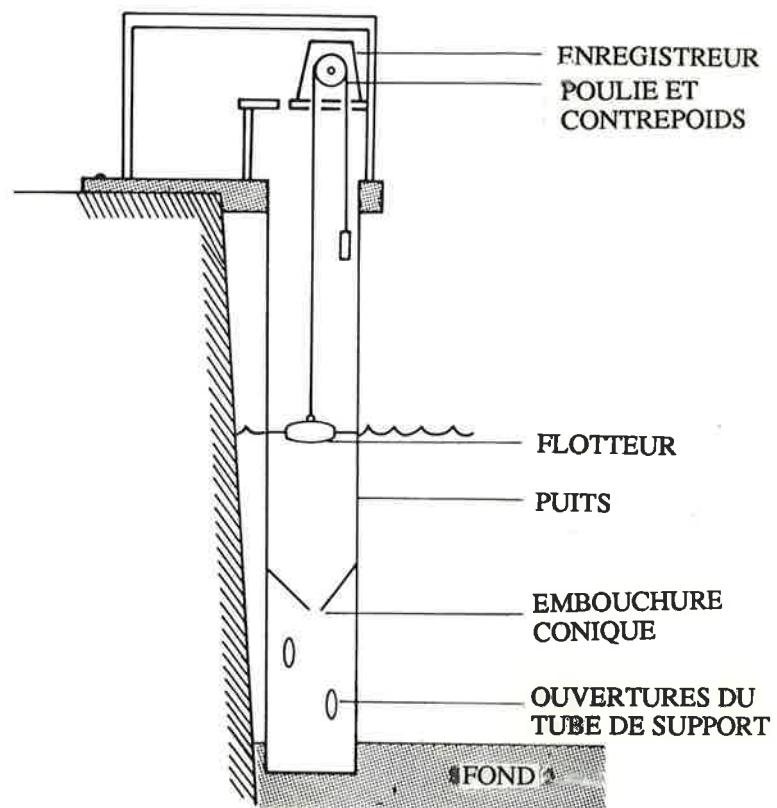


Figure II.1 : Schéma d'un marégraphe à flotteur.

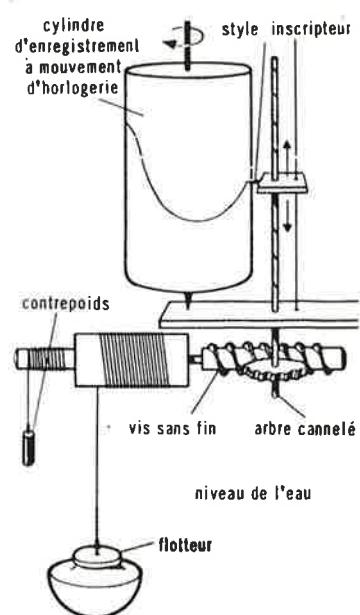


Figure II.2 : Détails du système enregistreur d'un marégraphe à flotteur.

CHAPITRE II : L'OBSERVATION DES MAREES

Modéliser les marées océaniques à partir des observations, tel est notre objectif. L'ensemble des solutions empiriques que nous avons obtenues ont été calculées à partir de mesures marégraphiques, gravimétriques de marée terrestre et d'altimétrie par satellite. L'intérêt de ces trois types de mesures réside dans la complémentarité de leur nature, de leur répartition géographique et des caractéristiques des erreurs qui les affectent. Dans ce chapitre, nous passons en revue les instruments de mesures les plus répandus ainsi que les méthodes classiques d'analyse des observations afin de mieux cerner leur bilan d'erreur qui est un élément essentiel pour la méthode d'analyse que nous exposons dans le chapitre IV. Nous avons regroupé la marégraphie et la gravimétrie sous la même section, car elles concernent des séries temporelles en un site et les méthodes d'analyse sont les mêmes. L'altimétrie est traitée à part car elle est de nature très différente compte tenu de son échantillonnage spatio-temporel.

II.1 - La marégraphie et la gravimétrie

II.1.1 - Les marégraphes

II.1.1.1- Echelles de marée

Depuis deux siècles, la hauteur du niveau de la mer dans les ports est mesurée visuellement sur une mire graduée. Cette méthode a l'avantage d'être peu coûteuse, simple et facile à mettre en oeuvre. Le choix de l'emplacement de l'échelle est un problème essentiel. Il faut tout d'abord veiller à ce que la marée puisse être observée complètement; par conséquent, l'endroit doit être choisi de manière à maintenir le pied de l'échelle constamment dans l'eau. Il faut aussi s'affranchir le plus possible des phénomènes locaux qui peuvent entraver la libre propagation de la marée. Enfin, les échelles doivent être soigneusement nivellées par rapport à des repères géodésiques bien définis du voisinage, le cas échéant, au niveling général du pays. Cette opération permet le rattachement ultérieur lors du remplacement de l'échelle, ce qui est indispensable pour le suivi du niveau moyen de la mer.

Par mer calme, on peut déterminer la hauteur du niveau de l'eau à l'aide d'une mire avec une précision de 2 cm. Des expériences ont montré qu'un opérateur expérimenté peut atteindre une précision de 5 cm sur les lectures en présence de vagues d'une amplitude de 1.5 m. Malgré tout, des erreurs systématiques existent à cause soit d'un biais de lecture inhérent à l'opérateur soit de la différence entre l'éclairage du jour et de la nuit.

Le système de lecture des échelles de marée peut être amélioré en enfermant la mire dans un tube transparent de 2.5 cm de diamètre. Ce dernier est alors connecté à un autre tube d'un diamètre de 0.4 cm et d'une longueur de 2.7 m [Pugh, 1987]. Ce dispositif moyenne le signal sur 30 secondes, ce qui est suffisant pour atténuer les effets des vagues et permettre ainsi une lecture plus aisée.

Aujourd'hui, les mesures visuelles sont abandonnées en raison du problème de la main d'oeuvre (une lecture était faite tous les quarts d'heure).

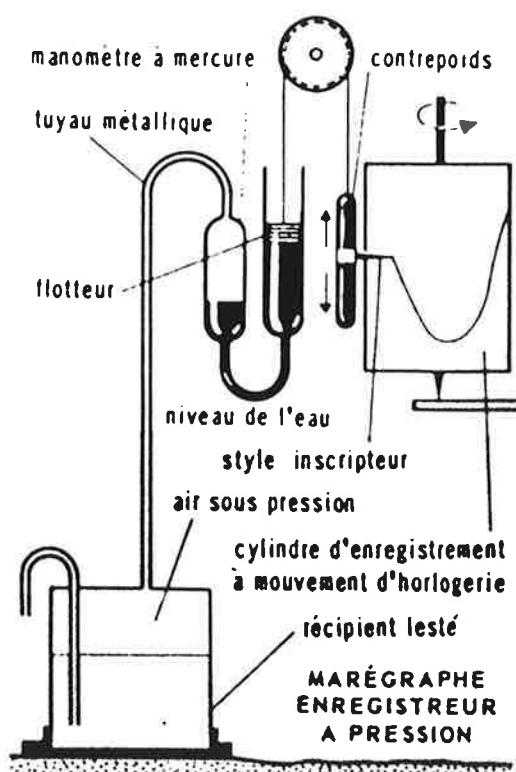


Figure II.3 : Schéma d'un marégraphe à pression.

II.1.1.2 - Marégraphes à flotteurs

Dès la seconde moitié du XIX^e siècle, les enregistreurs automatiques à flotteurs ont été installés dans la plupart des stations marégraphiques permanentes. C'est le seul instrument encore utilisé actuellement qui mesure directement la hauteur du niveau de l'eau, c'est-à-dire la grandeur physique recherchée. La Figure II.1 reprend les composants principaux des marégraphes à flotteurs. Un flotteur est disposé dans un tube vertical en communication avec la mer. Le tube est inséré dans un puits et doit plonger bien en dessous du niveau le plus bas que peut atteindre la surface à mesurer. Le fond du tube se termine en "cône" qui repose sur un autre tube scellé sur le fond. Ce tube "support" a de petites ouvertures qui opposent une résistance au flux entrant. L'orifice conique retient le flux afin d'amortir les variations rapides de la hauteur de l'eau (houle et clapotis) tout en évitant une réduction de l'amplitude ou un déphasage de la marée. Un fil métallique posé sur une poulie est fixé au flotteur par l'une de ses extrémités tandis qu'à l'autre un contrepoids y est suspendu. La rotation de l'axe de la poulie sous l'effet du déplacement vertical du flotteur commande le déplacement rectiligne d'un chariot portant un style (Figure II.2). Celui-ci trace la courbe de marée sur une feuille de papier posée sur un tambour entraîné par un mouvement d'horlogerie. De nos jours, les enregistrements numériques sont de plus en plus utilisés.

Le bon fonctionnement d'une station nécessite une installation soignée et une surveillance régulière. Il faut vérifier périodiquement l'horloge ainsi que la calibration et, au moins une fois par an, il faut rattacher le marégraphe par niveling. Enfin, bien que les marégraphes à flotteurs soient robustes et de manipulation relativement simple, ils présentent certains désavantages : ils sont coûteux et difficiles à installer; ils nécessitent la construction d'un puits; la précision est de l'ordre de 2 cm en hauteur et de 2 minutes en temps à cause de l'épaisseur de la courbe sur le papier; la lecture des courbes pour de longues périodes est fastidieuse et est propice aux erreurs; enfin, l'égalité des niveaux intérieurs et extérieurs peut être perturbée par divers phénomènes (bouchage des orifices de communication par des algues, coquillages, ...; écart de la densité moyenne de l'eau à l'intérieur et à l'extérieur du puits dans le cas de site près d'un estuaire; effets dynamiques d'écoulement autour du puits; détérioration du puits).

II.1.1.2 - Marégraphes à pression

Une autre approche consiste à mesurer la pression en un point fixe sous la surface de l'eau et de la convertir en hauteur en utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique :

$$P = P_A + \rho g D \quad (2.1)$$

où P est la pression mesurée, P_A la pression atmosphérique en surface, ρ la densité moyenne de la colonne d'eau au-dessus de la sonde, g l'accélération gravitationnelle, et D la profondeur. Les mesures doivent être corrigées de la pression atmosphérique et des effets dynamiques d'écoulement autour de la sonde. De même, la connaissance de la densité moyenne sur la colonne d'eau est indispensable. Pour les mesures par petit fond, on se contente en général de la densité en surface; pour les mesures par grands fonds (supérieurs à 200 m), on conserve en général la pression comme paramètre.

Les avantages de ce type de marégraphes sont multiples : la construction préalable d'un puits est inutile; le système d'enregistrement peut être éloigné du point de mesure; on peut l'installer presque partout.

Lorsque le capteur de pression est placé en surface, la pression est transmise depuis le fond par un tube d'air par exemple (marégraphes à fuite). La pression du tuyau est mesurée par un

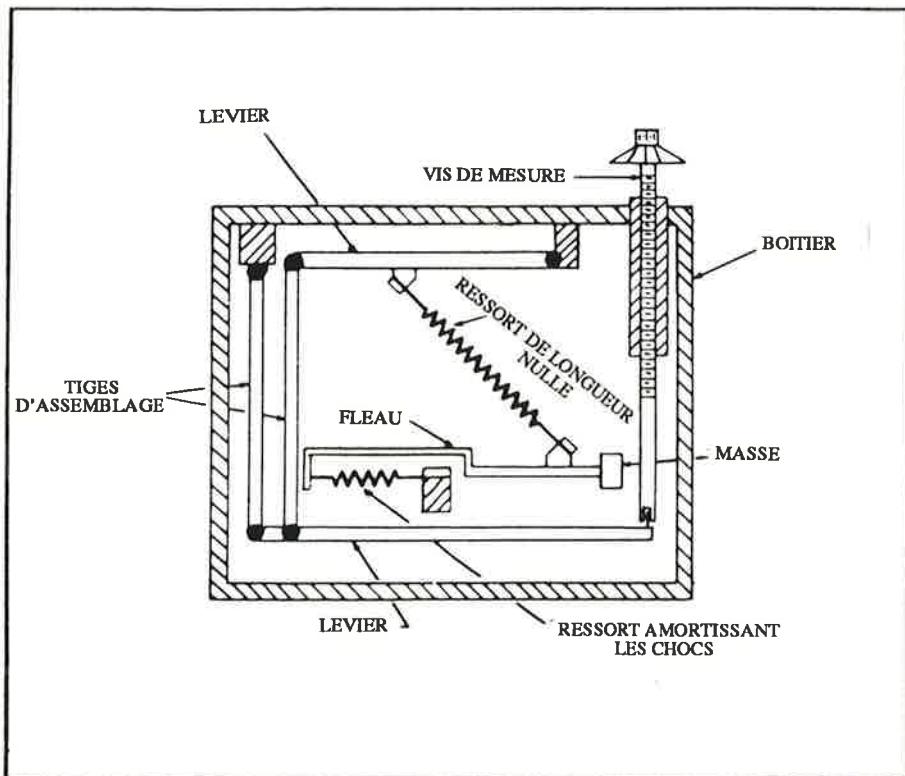


Figure II.4 : Schéma d'un gravimètre LaCoste Romberg.

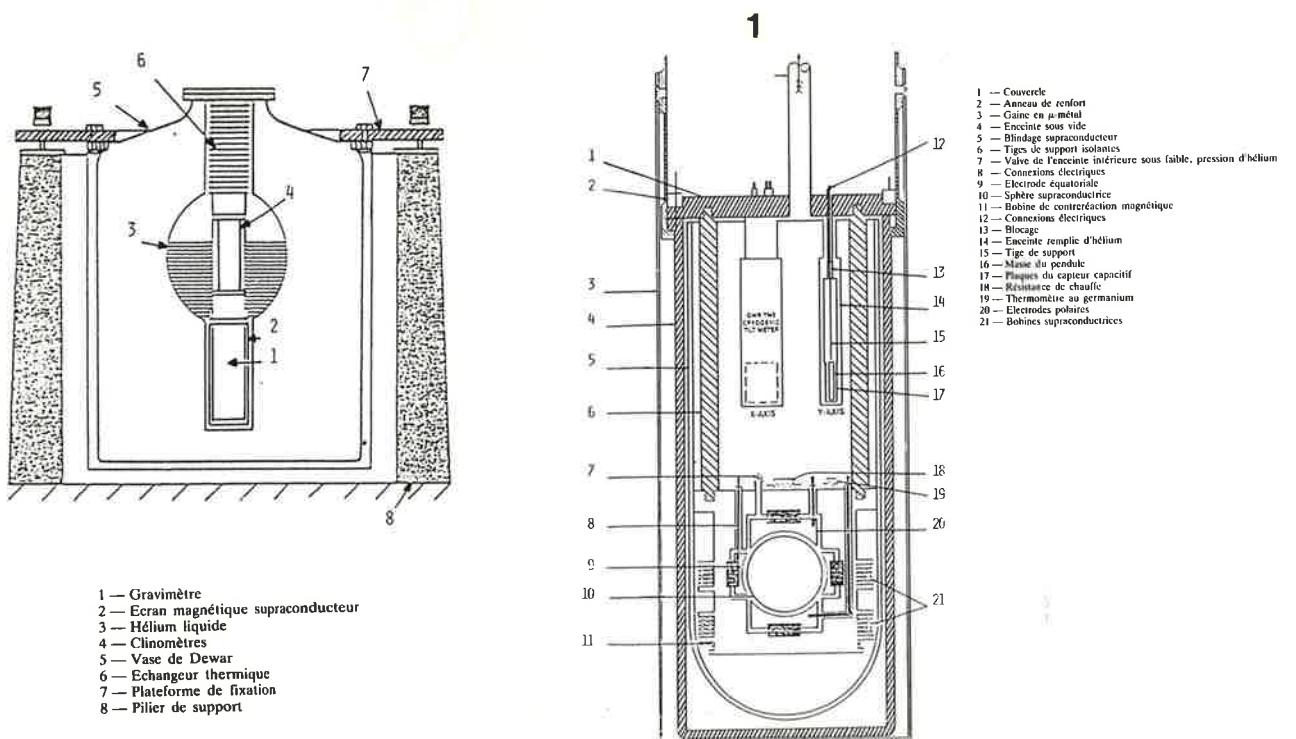


Figure II.5 : Schéma d'un gravimètre supraconducteur.

manomètre. Dans le cas d'un capteur sur le fond, l'enregistreur peut être placé au fond (marégraphes plongeurs) ou en surface. Le principe des capteurs de pression des marégraphes plongeurs est basé sur la déformation d'un élément sensible ou sur la modification d'une de ses propriétés sous l'influence des variations de pression. Les meilleurs capteurs sont les capteurs à quartz dont la fréquence de résonance du cristal varie en fonction de la pression. La grandeur mesurée n'est malheureusement jamais une fonction simple de la pression et dépend d'autres paramètres tels que la température, le vieillissement, la tension d'alimentation, ... Ce qui limite les performances des instruments par la nécessité de dispositions particulières et d'une calibration sérieuse. Le vieillissement provoque une dérive instrumentale qui rend très aléatoire l'observation des phénomènes à longues périodes. Ceci dit, les marégraphes à pression restent les instruments les plus précis.

II.1.2. - Les gravimètres

Les premières observations des marées terrestres ont été réalisées au moyen de clinomètres dans les années 1890. Les premiers enregistrements avec des gravimètres datent d'une soixantaine d'années et les mesures avec des extensomètres ont débuté dans les années 1950. Nous ne présenterons que les gravimètres car nous ne nous sommes pas servis des autres types de mesures qui sont trop sensibles aux effets locaux et régionaux.

II.1.2.1 - Gravimètres LaCoste Romberg

La construction de tout gravimètre répond au principe suivant : opposer à la pesanteur une force constante qui lui est presque égale et mesurer l'appoint. L'instrument actuellement le plus répandu est le LaCoste Romberg (Figure II.4). La force antagoniste dans ce type d'instrument est la force élastique exercée par un ressort auquel une masse est suspendue. Par construction, le gravimètre amplifie mécaniquement au maximum le mouvement de la masse. La position de la masse peut être ajustée grâce à une vis micrométrique qui, par un système de levier, monte ou descend la masse. Le gravimètre est calibré en comptant le nombre de tours de vis nécessaire pour que la masse reste immobile lorsque le gravimètre est transporté entre deux stations dont on connaît la différence de pesanteur. La variation de pesanteur due aux marées engendre une déflection de la masse qui est détectée électroniquement par un capteur capacitif. Pour détecter des variations de l'ordre de 10^{-10} g (0.1 microgal), une grande stabilité mécanique du gravimètre est nécessaire. Tout le système est compensé en pression et la température est contrôlée au millième de degré.

Les gravimètres astatisés présentent deux problèmes majeurs lorsqu'ils fonctionnent en mode défexion. Primo, la sensibilité des instruments varie en fonction de l'inclinaison de l'appareil. Par exemple, une seconde d'inclinaison du gravimètre suivant la direction du fléau peut provoquer une variation de la sensibilité d'un pour-cent. Une détermination très précise de la sensibilité est impossible à cause du second problème : la réponse des instruments astatisés est très lente en raison de l'hystéresis du ressort. Pour le signal de marée, l'effet de cet hystéresis se traduit par un retard de phase instrumental important qui peut atteindre 2 degrés et une dépendance en fréquence de la réponse en amplitude. Ces problèmes liés aux instruments astatisés en mode défexion ont été résolus en modifiant les gravimètres en méthode de zéro : la masse est maintenue en position fixe par une contre-réaction mécanique entretenue par le signal du capteur capacitif qui actionne un moteur ajustant en continu la vis de mesure. Mieux, le signal du capteur capacitif est appliqué aux plaques extérieures provoquant une contre-réaction électrostatique qui fournit une force électrostatique de rappel. Un tel dispositif rend la sensibilité des gravimètres invariante, car on mesure directement la force de rappel. De plus, le déphasage instrumental dû à l'hystéresis est éliminé.

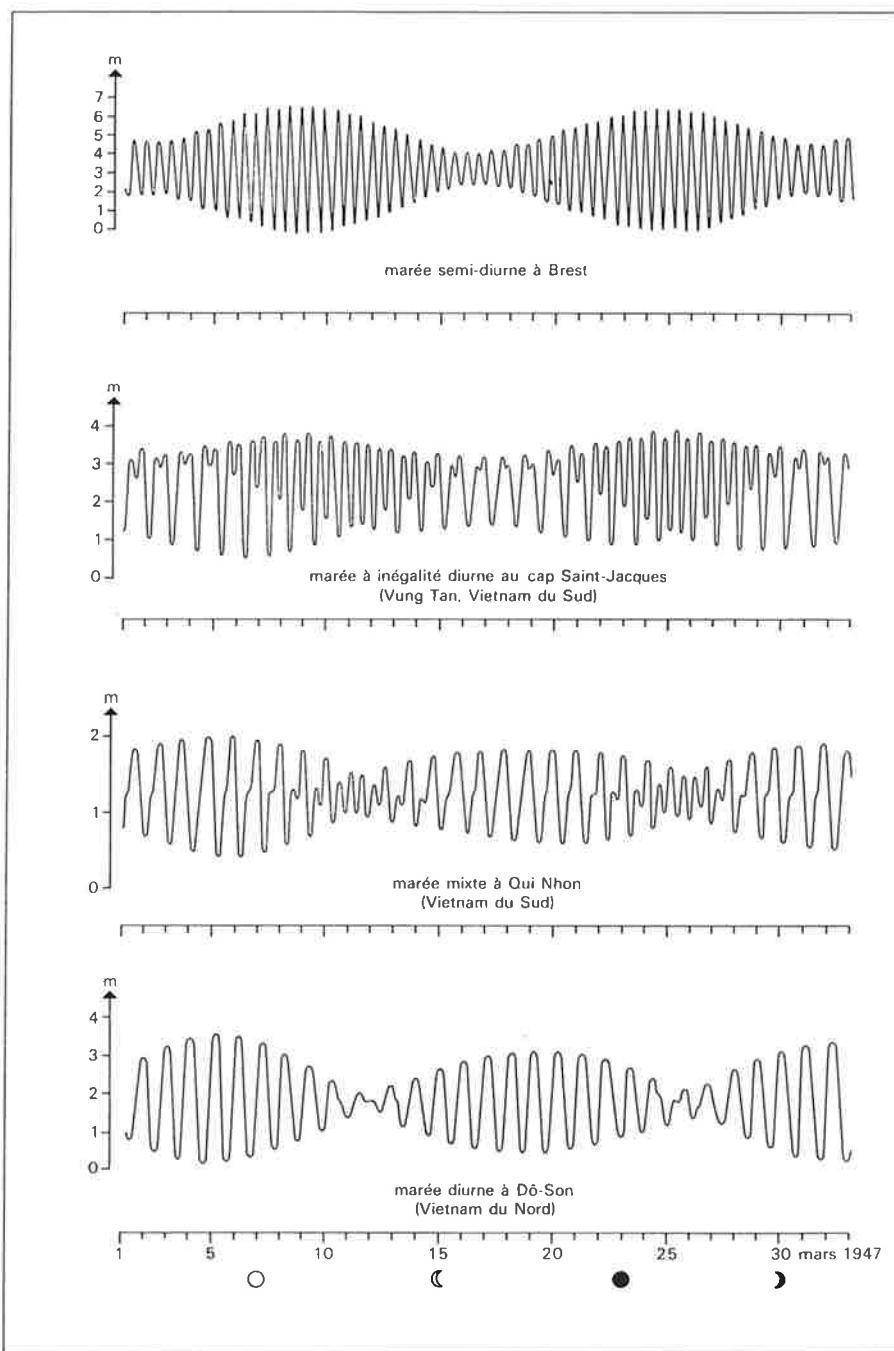


Figure II.6 : Les différents types de marées [tiré de l'Encyclopédie Universalis, 1968].

L'inconvénient majeur des gravimètres à ressort est la dérive instrumentale liée à la rhéologie des ressorts. Les causes sont multiples : les chocs de transport, les variations de température bien que les instruments soient thermostatés, l'humidité et le vieillissement des ressorts. La résolution des LaCoste Romberg peut atteindre 0.1 microgal après élimination de la dérive instrumentale qui peut varier entre 1 et 100 microgal par jour.

II.1.2.2 - Gravimètres supraconducteurs

Dans les gravimètres supraconducteurs (Figure II.5), le ressort mécanique est remplacé par un "ressort" magnétique pratiquement sans dérive. Une masse supraconductrice est mise en lévitation dans un gradient du champ magnétique engendré par une paire de bobines supraconductrices. La position de la masse est détectée par un transducteur de déplacement par pont capacitif et une force de contre-réaction électromagnétique maintient la masse en position fixe. Les variations du courant de contre-réaction constituent la mesure des variations de g. Grâce à la stabilité inhérente des courants persistants dans un supraconducteur, l'instrument a un rapport signal sur bruit très élevé et une faible dérive instrumentale de l'ordre de 5 microgal par an. Le gravimètre supraconducteur est donc un instrument très attrayant pour mesurer les marées à longues périodes ainsi que les variations séculaires de gravité. La résolution atteint 10 nanogal ($=10^{-11}$ g). La calibration se fait par ajustement de l'amplitude de l'onde de marée M_2 à la valeur déterminée au même site par un autre gravimètre. Un réseau est opérationnel actuellement en Europe. Il comporte quatre stations : Bruxelles, Wettzell, Strasbourg et Postdam. Plus d'une dizaine de gravimètres supraconducteurs sont installés de par le monde; parmi les pays qui possèdent des gravimètres, citons : la Chine, le Japon, le Canada, l'Italie et la Grèce.

II.1.3 - Méthodes d'analyse

L'objectif de l'analyse des observations marégraphiques et gravimétriques est de réduire le nombre considérable de mesures à un nombre restreint de paramètres. Ceux-ci doivent être choisis de telle sorte qu'ils permettent de reproduire les courbes observées et de faire des prédictions. L'analyse harmonique est un outil théorique particulièrement bien adapté à l'analyse des enregistrements de marées en raison de leur caractère périodique évident, qui peut présenter des variantes suivant les lieux considérés (Figure II.6). D'autres méthodes d'analyse non-harmonique n'utilisent pas le développement a priori de la marée en une somme de termes périodiques de périodes déterminées. Ces méthodes reposent sur la recherche de relations entre les diverses manifestations de la marée et d'autres paramètres bien connus comme des éléments astronomiques ou le potentiel générateur des marées.

L'objectif principal de l'analyse des mesures marégraphiques est de se donner les moyens de faire les prédictions les plus précises possibles à des fins, par exemple, de navigation. En marée terrestre, les prédictions sont utilisées pour réduire les mesures de gravimétrie de terrain. De plus, la comparaison entre les valeurs calculées des amplitudes et phases théoriques avec les constantes observées correspondantes fournit des contraintes sur les paramètres rhéologiques de la Terre et des informations sur les effets de surcharge océanique.

II.1.3.1 - Analyse harmonique

II.1.3.1.1 - Généralités

Les observations de marées $\zeta(t)$ peuvent être séparées en deux composantes :

$$\zeta(t) = \zeta_m(t) + \epsilon(t) \quad (2.2)$$

Table II.1 : Ordre dans lequel les constituants semidiurnes sont sélectionnés dans le programme d'analyse harmonique de Foreman et Henry [1989] en fonction de la durée des enregistrements.

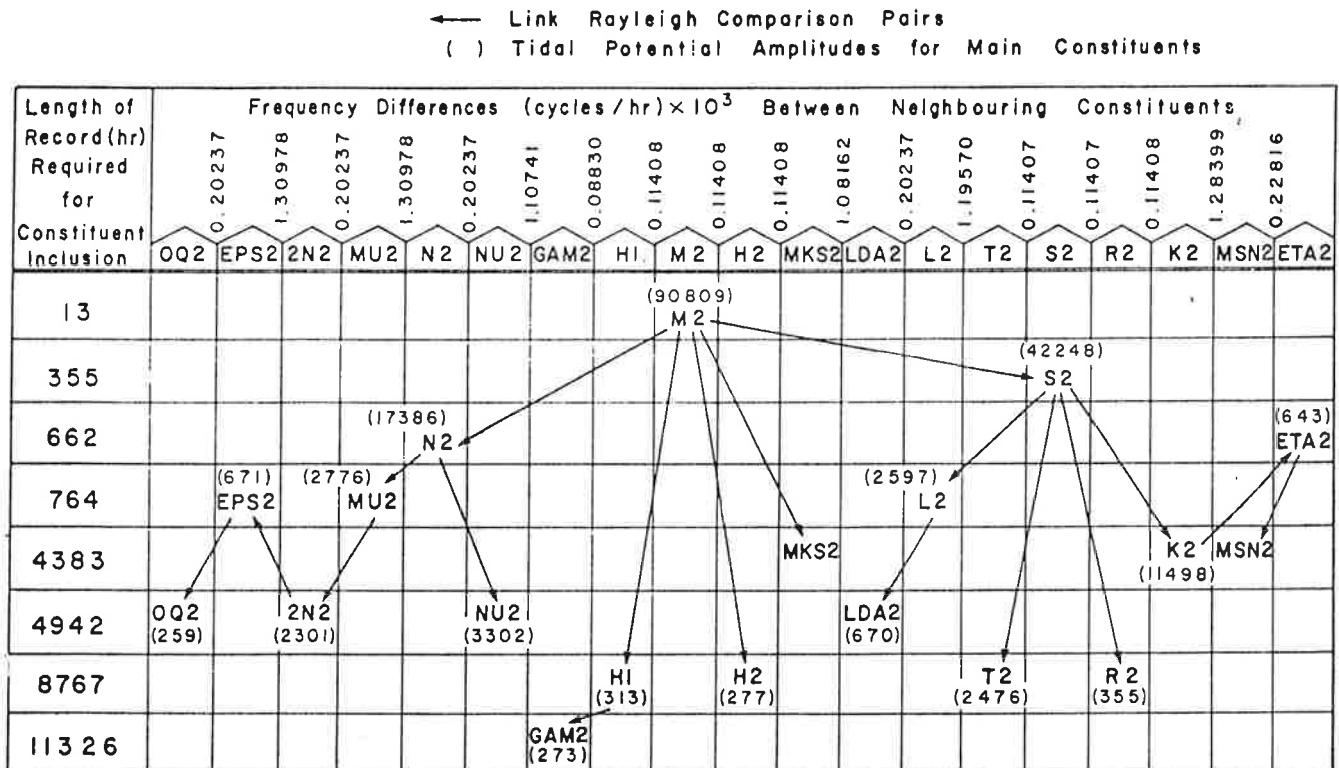
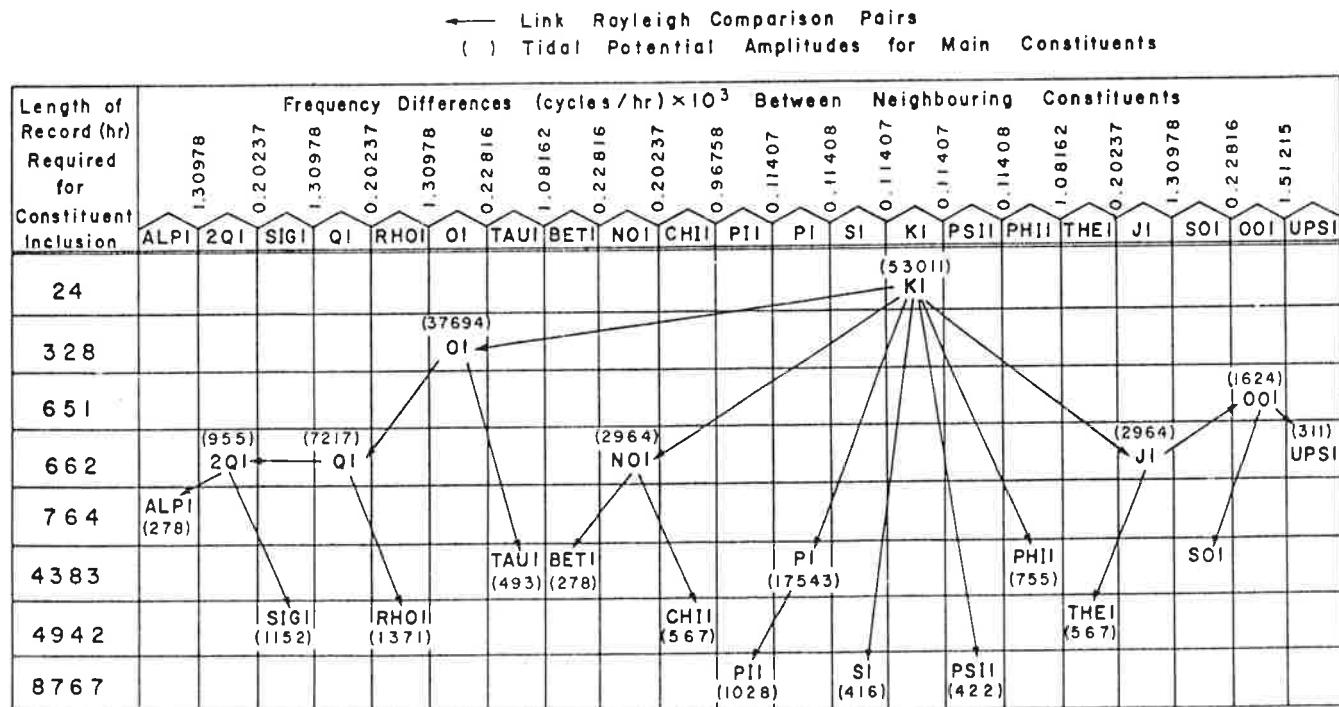


Table II.2 : Ordre dans lequel les constituants diurnes sont sélectionnés dans le programme d'analyse harmonique de Foreman et Henry [1989] en fonction de la durée des enregistrements.



où $\zeta_m(t)$ est la composante des marées et $\varepsilon(t)$ le bruit composé des variations accidentnelles du signal dues essentiellement aux influences météorologiques. En outre, $\varepsilon(t)$ contient les erreurs instrumentales et de dépouillement des observations. Réécrivant la composante des marées sous la forme harmonique déduite du développement du potentiel générateur (éq. 1.23), on obtient :

$$\zeta(t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n t - G_n + \chi_n) + \varepsilon(t) \quad (2.3)$$

$$= \sum_n A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n) + \varepsilon(t) \quad (2.4)$$

où $\omega_n = a_1 \dot{t} + a_2 \dot{s} + a_3 \dot{h} + a_4 \dot{p} + a_5 \dot{N} + a_6 \dot{p_s}$ est la vitesse angulaire (cfr. §I.1.2).

La transformation de Fourier permet d'obtenir les valeurs des constantes harmoniques A_n et α_n :

$$\hat{\zeta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{\zeta}_m(\omega) + \hat{\varepsilon}(\omega) \quad (2.5)$$

soit

$$\hat{\zeta}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n \{ A_n e^{-i\alpha_n} \delta(\omega - \omega_n) + A_n e^{-i\alpha_n} \delta(\omega + \omega_n) \} + \hat{\varepsilon}(\omega) \quad (2.6)$$

où l'accent circonflexe représente la transformée de Fourier et $\delta(\omega - \omega_n)$ est la distribution de Dirac centrée en ω_n .

Classiquement, l'analyse harmonique d'une série temporelle discrète et finie a un pouvoir de résolution limité par trois contraintes : l'existence du bruit dans les observations, la durée finie des observations qui empêche la séparation des ondes de fréquences trop proches et la nature discrète de la série qui réduit l'intervalle de variation des fréquences accessibles.

Théoriquement, le spectre de fréquence des marées contient une infinité de termes. Mais, en pratique, on se limite aux composantes dont l'amplitude est supérieure à l'ordre de grandeur du bruit instrumental. L'analyse harmonique fournit un spectre formé de la superposition des raies spectrales de marée et du spectre continu du bruit. Il est impossible de séparer les deux contributions sans hypothèse supplémentaire sur le spectre du bruit. En général, le spectre du bruit est rouge (c'est-à-dire que le spectre est plus énergétique vers les basses fréquences) à cause des dérives lentes des instruments. Connaissant mal le bruit instrumental, on le considère en général comme un signal aléatoire dont le spectre est blanc (équipartition de l'énergie spectrale en fonction de la fréquence).

La durée des observations T est toujours finie. On ne peut donc bien séparer deux ondes i et j que si leur vitesses angulaires vérifient le critère de Rayleigh :

$$T \cdot |\omega_i - \omega_j| \geq 1 \quad (2.7)$$

Dans le cas contraire, les ondes sont mal séparées. La durée d'observation doit être d'autant plus grande que les ondes à séparer sont plus proches (Table II.1 et II.2). Si le bruit n'est pas trop important et si le signal a un caractère périodique très marqué comme dans le cas des marées, le critère de Rayleigh peut être quelque peu adouci [Foreman et Henry, 1989]. De plus, la séparation d'ondes théoriquement non séparables est possible moyennant des hypothèses supplémentaires reliant les constantes harmoniques sur la base de mesures

antérieures ou des rapports entre les coefficients du potentiel générateur. Ces principes sont à la base de la méthode d'inférence.

Les périodes de p , N' et p_s sont supérieures à 9 ans. Pour les données d'observations courantes, de l'ordre de l'année, le critère de séparation n'est pas vérifié pour les termes dont les arguments astronomiques diffèrent d'une combinaison linéaire de p , N' et p_s . Considérons les ondes k de nombres arguments a_1 , a_2 et a_3 donnés. Parmi celles-ci, désignons ω_n l'onde qui a l'amplitude connue ou estimée maximum tandis que les autres ondes sont dites ondes perturbatrices de cette onde n . Les contributions des ondes perturbatrices peuvent être interprétées comme des modulations de la phase et de l'amplitude de l'onde n . Ce sont des quantités lentement variables avec le temps que l'on peut supposer constantes et égales à leurs valeurs moyennes sur la période d'observation; les corrections dites nodales sont apportées pour tenir compte de ces modulations. En pratique, pour calculer ces corrections, il faut faire des hypothèses sur les rapports de l'onde principale sur les ondes modulatrices et sur les déphasages à partir des coefficients astronomiques. On trouvera dans Godin [1972] un exposé détaillé sur les corrections nodales.

Le dernier point concerne une conséquence de la discréétisation des séries d'observation. A chaque pas d'échantillonnage Δt correspond une fréquence de coupure dite fréquence de Nyquist. Toute fréquence supérieure à celle-ci ne peut pas être estimée et est aliasée. Pour éviter le phénomène d'aliasing, qui est le repliement du spectre des fréquences au-delà de la fréquence de Nyquist vers les basses fréquences, il faut choisir le pas d'échantillonnage de sorte que l'énergie spectrale soit pratiquement nulle au-delà de la fréquence de Nyquist.

II.1.3.1.2 - Méthode d'élimination

Le but des méthodes d'élimination est d'amplifier par un filtrage approprié des observations, une onde déterminée tout en éliminant plus ou moins les autres ondes et le bruit. Le filtrage est réalisé par combinaisons linéaires simples (coefficients entiers) des observations. Darwin a mis au point la "méthode des heures spéciales" qui est basée sur la constatation que les phases des ondes T_1 prennent la même valeur à des instants séparés de T_1 tandis que les phases des autres ondes prennent des valeurs à peu près uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ pourvu que la durée d'observation considérée soit assez longue.

En 1928, Doodson proposa une méthode, encore utilisée aujourd'hui dans les pays de l'école anglaise, qui consiste à séparer successivement les différentes espèces à l'aide de combinaisons journalières appropriées des observations horaires, puis les groupes à l'intérieur de chaque espèce à l'aide de combinaisons mensuelles des valeurs précédentes et enfin les sous-groupes à l'intérieur de chaque groupe à l'aide de combinaisons annuelles [voir Melchior, 1983].

II.1.3.1.3 - Méthode des moindres carrés

On recherche les constantes harmoniques A_n et α_n qui minimisent selon le critère des moindres carrés l'expression suivante [voir Foreman et Henry, 1989]:

$$\sum_i^{N_{obs}} |\epsilon(t_i)|^2 = \sum_i^{N_{obs}} \left| \zeta(t_i) - \sum_n A_n \cos(\omega_n t_i - \alpha_n) \right|^2 \quad (2.8)$$

Les inconnues sont déterminées en formant et en résolvant numériquement les équations normales. Cette méthode n'a pu être mise en oeuvre qu'avec la mise en service d'ordinateurs assez puissants. L'avantage de ce type de méthode est qu'elle s'applique quel que soit l'échantillonnage des données. On fait l'hypothèse que le bruit suit une loi de probabilité

gaussienne et centrée. Il faut donc veiller à ce qu'il n'y ait pas d'erreur systématique dans les observations.

En pratique, on peut tenter d'estimer en une étape un très grand nombre d'ondes. Cependant, la recherche d'ondes théoriquement non séparables conduit à un système mal conditionné. On ne peut donc se soustraire au critère de Rayleigh.

II.1.3.2 - Analyse non-harmonique

On peut distinguer deux catégories de méthodes d'analyse non-harmoniques : la méthode des concordances et la méthode de réponse ou de convolution.

II.1.3.2.1 - Méthode des concordances

La méthode des concordances repose sur la recherche de relations empiriques existant entre la marée et divers paramètres dont la connaissance permet la prédiction de la marée. On relie, par exemple, les heures des pleines et basses mers à des quantités astronomiques observables. La comparaison des marées entre ports voisins montre que le régime de la marée varie en général lentement le long de la côte. Ainsi, on peut, à partir de la connaissance de la marée dans un port de référence, en déduire la marée dans un port proche [Simon, 1991]. Les méthodes des concordances peuvent porter sur l'heure ou la hauteur de la pleine mer. L'efficacité de ces méthodes est le fait de la cohérence spatiale de la marée qui se traduit par une corrélation spatiale des diverses manifestations de la marée.

II.1.3.2.2 - Méthode de réponse

A partir de 1966, Munk et Cartwright ont développé la méthode de réponse dans laquelle la marée est considérée comme la réponse du système océan à diverses excitations. Par l'analyse des observations, on recherche à déterminer la fonction de transfert de ce système connaissant la fonction temporelle de forçage. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de prendre en compte des variations du niveau de la mer qui ne sont pas uniquement d'origine astronomique. La hauteur d'eau $\zeta(t)$ est exprimée en terme d'une intégrale de convolution dont le noyau $U(t)$ représente les causes physiques des variations de ζ :

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \cdot U(t-\tau) d\tau \quad (2.9)$$

où la fonction w est caractéristique du point considéré et est déterminée en minimisant par moindres carrés les écarts entre la valeur de l'intégrale et les observations. $U(t)$ comprend le potentiel générateur des marées calculé à l'aide d'un développement en harmoniques sphériques :

$$U(\varphi, \lambda, t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} d_{nm}(t) Y_{nm}(\varphi, \lambda) \quad (2.10)$$

En raison de la convergence rapide du développement, on peut se limiter aux termes $n \leq 3$. La méthode de réponse ne nécessite pas le développement harmonique du potentiel générateur qui contient bien plus de termes que le développement en harmoniques sphériques, ni le choix préalable des fréquences à rechercher. En plus, la totalité du potentiel est automatiquement prise en compte ainsi que les corrections nodales. Le théorème de convolution permet de réécrire l'équation (2.9) en fonction des transformées de Fourier :

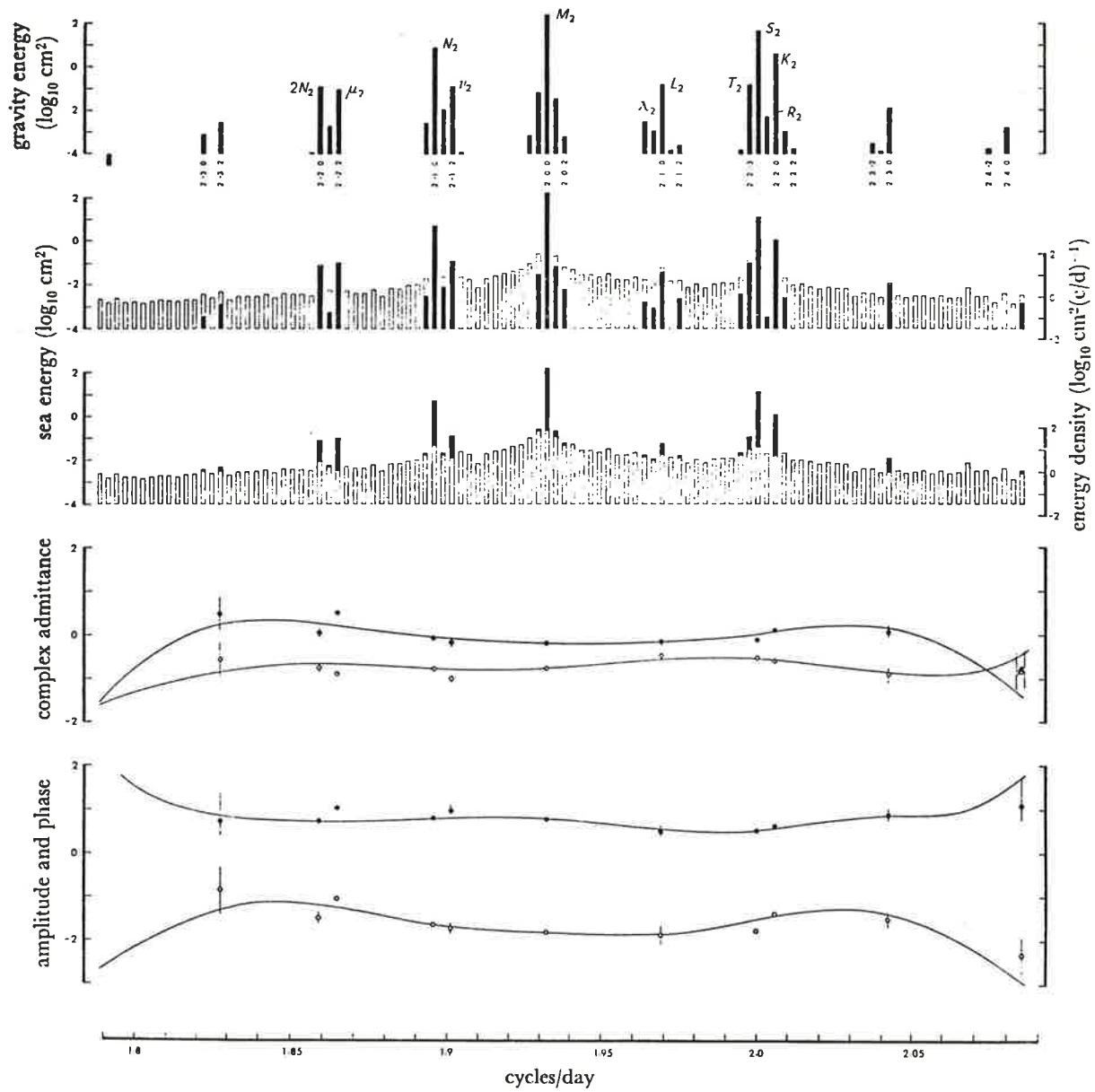


Figure II.7 : Spectre de la marée à Honolulu avec une résolution de 1 cycle par an et pour l'harmonique sphérique semidiurne P_{22} . Le premier diagramme est le spectre de la marée gravitationnelle d'équilibre à Honolulu (normalisée à 10^{-4} cm^2); quelques nombres de Doodson ainsi que quelques symboles de Darwin sont indiqués. Dans les deux diagrammes, la hauteur totale des colonnes représente le spectre de la hauteur d'eau : la partie remplie du premier spectre représente l'énergie cohérente avec la marée d'équilibre; la partie non remplie du second représente la partie non cohérente. Dans le quatrième diagramme, les parties réelles et imaginaires de l'admittance sont indiquées respectivement par des points et des cercles. Enfin, dans le cinquième diagramme, sont dessinées l'amplitude et la phase de l'admittance. Les lignes verticales représentent l'intervalle de confiance d'une probabilité de 95% et les lignes continues sont les fonctions d'admittance dérivées par la méthode de convolution.

$$\hat{\zeta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{w}(\omega) \cdot \hat{U}(\omega) \quad (2.11)$$

L'accent circonflexe représente la transformation de Fourier. La transformée de Fourier de $w(t)$ est interprétable physiquement comme la fonction de transfert entre le potentiel génératrice de la marée et la marée observée, appelée admittance. L'exemple (Figure II.7) tiré de Munk et Cartwright [1966] montre le caractère extrêmement lisse des fonctions d'admittance.

Les constantes harmoniques sont obtenues à partir des valeurs de l'admittance aux fréquences des marées. Une fois l'admittance déterminée, la prédiction de la marée s'obtient en calculant l'intégrale de convolution (2.9). Les prédictions ainsi obtenues sont de qualité semblable à celles calculées par la méthode harmonique.

On peut introduire dans $U(t)$ d'autres causes de variations du niveau de la mer, telles que la pression atmosphérique, le vent ou le rayonnement solaire. Munk et Cartwright [1966] donnent une expression de la fonction d'entrée du rayonnement solaire pour représenter les marées radiationnelles qui distordent la courbe d'admittance qui est en général assez lisse. L'intégrale de convolution peut aussi être complétée :

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\tau) \cdot U(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(\tau, \tau') U(t-\tau) U(t-\tau') d\tau d\tau' + \dots \quad (2.12)$$

où la première intégrale représente les termes linéaires de la réponse de l'océan à l'excitation et les suivants permettent la prise en compte des non linéarités.

En outre, la méthode de réponse permet d'étudier la corrélation entre le niveau d'eau observé en un point et n'importe quelle fonction du temps. Une des particularités de la méthode est qu'elle permet de calculer les fonctions de transfert pour chaque fonction d'entrée suffisamment décorrélée, dont les raies spectrales ne sont pas séparables par une analyse de Fourier.

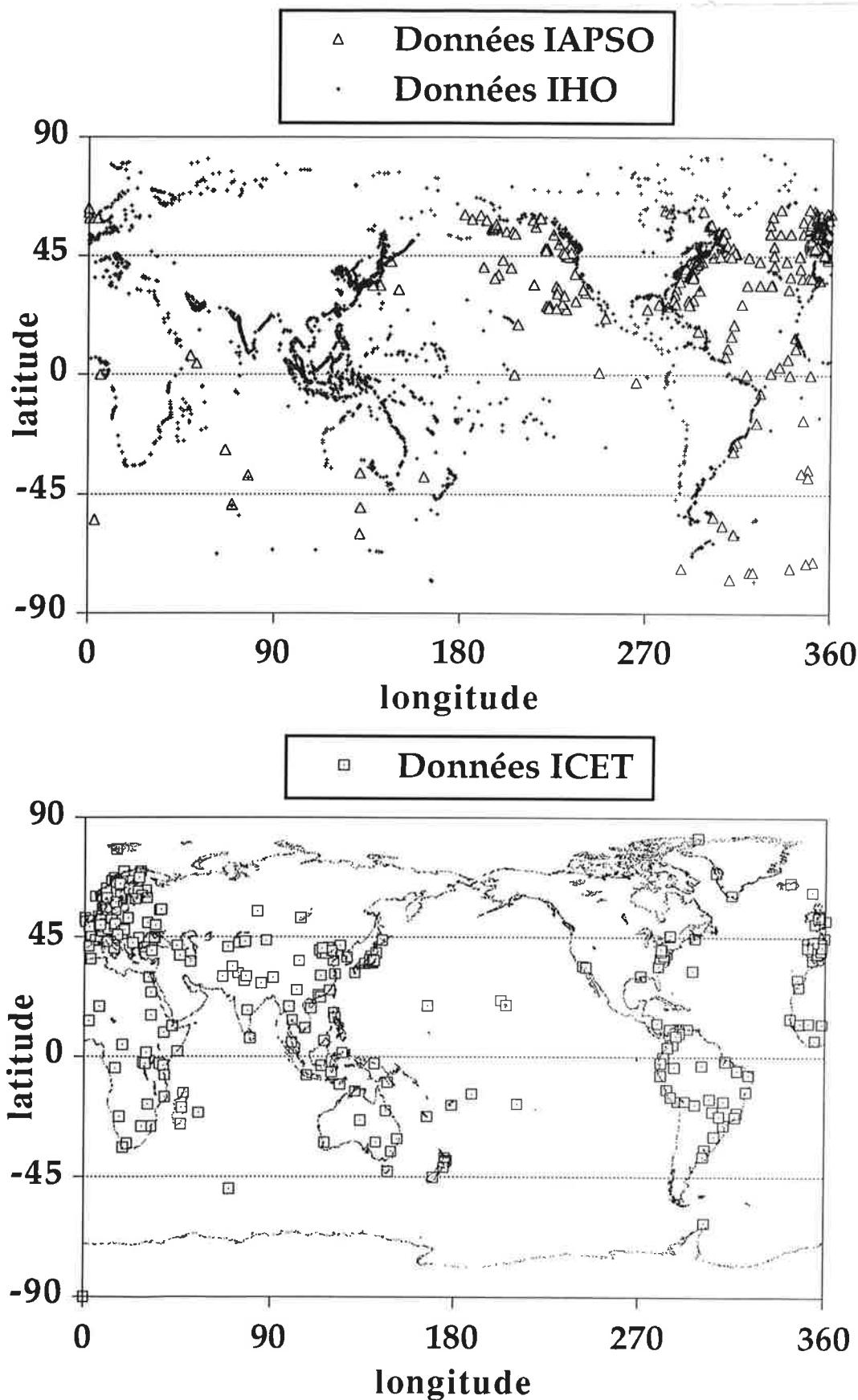
La méthode de réponse a été utilisée pour analyser les observations de marée gravimétrique. Les premiers résultats ont été obtenus par Lambert [1974]. Depuis, De Meyer [1982] a généralisé la méthode afin d'introduire les effets dus à la température, la pression atmosphérique, la dérive instrumentale, ...

II.1.4 - Banques de données

II.1.4.1 - Marégraphie

Les constantes harmoniques utilisées dans ce travail proviennent de l'International Hydrographic Organization (IHO) [1979] et de l'International Association for the Physical Sciences of Ocean (IAPSO).

L'IHO a en charge une banque de données marégraphiques qui, dans la version dont nous disposons, contient 4011 stations (données IAPSO exclues). Les stations sont essentiellement côtières et insulaires (Figures II.8). Les premières stations marégraphiques automatiques sont apparues vers 1830 et les premières campagnes de mesures intensives ont débuté dans les années 1880. Durant les guerres, il y a eu moins d'installations de nouvelles stations marégraphiques. La durée des observations varie de quelques jours à une centaine d'années.



Figures II.8 : Localisation des stations marégraphiques (IHO et IAPSO) et gravimétriques (ICET).

Les durées les plus courantes sont de l'ordre de 30 jours et 1 an qui correspondent aux durées nécessaires pour séparer respectivement les groupes et les constituants (Figures II.9).

L'IAPSO apporte son soutien à la réalisation d'une compilation de constantes de marées pélagiques, c'est-à-dire des constantes de marées obtenues à l'aide de marégraphes à pression situés en haute mer à des profondeurs supérieures à 100 m et éloignés d'au moins un mile nautique des côtes. C'est une initiative récente (de quelques dizaines d'années), qui n'a pu être lancée qu'après la mise au point technique des marégraphes de grand fond dans les années 1965. Ces données sont particulièrement importantes à plusieurs titres. Elles fournissent une mesure des constantes harmoniques en certains points spécifiques en haute mer qui sont bien plus précises que n'importe quel modèle numérique. De telles données permettent de valider les modèles ou même de les améliorer. Elles sont exemptes d'effets locaux présents dans les mers littorales ou engendrés par la topographie côtière. La compilation la plus récente comprend 347 stations réparties de façon inégale sur l'ensemble des océans (Figures II.8)[Smithson, 1992]. L'Atlantique nord ainsi que la partie nord-est du Pacifique sont bien quadrillés. Il y a un déséquilibre entre les deux hémisphères nord et sud en ce qui concerne la répartition géographique et le nombre de stations. La situation est particulièrement fâcheuse dans le Pacifique sud, puisqu'il n'y a aucune mesure. La durée des observations varie entre 0,7 jour et 1,75 an. Les durées sont généralement supérieures à 30 jours et plus de 20% des stations ont observé pendant au moins 1 an.

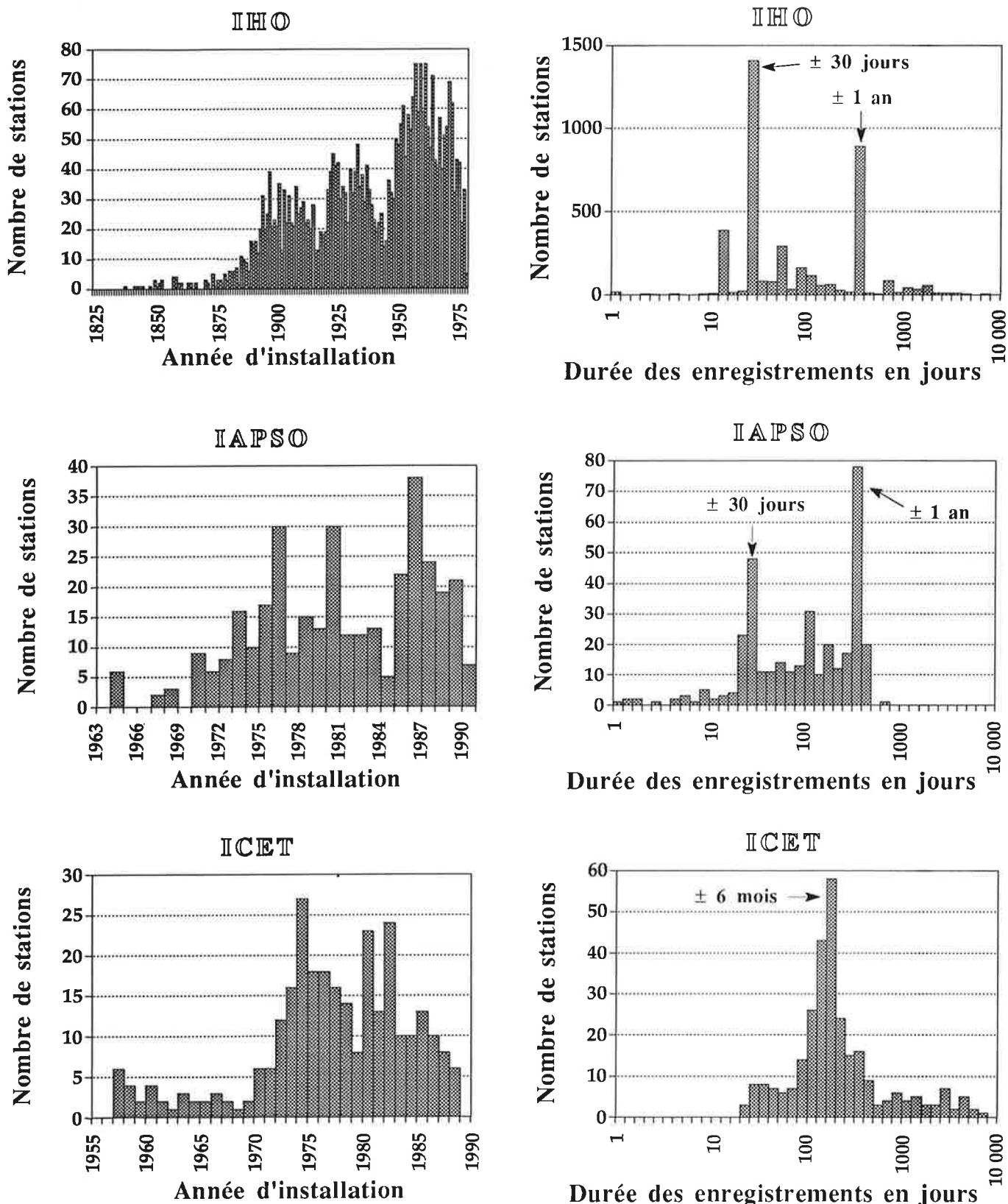
En ce qui concerne la qualité des données, aucune information concernant le bruit des mesures ou les méthodes d'analyse utilisées n'est fournie dans la banque de données IHO. On peut raisonnablement supposer que plus les données sont récentes et la durée d'observation longue, plus les constantes harmoniques sont précises. Les critères de qualité, à défaut de toute autre information, seront donc la longueur et l'époque des enregistrements. Une des caractéristiques décevantes de cette banque est la grande inhomogénéité de la qualité des mesures. La compilation IAPSO, quant à elle, doit certainement être plus uniforme d'un point de vue qualité, car les mesures sont issues d'instruments de fabrication similaire d'une très haute technologie et les analyses ont vraisemblablement été effectuées avec des programmes "modernes" de performance équivalente. Des indications sur les programmes d'analyse qui ont été utilisés et sur les variances résiduelles sont fournies dans la compilation.

II.1.4.2 - Gravimétrie

Le Centre International des Marées Terrestres (ICET) tient à jour une banque de données gravimétriques [Ducarme, 1984]. Les premières observations sont issues des campagnes de mesure organisées dans le cadre du programme de l'année internationale de géophysique (1957-1958). A partir de 1973, l'Observatoire Royal de Belgique a organisé conjointement avec l'ICET des mesures le long de profils mondiaux parcourant l'Asie, le Sud Pacifique, l'Afrique et l'Amérique Latine. Ces profils comprennent quelques 125 stations.

La Banque de données de marées terrestres contient les paramètres de marées gravimétriques de 352 stations temporaires et permanentes. La durée moyenne des observations est de 6 mois ce qui permet de déterminer les constantes harmoniques de 9 ondes principales : Q₁, O₁, P₁, K₁ pour les ondes diurnes, M₂, N₂, S₂, K₂ pour les semi-diurnes et une onde terdiurne M₃ (cf. Tables II.1 et II.2).

Récemment, Melchior [1992] a épuré la Banque de données de marées terrestres en contrôlant minutieusement chaque étape de la chaîne de traitement au niveau des observations, des calibrations et des réductions. Ce contrôle sévère n'a pu être fait que si le Centre disposait des données originales ou si les résultats publiés contiennent toutes les informations nécessaires pour la vérification. Des 352 stations de la Banque originelle,



Figures II.9 : Histogrammes du contenu des Banques de Données marégraphiques (IHO et IAPSO) et de marées gravimétriques (ICET).

Table II.3 : Principales missions altimétriques (adapté du document UNESCO, 1989)

Nom du satellite et date de fonctionnement	Précision		Cycle orbital	Durée de vie	Objectifs	Remarques
	Altimètre	Orbite				
Skylab 1973	100 cm	5 m		20 jours	essai de principe	détection d'anomalies importantes du géoïde
Geos3 1975-1978	50 cm	2 m	23 jours	3 ans	première mission expérimentale	l'important volume de données obtenues a fourni de bons résultats pour le vent, les vagues, le géoïde et la calotte glaciaire ainsi que les caractéristiques essentielles des courants de surface
Seasat 1978	7 cm	1,5 m	17 jours	73 jours	mission expérimentale perfectionnée orbite "de référence"	bons résultats pour le géoïde et la gravité durée de vie limitée
			3 jours	27 jours	mission expérimentale perfectionnée - orbite répétitive chaque 3 jours	première démonstration de résultats relatifs aux signaux océanographiques
Geosat 1985-1989	4 cm		150 jours	1 an	cartographie du géoïde , vagues , vent et principaux courants circulation océanique	mission principalement géodésique mais les données relatives au géoïde sont classées confidentielles
		50-35 cm	17 jours	3 ans		
ERS-1 1991	4 cm	50-35 cm	3 jours 35 jours 176 jours	3 ans (nominal)	circulation océanique	En parallèle avec l'expérience sur la circulation océanique mondiale (WOCE)
Topex/Poseidon 1992	2 cm	10 cm	10 jours	5 ans (nominal)	circulation océanique	En parallèle avec l'expérience sur la circulation océanique mondiale (WOCE)

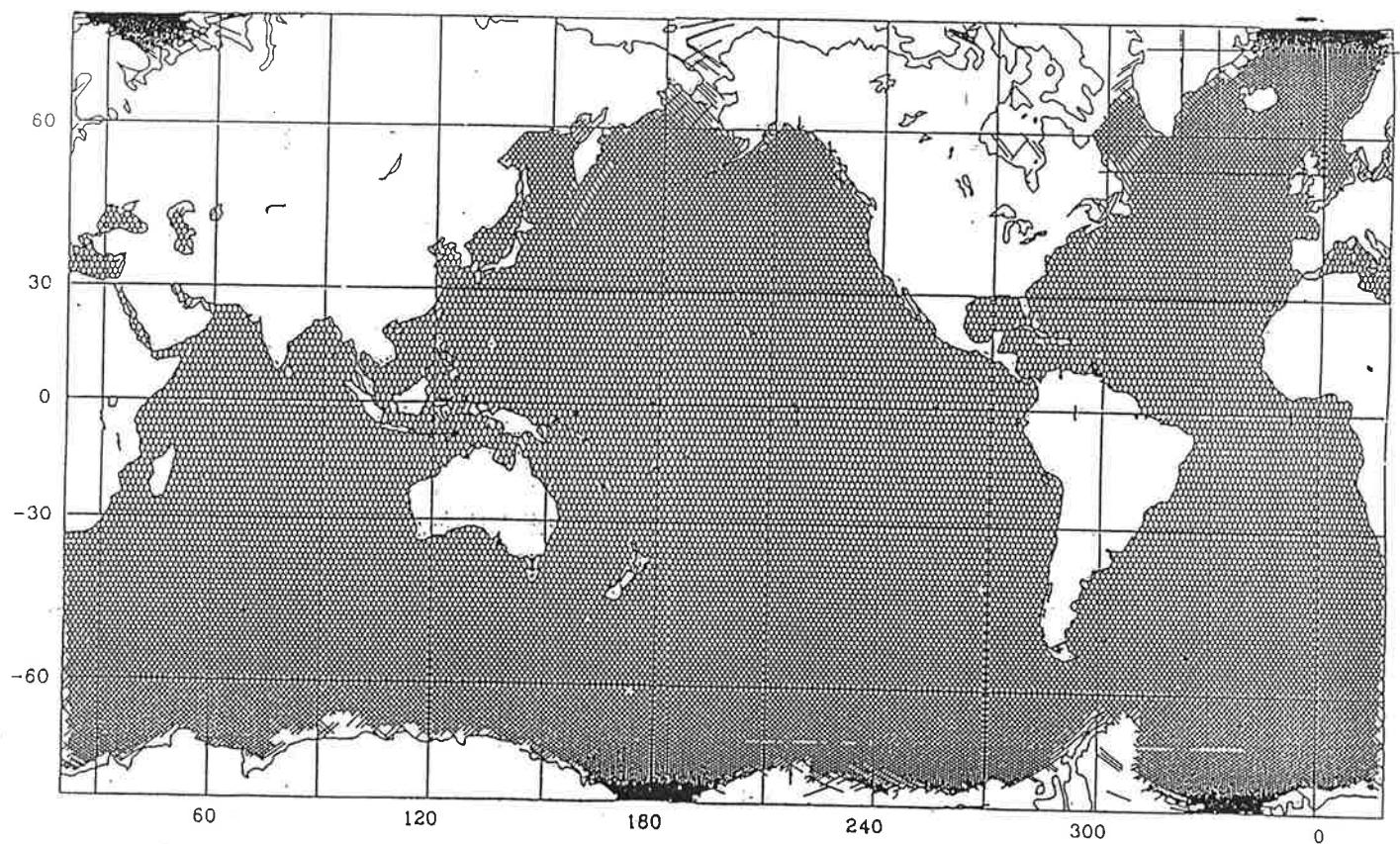


Figure II.10 : Couverture de l'orbite répétitive à 17 jours du satellite Geosat [tiré de Jourdan, 1990].

seulement 211 sont incluses dans la nouvelle Banque de données (DB92). Les principaux résultats de ce travail sont une réduction d'un facteur 2 de la dispersion des paramètres de marée par rapport au jeu de données originelles et un accord avec les meilleurs modèles de Terre en ce qui concerne les valeurs moyennes calculées, continent par continent, de l'amplitude des facteurs gravimétriques des deux ondes principales O₁ et M₂.

II.2 - L'altimétrie par satellite

L'histoire de l'altimétrie par satellite débute en 1973 avec la plate-forme Skylab qui emporta le premier altimètre. Depuis, d'autres satellites ont embarqué un altimètre. Les principales missions ainsi que leurs caractéristiques sont reprises dans la Table II.3. Actuellement, deux missions altimétriques sont en cours. Il s'agit du satellite ERS1 de l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et du satellite franco-américain TOPEX/POSEIDON qui est un projet commun de la NASA et du Centre National d'Etudes Spatiales (CNES). Dans cette étude, nous ne traiterons que des données de l'altimètre du satellite Geosat.

Les satellites altimétriques ont des orbites quasi-circulaires à des altitudes comprises entre 800 et 1300 km. A de telles altitudes, les forces de frottement atmosphérique sont faibles et la puissance nécessaire pour l'émission et la réception d'onde électromagnétique est raisonnable. Le satellite effectue une révolution circum terrestre en une centaine de minutes avec une vitesse de 7 à 8 km/s. Les orbites sont généralement répétitives, c'est-à-dire que le satellite repasse périodiquement au-dessus de la même trace au sol. La couverture spatiale dépend de l'inclinaison de l'orbite et de la période du cycle orbital du satellite (Figure II.10).

Les mesures précises de distance entre le satellite et la surface de la mer couplées avec un positionnement du satellite sur son orbite par rapport à un ellipsoïde de référence permettent de cartographier la hauteur de la surface de l'océan dans ce même référentiel. La surface instantanée de l'océan comporte une partie stationnaire et une partie variable. La partie stationnaire définit la surface moyenne océanique qui se compose du géoïde, surface équipotentielle du champ terrestre qui correspond à la surface des océans au repos, et de la topographie dynamique permanente engendrée par les courants océaniques stationnaires de la circulation permanente. Cette surface permanente est perturbée par les variabilités temporelles telles que les marées océaniques, les tourbillons, les courants générés par le vent, les variations de pression, ... La hauteur instantanée de l'océan h_i par rapport à l'ellipsoïde de référence s'obtient par la formule suivante (Figure II.11) :

$$h_i = h - H = N + h_c + \xi \quad (2.13)$$

avec

h la hauteur du satellite par rapport à l'ellipsoïde de référence

H la distance du satellite à la surface instantanée de l'océan

N la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence

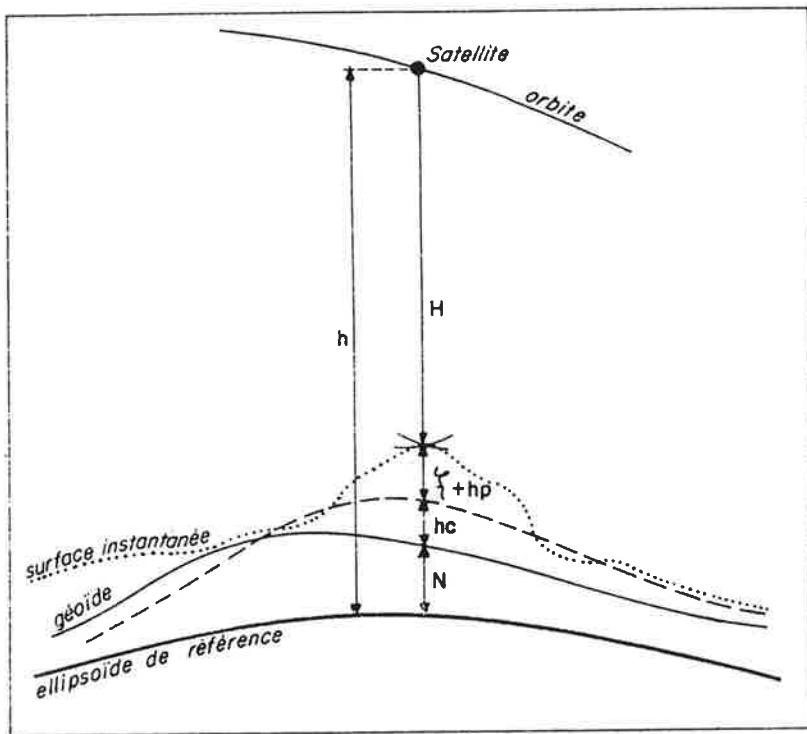
h_c la hauteur dynamique de la circulation générale

ξ les variations du niveau de l'océan dus aux autres phénomènes océaniques

II.2.1 - La mesure altimétrique

Un altimètre est un radar qui mesure le temps de parcours aller-retour d'une impulsion qu'il émet et qui est réfléchie par la surface de l'océan à la verticale du satellite. La distance H du centre de phase de l'antenne du radar à la surface océanique est :

$$H = c \frac{\Delta t}{2} \quad (2.14)$$



h : hauteur du satellite par rapport à l'ellipsoïde de référence

H : distance du satellite à la surface instantanée de l'océan

N : hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence

h_c : hauteur dynamique de la circulation générale

ξ : variation du niveau de l'océan due aux phénomènes océanographiques

Figure II.11 : Principe de la mesure altimétrique.

où c est la vitesse de la lumière et Δt le temps de parcours aller-retour. Le radar envoie des impulsions rectangulaires à une fréquence d'une dizaine de gigahertz correspondant à une longueur d'onde de quelques centimètres. La tache du faisceau du radar couvre au sol un disque d'un diamètre de quelques kilomètres qui varie suivant l'état de la mer. L'impulsion retour est reçue dans une fenêtre d'écoute prépositionnée par une boucle de poursuite grâce aux mesures antérieures. Comme le signal retour est fortement bruité en raison de la rugosité de la surface de la mer, les échos retour sont moyennés sur un millier d'impulsions élémentaires.

L'analyse de la forme du signal retour reçu par l'altimètre (Figure II.12) permet de déterminer trois caractéristiques physiques de la surface de l'océan : le temps du milieu du front de montée fournit la distance du satellite à la surface de la mer; de la largeur du front de montée on peut déduire la hauteur significative des vagues (c'est-à-dire l'amplitude des vagues et de la houle); et l'intensité du signal retour est une mesure de la diffusion du signal par les vagues et donc du module du vent. En outre, de la forme du signal retour, on extrait aussi des paramètres de la mesure: une mesure du bruit et une estimation de l'angle d'attitude.

Les mesures de la hauteur de la mer très précises dont les erreurs sont inférieures à 10 centimètres sont très difficiles à réaliser. Les nombreuses sources d'erreurs peuvent être classées suivant deux catégories : celles liées à la mesure altimétrique elle-même (instrument et surface réfléchissante) et celles liées à la méconnaissance de l'orbite précise du satellite.

II.2.2 - Les erreurs et les corrections de la mesure altimétrique

La hauteur altimétrique doit être corrigée des erreurs instrumentales, de celles dues à la propagation dans l'ionosphère et la troposphère et d'autres liées à l'état de la mer. Les estimations des erreurs sur les différentes corrections, que nous présentons, concernent les mesures altimétriques du satellite Geosat que nous avons utilisées. Toutefois, nous donnons aussi les estimations actuelles des erreurs des mesures altimétriques du satellite Topex/Poseidon. Ainsi, on pourra juger des progrès accomplis en ce domaine.

Les mesures altimétriques sont corrigées de trois types d'erreur d'origine instrumentale. Une correction pour tenir compte du délai de transition dans les circuits électroniques des instruments est appliquée ainsi qu'une correction liée à la géométrie du satellite qui prend en compte la distance entre le centre de gravité du satellite et le centre de phase du radar. Enfin, une correction dite "d'attitude" due au dépointage du radar lorsque le satellite n'est pas orienté suivant la verticale. L'erreur résiduelle est un signal aléatoire (bruit blanc) dont le r.m.s. estimé est de l'ordre de 3 cm pour Geosat.

L'ionosphère ralentit la propagation des ondes électromagnétiques de manière proportionnelle à son contenu en électrons libres intégré sur la verticale et inversement proportionnelle au carré de la fréquence des ondes. Dans le cas de Geosat, le contenu en électrons est estimé à partir de modèles semi-empiriques de l'ionosphère qui prennent en compte les variations géographiques et diurnes qui sont importantes pour les longueurs d'onde de l'ordre de 10 000 km et des périodes de l'ordre de quelques heures. Les corrections ionosphériques varient de 2 à 20 cm. Les valeurs maximales sont atteintes en périodes d'intense activité solaire et sont estimées à 4 cm r.m.s. près. Les erreurs sont plus grandes près de l'équateur magnétique et des zones aurorales (jusqu'à 10 cm).

L'atmosphère retarde aussi les ondes électromagnétiques car l'indice de réfraction du milieu varie dans la troposphère avec sa densité et son contenu en vapeur d'eau. On distingue deux corrections l'une dite correction de troposphère sèche et l'autre dite correction de

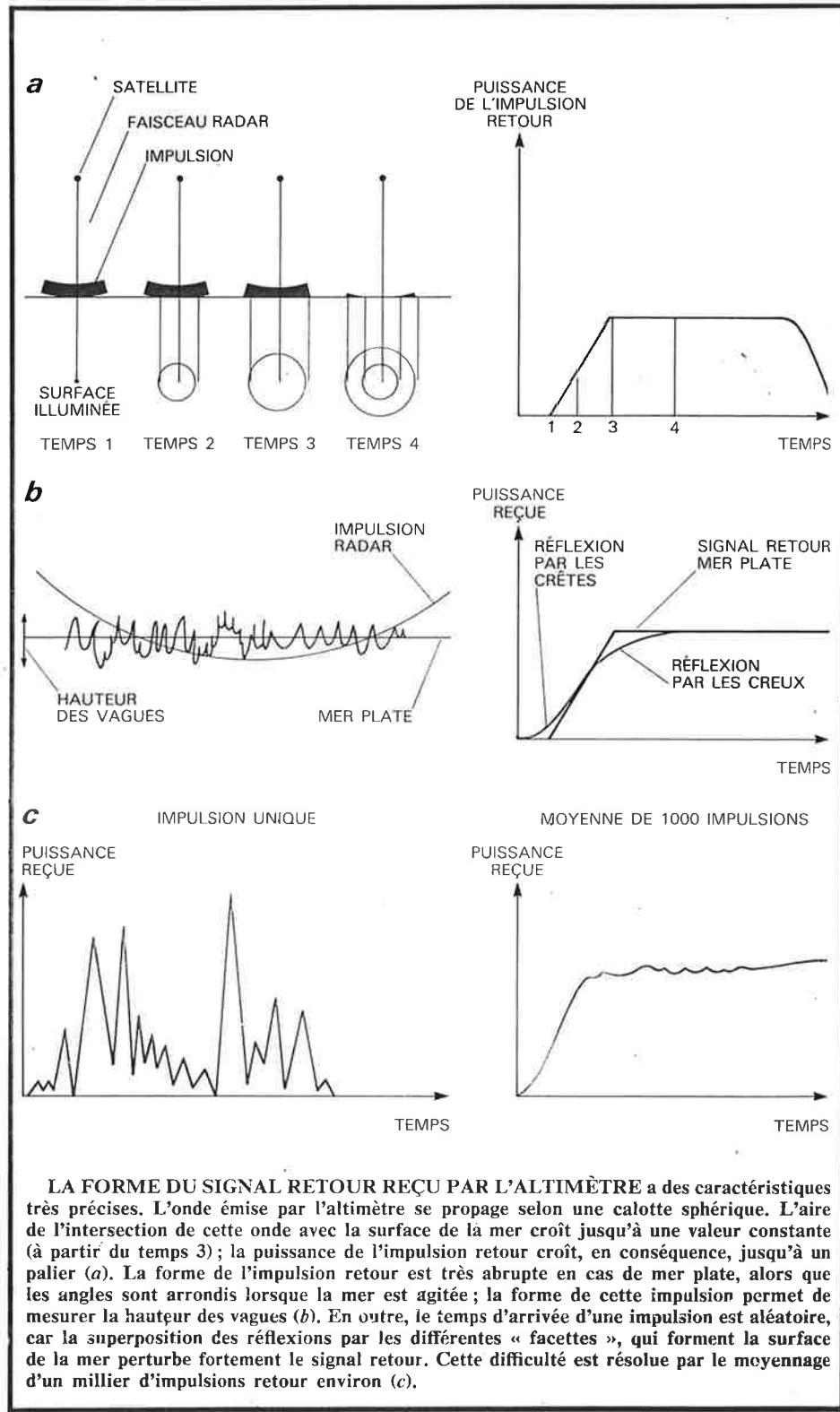


Figure II.12 : Forme du signal retour reçu par l'altimètre (tiré de Perigaud et Minster, 1985).

troposphère humide. La correction de troposphère sèche est fonction de la latitude et de la pression à la surface de l'océan. Elle peut être estimée avec une bonne précision à partir des modèles météorologiques. Cette correction est la plus importante en amplitude (environ 2 m) et sa variation temporelle est très faible. La correction troposphérique humide (ou de vapeur d'eau) est calculée à partir de modèles météorologiques ou à partir de mesures par radiométrie micro-onde. Ces dernières permettent une détermination du contenu intégré en vapeur d'eau avec une précision comparable à celle des radiosondages. Les précisions sur la correction en hauteur sont d'environ 2 à 3 cm. Les corrections utilisées dans cette étude ont été calculées à partir de moyennes mensuelles du contenu en vapeur d'eau déduites de cinq années de données du radiomètre SMMR (Scanning Multichannel Microwave Radiometer) de Nimbus 7. Les valeurs varient entre 6 et 30 cm et les écarts entre ces corrections et celles calculées à partir du modèle météorologique FNOA (Fleet Numerical Oceanographic Center) peuvent atteindre 5 cm. Cette valeur est représentative de l'incertitude sur ce type de correction.

Le creux des vagues tend à focaliser l'impulsion retour vers le satellite alors que les crêtes dispersent l'énergie du signal. Il en résulte une surestimation de la hauteur altimétrique, appelée biais électromagnétique. Ce biais dépend de l'état de la mer et peut être estimé via la hauteur significative des vagues (appelée H1/3), qui est elle-même déduite de la forme de l'onde de l'écho du radar. L'ordre de grandeur du biais électromagnétique est de 2% de H1/3, c'est-à-dire de 2 cm pour 1 m de creux. L'incertitude sur cette correction est d'environ 50%.

Enfin, un ensemble de corrections concernant la surface océanique est aussi appliquée. Il s'agit des corrections de marées terrestres, des effets de surcharge océanique et de pression atmosphérique (baromètre inverse). La dernière source d'erreur qui affecte la mesure altimétrique concerne le positionnement du satellite.

II.2.3 - Calcul de l'orbite

Tout au long de la durée de leurs missions, les satellites sont suivis par un réseau de stations de poursuite dont les mesures sont un élément indispensable du calcul d'orbite. Les observations sont typiquement des mesures de distance (laser) ou des mesures de vitesse (Doppler). Dans la procédure de détermination de l'orbite, ces mesures sont couplées à un modèle dynamique qui décrit l'évolution en fonction du temps d'un vecteur d'état du satellite. Ce vecteur d'état comprend 6 composantes (3 pour la position et 3 pour la vitesse) qui sont définies dans un système de référence inertiel. Le modèle dynamique se présente sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre, appelé équation du mouvement. Le mouvement d'un point massique se déplaçant dans le champ gravitationnel d'une planète s'exprime, dans un système de référence inertiel, sous la forme :

$$\ddot{\vec{x}} = \nabla V + \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_n \quad (2.15)$$

avec $\ddot{\vec{x}}$ représentant le vecteur accélération du satellite de masse unitaire, V le potentiel gravitationnel de la Terre et \vec{f}_i représentent les forces additionnelles non conservatives, telles que les forces de frottement atmosphérique, les effets de la pression de radiation solaire, les effets des marées terrestres et océaniques, ...

Le but de l'orbitographie est la détermination d'une orbite qui "colle" au mieux aux mesures de poursuites selon le critère des moindres carrés. Des programmes informatiques spécialisés sont capables de traiter simultanément tous les types de données. L'ensemble des inconnues ajustées par moindres carrés à partir des observations sont typiquement :

- un vecteur d'état initial, c'est-à-dire les 6 composantes du vecteur d'état au temps correspondant au début de l'intégration des équations du mouvement.

Table II.4 : Bilan d'erreur des mesures altimétriques du satellite Geosat et estimations actuelles des erreurs sur les mesures de l'altimètre Poseidon embarqué sur le satellite Topex/Poseidon (chiffres entre parenthèses).

Source d'erreur	Cause d'erreur	Amplitude (cm)	Résidu après correction (cm rms)	Longueur d'onde caractéristique (km)
Erreur de l'altimètre	bruit biais		2 (2.5) 2 (1.5)	plusieurs jours
Troposphère	masse d'air vapeur d'eau	230 6-30	1 (0.7) 3 (1.2)	1000 200
Ionosphère	électrons libres	2-20	4 (1.7)	> 1000
Eau liquide	nuages-pluies	10-100		30-50
Etat de la mer	biais électromagnétique	4	2 (2.5)	200-1000
Orbite	gravité GM trainée radiation solaire horloges ionosphère troposphère albedo terrestre marées	10 km 300 300	85-25 (2.2) 2 (1.0) 10 (1.0) 5 (>3) 10 5 (1.0) 1 (>1) 1 (>1) 2 (2.0)	> 40 000 10 000 10 000 10 000 10 000 10 000 10 000 10 000 10 000
Géoïde	gravité	100 m	50	2000-5000

Table II.5.: Caractéristiques spatio-temporelles des principaux signaux océanographiques affectant le niveau de la mer.

Phénomène	Amplitude (cm)	Echelle spatiale (km)	Période (jours)
gyres			
- moyenne	100	> 1000	
- variations	10	> 1000	> 300
Tourbillons	25	~ 50	> 30
Courants le long des côtes ouest			
- moyenne	100	100	
- variations	100	100	> 10
Courants le long des côtes est			
- moyenne	20	500	
- variations	10	500	> 10
Courants équatoriaux			
- moyenne	20	> 500	
- variations	10	> 500	> 50
El Niño	20	> 500	~ 1000

- les paramètres libres des modèles de force; typiquement, les paramètres des modèles de frottement atmosphérique, de pression de radiation solaire, etc...
- les paramètres des instruments de poursuite; tels que le biais et la dérive de l'horloge de la station de poursuite, ...
- les coordonnées géographiques de certaines stations de poursuite.

L'orbite du satellite est calculée par intégration numérique de l'équation (2.15). Les termes intégrés sont le vecteur d'état lui-même et une matrice de transition qui relie les variations du vecteur d'état au temps considéré par rapport au vecteur d'état initial. L'intégration numérique est initialisée à l'aide d'un vecteur d'état a priori calculé avec un modèle de force approché. On obtient ainsi une trajectoire apparente qui est utilisée pour linéariser la procédure d'ajustement du modèle. Ensuite, les paramètres approchés sont réévalués par ajustement par moindres carrés. En général, la procédure est réitérée jusqu'à l'obtention d'une convergence. D'habitude, toutes les inconnues ne sont pas traitées en une étape; la procédure du calcul d'orbite est subdivisée en plusieurs phases dans lesquelles des groupes séparés d'inconnues sont traités individuellement. L'orbite est calculée sur des arcs de quelques jours (17 jours pour les orbites GEM-T1 de Geosat et 6 jours pour les orbites GEM-T2). Ces arcs d'intégration sont indépendants et disjoints entraînant des sauts importants d'orbite aux points de transition entre deux arcs. Ces sauts sont dus essentiellement aux forces non conservatives et aux erreurs d'estimation des conditions initiales. Pour plus de détails, nous renvoyons aux documents techniques de Valorge [1990] qui décrit le logiciel d'orbitographie ZOOM développé au CNES et de Rowton et al. [1992] qui décrit le programme de calcul d'orbite GEODYN II du Goddard Space Flight Center (NASA).

Le calcul d'orbite fournit une trajectoire "apparente" du satellite. Il en résulte une erreur sur le positionnement du satellite dont la composante radiale intéresse au premier titre l'altimétrie. Les sources principales de l'erreur d'orbite peuvent être classées suivant quatre catégories : le potentiel gravitationnel, les effets des forces de frottement atmosphérique, de pression de radiation solaire et du positionnement des stations de poursuite. En outre, la précision des observations détermine aussi la qualité de l'orbite. Toutes ces influences sont à grande longueur d'onde et particulièrement importantes à la fréquence de 1 cycle par révolution. Dans le cas des orbites de Geosat, l'effet dominant provient des erreurs sur le champ de gravité. Les erreurs radiales des orbites de Geosat sont de l'ordre de 85 cm r.m.s pour GEM-T1 et 35 cm pour GEM-T2 [Haines et al., 1989]. Afin d'illustrer le progrès accompli depuis dans le calcul d'orbite, il faut savoir qu'actuellement on atteint une précision de l'ordre de 5 cm r.m.s sur la position radiale de Topex/Poseidon [Nouel, 1993]. Ces progrès sont dus à l'amélioration du champ de potentiel terrestre mais aussi et surtout grâce à la densité et la précision des mesures de poursuite délivrées par le système de localisation DORIS. Aujourd'hui, à l'heure du satellite altimétrique Topex/Poseidon, ce sont les effets des forces de surface (ou non conservatives) qui jouent le rôle le plus important.

II.2.4 - Bilan d'erreur et signal océanique

Nous venons de décrire l'ensemble des corrections qu'il faut appliquer à la mesure altimétrique pour son exploitation correcte en océanographie. Un récapitulatif des différentes sources d'erreur sur les mesures altimétriques des satellites Geosat et Topex/Poseidon est présenté dans la Table II.4. On peut constater que les sources principales d'erreurs proviennent de la détermination de l'orbite au travers du terme H et du géoïde N. Ces deux composantes ont pour même origine les erreurs du modèle du champ gravitationnel. Il existe une relation directe et non-dynamique entre le géoïde et le champ gravifique alors que le champ gravifique est lié dynamiquement au travers d'équations différentielles à l'erreur radiale d'orbite. Les erreurs du géoïde ont une signature spatio-temporelle stationnaire (en

tout cas sur des échelles de temps de la décennie) qui ne pénalise pas la recherche de signaux qui présentent des variabilités temporelles comme les marées océaniques.

La Table II.5 donne les ordres de grandeur des dimensions spatiales et des périodes caractéristiques des principaux phénomènes océaniques, hormis les marées. La comparaison entre les caractéristiques de ces phénomènes et les caractéristiques des erreurs résiduelles après corrections de la mesure altimétrique (Table II.4) indique que leurs amplitudes sont du même ordre de grandeur mais que leurs signatures spatio-temporelles sont relativement bien distinctes. Ce dernier constat justifie l'engouement des océanographes pour l'altimétrie par satellite puisque, malgré le rapport signal sur bruit faible (qui dans le cas de Topex/Poseidon est bien plus élevé), la différenciation des caractéristiques spectrales des signaux et des erreurs permet l'élaboration de procédures d'analyse des données capables d'extraire les signaux désirés.

II.3 - Conclusions

L'ensemble des mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques, que nous avons décrites dans ce chapitre, semble a priori d'une très grande complémentarité pour la restitution globale des constantes harmoniques des principaux constituants des marées océaniques. Cette complémentarité a plusieurs facettes :

(1) *La distribution géographique* : les mesures marégraphiques sont plutôt côtières et les mesures de marée gravimétrique sont continentales, alors que les mesures altimétriques couvrent l'ensemble des océans, avec toutefois une moins bonne couverture le long des côtes (en cause des défauts des corrections près des continents) et aux latitudes élevées (en raison de l'inclinaison de l'orbite).

(2) *La nature des données* : les données marégraphiques sont des constantes harmoniques tandis que les données altimétriques se présentent sous la forme de séries spatio-temporelles. En outre, les constantes marégraphiques sont les quantités physiques recherchées, fournissant ainsi des valeurs ponctuelles et donc locales des cartes cotidales. Les constantes harmoniques des données gravimétriques sont reliées aux constantes harmoniques des marées océaniques au travers d'une intégrale de convolution, apportant donc une information non plus locale mais globale. Le grand avantage des données altimétriques, qui est leur couverture spatiale presque complète du globe, est contrebalancé par le fait qu'elles doivent être converties de séries temporelles en constantes harmoniques de la marée océanique.

(3) *Le nombre de données* : on dispose de l'ordre de 10^2 constantes harmoniques de stations de marée gravimétrique, de l'ordre de 10^3 constantes harmoniques de stations marégraphiques et de l'ordre de 10^7 mesures altimétriques.

(4) *Le bilan des erreurs* : les erreurs sur les mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques sont à la fois non corrélées et complètement différentes. On peut approcher les erreurs sur les mesures marégraphiques par un bruit blanc. Dans les erreurs sur les mesures gravimétriques, il faut considérer non seulement les erreurs instrumentales mais aussi les signaux géophysiques autres que les effets de surcharge océanique qui sont enregistrés par les gravimètres. Ces signaux sont mal connus et restent un sujet de recherche très controversé. Enfin, les mesures altimétriques présentent un bilan d'erreur (voir §II.2.4) très complexe mais qui est relativement bien connu.

Les analyses des mesures marégraphiques par les méthodes harmoniques et non-harmoniques mettent en évidence un ensemble de caractéristiques remarquables des marées océaniques. L'analyse harmonique révèle que la marée en plein océan est un phénomène linéaire. Quant à la méthode de réponse, elle montre que la réponse du système océan aux sollicitations de la force génératrice des marées, en fonction de la fréquence, est extrêmement lisse (les effets des marées radiationnelles mis à part). Enfin, les méthodes des concordances reposent sur la corrélation spatiale des marées sur des distances de l'ordre du millier de kilomètres. Ces propriétés seront quantifiées à l'aide d'un modèle hydrodynamique des marées et exploitées dans la méthode d'analyse conjointe des mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques.

CHAPITRE III

CHAPITRE III : ESTIMATION DE L'ERREUR RADIALE D'ORBITE PAR DEMODULATION COMPLEXE

III.1 - Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre II, le signal dominant dans les mesures altimétriques de Geosat est l'erreur radiale d'orbite. Le r.m.s. du signal de l'erreur d'orbite est estimé à environ 85 cm dans le cas des éphémérides calculées à partir du champ de gravité GEM-T1. Les premiers essais de modélisation des marées océaniques par inversion de mesures altimétriques seules [Mazzega et Jourdin, 1991] n'ont pas donné de résultats satisfaisants eu égard à la précision centimétrique recherchée. Les causes vraisemblables sont l'amplitude considérable de l'erreur d'orbite par rapport à celle du signal de marée et le nombre insuffisant de mesures analysées. Le modèle de covariance de l'erreur d'orbite utilisé étant homogène ne permet pas de représenter la complexité du comportement de l'erreur d'orbite. Nous avons donc décidé de réduire la composante de l'erreur d'orbite dans les mesures altimétriques indépendamment et avant toute tentative d'inversion.

Le problème de la réduction du signal de l'erreur radiale d'orbite présent dans les mesures altimétriques n'est pas nouveau. De nombreuses méthodes empiriques ont été développées en attendant que des modèles très précis du champ de gravité soient disponibles. Les techniques couramment utilisées consistent à minimiser les différences de hauteur observées à l'intersection des profils ascendants et des profils descendants de mesures altimétriques [Rummel and Rapp, 1977] ou de minimiser les différences de hauteur de mesures altimétriques le long d'arcs colinéaires si l'orbite est répétitive [Cheney et al., 1983]. La minimisation est réalisée en ajustant par moindres carrés des fonctions d'erreur qui prennent en compte la nature à grande longueur d'onde de l'erreur d'orbite. Plusieurs travaux ont été menés en particulier sur le choix judicieux des fonctions d'erreur d'orbite. Ainsi, en fonction de la longueur des segments ajustés, l'erreur d'orbite est décrite soit par des polynômes du premier, second ou troisième degré, soit par des fonctions sinusoïdales [Tai, 1988; Schrama, 1989]. Douglas et al. [1984] de même que Houry et al. [1993] vont jusqu'à modéliser l'erreur d'orbite par une série de Fourier. Certains auteurs [Wunsch et Zlotnicki, 1984] prennent en compte l'erreur d'orbite dans leur analyse objective en utilisant une fonction de covariance a priori, qui peut être déterminée directement à partir des mesures altimétriques [Sirkes and Wunsch, 1990]. Cette dernière méthode a l'avantage de fournir des informations a posteriori sur les bandes spectrales qui sont affectées par la correction d'erreur d'orbite; et elle permet une plus grande flexibilité pour décrire la structure de l'erreur d'orbite ainsi que sa corrélation avec le signal. Cependant, quelle que soit la formulation choisie, les méthodes de différences sont incapables d'estimer les erreurs communes aux points de croisement des arcs ascendants et descendants. Ces erreurs systématiques, que l'on appelle erreurs d'orbite géographiquement corrélées, sont cartographiées dans les cartes de la topographie de la surface océanique [Tapley and Rosborough, 1985; Mazzega, 1986]. Schrama [1992] a publié une revue complète sur les diverses définitions et formulations des erreurs géographiquement corrélées et a démontré que ces erreurs invariantes aux points de croisement appartiennent au noyau du système normal. En outre, les variabilités observées aux points de croisement ne sont pas dues uniquement à l'erreur d'orbite. Rares sont les études qui ont été conduites afin de quantifier l'impact sur les signaux océanographiques des méthodes de minimisation des écarts au points de croisement [Tai, 1991; Houry et al., 1993].

Confronté à ce problème d'insensibilité des méthodes de différence à la partie invariante (qui peut varier d'un arc d'intégration à l'autre) de l'erreur d'orbite, nous avons décidé d'estimer le spectre complet (partie stationnaire et variable) de l'erreur d'orbite à partir des données de la hauteur de la surface océanique par rapport au géoïde. Le calcul des caractéristiques spectrales

des séries altimétriques présente des difficultés techniques liées à l'irrégularité de leur échantillonnage [Sirkes et Wunsch, 1990; Houry et al., 1993]. Nous montrerons comment nous avons résolu ce problème pour notre application particulière en utilisant une procédure basée sur l'analyse objective. Chelton et Schlaik [1993] ont montré que l'amplitude et la phase de l'erreur d'orbite varient. Cela signifie que l'analyse harmonique classique par transformée de Fourier, qui est dédiée à l'analyse des signaux stationnaires, n'est pas l'outil qui convient à l'analyse des données altimétriques. C'est pourquoi, nous avons pensé à appliquer la méthode de démodulation complexe qui permet d'estimer les variations de l'amplitude et de la phase d'une fréquence fixée en fonction du temps. Cette méthode permet d'estimer à partir des mesures altimétriques le spectre de l'erreur d'orbite dont les fréquences sont prédictes théoriquement.

Dans ce chapitre, nous décrirons les données utilisées ainsi que la méthode de démodulation complexe que nous leur avons appliquée. Les résultats de la démodulation d'une série simulée sont exposés afin de convaincre de l'efficacité de la méthode. Ensuite, les résultats de la démodulation d'un an de données Geosat sont présentés et interprétés en faisant appel à la théorie linéaire de "l'erreur d'orbite" formulée par Kaula [1966]. Les contributions des signaux géophysiques (surface moyenne et marées) et des erreurs résiduelles des corrections de propagation sont aussi étudiées afin d'estimer l'effet de la correction de l'erreur d'orbite sur ces différents signaux.

III.2 - Analyse de Fourier des mesures altimétriques

Les mesures altimétriques, qui seront analysées par inversion, couvrent une période d'environ 1 an comprenant 22 cycles répétitifs de 17 jours (= 375 jours) et qui débute en novembre 1986. Les orbites ont été intégrées par arcs de 17 jours avec le champ de gravité GEM-T1 [Haines et al., 1990; 1992]. Les corrections des effets de la troposphère sèche et humide, des effets de l'ionosphère ainsi que des marées terrestres qui sont fournies dans les Geophysical Data Records (GDRs) [Cheney et al., 1987] ont été appliquées aux données. La correction de biais électromagnétique n'a pas été appliquée parce que les valeurs fournies sont peu fiables. De plus, comme les caractéristiques spectrales des marées et de la correction du biais électromagnétique sont différentes, la recherche du signal des marées ne devrait pas être trop pénalisée. La hauteur calculée de la mer h_c par rapport au géoïde peut alors s'écrire sous la forme :

$$h_c = h - H - N \quad (3.1a)$$

$$h_a = h_c + \epsilon_{env} + \epsilon_N + \epsilon_{orb} \quad (3.1b)$$

avec

h la hauteur du satellite par rapport à l'ellipsoïde de référence,
 H la distance du satellite à la surface de la mer (c'est-à-dire la mesure altimétrique),
 N est la hauteur du géoïde du champ de gravité GEM-T1 par rapport à l'ellipsoïde,
 h_a est la hauteur de la mer par rapport au géoïde déduite de l'altimétrie par satellite,
 ϵ_{env} sont les erreurs résiduelles après corrections de propagation et instrumentales,
 ϵ_N sont les erreurs de commission et d'omission du modèle de géoïde, et
 ϵ_{orb} est l'erreur radiale d'orbite.

On peut réécrire la hauteur de la mer sous une autre forme :

$$h_c = TSO(p) + TSO(v) + M \quad (3.2a)$$

$$h_a = TSO(p) + TSO(v) + M + \epsilon_{env} + \epsilon_N + \epsilon_{orb} \quad (3.2b)$$

où $TSO(p,v)$ représentent respectivement les parties permanente et variable de la topographie de la surface océanique et M les marées océaniques. Dans la suite, le terme données altimétriques (DA) sera utilisé pour h_a . L'exploitation correcte de l'altimétrie par satellite nécessite de séparer les différents termes du second membre de l'équation (3.2b). En principe, cet objectif n'est réalisable qu'à condition que les caractéristiques spectrales des différents termes ne se recouvrent pas. Il est donc opportun, dans un premier temps, d'estimer le contenu spectral des DA avant de tenter d'isoler la composante qui nous intéresse ici, c'est-à-dire l'erreur d'orbite.

Les algorithmes classiques de Transformée de Fourier (Fast Fourier Transform) exploitent l'équidistance de l'échantillonnage des données et ne peuvent donc pas être appliqués aux séries temporelles de mesures altimétriques, car elles présentent de nombreuses interruptions en raison des passages au-dessus des continents et du mauvais fonctionnement occasionnel de l'altimètre. Toutefois, il existe des algorithmes spécialement conçus pour l'analyse de Fourier de données non-équidistantes [Scargle, 1982] dont Laudet [1988] s'est inspiré pour écrire le code que nous utilisons. Cependant, il faut être conscient que les spectres calculés sont fortement "pollués" par l'effet de "leakage". Rappelons que les spectres calculés numériquement sont les résultats d'une convolution entre le spectre vrai et le spectre de la fonction d'échantillonnage qui prend la valeur 1 aux dates des mesures et 0 ailleurs. Dans le cas de séries discrètes à échantillonnage équidistant, la fonction d'échantillonnage est une fenêtre rectangulaire dont le spectre est un sinus cardinal. Le spectre subit en quelque sorte une diffraction parce que la série temporelle a une durée finie. Dans le cas des séries altimétriques, ce spectre de "diffraction" est la transformée de Fourier d'une suite de fonctions rectangulaires et est donc bien plus riche qu'une simple fonction sinus cardinal. Les spectres calculés sont alors enrichis artificiellement et comportent des raies spectrales non existantes dans le signal réel. Théoriquement, on peut à partir de la connaissance de l'échantillonnage temporel des données calculer le spectre "diffractant" et s'en servir pour nettoyer le spectre "pollué" par une méthode de déconvolution. En pratique, des difficultés numériques surgissent, car la déconvolution est un problème mal posé. Nous avons tenté de déconvoluer les spectres des DA : la méthode que nous avons mise au point ainsi que les causes des résultats peu satisfaisants sont exposées dans l'Annexe.

Le spectre de Fourier des mesures altimétriques du premier cycle de 17 jours de Geosat se révèle extrêmement riche (Figure III.1). Les spectres de tous les autres cycles sont analogues : l'énergie spectrale est maximale autour de 1 cycle par révolution (cy/rev) équivalent à 14.3 cycles par jour et le reste de l'énergie est répartie autour des sous-harmoniques 2, 3, 4 ... cy/rev. Bien que les spectres des différents cycles présentent de grandes similitudes quant à la structure, on observe de grandes variations de l'amplitude et de la phase des principaux pics. Par exemple, l'amplitude du 1 cy/rev varie suivant les cycles de 40 cm à 140 cm. Dans un premier temps, nous avons vérifié que ces fluctuations n'étaient pas le fait de l'échantillonnage qui varie légèrement d'un cycle à l'autre. Pour cela, une fonction test, formée de la somme de 6 sinusoïdes dont les fréquences sont comprises entre 15 et 110 cycles par jour, a été échantillonnée aux dates des mesures altimétriques des différents cycles. Les spectres d'amplitude et de phase de cette fonction test calculés pour chaque cycle varient d'à peine quelques pour-cent démontrant le rôle secondaire que jouent les différences d'échantillonnage sur les fluctuations des caractéristiques spectrales observées dans les DA. Par ailleurs, l'étalement des pics spectraux ne peut pas être expliqué que par le leakage et suggère une non stationnarité des harmoniques à l'intérieur même des cycles, comme le prouvent les résultats des spectres calculés sur des périodes de trois jours (Figures III.3). Le choix d'une période de trois jours n'est pas fortuit, il correspond à la durée du sous-cycle de Geosat, c'est-à-dire à une couverture complète du globe. De ce fait, les fonctions d'échantillonnage (panne de l'altimètre exclue) sont pratiquement les mêmes d'un cycle à l'autre de telle sorte que l'effet de leakage est presque le même d'une sous-série à l'autre permettant de comparer leurs spectres respectifs.

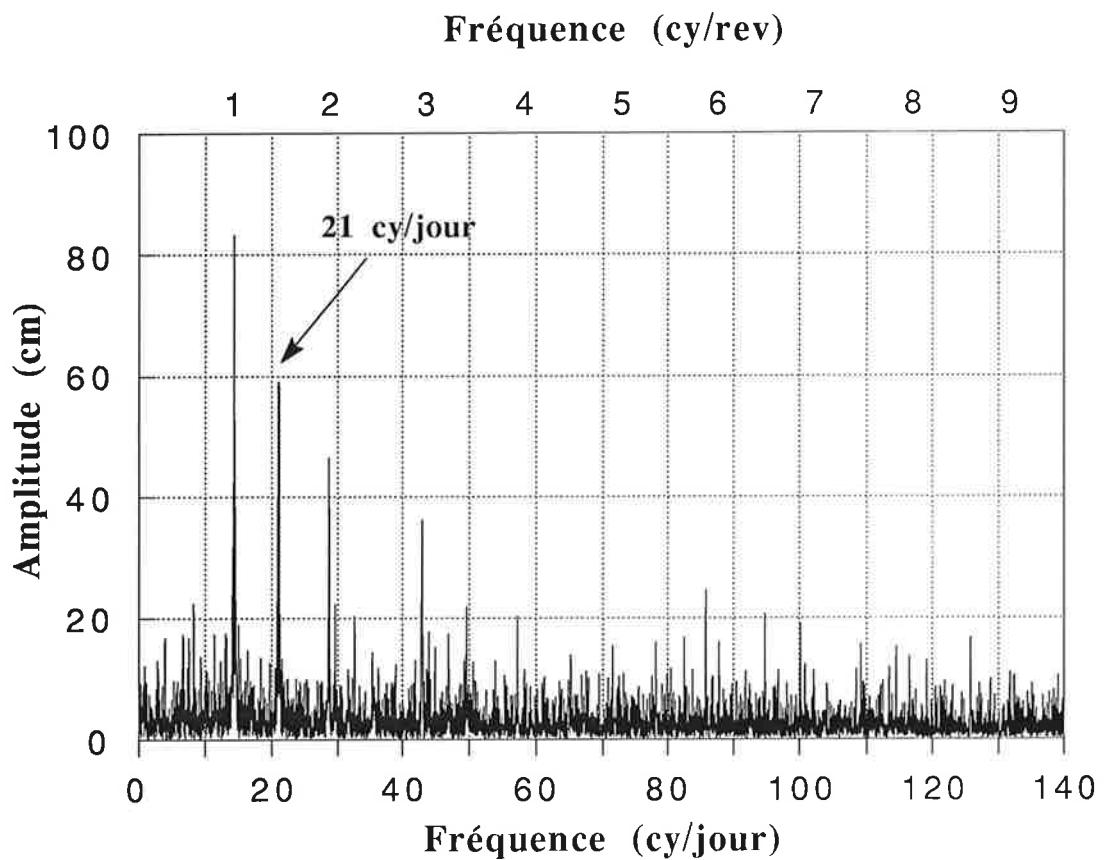


Figure III.1 : Périodogramme du premier cycle des données altimétriques de Geosat qui compte 17 jours (8/11/86 au 25/11/86). L'orbite a été calculée avec le modèle du potentiel gravitationnel terrestre GEM-T1. Le pic en 21 cycles par jour, indiqué par une flèche, a été rajouté pour tester la méthode de démodulation (cfr. §III.3.3).

Ces signes de non stationnarité des harmoniques à l'intérieur des cycles ont motivé le recours à la démodulation complexe.

III.3 - Démodulation complexe

III.3.1 - Principe

Soit $x(t)$ une série temporelle qui est formée de la somme d'un signal périodique perturbé et d'un bruit $\varepsilon(t)$:

$$x(t) = A(t) \cos[\omega t + \phi(t)] + \varepsilon(t) \quad (3.3)$$

avec $\{A(t)\}$ et $\{\phi(t)\}$ des variations lentes de l'amplitude et de la phase. Extraire les séries temporelles $\{A(t)\}$ et $\{\phi(t)\}$, tel est le but de la démodulation complexe [Bloomfield, 1976]. On peut interpréter la démodulation complexe comme une version locale de l'analyse harmonique : c'est harmonique, puisque l'on décrit l'amplitude et la phase d'une oscillation; et c'est local, puisque seules les données confinées autour du temps t sont impliquées dans le processus de détermination de l'amplitude et de la phase de l'oscillation. Ecrivant (3.3) sous forme complexe, on a

$$x(t) = \frac{1}{2} A(t) \{e^{i[\omega t + \phi(t)]} + e^{-i[\omega t + \phi(t)]}\} + \varepsilon(t) \quad (3.4)$$

Multipliant par $e^{-i\omega t}$

$$y(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{i\phi(t)} + \frac{1}{2} A(t) e^{-i[2\omega t + \phi(t)]} + \varepsilon(t) e^{-i\omega t} \quad (3.5)$$

Le premier terme du second membre est celui que l'on veut déterminer. Il peut être séparé des deux autres sous les hypothèses suivantes :

- (1) $\{A(t)\}$ et $\{\phi(t)\}$ sont des fonctions lisses et, par conséquent, le premier terme aussi,
- (2) Le spectre du troisième terme du second membre ne contient pas d'énergie aux basses fréquences, c'est-à-dire que le spectre de $\varepsilon(t)$ ne contient pas d'énergie autour de la fréquence ω .

Si ces conditions sont remplies, le premier terme varie plus lentement que les deux autres et peut être extrait en appliquant un filtre passe-bas à la série $y(t)$.

III.3.2 - Cas particulier des mesures altimétriques

L'application de la méthode de déconvolution aux DA pose des problèmes liés à l'irrégularité de l'échantillonnage. En effet, on ne peut pas appliquer les méthodes de filtrage classiques qui sont réservées aux séries temporelles dont le pas d'échantillonnage est constant. Afin de s'affranchir de ce problème, nous procédons en trois étapes :

- (1) Calcul du spectre de Fourier des DA d'un arc d'intégration complet avec l'algorithme de Scargle [1982].
- (2) Filtrage et interpolation des DA sur un ensemble de points équidistants à l'aide d'une analyse objective. Un choix judicieux des covariances du signal et du bruit permet de construire un filtre dont la bande passante (Figure III.2) est bien adaptée à notre problème. La fonction de covariance du signal est simplement un cosinus de fréquence égale à la fréquence de démodulation, tandis que la covariance du bruit est formé d'une somme de cosinus, dont les fréquences sont les fréquences principales révélées par le spectre à la première étape hormis la fréquence démodulée, plus un bruit blanc. Après filtrage, on

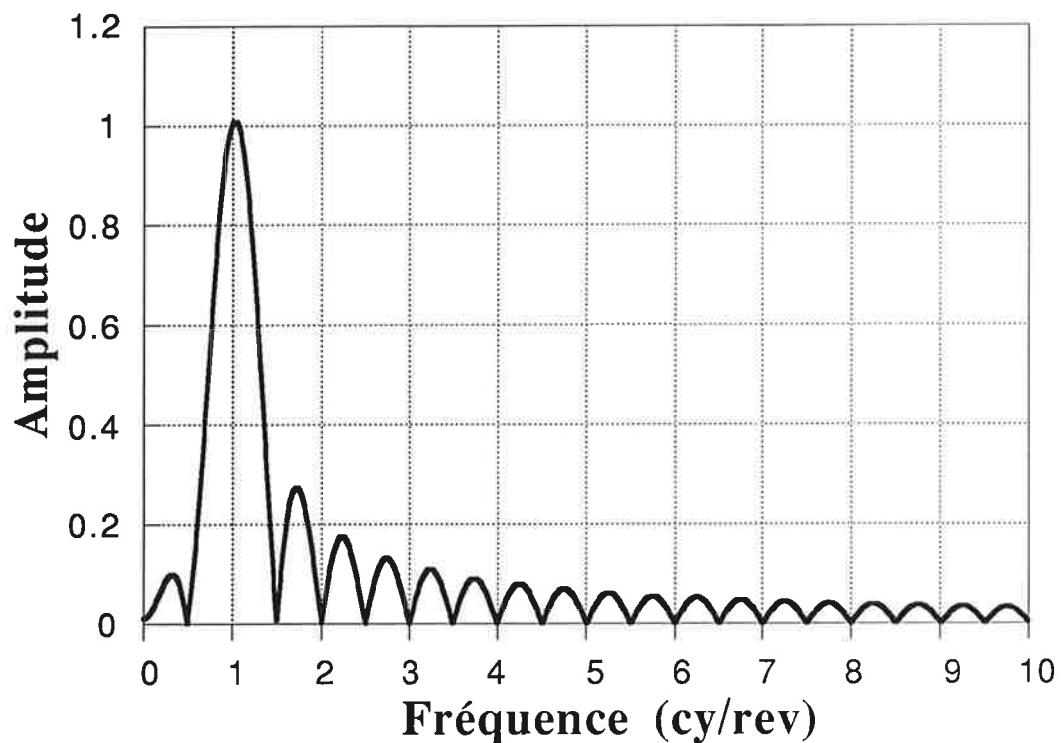


Figure III.2 : Réponse en fréquence du filtre construit par analyse objective qui est appliquée aux données altimétriques avant démodulation.

obtient une série échantillonnée sur un pas régulier qui ne contient plus que la fréquence choisie et ses modulations.

- (3) Démodulation complexe et filtrage à l'aide d'un filtre construit par moindres carrés, spécialement étudié pour atténuer les effets de Gibbs [Bloomfield, 1976].

Ces trois étapes doivent être réitérées pour chaque fréquence démodulée. Cette procédure donne de bons résultats à condition que la longueur des interruptions dans les données ne soit pas trop grande par rapport à la longueur d'onde du signal recherché et que le signal et le bruit ne soient pas trop corrélés. Ces conditions sont respectées dans le cas des séries de DA que nous avons traitées.

III.3.3 - Démodulation d'une série simulée

La procédure de démodulation décrite dans le paragraphe précédent a été testée sur une série simulée. Cette série est formée du premier cycle des DA auquel on a additionné une fonction sinusoïdale de fréquence 21 cy/jour modulée en amplitude et en phase. La fréquence choisie correspond à une bande de fréquence faible en énergie ce qui permet de tester la méthode dans des conditions réalistes. Dans les Figures III.3 sont comparées les modulations de l'amplitude et de la phase telles qu'elles ont été spécifiées (lignes continues) et les résultats de la démodulation (lignes pointillées). Les points représentent les résultats des spectres calculés sur une fenêtre glissante d'une longueur de trois jours. Les différences entre les lignes continues et pointillées proviennent des modulations de la fréquence 21 cy/jour déjà présentes dans la série originelle des DA. Nous l'avons vérifié en démodulant la série originelle, les résultats correspondant exactement à la différence entre les lignes continues et pointillées. Nous considérons donc ce test comme une bonne validation de la méthode.

III.3.4 - Démodulation complexe des mesures altimétriques

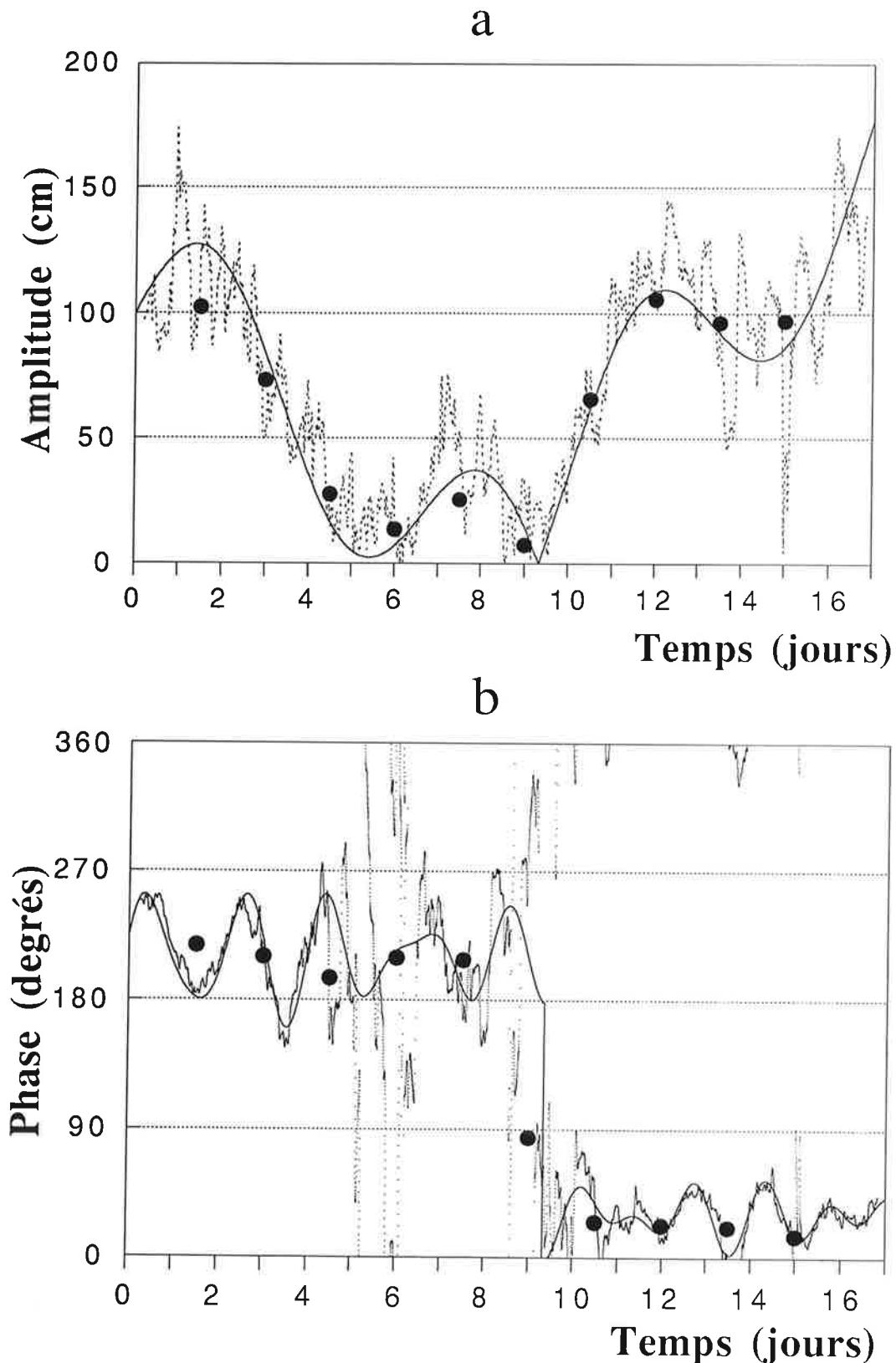
Un peu plus d'une année (22 cycles) de données Geosat initialement échantillonnées toutes les secondes ont été moyennées sur une minute. Les effets de l'erreur radiale d'orbite ont des périodes supérieures à 25 minutes, justifiant ce moyennage. Il en résulte une série de 258 000 données couvrant 375 jours.

La démodulation complexe des 3 fréquences principales (1, 2, 3 cy/rev) a permis de mettre en évidence dans les DA des variations des amplitudes et phases non seulement d'un cycle à l'autre mais aussi à l'intérieur même des cycles.

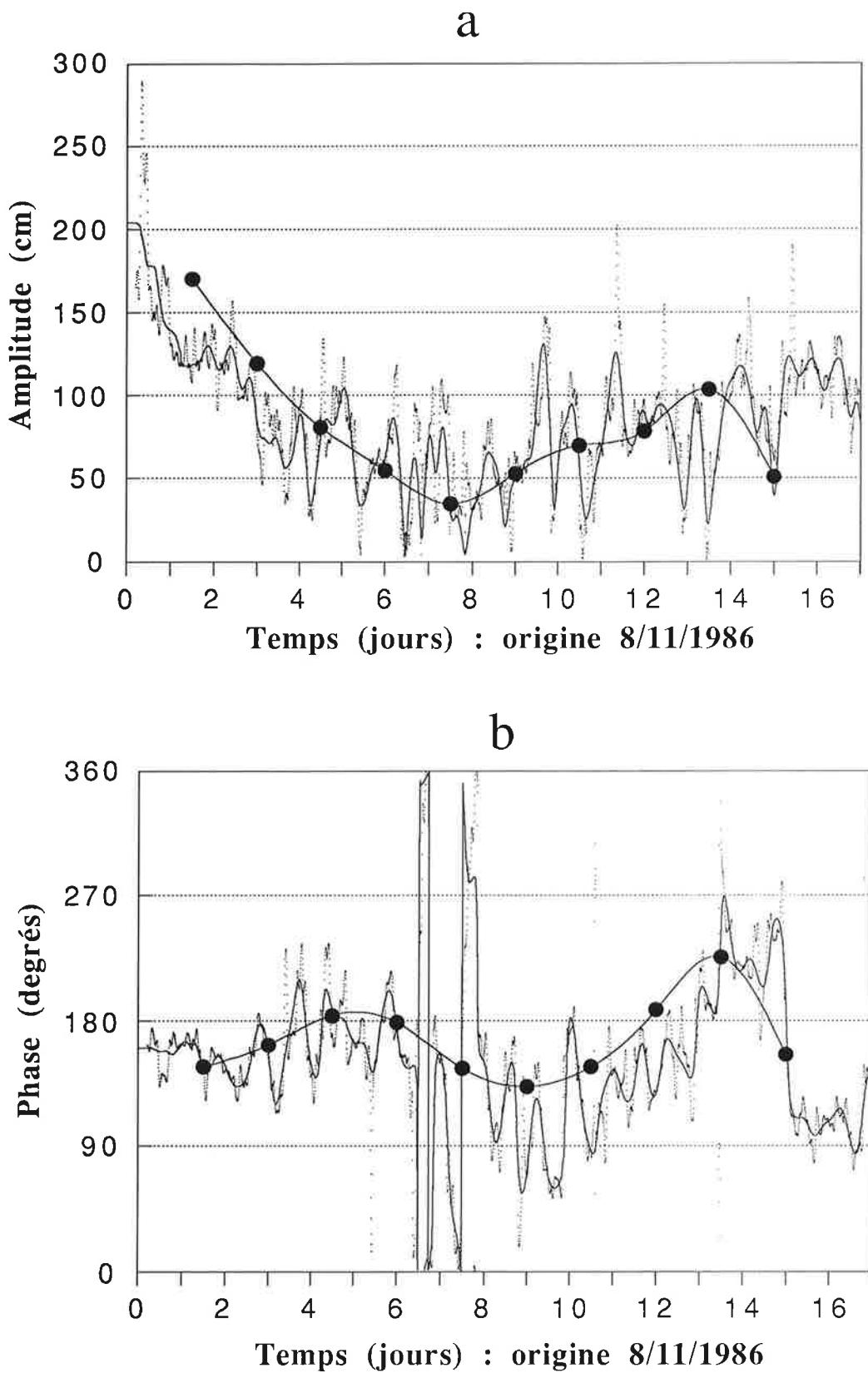
1 cycle par révolution

Les séries temporelles des modulations en amplitude et phase de la fréquence 1 cy/rev du premier cycle des DA sont reproduites dans les Figures III.4. Les lignes pointillées sont les résultats bruts qui ont été lissés en y appliquant un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est de 2 cy/jour (lignes continues). Afin de valider ces résultats, les amplitudes et phases (points) de la fréquence 1 cy/rev ont été déterminées par une analyse de Fourier sur des sous-séries de trois jours; les abscisses des points correspondent au temps milieu des sous-séries. On peut constater le bon accord entre les deux méthodes.

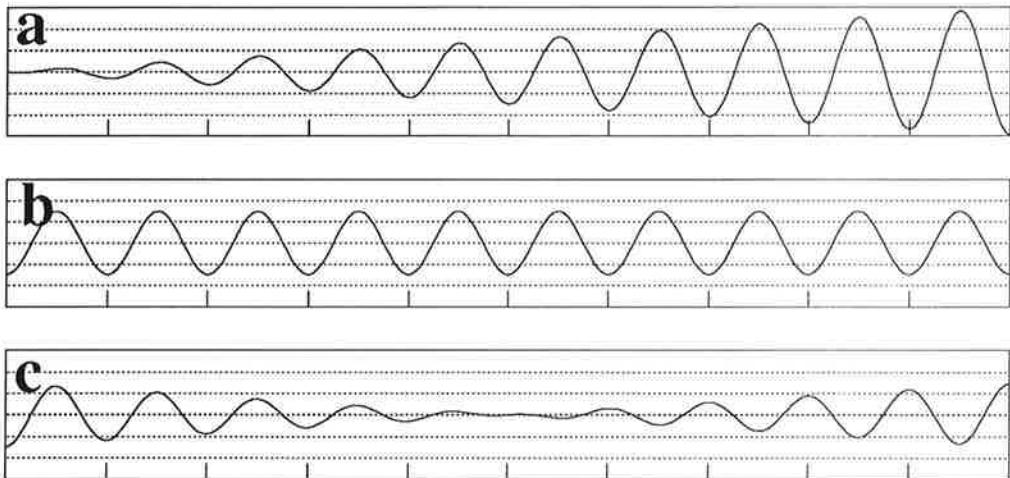
Le fait le plus remarquable est la forte variation de l'amplitude dont les valeurs sont comprises entre 20 cm et 200 cm. La phase varie entre 70 et 270 degrés. De plus, on observe bien l'effet "papillon" [Engelis, 1987, par exemple] qui est caractérisé par l'amplification de l'amplitude de la modulation aux deux extrémités de l'arc d'intégration de l'orbite. Cet effet est attribué à des forces perturbatrices à longues périodes qui présentent une composante à 1 cy/rev dont l'amplitude croît linéairement en fonction du temps. Dans la procédure du calcul d'orbite,



Figures III.3 : Séries temporelles des modulations en amplitude (a) et en phase (b) de la fréquence 21 cycles par jour telles qu'elles ont été spécifiées (lignes continues) et telles qu'elles sont restituées par la démodulation complexe (lignes pointillées). L'origine des différences entre les lignes continues et pointillées est expliquée dans le texte. Les points représentent les amplitudes et phases des spectres calculés sur une fenêtre glissante de trois jours.



Figures III.4 : Résultats de la démodulation du 1 cy/rev du premier cycle des données altimétriques de Geosat (orbites GEM-T1) : (a) amplitude et (b) phase. Les pointillés sont les valeurs instantanées et les lignes continues sont les mêmes résultats après lissage par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure en 2 cycles par jour. Les gros points sont les amplitudes et phases des spectres calculés sur une fenêtre glissante de trois jours.



Figures III.5 : Illustration de l'*effet papillon* : (a) représente une erreur à longue période qui se manifeste sous la forme d'une sinusoïde d'une fréquence de 1 cy/rev et dont l'amplitude croît lentement (et donc, au premier ordre, linéairement) en fonction du temps; (b) est la série obtenue en ajustant par moindres carrés à la série (a) une sinusoïde de même fréquence, mais d'amplitude constante; (c) est le résidu (a)-(b) exhibant l'*effet papillon*, c'est-à-dire une amplitude maximum aux extrémités et minimum au milieu de la série.

ces perturbations sont réduites en ajustant par moindres carrés une sinusoïde d'une fréquence de 1 cy/rev d'amplitude et de phase constantes. Comme l'amplitude ajustée de cette sinusoïde correspond plus au moins à l'amplitude moyenne du signal, les erreurs résiduelles après correction seront minimales au milieu de l'arc d'intégration et maximales aux extrémités (voir l'illustration dans les Figures III.5).

Les résultats de la démodulation complexe d'un an de DA de Geosat sont présentés dans les Figures III.6. Les séries sont lissées afin de montrer des figures lisibles. Mentionnons que les 22 cycles ont été concaténés et démodulés ensemble. Par conséquent, les fortes discontinuités qui peuvent exister aux raccords entre deux arcs d'intégration sont lissées. Il eut été plus correct de démoduler les cycles les uns après les autres, mais de toute façon, le signal eut été perdu aux extrémités des cycles à cause de la largeur du filtre passe-bas.

Le caractère périodique des modulations est très clairement établi par le spectre de Fourier de la série brute des modulations (Figure III.11a) qui n'est pas symétrique puisque la série démodulée est une fonction complexe. La répartition des différents pics spectraux sera discutée et commentée dans le paragraphe suivant. Précisons, toutefois, que les spectres des modulations calculés cycle par cycle présentent tous cette même répartition mais les amplitudes et phases varient dans de larges proportions. En effet, les orbites de chaque cycle ont été déterminées séparément de sorte que les éléments initiaux moyens sont complètement différents modifiant les amplitudes et les phases mais pas les fréquences de l'erreur d'orbite.

2 et 3 cycles par révolution

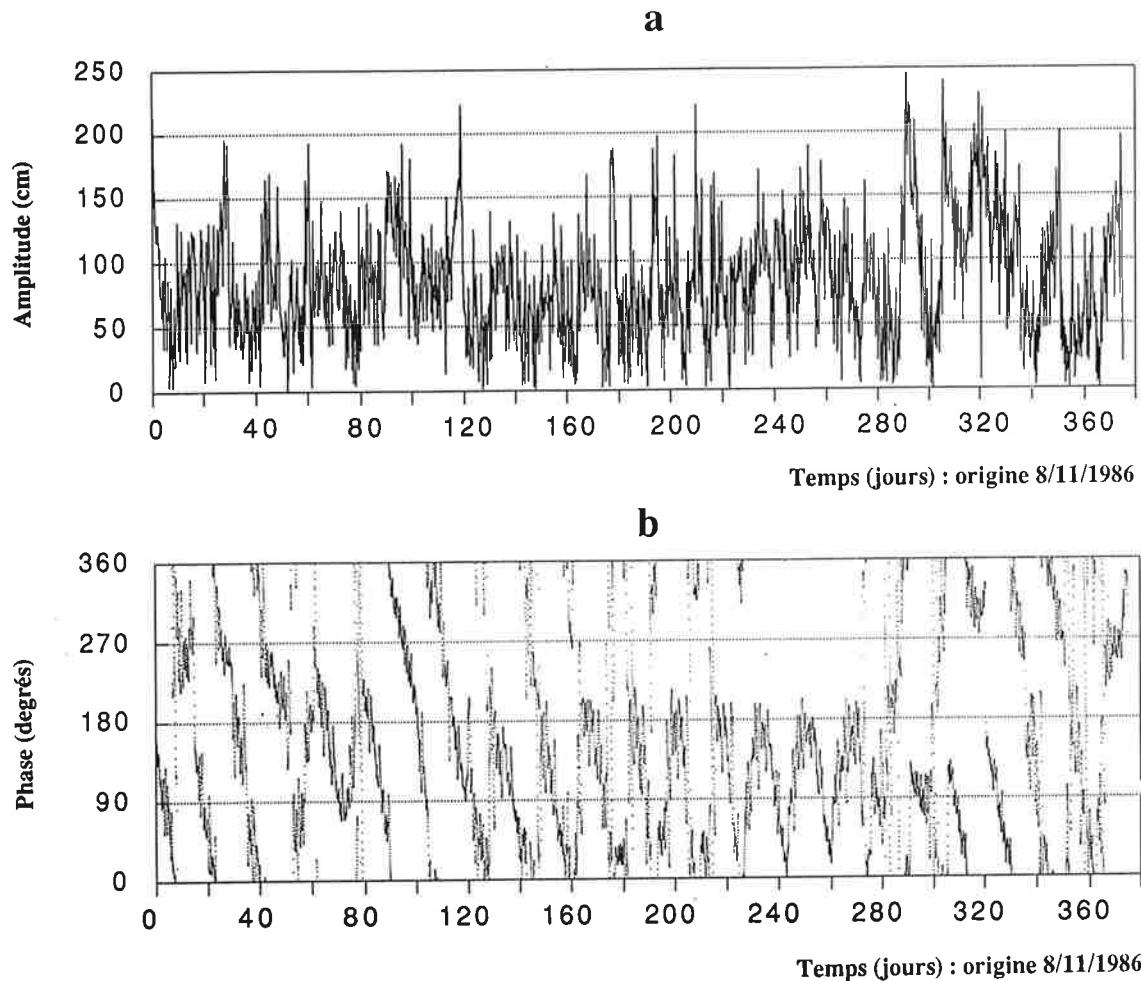
Le signal à 1 cy/rev ainsi que ses modulations peuvent être retranchés des DA à partir des résultats de la démodulation. Les Figures III.7 montrent les spectres des DA avant et après soustraction. On peut constater l'extrême efficacité de la méthode. La nouvelle série a ensuite été démodulée en 2 cy/rev et ces modulations ont été retranchées avant démodulation en 3 cy/rev.

Les résultats de la démodulation des DA en 2 et 3 cy/rev (Figures III.8 - 9) montrent une forte variation des amplitudes tandis que les phases sont relativement plus stables sauf après le 280^{ème} jour (juillet 1987). Ces perturbations de la phase sont vraisemblablement dues à l'intense activité solaire et géomagnétique durant cette période (voir Figures III.10). Les spectres des modulations en 2 et 3 cy/rev (Figures III.11) sont aussi riches que le spectre des modulations du 1 cy/rev avec toutefois des amplitudes plus faibles.

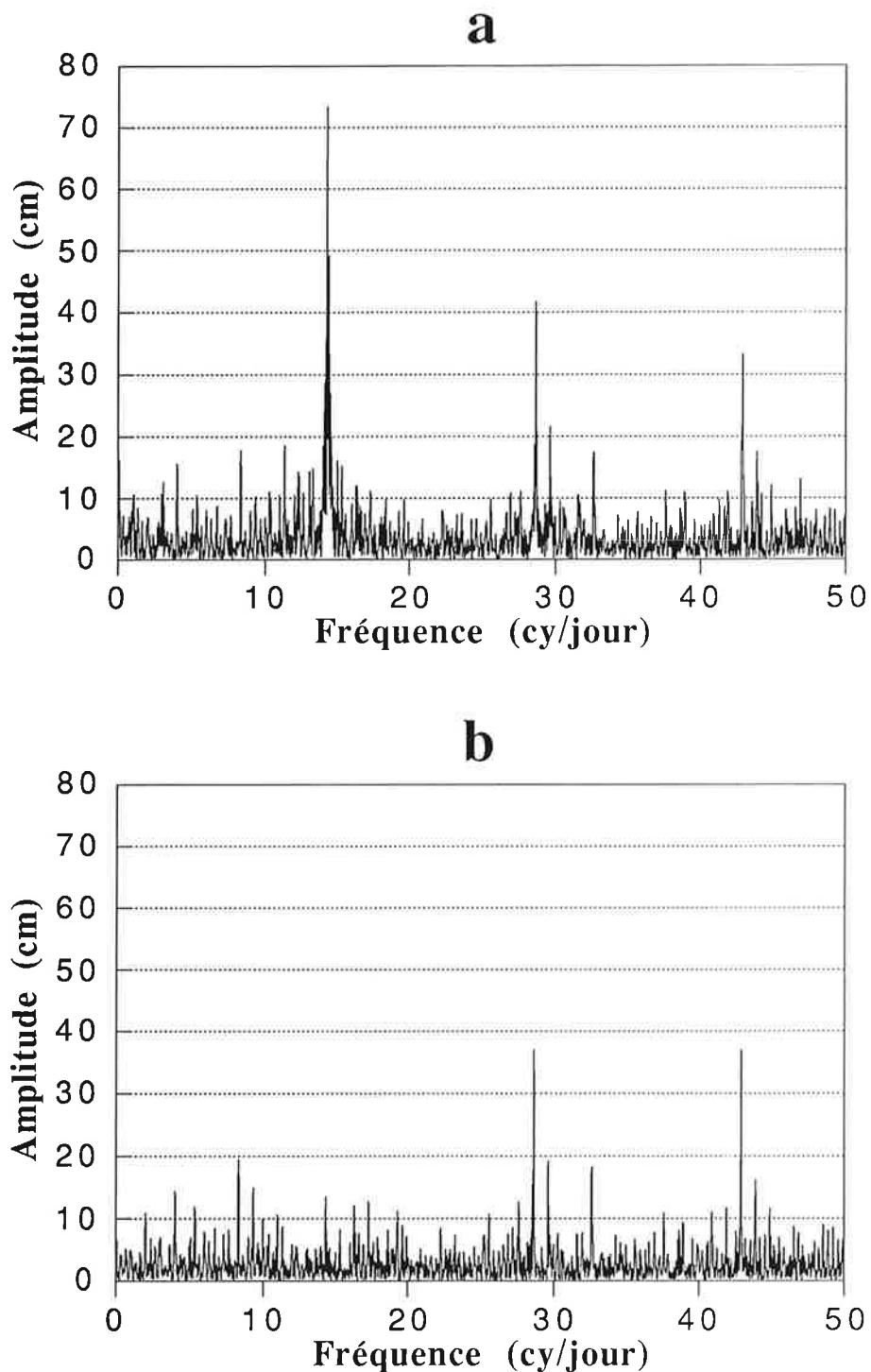
III.4 - Caractéristiques spectrales de l'erreur d'orbite

La théorie analytique de Kaula [1966] relie linéairement les perturbations de la composante radiale de la position du satellite sur son orbite aux erreurs du modèle du potentiel gravitationnel terrestre. Plusieurs auteurs [Wagner, 1985; Engelis, 1987] ont montré que cette théorie est suffisamment précise au premier ordre pour décrire les erreurs d'orbite des satellites décrivant des orbites quasi-circulaires, comme les satellites altimétriques. Dans cette théorie, seules les erreurs du modèle du potentiel terrestre sont considérées. Nous ne dérivons pas ici les équations de Kaula qui sont aujourd'hui des plus classiques en orbitographie [Kaula, 1966; Colombo, 1984; Wagner, 1985; Engelis, 1987]. Nous ne rappelons que les formules théoriques qui servent à interpréter les résultats de la démodulation.

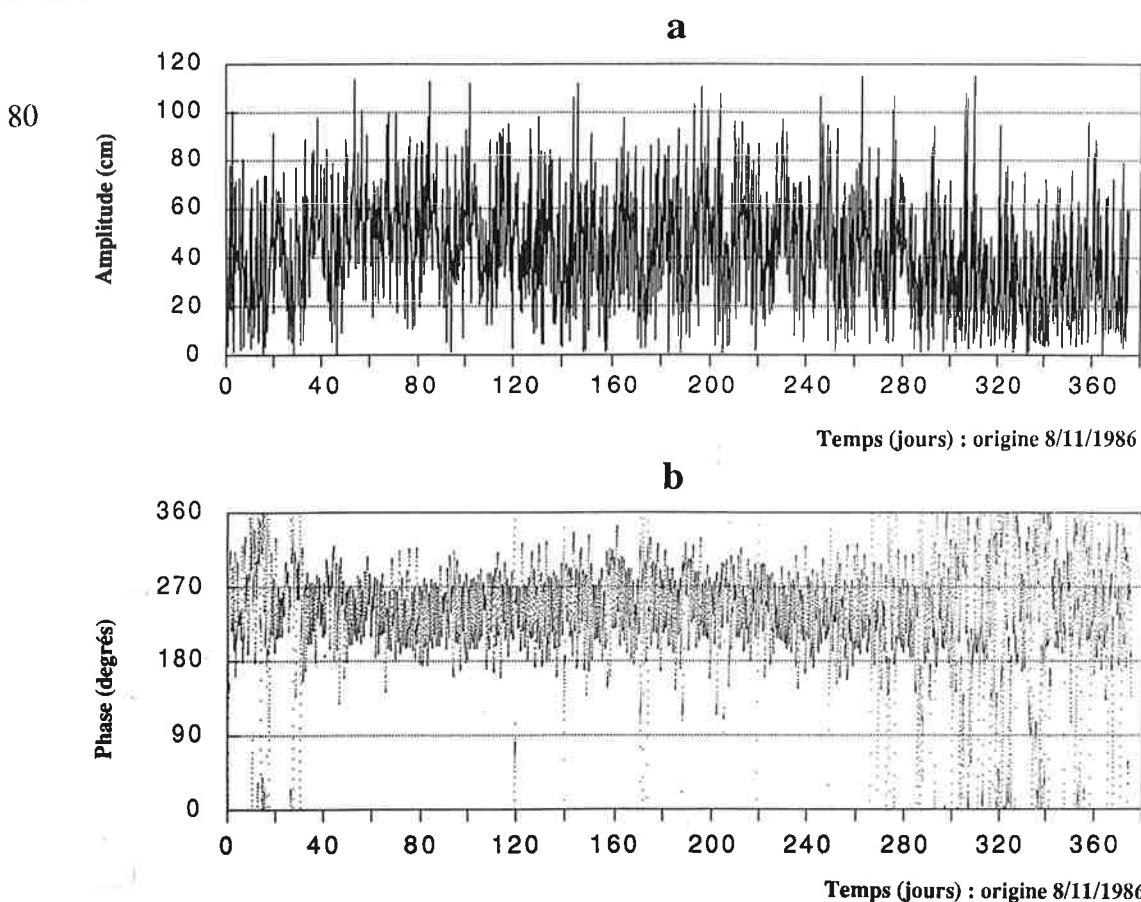
Dans le cas des orbites képlériennes, la distance radiale entre le centre de masse de la Terre et le satellite est



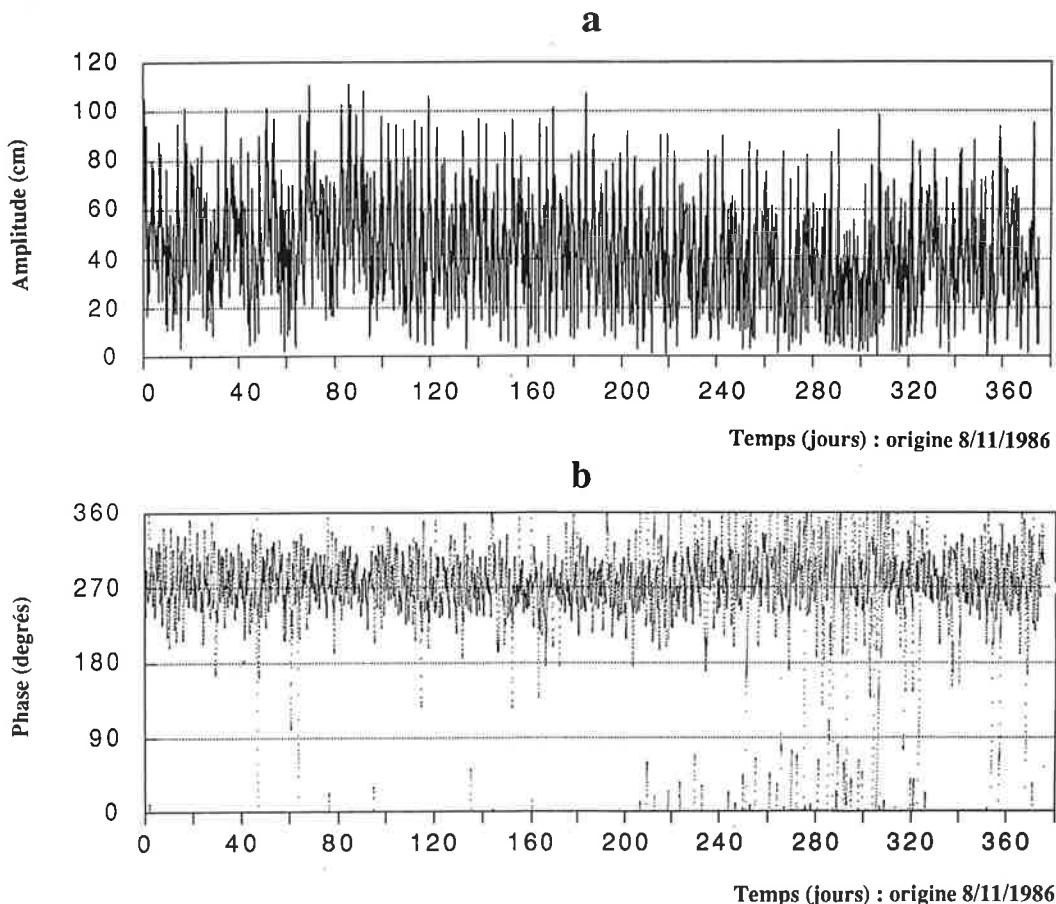
Figures III.6 : Résultats de la démodulation du 1 cy/rev d'un an de données Geosat (orbites GEM-T1). Les résultats bruts ont été lissés par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure en 2 cycles par jours : (a) amplitude et (b) phase.



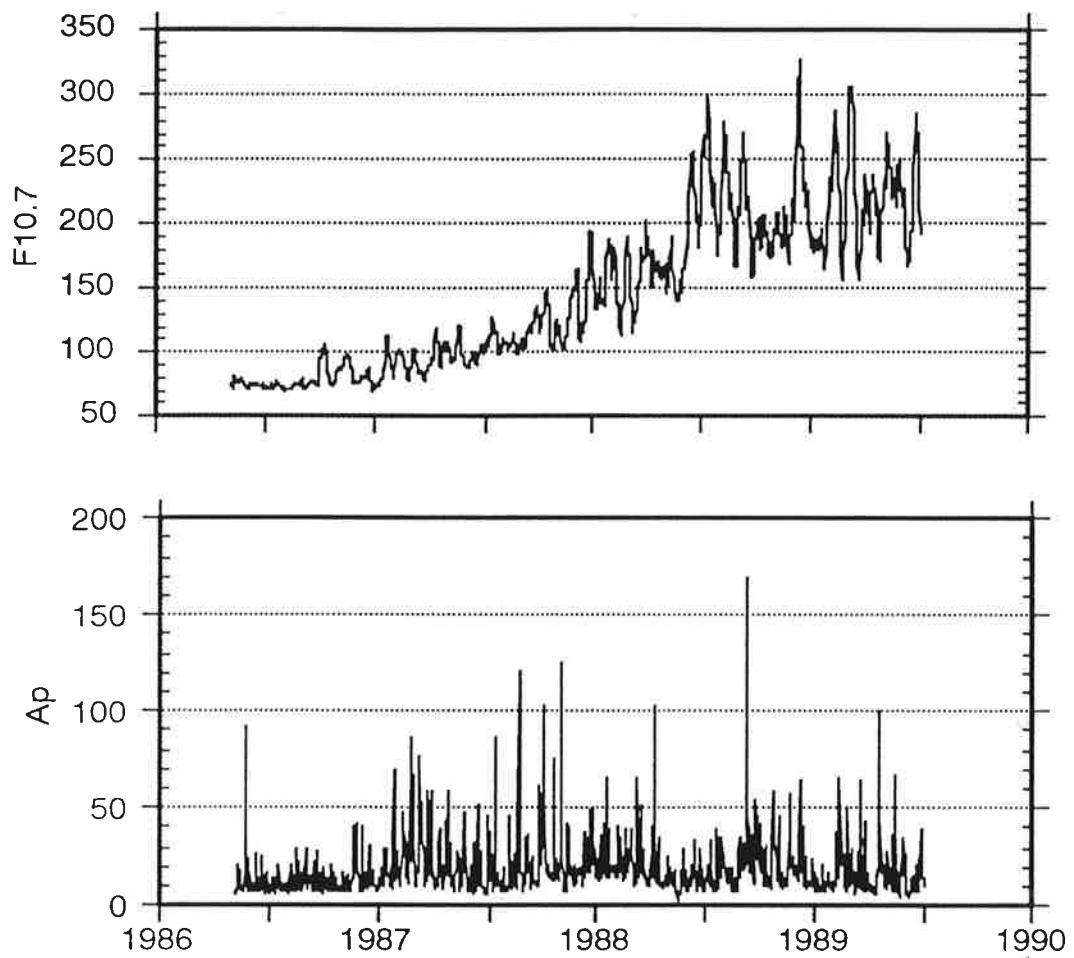
Figures III.7 : (a) Périodogramme des données altimétriques Geosat du premier cycle (orbites GEM-T1). (b) Périodogramme de ces mêmes données auxquelles le 1 cy/rev et ses modulations ont été soustraits à partir des résultats de la démodulation.



Figures III.8 : Résultats de la démodulation du 2 cy/rev d'un an de données altimétriques Geosat (orbites GEM-T1). Les résultats bruts ont été lissés par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure en 2 cycles par jours : (a) amplitude et (b) phase.



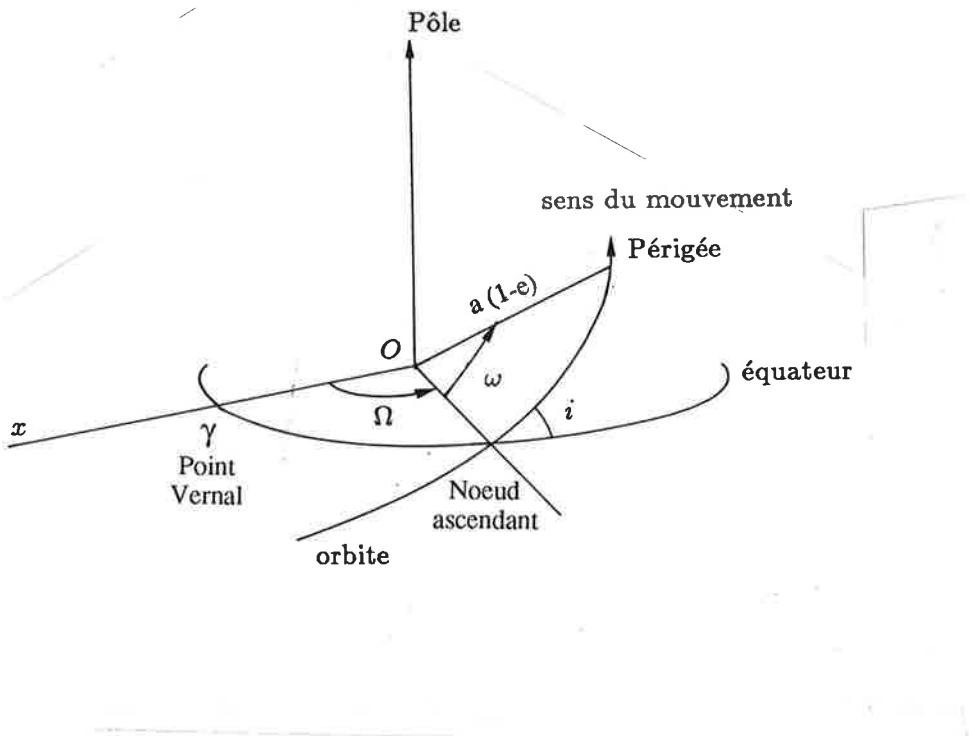
Figures III.9 : Résultats de la démodulation du 3 cy/rev d'un an de données altimétriques Geosat (orbites GEM-T1). Les résultats bruts ont été lissés par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure en 2 cycles par jours : (a) amplitude et (b) phase.



Figures III.10 : Activité solaire durant les trois ans de l'orbite répétitive de Geosat donnée par le flux solaire ($F_{10.7}$) à Ottawa et l'indice géomagnétique planétaire Ap [tiré de Haines et al., 1993].

Figure III.12 : Eléments képlériens moyens de Geosat.

Eléments képlériens	Valeur
demi grand axe	$a = 7166.555 \text{ km}$
excentricité	$e = 0.000797$
inclinaison	$i = 108.044 \text{ deg.}$
argument du périhélie	$\dot{\omega} = 0.001 \text{ deg. par jour}$
longitude du noeud ascendant	$\Omega = 2.0517209 \text{ deg. par jour}$
anomalie moyenne	$\dot{M} = 5151,749956 \text{ deg. par jour}$



$$r = a(1 - e \cos E) \quad (3.6)$$

où a est le demi grand axe de l'orbite elliptique, e l'excentricité et E l'anomalie excentrique. En développant E en fonction de l'anomalie moyenne M [Kaula, 1966], on obtient :

$$r = a[1 - e \cos M - (e^2/2)(\cos 2M - 1) + O(e^3)] \quad (3.7)$$

Au premier ordre, pour un e très petit, la perturbation suivant la composante radiale est :

$$\Delta r \approx \Delta a - (a\Delta e + e\Delta a) \cos M + ae\Delta M \sin M \quad (3.8)$$

Dans ce résultat extrêmement simple, il apparaît déjà que quelle que soit l'expression exacte des différents termes du second membre de l'équation (3.8), le signal de l'erreur radiale d'orbite est fondamentalement une oscillation d'une fréquence de 1 cy/rev modulée en amplitude et phase. La théorie de Kaula permet d'exprimer l'erreur radiale d'orbite le long de la trace du satellite en fonction des coefficients ΔC_{nm} et ΔS_{nm} du développement en harmoniques sphériques des erreurs du potentiel gravitationnel terrestre [suivant Rosborough and Marshall, 1990] :

$$\Delta r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{nmpq} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \Delta C_{nm} \\ -\Delta S_{nm} \end{array} \right]_{n-m \text{ pair}}^{n-m \text{ pair}} \cdot \cos \Psi_{nmpq} \\ + \\ \left[\begin{array}{c} \Delta S_{nm} \\ \Delta C_{nm} \end{array} \right]_{n-m \text{ impair}}^{n-m \text{ pair}} \cdot \sin \Psi_{nmpq} \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

où les coefficients A_{nmpq} sont fonctions des éléments orbitaux moyens et inversement proportionnels à l'argument Ψ_{nmpq} qui définit les fréquences spectrales de l'erreur d'orbite :

$$\Psi_{nmpq} = (n-2p+q)(\omega+M) - q\omega + m(\Omega-\vartheta) \quad (3.10)$$

où ω est l'argument du périgée, Ω la longitude du noeud ascendant et ϑ le temps sidéral de Greenwich (Figure III.12). Le spectre de l'erreur d'orbite contient donc théoriquement un nombre infini de fréquences. Différentes combinaisons de $nmpq$ peuvent engendrer les mêmes fréquences qui sont combinaisons linéaires de $\omega+M$, la fréquence orbitale (ou 1 cy/rev), $\dot{\omega}$ la fréquence apsidale correspondant à une révolution complète du périgée, et $\Omega - \vartheta$ la fréquence nodale correspondant à une rotation complète de la Terre par rapport au plan de précession de l'orbite. L'équation (3.9) est une somme de fonctions sinusoïdales dont les amplitudes et phases sont constantes. Cette équation est, en général, valide pour de courtes périodes de temps, car la détérioration progressive de l'orbite du satellite sous l'action des forces de surface modifie les caractéristiques de l'orbite. Dans le cas des orbites quasi-circulaires, la sommation sur l'indice q , puissance de l'excentricité, peut être limitée à l'intervalle [-1, +1].

Parmi le nombre infini de fréquences caractéristiques de l'erreur radiale d'orbite (éq. 3.10), certaines se distinguent car elles présentent des amplitudes plus fortes que les autres, dénotant un phénomène de résonance. Celle-ci survient quand la perturbation a une fréquence identique ou proche d'une des fréquences propres des équations différentielles du mouvement. Plus concrètement, une résonance apparaît quand le satellite est soumis de façon répétitive au même champ de force provoquant des oscillations à longue période voire des variations séculaires de la trajectoire du satellite. On appelle résonance parfaite les variations séculaires tandis que les oscillations à longue période sont dites résonance faible ou forte. Numériquement, une résonance se manifeste par un dénominateur égal à zéro ou très petit dans l'expression des solutions analytiques des équations linéaires. L'existence d'un dénominateur très petit

Table III. 1 : Types de perturbations dues au potentiel terrestre.

Indices	Coefficients	Type de perturbation	Commentaires
$n - 2p + q = 0, \quad m = 0, \quad q = 0$	harmoniques zonaux pairs	séculaires	périodes sous multiples pairs de la période du périhélie périodes sous multiples impairs de la période du périhélie
	$q = \pm 1$	longues périodes	
	$q = \pm 1$	longues périodes	
	$m \neq 0$	moyennes périodes	périodes sous multiples du jour
$n - 2p + q \neq 0, \quad m = 0$	harmoniques zonaux	courtes périodes	périodes sous multiples de la période orbitale du satellite quasi-résonance
	$m \neq 0, \quad \dot{\psi}_{nmpq} \neq 0$	harmoniques tesseraux	
	$\dot{\psi}_{nmpq} \approx 0$	harmoniques tesseraux	

n'implique pas que les amplitudes des perturbations sont infinies, mais reflète simplement que les solutions analytiques ne sont plus valides. C'est ce qui arrive lorsque l'argument $\psi \approx 0$, puisqu'il apparaît au dénominateur des A_{nmpq} .

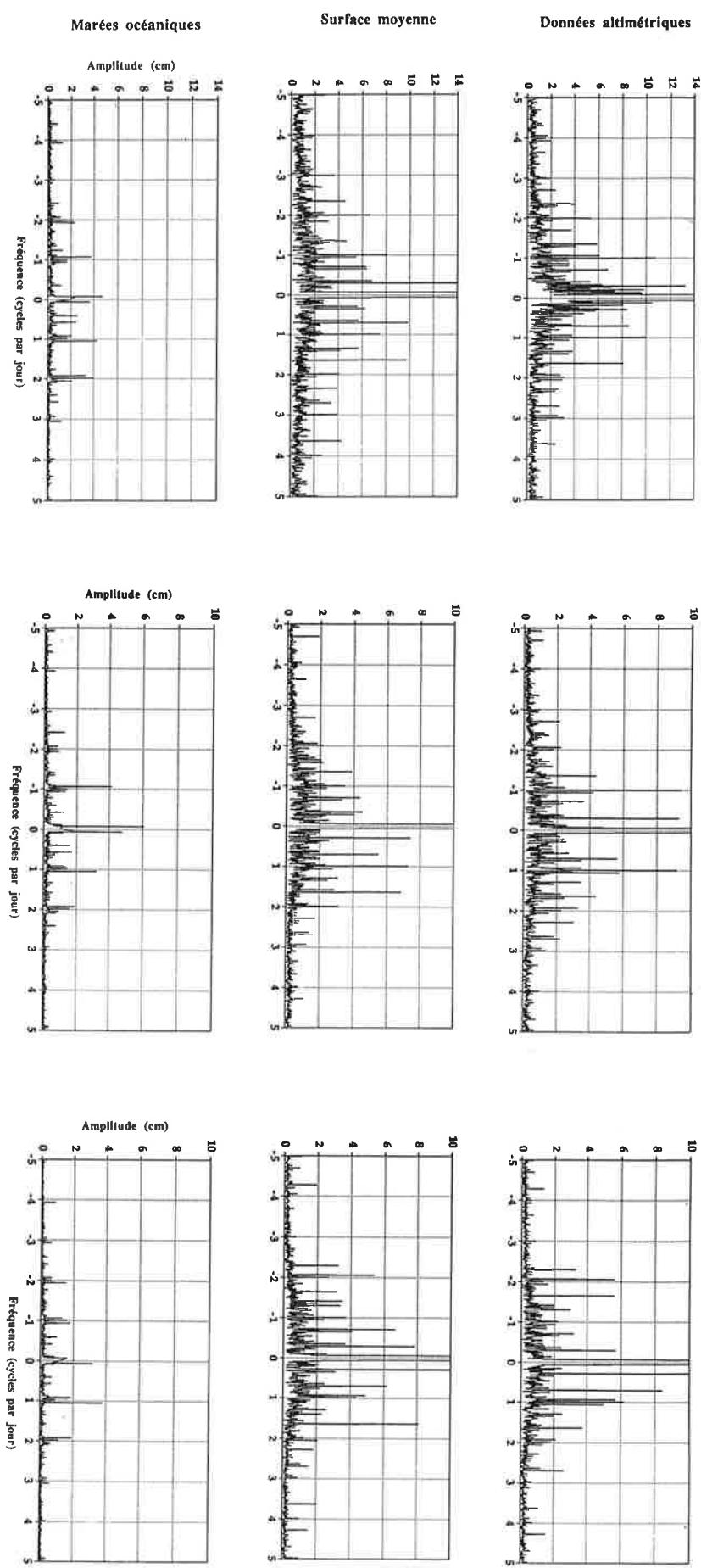
Lorsque $n-2p+q = 0$ et $m = 0$, et si $q = 0$, il y a annulation complète de (3.10) et les harmoniques zonaux pairs (car $n = 2p$) provoquent des variations séculaires de l'erreur d'orbite, c'est-à-dire une résonance parfaite et, par contre, si $q = \pm 1$, il y a dans ce cas une quasi-résonance forte et les harmoniques zonaux impairs (car $n = 2p+1$) provoquent des perturbations à longue période. Les périodes de ces perturbations sont supérieures à 200 jours et sont donc très longues par rapport à la durée des arcs d'intégration (de l'ordre de la dizaine de jours). Leurs amplitudes sont considérables et la théorie linéaire de Kaula n'est plus valable. L'ajustement des conditions initiales lors du calcul d'orbite permet d'en réduire les effets. Une partie des contributions est aussi absorbée dans l'ajustement des paramètres des forces de frottement. Les erreurs résiduelles sont responsables de l'effet papillon que nous avons déjà évoqué précédemment.

Un autre cas de résonance est rencontré quand les différents termes impliqués dans (3.10) s'annihilent. Ainsi, par exemple, lorsque la fréquence orbitale ($\dot{\omega} + M$) est égale à un nombre entier de fois la fréquence nodale ($\dot{\Omega} - \dot{\vartheta}$), le satellite passe toujours au-dessus de la même région géographique où il est soumis aux mêmes effets gravitationnels. Il en résulte une accumulation progressive des perturbations correspondantes de fréquence $q\dot{\omega}$. Si q ou $\dot{\omega}$ sont égaux à zéro, il y a résonance parfaite, sinon, c'est un cas de quasi-résonance. En réalité, $\dot{\omega}$ ne peut jamais être identiquement nul à cause de la dérive de l'orbite (à moins de la corriger à l'aide de moteurs auxiliaires). De même, $\dot{\omega} + M$ ne peut être rigoureusement multiple de $\dot{\Omega} - \dot{\vartheta}$, à cause des interactions entre les perturbations périodiques et les effets des forces de surface. Ainsi, les deux cas de résonance parfaite et forte discutés ci-dessus adoptent la forme de résonances dites faibles. Par exemple, dans le cas de Geosat dont la fréquence orbitale est 14.3 cycles par jour, une première résonance faible apparaît pour $m=14$ et donc $\psi_{nmpq} = 0.3$ cy/rev, une seconde lorsque $m=28-29$, ...

Lorsque $n-2p+q = 0$ et $m \neq 0$, les fréquences dominantes se réduisent à $m(\dot{\Omega} - \dot{\vartheta}) - q\dot{\omega}$; elles ne s'annulent jamais puisque $q < 2$ mais sont petites pour les petites valeurs de m . Ce type de résonance est dite résonance "pluri-journalière", car c'est le facteur $m\dot{\vartheta}$ qui est dominant dans l'expression de la fréquence.

Lorsque $n-2p+q \neq 0$, les fréquences principales sont des multiples entiers de la fréquence orbitale, modulées par les termes pluri-journaliers et la fréquence apsidale. Il y a quasi-résonance, lorsque les fréquences induites par les perturbations pluri-journalières sont proches d'un multiple entier de la fréquence orbitale. La fréquence orbitale de Geosat étant de ± 14.3 cy/jour, il y aura des effets de résonance attribuables aux coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel terrestre d'ordre 14 et 15, 28 et 29, ainsi que 42 et 43, qui sont responsables respectivement des résonances faibles premières, secondaires et tertiaires. Ces résonances provoquent des modulations de ± 0.3 , ± 0.7 , ± 1.3 , ± 1.7 , ... cy/jour des fréquences multiples entières du 1 cy/rev.

La démodulation complexe des DA en 1 cy/rev montre et permet d'estimer l'effet papillon qui est une erreur résiduelle attribuable à une quasi-résonance forte. On peut observer dans les spectres des modulations (Figures III.11) pratiquement toutes les fréquences prédictes par la théorie analytique de Kaula. En particulier, on distingue très clairement les termes pluri-journaliers modulés par la fréquence apsidale, mais aussi les effets des résonances faibles qui produisent des modulations en ± 0.3 cy/rev, ... Cependant, les spectres sont bien plus riches que ne le laisse supposer la théorie linéaire de l'erreur d'orbite.



Figures III.11 : Périogrammes des modulations respectivement en 1, 2 et 3 cyl/rev des données altimétriques de Geosat (a-c), de la surface moyenne de Marsh par rapport au géoïde GEM-T1 (d-f), et des marées océaniques (g-i) échantillonnées sous la trace du satellite.

III.5 - Autres contributions aux modulations apparentes

Dans cette section, nous cherchons quels sont les autres signaux qui contribuent aux modulations observées et nous tentons aussi de les quantifier. L'enjeu est clair, il faut éviter d'éliminer du signal océanographique en même temps que l'on réduit les erreurs d'orbite.

III.5.1 - Théorie

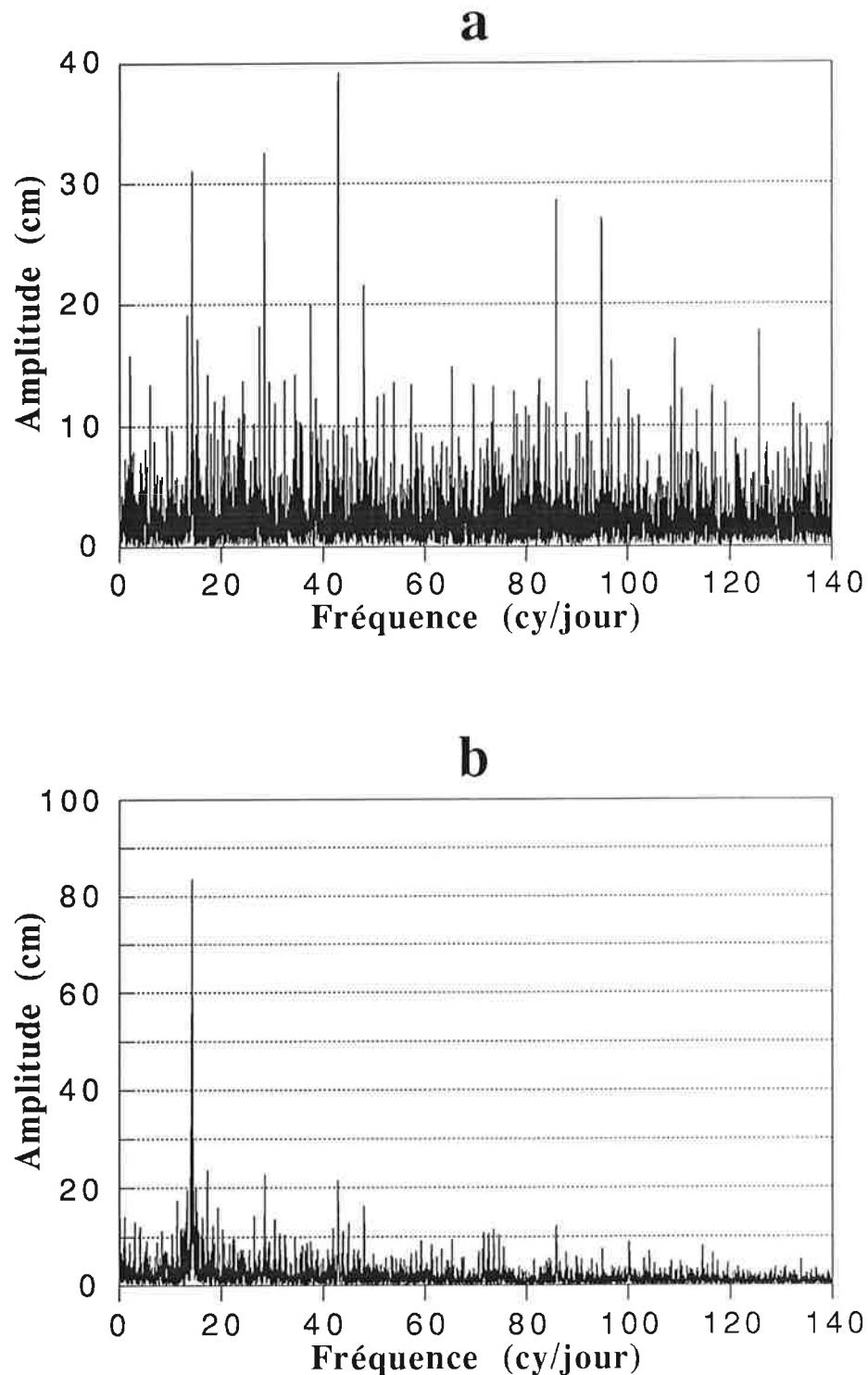
Dans un premier temps, il faut insister une fois de plus sur les limites de validité de la théorie linéaire de l'erreur d'orbite. Les résultats théoriques sont issus d'une linéarisation des équations non linéaires du mouvement prenant en compte uniquement les erreurs du modèle de potentiel gravitationnel terrestre tout en négligeant les erreurs des modèles des forces de surface (frottement atmosphérique, pression de radiation solaire) et les effets de l'ajustement des observations de poursuite pour obtenir les conditions initiales des éléments orbitaux du satellite. Malgré ces restrictions importantes, on peut raisonnablement supposer que si les erreurs du modèle du champ de gravité sont la source principale des erreurs d'orbite, alors les caractéristiques spectrales prédictes par la théorie linéaire restent valables en première approximation.

III.5.2 - La surface moyenne océanique

Le signal océanographique permanent le plus important en amplitude est la Surface Moyenne Océanique (SMO) qui est définie par rapport à l'ellipsoïde de référence comme la somme du géoïde et de la Topographie Dynamique de l'Océan (TDO) induite par la circulation générale permanente. Afin d'estimer les caractéristiques spectrales de la SMO, nous avons utilisé un modèle indépendant des données altimétriques de Geosat qui a été calculé par Marsh et al. [1986] à partir des données altimétriques de Seasat. Bien que ce modèle fut obtenu à partir de données très bruitées, il devrait nous indiquer s'il est opportun ou non d'éliminer les modulations des fréquences en 1, 2, et 3 cy/rev. Le spectre (Figure III.13a) de la SMO de Marsh, à laquelle le modèle de géoïde GEM-T1 a été soustrait et qui a été ensuite échantillonnée sous la trace de Geosat, présente 3 fréquences principales en 1, 2 et 3 cy/rev qui ont respectivement des amplitudes de 26 cm, 33 cm et 39 cm. Comme le géoïde GEM-T1 a été soustrait, ce spectre est en fait le spectre de la TDO et de ses erreurs associées dont les erreurs du géoïde. Ces dernières peuvent être estimées à partir des erreurs formelles du modèle de géoïde qui peuvent être cartographiées et ensuite échantillonnées le long de la trace du satellite. Le spectre des erreurs formelles du géoïde (Figure III.14) a des amplitudes qui ne dépassent pas les 10 cm.

Le spectre des DA moins la SMO de Marsh est moins énergétique que le spectre des DA originelles à toutes les fréquences en dehors des fréquences autour du 1 cy/rev où paradoxalement l'énergie augmente. A première vue, une partie du signal océanographique a été enlevé à toutes les fréquences sauf autour du 1 cy/rev où du bruit a été rajouté. L'origine de ce bruit peut être associé à la perte de l'orientation absolue, par rapport au géoïde, de la SMO qui est calculée par minimisation des écarts aux points de croisement [Schrama, 1992]. Le bruit correspond à la projection dans la SMO de la partie invariante des résidus de l'erreur d'orbite de Seasat. En effet, Colombo [1984] et Schrama [1989] ont montré que les erreurs communes aux arcs ascendants et descendants, que l'on ne peut estimer par les méthodes de différences aux points de croisement, ont des signatures spectrales dont la fréquence principale est précisément 1 cy/rev.

Les spectres des démodulations des pics principaux de la SMO de Marsh moins le géoïde GEM-T1 (= TDO) sont dessinés dans les Figures III.11. On ne peut rien dire en ce qui



Figures III.13 : (a) Périodogramme de la surface moyenne de Marsh au-dessus du géoïde GEM-T1 échantillonnée sous la trace du premier cycle de Geosat. (b) Périodogramme des données altimétriques de Geosat moins la surface moyenne de Geosat pour ce même cycle.

concerne les modulations du 1 cy/rev, car comme nous l'avons vu, elles sont extrêmement bruitées. Dans les modulations des 2 et 3 cy/rev, on observe les termes pluri-journaliers ainsi que les résonances faibles dont les amplitudes sont en bon accord avec celles observées dans les DA. Il semblerait donc que la SMO contribue de manière significative aux modulations des 2 et 3 cy/rev. La concordance est bien meilleure pour les modulations du 3 cy/rev car l'erreur d'orbite a certainement une petite contribution à 2 cy/rev. La contribution de la TDO à 1 cy/rev peut être estimée à partir du spectre de la TDO déduit de l'atlas hydrographique de Levitus (Figure III.15) calculé par Houry et al. [1993]. On voit que l'énergie spectrale de la TDO autour du 1cy/rev peut être négligée par rapport à celle de l'erreur d'orbite.

III.5.3 - Les marées océaniques

Les marées océaniques sont après la SMO le signal à grande échelle le plus énergétique. Le signal de la marée océanique totale, calculé le long de la trace du satellite à l'aide du modèle de Schwiderski [1980a-b], a été démodulé en 1, 2 et 3 cy/rev. Les Figures III.11 montrent les spectres des résultats de ces différentes démodulations. On peut constater que les fréquences des modulations dues à la marée sont dans l'ensemble bien séparées de celle de la TDO et de celles prédictes par la théorie linéaire de l'erreur d'orbite. En outre, elles apparaissent avec des amplitudes comparables à celles observées dans les DA de Geosat. Les marées océaniques présentent donc une signature spectrale bien distincte de la TDO et de l'erreur d'orbite.

III.5.4 - Autres contributions

Par autres contributions, nous entendons les erreurs résiduelles après application des principales corrections de propagation. Il s'agit des corrections de troposphère sèche et humide ainsi que des corrections ionosphériques. Les spectres de ces diverses corrections sont reproduits dans les Figures III.16. Leurs énergies sont réparties sur les fréquences multiples entières du 1 cy/rev avec des amplitudes d'une dizaine de centimètres. Les spectres des erreurs résiduelles après corrections doivent vraisemblablement avoir la même structure avec des amplitudes certainement inférieures au centimètre. On peut donc affirmer que la contribution des erreurs résiduelles des corrections de propagation aux modulations observées dans les DA sont négligeables.

Par ailleurs, notons que la modulation d'un jour du 1 cy/rev pourrait être expliquée, selon Chelton and Schlax [1993], comme un effet résultant de la procédure qui consiste, dans le calcul d'orbite à ajuster tous les 1 ou 2 jours un coefficient de traînée pour réduire les effets de force de frottement agissant sur le satellite.

III.5.5 - Conclusion

En résumé, les modulations du 1, 2 et 3 cy/rev observées dans les DA de Geosat proviennent principalement du signal de l'erreur d'orbite, de la Topographie Dynamique de l'Océan et des marées océaniques. La contribution de l'erreur radiale d'orbite est concentrée autour du 1 cy/rev alors que les modulations du 2 cy/rev sont principalement dues à la TDO avec une faible contribution de l'erreur radiale d'orbite. Par contre, les modulations du 3 cy/rev sont induites par la TDO et les marées océaniques.

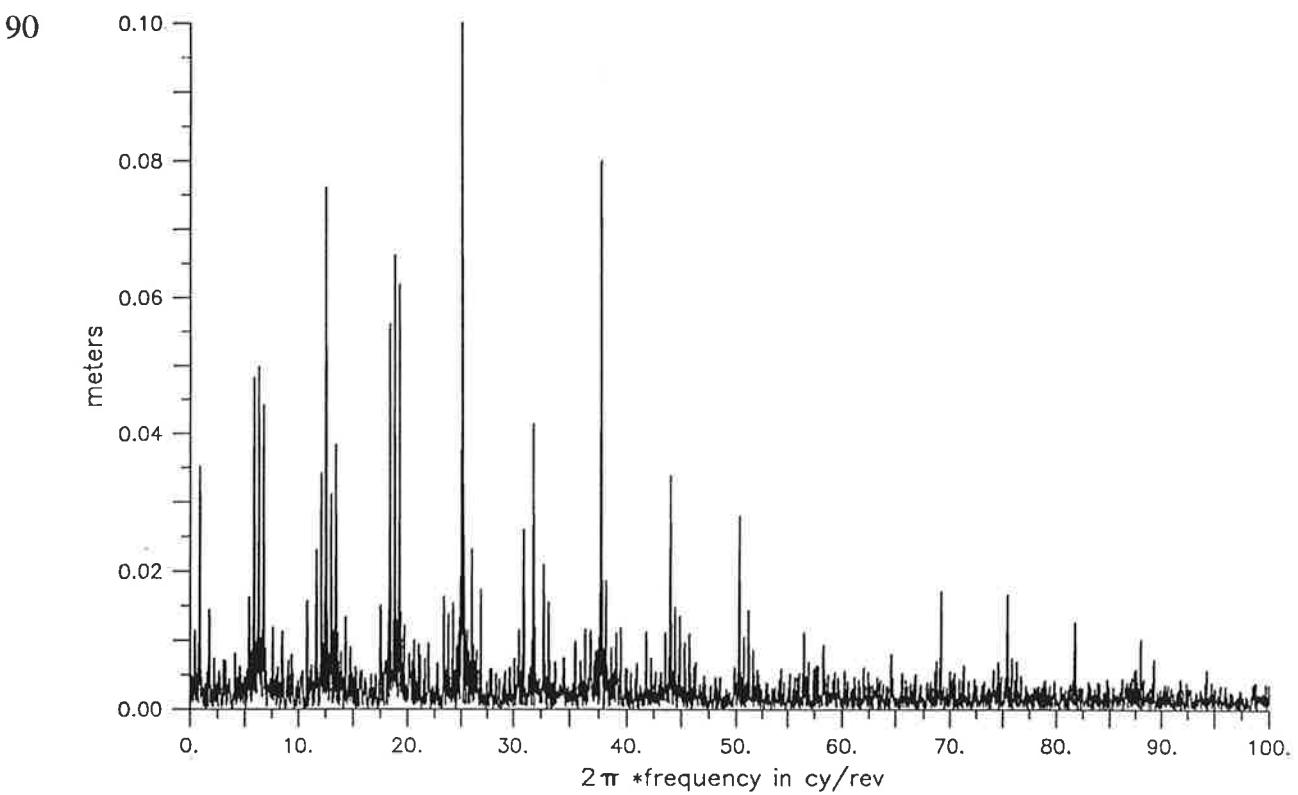
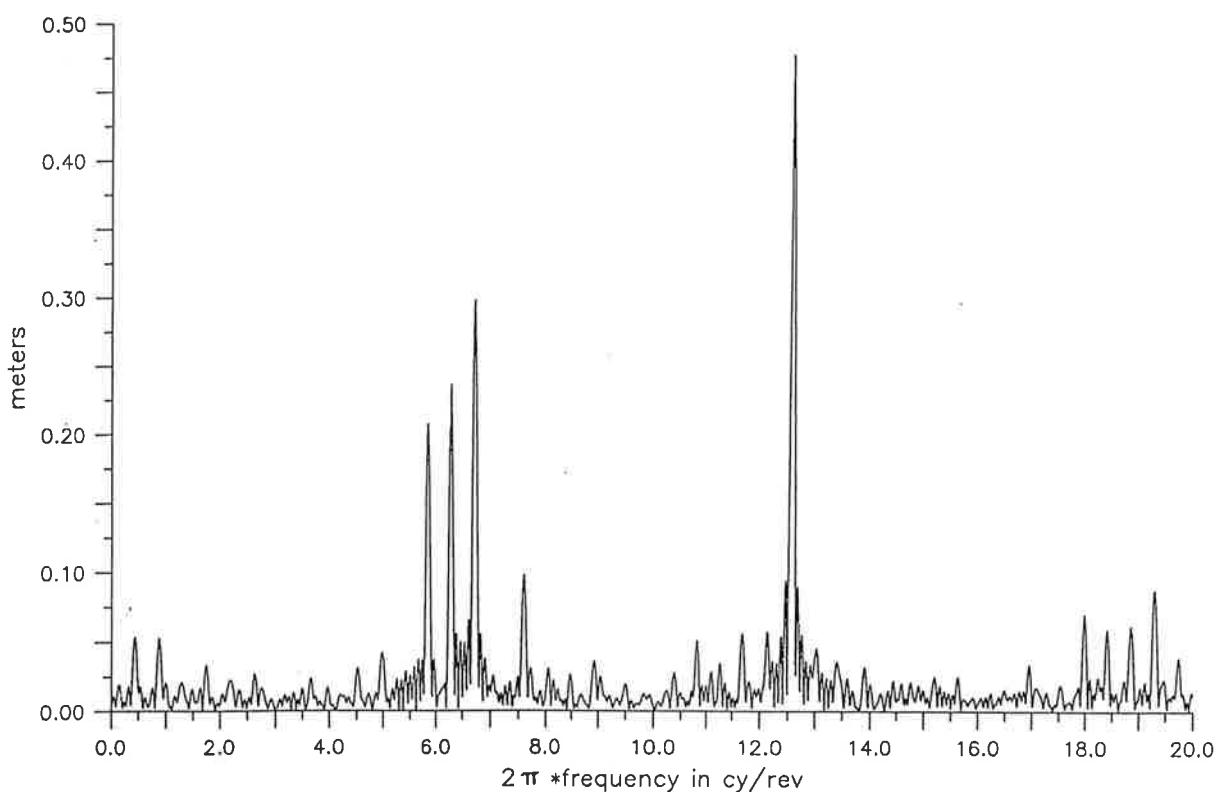
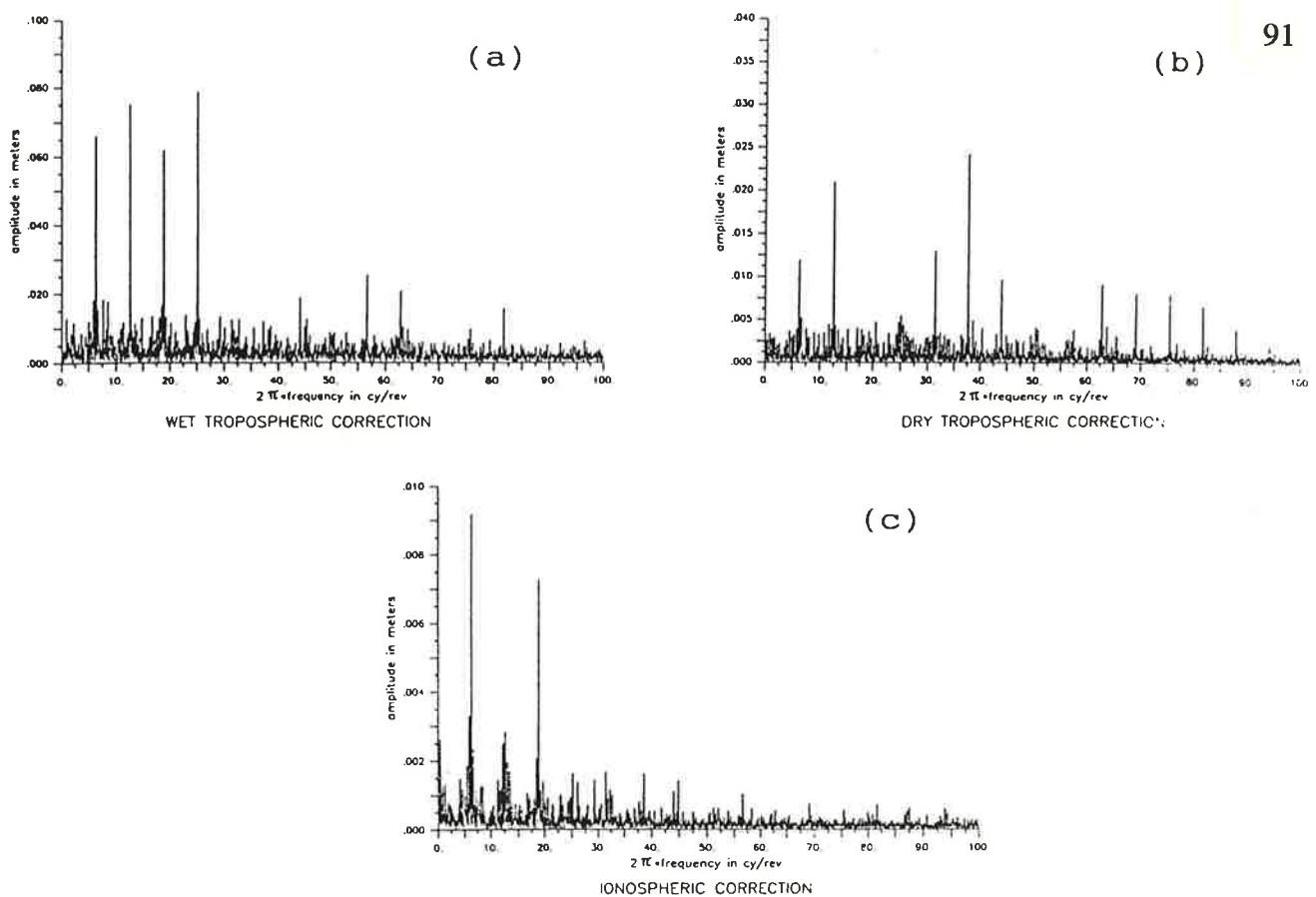


Figure III.14 : Périodogramme des erreurs formelles du modèle de géoïde GRIM4-S1 échantillonnées sous la trace de Geosat pour une période de 6 jours [tiré de Houry et al., 1993].



Figures III.15 : Périodogramme de la Topographie Dynamique de l'Océan déduite de l'Atlas Climatologique de Levitus (niveau de référence 2000 décibar) échantillonnée sous la trace du satellite [tiré de Houry et al., 1993].



Figures III.16 : Périodogrammes des principales corrections appliquées aux données altimétriques : (a) correction de troposphère humide; (b) correction de troposphère sèche; et (c) correction ionosphérique [tiré de Houry et al., 1993].

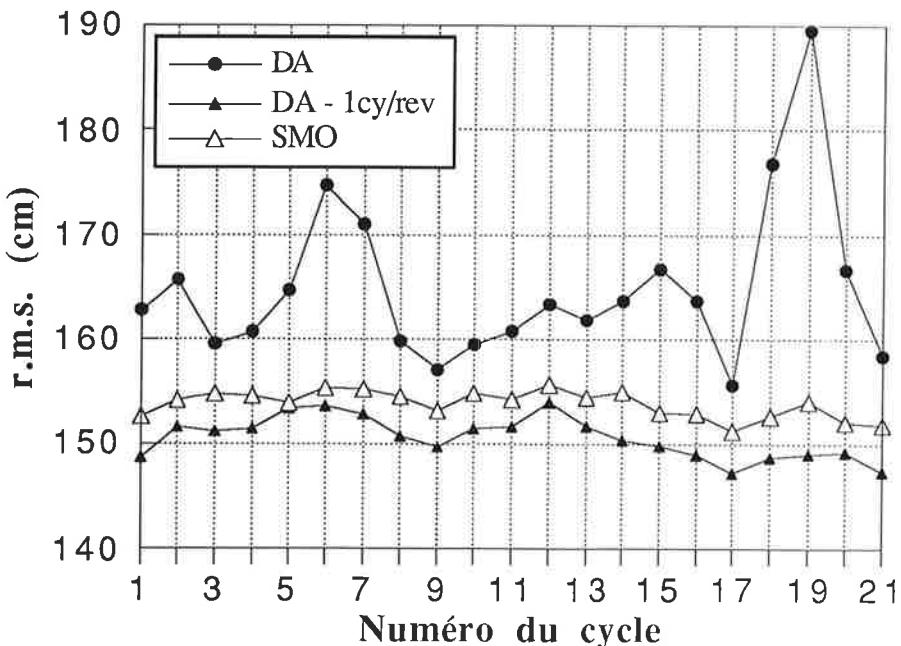


Figure III.17 : Ecarts types cycle par cycle des données altimétriques (DA) référencées par rapport au géoïde GEM-T1 avant (a) et après (b) élimination du 1 cy/rev et de ses modulations ainsi que la Surface Moyenne Océanique de Marsh.

Table III.2 : Ecarts types (ou rms) calculés sur des séries d'une durée d'un an (de novembre 1986 à novembre 1987) couvrant tout le globe.

Signal	rms (cm)
DA	164.8
DA - modulations 1 cy/rev	150.7
DA - modulations 1 & 2 cy/rev	146.4
DA - modulations 1, 2 & 3 cy/rev	144.7
modulations 1 cy/rev	69.0

DA = hauteur de la mer par rapport au géoïde GEM-T1 corrigée des marées océaniques.

Table III.3 : Ecarts types (ou rms) de la variabilité océanique par rapport au niveau moyen de la mer de novembre 1986 à novembre 1987 et moyennés dans une boîte située dans la partie Ouest de l'Atlantique équatoriale entre 20°Ouest et 10°Ouest et 20°Sud et 10°Sud.

Signal	rms (cm)	Variance (cm) ²	%
DA	66.4	4409	100
DA - modulations 1 cy/rev	18.8	353	8.0
DA - modulations 1 & 2 cy/rev	19.5	380	8.6
DA - modulations 1, 2 & 3 cy/rev	20.6	424	9.6

DA = hauteur de la mer par rapport au géoïde GEM-T1 corrigée des marées océaniques.

III.6 - La démodulation et réduction de l'erreur d'orbite

L'efficacité avec laquelle la démodulation complexe permet de réduire l'erreur d'orbite a été testée globalement et localement.

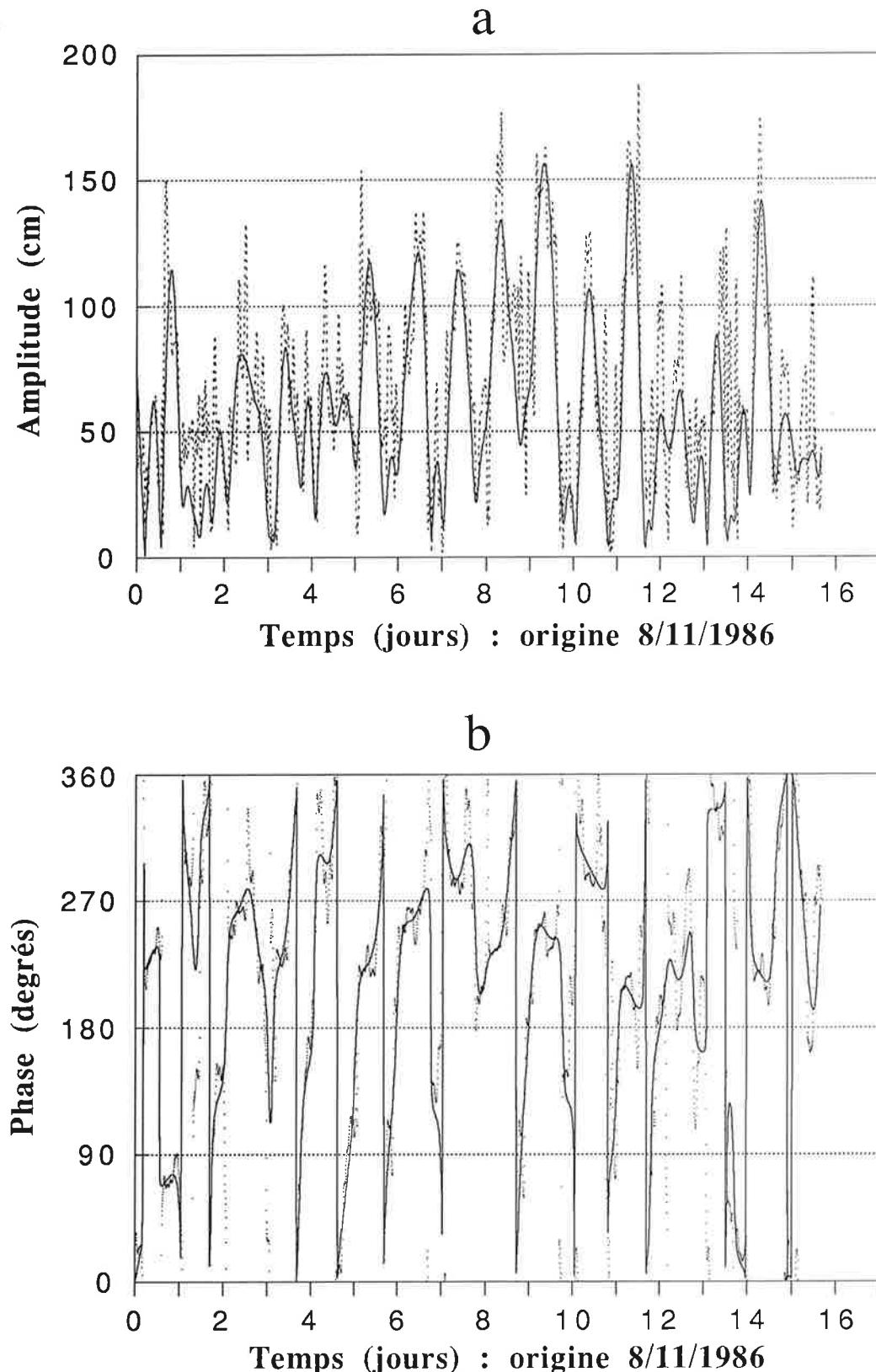
Tout d'abord, il a été vérifié que la variance globale des DA diminue au fur et à mesure que l'on retranche les modulations des 3 pics principaux (Table III.2). La Figure III.17 montre les valeurs des écarts types cycle par cycle avant et après élimination des modulations du 1 cy/rev. La série des écarts types a priori est représentative de l'évolution temporelle de la qualité de l'orbite. On peut remarquer, comme nous l'avons déjà noté, la dégradation progressive des éphémérides à partir du mois de juillet 1987 (cycle 17 et 18) à cause de l'activité solaire et géomagnétique. La variance a posteriori est pratiquement uniforme, comme on doit s'y attendre si l'erreur d'orbite est bien éliminée. La faible variabilité des écarts types a posteriori est expliquée en grande partie par la différence de l'échantillonnage d'un cycle à l'autre. Pour le démontrer, nous avons calculé les écarts types cycle par cycle de la SMO, qui par définition est une surface stationnaire. Les fluctuations observées des écarts types de la SMO sont très corrélées avec les fluctuations de la variance des DA et ne peuvent provenir que de la différence d'échantillonnage.

Passons maintenant au test à une échelle plus locale. L'erreur résiduelle après correction de l'erreur d'orbite est estimée en calculant la variabilité des DA dans une région de l'océan où le signal océanographique est extrêmement faible. La variabilité, définie comme le r.m.s. des DA par rapport au niveau moyen de la surface océanique, dans une boîte carrée de 10° de côté est reporté dans la Table III.3. La variance attendue est de l'ordre de 4 cm r.m.s. [Zlotnicki et al., 1989]. Après élimination des modulations du 1 cy/rev, la variabilité chute de 66 cm à 18.8 cm et la variance après correction ne représente plus que 8 % de la variance a priori. Ce résultat suggère que les modulations du 1 cy/rev représente 90 % de l'erreur radiale d'orbite non stationnaire. Lorsque les modulations des 2 et 3 cy/rev sont retranchées, la variabilité ne diminue plus et a tendance à augmenter légèrement. On peut donc conclure qu'il n'y a pratiquement pas de signal non stationnaire de l'erreur d'orbite à ces deux fréquences.

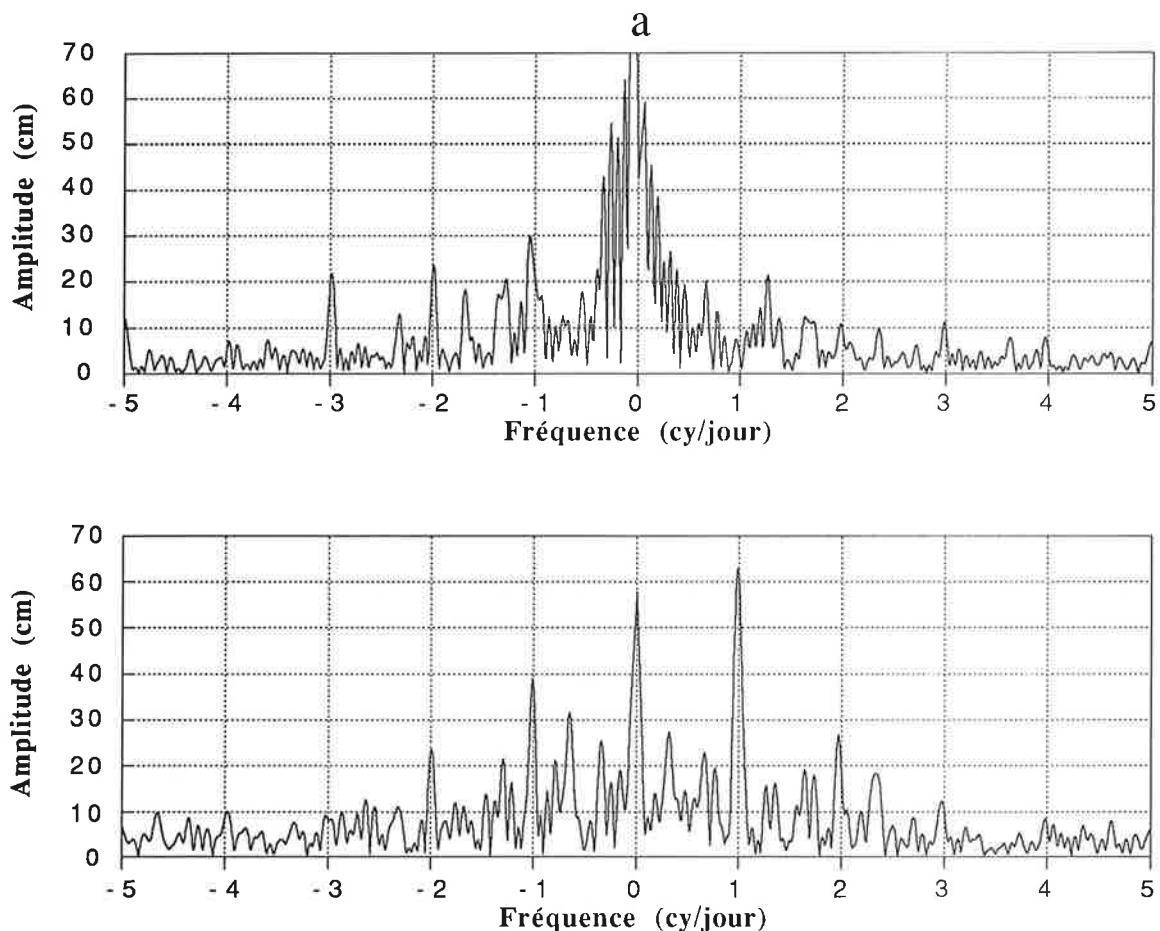
III.7 - Les orbites GEM-T2

Les orbites calculées à partir du modèle du potentiel gravitationnel GEM-T2 [Haines et al., 1992] ont permis de tester la méthode de démodulation sur des éphémérides plus précises. La Figures III.18 montrent les amplitudes et phases des modulations du 1 cy/rev pour les trois premiers arcs d'intégration, chacun d'une durée de 6 jours. L'amplitude moyenne de la modulation passe de 88 cm à 68 cm lorsque GEM-T2 est utilisé à la place de GEM-T1 pour la même période. Cette diminution est due à deux facteurs : le champ GEM-T2 est meilleur que le champ GEM-T1 [Haines et al., 1989] et l'effet papillon est considérablement réduit au point de ne plus apparaître, car la durée de l'arc d'intégration est réduite d'un tiers. Par contre, l'amplitude des fluctuations de la modulation est du même ordre de grandeur pour GEM-T1 (40 cm r.m.s.) et pour GEM-T2 (36 cm r.m.s.).

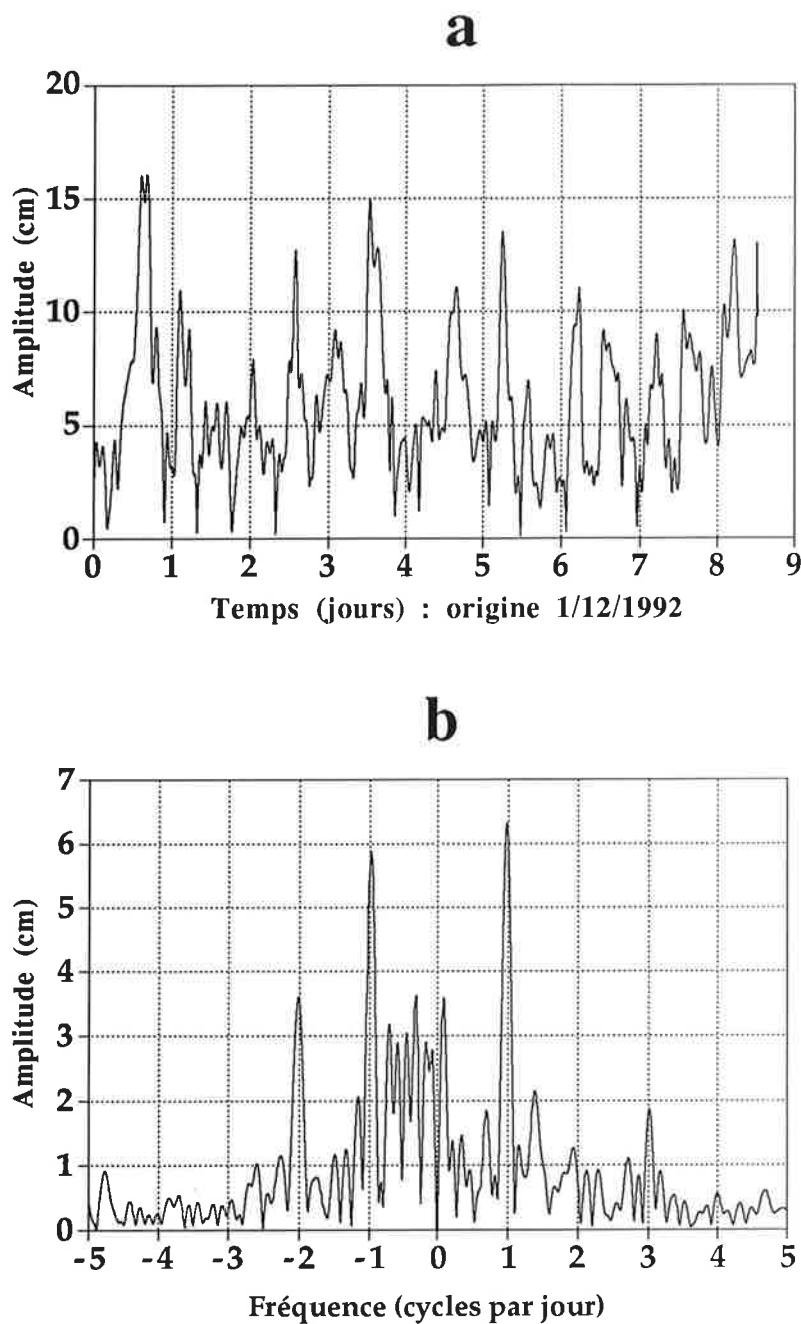
La comparaison des spectres des modulations (Figures III.19) montre que : (1) l'interprétation des résultats présentés dans la section précédente reste appropriée puisque l'on retrouve bien dans les orbites GEM-T2 les termes pluri-journaliers ainsi que les résonances faibles; (2) la réduction de l'effet papillon transparaît au niveau des spectres puisque pour les orbites GEM-T2, il y a peu d'énergie autour de la fréquence zéro par rapport au spectre des orbites GEM-T1; (3) la fréquence dominante dans les orbites GEM-T2 n'est pas le 1 cy/rev pur mais sa modulation en 1 cy/jour, ce qui explique la dérive de la phase dans la Figure III.18b.



Figures III.18 : Résultats de la démodulation du 1 cy/rev du premier cycle des données altimétriques de Geosat (orbites GEM-T2) : (a) amplitude et (b) phase. Les pointillés sont les valeurs instantanées et les lignes continues sont les mêmes résultats après lissage par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure en 2 cycles par jour.



Figures III.19 : Périodogrammes des modulations en 1 cy/rev des données altimétriques du premier cycle de Geosat pour les orbites GEM-T1 (a) et GEM-T2 (b).



Figures III.20 : (a) Modulation en amplitude du 1 cy/rev estimée à partir des mesures altimétriques du satellite Topex/Poseidon pour le cycle 8. (b) Périodogramme de cette modulation.

III.8 - Conclusions

Nous avons montré que la démodulation complexe est un outil mathématique particulièrement bien adapté pour estimer les amplitudes et phases des principales raies spectrales de l'erreur d'orbite prédictes par la théorie linéaire de Kaula. Ces résultats s'avèrent très utiles pour éliminer ou du moins réduire l'erreur d'orbite dans les données altimétriques. Cependant, la surface moyenne océanique présente des caractéristiques spectrales semblables à celles de l'erreur d'orbite. Nous avons conclu à un effet dominant de l'erreur d'orbite à 1 cy/rev et une prédominance du signal de la surface océanique moyenne à 2 et 3 cy/rev, à partir du modèle de la SMO de Marsh.

Nous avons enlevé le 1 cy/rev et ses modulations aux mesures altimétriques de Geosat qui seront utilisées dans les inversions décrites dans les chapitre IV et V. Afin de minimiser les effets de cette correction d'erreur d'orbite sur le signal de marée que nous cherchons à restituer, l'énergie des marées, en 1 cy/rev ainsi que ses modulations calculées à partir du modèle de Schwiderski, a été rajoutée.

Nous avons montré qu'en enlevant les modulations en 1 cy/rev des mesures altimétriques, on enlève près de 90 % de la composante non stationnaire de l'erreur d'orbite et que cette composante n'a pratiquement pas d'énergie à 2 et 3 cy/rev. Les 10% d'erreur résiduelle sont dus en partie aux imperfections des filtres numériques appliqués aux DA mais aussi aux composantes de l'erreur d'orbite qui ne se projettent pas autour du 1 cy/rev et que nous n'avons pas jugées utile d'estimer (par exemple en 0.3, 0.7, 2, ...cy/jour). En conclusion, le r.m.s. de la correction d'erreur d'orbite, déduit par la démodulation d'un an de DA pour les orbites GEM-T1, est de 69 cm.

L'ensemble des résultats montrent que la démodulation reste un outil utile pour réduire l'erreur d'orbite même pour des éphémérides plus précises que celles calculées avec GEM-T1. La méthode a été appliquée aux premières mesures altimétriques de Topex-Poseidon dans lesquelles nous avons trouvé des modulations pluri-journalières du 1 cy/rev avec des amplitudes de plusieurs centimètres (Figures III.20). En comparant ces résultats à ceux obtenus pour Geosat (Figures III.19), on peut constater une diminution d'un facteur 10 de l'erreur d'orbite. Enfin, signalons aussi que la démodulation a été utilisée récemment pour analyser les différences entre des orbites de Topex-Poseidon calculées par des équipes différentes : elle a permis de mettre en évidence une modulation journalière du 1 cy/rev probablement due à des variantes dans les techniques d'ajustement des paramètres des modèles des forces de surface [S. Houry, communication personnelle, 1993].

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV: METHODES INVERSES ET RESTITUTION DES MAREES OCEANIQUES

IV.1 - Introduction

Dans le chapitre II, nous avons insisté sur la très grande complémentarité des mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques pour restituer les marées océaniques. Le problème, que nous abordons dans ce chapitre, est la conception d'une méthode d'analyse afin d'exploiter l'ensemble de ces mesures. La théorie des problèmes inverses (norme L_2) fournit le cadre mathématique rigoureux qui permet de généraliser et d'étendre la théorie classique de l'analyse du signal. Les avantages de la théorie inverse sont de pouvoir traiter conjointement des lots de données hétérogènes, de tenir compte de l'ensemble des erreurs qui affectent les données et de produire des solutions avec une estimation interne (ou formelle) de leurs erreurs.

Selon la théorie classique des moindres carrés, la solution inverse tire parti explicitement de toutes les informations a priori disponibles sur le signal des marées et sur les diverses erreurs affectant les mesures. Un ensemble de fonctions d'auto et d'intercovariance quantifie de manière statistique les propriétés spatiales et spectrales des marées océaniques. Les propriétés statistiques des autres composantes des données, qui sont considérées comme des erreurs, sont aussi spécifiées en termes de fonctions de covariance. La solution des marées s'obtient alors par une inversion de l'ensemble des données; les caractéristiques des erreurs sur les solutions sont décrites par les fonctions de covariance a posteriori.

Notre objectif n'est pas d'apporter une contribution à la théorie des problèmes inverses, mais plutôt d'en tirer parti pour restituer les marées océaniques. Nous n'en donnons donc pas une présentation mathématique rigoureuse que l'on peut trouver, par exemple, chez Tarantola [1987], mais nous privilégions plutôt une approche intuitive. Dans le premier paragraphe, nous déduisons la formule classique d'interpolation par moindres carrés afin d'illustrer, au travers d'un exemple très simple, les méthodes inverses. Cet exemple fait apparaître naturellement les fonctions de covariance; la structure de la formule d'interpolation qui en résulte est fondamentalement identique pour tous les problèmes inverses que nous avons traités. Ensuite, nous donnons les formules d'inversions seules et conjointes de mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques. Puis, nous justifions le choix des différentes fonctions de covariance que ce soit du signal des marées ou des erreurs sur les mesures. Enfin, nous abordons le problème de l'aliasing dans le contexte de l'altimétrie par satellite et nous terminons sur l'aspect numérique de la méthode inverse.

Le problème de la restitution des marées océaniques à partir des observations, formulé dans le cadre de la théorie des problèmes inverses et tel que nous le présentons ici, a bénéficié des travaux précurseurs menés par Houry et Mazzega [Houry, 1989], qui concernent la restitution de la surface moyenne océanique par inversion de mesures altimétriques, et des travaux de Mazzega et Jourdin [Jourdin et al., 1991] sur la restitution de la marée le long des frontières ouvertes de modèles hydrodynamiques de marées.

IV.2 - Interpolation par moindres carrés

Une des méthodes d'interpolation la plus couramment utilisée en géophysique est une méthode statistique basée sur le théorème de Gauss-Markov [Rao, 1973] que l'on appelle "krigeage" en géologie [Krig, 1951], "analyse objective" en météorologie et en océanographie [Bertherton et al., 1976], ou encore "collocation" en géodésie [Moritz, 1978]. Le théorème de Gauss-Markov donne l'expression de l'estimateur non biaisé des valeurs interpolées qui minimise l'erreur quadratique moyenne sur l'ensemble des données. Ce type de méthode nécessite, comme nous allons le voir, une connaissance a priori de caractéristiques statistiques sur le signal que l'on cherche à restituer ainsi que sur les données.

Prenons l'exemple d'une fonction continue h que l'on veut estimer aux points \mathbf{x} à partir des valeurs connues de cette fonction en un nombre fini de points $h(\mathbf{x}_i) = d_i$. L'estimateur linéaire le plus général sans biais s'écrit sous la forme [McIntosh, 1990]:

$$\hat{h}(\mathbf{x}) = \bar{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) \quad (4.1)$$

où l'accent circonflexe représente une valeur estimée, la barre l'espérance mathématique ou la moyenne; \mathbf{d} est le vecteur des données; \mathbf{w}^T est un vecteur transposé de fonctions inconnues que nous allons déterminer dans la suite sous des conditions qui seront précisées. L'erreur e commise en utilisant cet interpolateur satisfait à :

$$e^2(\mathbf{x}) = \overline{[h(\mathbf{x}) - \hat{h}(\mathbf{x})]^2} \quad (4.2)$$

En utilisant (4.1) et après quelques manipulations, on obtient:

$$e^2 = \overline{(h - \bar{h})^2} - \mathbf{C}_{hd}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{hd} + (\mathbf{w} - \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{hd})^T \mathbf{C}_{dd} (\mathbf{w} - \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{hd}) \quad (4.3)$$

où \mathbf{C}_{dd} est la matrice de covariance des données,

$$\mathbf{C}_{dd} = (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})(\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})^T \quad (4.4)$$

et \mathbf{C}_{hd} est la matrice de covariance croisée (ou intercovariance) entre les données et le signal à restituer :

$$\mathbf{C}_{hd} = (\bar{h} - \bar{h})(\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})^T \quad (4.5)$$

Ces deux matrices sont symétriques et définies positives. L'estimateur est dit optimal lorsque la variance de l'erreur est minimum, c'est-à-dire quand \mathbf{w} est choisi de telle manière que le dernier terme non négatif du second membre de l'équation (4.3) disparaisse :

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{hd} \quad (4.6)$$

Ainsi, l'estimation de $h(\mathbf{x})$ qui, en moyenne, a l'erreur quadratique la plus petite est l'estimation de Gauss-Markov :

$$\hat{h}(\mathbf{x}) = \bar{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_{hd}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) \quad (4.7)$$

En outre, l'erreur quadratique (éq. 4.3) associée à l'estimation se simplifie et s'écrit :

$$e^2 = \overline{(h - \bar{h})^2} - \mathbf{C}_{hd}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{hd} \quad (4.8)$$

ou encore,

$$\mathbf{e}^2 = \mathbf{C}_{hh} - \mathbf{C}_{hd}^T \mathbf{C}_{dd}^{-1} \mathbf{C}_{hd} \quad (4.9)$$

On en déduit que les éléments indispensables pour utiliser les résultats (4.7) et (4.9) du théorème de Gauss-Markov sont une connaissance a priori de la moyenne du signal à restituer (\mathbf{h}), de la moyenne des données, ainsi que de la covariance des données et de l'intercovariance entre le signal et les données.

Nous avons développé in extenso les formules de l'interpolation par moindres carrés, car la recherche de la solution de ce problème inverse est simple et fait apparaître tout naturellement les fonctions de covariance. Notre objectif est de démystifier le rôle et l'emploi des fonctions de covariance : elles ne sont pas un artifice mathématique que l'on introduit pour obtenir des solutions désirées aux problèmes inverses, mais elles sont intrinsèques aux méthodes de résolution par moindres carrés.

IV.3 - Solution générale des problèmes inverses linéaires par moindres carrés

La théorie inverse nous fournit les outils mathématiques les mieux adaptés pour estimer les marées océaniques à partir d'un ensemble de données hétérogènes. Nous avons suivi le formalisme développé par Tarantola et Valette [1982] en raison de ses deux grands avantages qui sont simplicité et généralité. A partir de considérations simples sur la théorie des probabilités et de l'information, Tarantola et Valette ont écrit la solution générale des problèmes inverses linéaires et non linéaires. Nous ne reproduisons ici que la solution des problèmes inverses linéaires par moindres carrés. Ce sont les problèmes dont les informations de nature statistique sont décrites par des fonctions de densité de probabilité gaussiennes.

IV.3.1 - Solution générale

Le problème inverse que nous traitons est celui de la restitution d'une fonction continue $p(r)$ à partir d'un ensemble fini de données discrètes d^i . Ce problème est un problème sous-déterminé, car le nombre de paramètres (pour décrire la fonction continue $p(r)$) est théoriquement infini alors qu'on ne dispose que d'un nombre fini de données. L'équation d'observation, qui relie entre eux les paramètres et les données, s'écrit en toute généralité sous la forme :

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) \quad (4.10)$$

où \mathbf{g} est une fonctionnelle. En particulier, au point des données repéré par r^i , on peut écrire :

$$d^i = g(p(r^i)) = g^i(p(r)) \quad (4.11)$$

Comme nous considérons un problème linéaire, on peut écrire (4.11) sous la forme explicite suivante :

$$d^i = \int G^i(r) \cdot p(r) dr \quad (4.12)$$

où $G^i(r)$ est un noyau "d'observation". L'ensemble des informations a priori sont les données d_0 , la fonction de covariance de leurs erreurs C_{d0d0} , une solution a priori $p_0(r)$ et sa fonction

de covariance C_{popo} . Considérant le cas le plus courant, où les incertitudes sur les données ne sont pas corrélées avec les paramètres à restituer, la solution ainsi que la covariance a posteriori sont données par les expressions suivantes [Tarantola, 1987] :

$$\hat{p}(r) = p_0(r) + \int dr' \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{\text{popo}}(r, r') \cdot G^i(r') \cdot (S^{-1})^{ij} \cdot \left\{ d_i - \int dr'' \cdot G^j(r'') \cdot p_0(r'') \right\} \quad (4.13)$$

$$C_{\text{pp}}(r, r') = C_{\text{popo}}(r, r') - \int dr'' \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int dr''' \cdot C_{\text{popo}}(r, r'') \cdot G^i(r'') \cdot (S^{-1})^{ij} \cdot G^j(r''') \cdot C_{\text{popo}}(r''', r') \quad (4.14)$$

avec

$$S^{ij} = (C_{\text{dodo}})^{ij} + \int dr' \int dr'' G^i(r') \cdot C_{\text{popo}}(r', r'') \cdot G^j(r'') \quad (4.15)$$

La matrice S est une matrice pleine dimensionnée par le nombre de données N . Comme elle ne dépend que de la position relative des données, elle peut être construite et inversée une fois pour toutes. Il n'y a aucune contrainte sur l'échantillonnage des données. La qualité de la solution, qui peut être évaluée au travers de la fonction de covariance a posteriori C_{pp} , ne dépend que de la répartition des données et de l'ensemble des covariances a priori.

La seule hypothèse qui a été faite consiste à considérer les variables comme des variables aléatoires dont les densités de probabilités sont gaussiennes. Cette hypothèse n'est que très rarement vérifiée dans la nature, mais elle est généralement satisfaite en première approximation. Travailler avec des densités de probabilité gaussiennes et une norme L_2 (moindres carrés) conduit à des algorithmes numériques simples à mettre en oeuvre. Cet atout est contrebalancé par une sensibilité des solutions aux valeurs aberrantes. Travailler avec une norme d'ordre inférieur, par exemple la norme L_1 , conduit à des algorithmes plus robustes, mais bien plus compliqués à mettre en oeuvre d'un point de vue numérique.

IV.3.2 - Les fonctions de covariance

Avant d'appliquer la théorie inverse, il est opportun d'énoncer quelques propriétés mathématiques des fonctions de covariance ainsi que de décrire le rôle qu'elles jouent dans la résolution des problèmes inverses.

On peut démontrer qu'une fonction de covariance est symétrique :

$$C(r, r') = C(r', r) \quad (4.16)$$

et définie positive :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(r) \cdot C(r, r') \cdot \phi(r') dr dr' \geq 0, \text{ pour tout } \phi(r) \quad (4.17)$$

De plus, il existe une relation d'équivalence entre la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance. En effet, prenons le cas particulier d'une fonction $f(t)$ dont on calcule la fonction d'autocorrélation $C(\tau)$ définie par :

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot f(t) dt \quad (4.18)$$

On démontre aisément que la fonction d'autocorrélation est égale à la transformée inverse du spectre de puissance de $f(t)$:

$$C(\tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot F^*(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.19)$$

où F est le spectre de Fourier de f et F^* son spectre conjugué. Cette dernière propriété permet d'interpréter l'information que l'on introduit au travers des covariances comme étant équivalente à une information sur les spectres de puissance.

Les covariances a priori spécifient le spectre de puissance du signal que l'on recherche ainsi que le spectre de puissance des erreurs des données. Elles jouent un rôle déterminant dans la régularisation des problèmes inverses sous-déterminés qui admettent une infinité de solutions. Les fonctions de covariance permettent d'extraire, dans la famille des solutions compatibles avec les données, celle qui correspond le mieux au problème en fusionnant dans un critère unique une mesure de la fidélité de la solution par rapport aux données et une mesure de sa fidélité à l'a priori. Cependant, comme dans toute technique de régularisation, il faut trouver un compromis entre deux facteurs antagonistes que sont la précision et la stabilité. Concrètement, cela signifie que l'on est parfois amené à surestimer les erreurs et donc à dégrader la solution afin d'obtenir une solution numériquement stable.

Les covariances a posteriori qui ne dépendent, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que de la répartition des données et des covariances a priori, sont aussi les transformées inverses des spectres de puissance des erreurs de la solution. Les variances donnent une estimation des erreurs sur les solutions, tandis que les covariances expriment le taux de corrélation des incertitudes sur les valeurs des paramètres. Si la covariance a priori est égale à la covariance a posteriori, cela signifie que les données n'ont apporté aucune information supplémentaire sur les paramètres. Par contre, plus la covariance a posteriori diffère de la covariance a priori, meilleure est la résolution; en d'autres termes la quantité d'information acquise sur les paramètres est importante.

IV.4 - Formule d'inversion des mesures marégraphiques

Les mesures marégraphiques dont nous disposons sont les constantes harmoniques de la marée en des sites répartis de façon inhomogène sur tout le globe. Notre objectif est de cartographier ces constantes harmoniques sur une grille régulière couvrant l'ensemble des océans.

Dans la suite, les quantités physiques restituées ne sont pas les amplitudes (A) et les phases (ϕ) des constituants de la marée, mais les composantes en phase ($A \cos\phi$) et en quadrature ($A \sin\phi$). L'équation d'observation (4.12) s'écrit :

$$U_k(r^i) = \int_{\text{sphère}} U_k(r) \delta(r^i - r) dr + \epsilon_k^m(r^i) \quad k=1,2 \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{aligned} U_1(r) &= A(r) \cos\phi(r) \\ U_2(r) &= A(r) \sin\phi(r) \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $r^i(\phi^i, \lambda^i)$ est la position géographique des marégraphes; U_k ($k=1,2$) les paramètres inconnus qui sont des fonctions continues de la position géographique $r(\phi, \lambda)$ (ϕ étant la longitude et λ la latitude), et ϵ_k^m l'erreur sur les mesures marégraphiques qui inclut les erreurs instrumentales, de lecture, de réduction et d'analyse des observations. Le noyau d'observation $\delta(r^i - r)$ est la fonction de Dirac. Les solutions a priori des composantes en phase et en quadrature de la marée sont supposées être les moyennes théoriques du champ des marées sur tout le globe: elles sont donc identiquement nulles en raison du principe de conservation de la masse; les marées océaniques sont des déplacements de masse d'eau, qui ne s'accompagnent d'aucune création ou destruction de masse.

Dans cette première expérience, seules les composantes en phase et en quadrature de l'onde principale M_2 ont été inversées indépendamment l'une de l'autre. Concrètement, cela signifie que les fonctions de covariance du signal de marée ne prennent en compte que les autocorrélations spatiales de l'onde et de la composante considérée; les intercorrélations entre les composantes en phase et en quadrature sont pour l'instant ignorées ainsi que celles avec les autres ondes. Dans ces conditions et étant donné l'équation d'observation, les équations 4.13 à 4.15 deviennent :

$$\hat{U}_k(r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{U_k U_k}(r, r^i) (S^{ij})^{-1} U_k(r^j) \quad (4.22)$$

$$C_{\hat{U}_k \hat{U}_k}(r, r') = C_{U_k U_k}(r, r') - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{U_k U_k}(r, r^i) (S^{ij})^{-1} C_{U_k U_k}(r^j, r') \quad (4.23)$$

avec

$$S^{ij} = C_{U_k U_k}(r^i, r^j) + C_{\epsilon_k^m \epsilon_k^m}(r^i, r^j) \quad (4.24)$$

Comme nous ne disposons pas d'information rigoureuse et précise sur une hypothétique corrélation entre les erreurs des mesures des différents marégraphes, nous avons supposé que les erreurs sur les données sont non corrélées entre elles. Dans ce cas, la fonction de covariance est la distribution de Dirac. Son expression discrétisée est :

$$C_{\epsilon_k^m \epsilon_k^m}(r^i, r^j) = \sigma^2 \delta(r^i - r^j) \quad (4.25)$$

où σ^2 est la variance des erreurs sur les constantes harmoniques de l'onde M_2 que nous avons raisonnablement fixée à $(2 \text{ cm})^2$. Les fonctions de covariance du signal de marée homogènes et isotropes ont été déduites à l'aide d'une méthode classique en géodésie [Moritz, 1980] à partir du modèle de Schwiderski [1980a,b]. Les fonctions d'autocovariances sont données par l'expression :

$$C_{U_k U_k}(\psi_{ij}) = \sum_{n=1}^{360} \sigma^k(n) P_n(\cos \psi_{ij}) \quad (4.26)$$

où ψ_{ij} est la distance angulaire entre les points r^i et r^j ; les P_n sont les polynômes de Legendre et les $\sigma^k(n)$ sont les variances de degré n du développement en harmoniques sphériques des cartes cotidales de l'onde M_2 d'après le modèle de Schwiderski, respectivement de la composante en phase ($k=1$) et en quadrature ($k=2$). Le développement a été calculé jusqu'au degré 180 et prolongé par une loi empirique jusqu'au degré 360, afin de mieux représenter les courtes longueurs d'onde du signal des marées dans les mers littorales où est localisée la plupart des mesures marégraphiques.

IV.5 - Formule d'inversion des mesures gravimétriques

L'analyse harmonique des mesures gravimétriques (par moindres carrés et filtrage par la méthode de Venedikov) fournit les constantes harmoniques des marées terrestres que l'on peut représenter sous la forme de vecteurs. Les vecteurs observés peuvent être décomposés en une somme de trois vecteurs: un vecteur \vec{R} représentant la marée solide théorique, un vecteur \vec{L} de l'effet de surcharge océanique et un vecteur désaccord \vec{X} (Figure IV.1). Ce vecteur désaccord contient: (1) les erreurs du modèle théorique qui ne peuvent en affecter que la partie en cosinus, (2) les erreurs du calcul des effets de surcharge et, (3) les effets locaux et d'origine météorologique non corrigés. Les données que nous avons inversées sont les vecteurs résidus \vec{B} qui contiennent les effets dus aux marées océaniques mais aussi les vecteurs désaccords. L'équation d'observation est :

$$B_k(r^i) = \int_{\text{sphère}} U_k(r) G(|r^i - r|) dr + \varepsilon_k^g(r^i) \quad k=1,2 \quad (4.27)$$

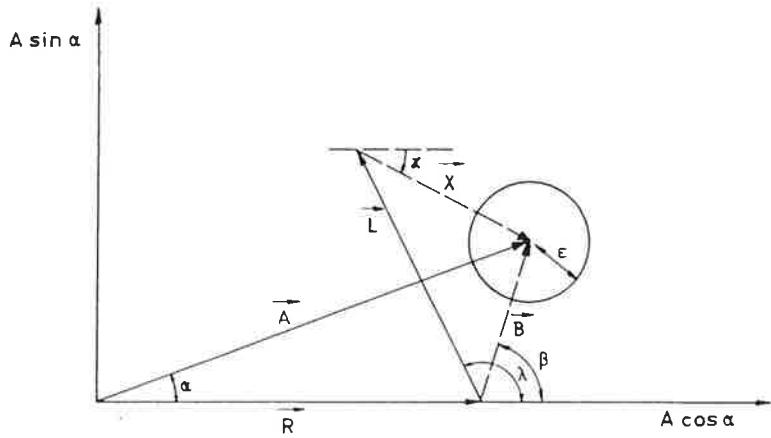
avec

$$\begin{aligned} B_1(r) &= B(r) \cos \beta(r) \\ B_2(r) &= B(r) \sin \beta(r) \end{aligned} \quad (4.28)$$

le noyau $G(|r^i - r|)$ est la fonction de Green que nous avons déjà rencontrée au §I.3 (éq. 1.19) et ε_k^g ($k=1,2$) sont les erreurs sur les mesures gravimétriques comprenant les signaux géophysiques non modélisés. Comme dans le cas des inversions des mesures marégraphiques, seules les composantes en phase et en quadrature de l'onde M_2 ont été restituées de manière indépendante. La solution ainsi que la covariance a posteriori sont :

$$\hat{U}_k(r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{U_k B_k}(r, r^i) (S^{ij})^{-1} B_k(r^i) \quad (4.29)$$

$$\hat{C}_{U_k U_k}(r, r') = C_{U_k U_k}(r, r') - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{U_k B_k}(r, r^i) (S^{ij})^{-1} C_{U_k B_k}(r^i, r') \quad (4.30)$$



\vec{A} vecteur marée observé

\vec{R} vecteur calculé avec le modèle Molodensky I

\vec{B} vecteur résidu

\vec{L} vecteur calculé à partir de la carte cotidale

\vec{X} vecteur "désaccord"

ε erreur instrumentale

Pour l'onde semi-diurne M_2 l'échelle correcte de la figure devrait être

$R \sim A \sim 40$ (Europe) à 90 (Équateur) μgals ,
 $\alpha \sim 0^\circ$ to $\pm 5^\circ$

$L \sim B \sim 2$ (Europe) à 10 (Pacifique Sud) μgals ,
 $X \sim 0.5$ to 5 μgal

$\varepsilon \sim 0.5 \mu\text{gal}$ (Europe) à 1 μgal (zone équatoriale)

$$\vec{B} = \vec{A} - \vec{R}_1 \quad \vec{B} - \vec{L} = \vec{X}$$

Figure IV.1 : Représentation vectorielle du contenu de la mesure gravimétrique de marée terrestre [tiré de Melchior, 1981].

avec

$$S^{ij} = C_{B_k B_k}(r^i, r^j) + C_{\epsilon \epsilon}(r^i, r^j) \quad (4.31)$$

Une fois de plus, en raison de la méconnaissance des erreurs sur les mesures gravimétriques, nous avons choisi une fonction de Dirac comme fonction de covariance avec une variance de (0.5 microgal)². Les $C_{U_k U_k}$ sont les mêmes fonctions d'autocovariance que celles déduites pour les inversions de mesures marégraphiques. Les $C_{U_k B_k}$, $C_{B_k B_k}$ sont respectivement les autocovariances entre le signal de la marée océanique et des effets de surcharge et les autocovariances des effets de surcharge océanique. Les expressions de ces deux covariances ont été déduites, comme précédemment, en développant en harmoniques sphériques les cartes cotidales du modèle de Schwiderski et les cartes globales des effets gravimétriques de surcharge que nous avons calculées [Francis et Mazzega, 1990]. Ainsi, si (R_{nm}^k, S_{nm}^k) et $(\tilde{R}_{nm}^k, \tilde{S}_{nm}^k)$ représentent les coefficients du développement de la marée océanique et des effets de surcharge de l'onde M_2 composante en phase ($k=1$) et en quadrature ($k=2$), les autocovariances et intercovariances homogènes et isotropes sont :

$$C_{B_k B_k}(\Psi_{ij}) = \sum_{n=1}^{180} \tilde{\sigma}^k(n) P_n(\cos \Psi_{ij}) \quad (4.32)$$

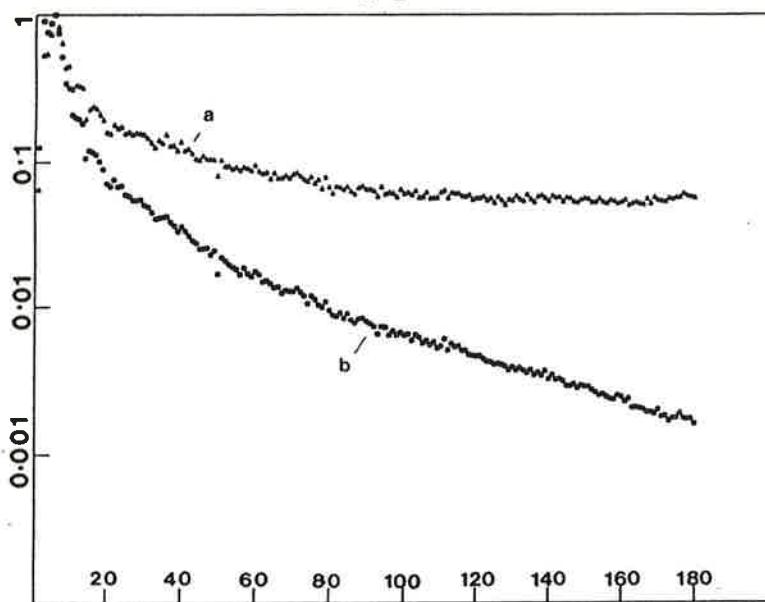
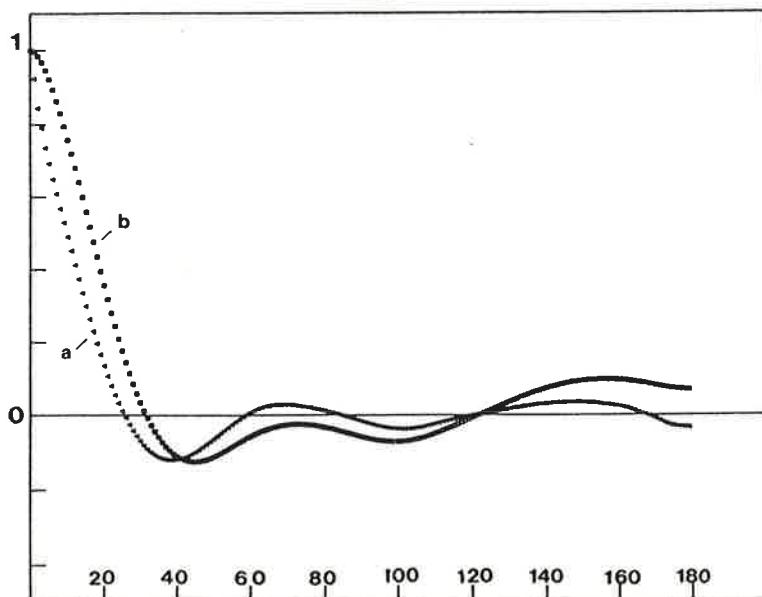
$$C_{U_k B_k}(\Psi_{ij}) = \sum_{n=1}^{180} \sigma^k(n) P_n(\cos \Psi_{ij}) \quad (4.33)$$

avec

$$\tilde{\sigma}^k(n) = (2n+1) \sum_{m=0}^n (\tilde{R}_{nm}^k \tilde{R}_{nm}^k + \tilde{S}_{nm}^k \tilde{S}_{nm}^k) \quad (4.34)$$

$$\sigma^k(n) = (2n+1) \sum_{m=0}^n (\tilde{R}_{nm}^k R_{nm}^k + \tilde{S}_{nm}^k S_{nm}^k) \quad (4.35)$$

Les spectres de puissance du développement en harmoniques sphériques des marées océaniques et des effets de surcharge océanique pour l'onde M_2 ainsi que les fonctions d'autocorrélation associées sont reproduites pour comparaison dans les Figures IV.2. On peut remarquer que le spectre des effets de surcharge présente une décroissance rapide en fonction du degré n du développement. Par contre, le spectre de la marée océanique est à décroissance plus lente et est pratiquement plat pour les degrés élevés. Les effets de surcharge sont reliés aux marées océaniques par un opérateur intégral et par conséquent les effets des courtes longueurs d'onde (degrés élevés du développement) des marées océaniques sont atténus par rapport aux grandes longueurs d'onde (bas degrés du développement). L'opérateur agit comme un filtre passe-bas et implique que les effets de surcharge sont corrélés sur de plus grandes distances que le signal des marées océaniques (voir Figure IV.2.A).

A**B**

Figures IV.2 : (A) Spectres de puissance de la composante en phase de l'onde M_2 des marées océaniques (a) et des effets gravimétriques de surcharge (b) normalisés par les variances du degré 4, qui sont les plus énergétiques. Les variances totales sont $(22 \text{ cm})^2$ pour les marées océaniques et $(3.3 \text{ microgal})^2$ pour les effets de surcharge. L'axe des abscisses représente le degré n du développement en harmoniques sphériques, et celui des ordonnées est une échelle logarithmique sans dimension; (B) Fonctions d'autocorrélation de la composante en phase de l'onde M_2 des marées océaniques (a) et des effets gravimétriques de surcharge océanique déduites des spectres de puissance reproduits en (A) (en abscisse : distance angulaire en degrés).

IV.6 - Formule d'inversion conjointe des mesures marégraphiques et gravimétriques

Un grand avantage des méthodes inverses est qu'elles permettent d'inverser conjointement des lots de données de nature différente. Les mesures marégraphiques et gravimétriques offrent l'opportunité d'éprouver l'inversion conjointe dans un cas encore relativement simple. En effet, bien qu'étant de natures différentes, les données marégraphiques et gravimétriques sont des constantes harmoniques et appartiennent de ce fait au même espace spectral que les paramètres recherchés qui sont les constantes harmoniques de la marée océanique. La formulation mathématique du problème inverse en est grandement simplifiée. En utilisant les notations introduites précédemment et en adoptant une notation matricielle, la solution et la covariance a posteriori de l'inversion conjointe de mesures marégraphiques et gravimétriques pour une onde et une composante données sont :

$$\hat{U}_k = [C_{U_k U_k} \ C_{U_k B_k}] \ S^{-1} \begin{bmatrix} U_k \\ B_k \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\hat{C}_{U_k U_k} = C_{U_k U_k} - [C_{U_k U_k} \ C_{U_k B_k}] \ S^{-1} \begin{bmatrix} C_{U_k U_k} \\ C_{U_k B_k} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} C_{\epsilon_k^m \epsilon_k^m} & 0 \\ 0 & C_{\epsilon_k^g \epsilon_k^g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{U_k U_k} & C_{U_k B_k} \\ C_{B_k U_k} & C_{B_k B_k} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

On a supposé que les erreurs sur les mesures marégraphiques et gravimétriques sont non corrélées. De toute façon, il n'y a pas d'arguments physiques justifiant une telle corrélation.

IV.7 - Formule d'inversion des mesures altimétriques

Les mesures altimétriques ne sont pas, comme dans le cas des mesures marégraphiques et gravimétriques, des constantes harmoniques; ce sont des séries spatio-temporelles. L'équation d'observation est de ce fait plus compliquée, car les données et les paramètres sont définis dans deux espaces différents, l'un est spatio-temporel et l'autre est spectral. Une mesure altimétrique h au temps t^i et au point $r^i(\phi^i, \lambda^i)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux termes :

$$h(r^i, t^i) = \sum_{p=1}^{11} A_p(r^i) \cos(\omega_p t^i + \chi_p + \varphi_p(r^i)) + \varepsilon^a(r^i, t^i) \quad (4.39)$$

le premier comporte les 11 ondes principales de la marée océanique ($M_2, S_2, K_2, N_2, O_1, P_1, K_1, Q_1, M_m, M_f, S_{sa}$) et le second est l'erreur comprenant l'ensemble des autres signaux océanographiques :

$$h(r^i, t^i) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\text{sphère}} dr \sum_{p=1}^{11} \left\{ A_p(r) \cos \varphi_p(r) \cos(\omega_p t + \chi_p) \delta(r-r^i) \delta(t-t^i) \right. \\ \left. + A_p(r) \sin \varphi_p(r) \sin(\omega_p t + \chi_p) \delta(r-r^i) \delta(t-t^i) \right\} + \varepsilon^a(r^i, t^i) \quad (4.40)$$

expression que l'on peut écrire de manière plus compacte :

$$h(r^i, t^i) = \sum_{p=1}^{11} \sum_{k=1}^2 [G_{pk}^i(r, t) \ U_{pk}(r)] + \varepsilon^a(r^i, t^i) \quad (4.41)$$

en définissant les opérateurs G_{pk}^i

$$G_{p1}^i(r,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\text{sphère}} dr (.) \cos(\omega_p t + \chi_p) \delta(r-r^i) \delta(t-t^i) \quad (4.42)$$

$$G_{p2}^i(r,t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\text{sphère}} dr (.) \sin(\omega_p t + \chi_p) \delta(r-r^i) \delta(t-t^i) \quad (4.43)$$

et

$$\begin{aligned} U_{p1}(r) &= A_p(r) \cos \varphi_p(r) \\ U_{p2}(r) &= A_p(r) \sin \varphi_p(r) \end{aligned} \quad (4.44)$$

La solution inverse s'écrit en adoptant la convention d'Einstein pour les sommes sur les indices (s,p,k'',k'''):

$$\hat{U}_{pk}(r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{sk''}^i(r',t') C_{pk}^{sk''}(r,r') (S^{ij})^{-1} h(r^i,t^j) \quad (4.45)$$

avec

$$S^{ij} = D(r^i, t^i; r^j, t^j) + G_{sk''}^i(r, t) C_{tk''}^{sk''}(r, r') G_j^{tk''}(r', t') \quad (4.46)$$

où D est la covariance des erreurs sur les données, $C_{pk}^{sk''}$ les covariances des marées qui seront explicitées ci-après et $G_j^{tk''}$ l'opérateur adjoint de $G_{tk''}$ qui sont égaux d'après les équations (4.42) et (4.43). Les covariances a posteriori sont :

$$\hat{C}_{pk}^{qk'}(r, r') = C_{pk}^{qk'}(r, r') - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{sk''}^i(r'', t'') C_{pk}^{sk''}(r, r'') (S^{ij})^{-1} C_{sk'}^{qk'}(r', r''') G_i^{sk'}(r''', t''') \quad (4.47)$$

De ce tenseur complet, on peut en extraire l'estimation de l'écart type a posteriori au point r :

$$\hat{\sigma}^{pk}(r) = [\hat{C}_{pk}^{pk}(r, r)]^{1/2} \quad (4.48)$$

ainsi que le pourcentage de la variance expliquée de la solution de marée (p,k) définie par

$$\hat{V}^{pk}(r) = 100 \left(1 - \frac{\hat{C}_{pk}^{pk}(r, r)}{C_{pk}^{pk}(r, r)} \right) \quad (4.49)$$

qui est une mesure relative de l'amélioration de la connaissance de la composante (p,k) des marées. Dans le cas d'un problème parfaitement résolu, la variance a posteriori $\hat{C}_{pk}^{pk}(r, r)$ est nulle et donc la variance expliquée vaut 100%. Dans le cas contraire, si les données n'apportent aucune information sur le signal recherché alors $\hat{C}_{pk}^{pk}(r, r) = C_{pk}^{pk}(r, r)$ et la variance expliquée est identiquement nulle.

On définit aussi la résolution spatiale de $\hat{U}_{pk}(r)$ comme la distance $\hat{\psi}_e$ correspondant à une diminution d'un facteur $\exp(-1)$ de la covariance a posteriori $\hat{C}_{pk}^{pk}(r, r')$. Cette valeur est

représentative de la distance sur laquelle les erreurs sur la solution inverse sont statistiquement corrélées. Après inversion, on peut estimer le pourcentage de corrélation entre les solutions des composantes d'indices (p,k) et (q,k') ($p=1$ correspond à M_2 , $q=2$ à S_2 , etc...) par :

$$\widehat{Cor}_{pk}^{qk'}(r,r) = 100 \frac{\widehat{C}_{pk}^{qk'}(r,r)}{\left[\widehat{C}_{pk}^{pk}(r,r) \widehat{C}_{qk'}^{qk'}(r,r) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.50)$$

Si les marées (p,k) et (q,k') sont complètement décorrélées après l'inversion des données, alors $\widehat{C}_{pk}^{qk'}$ est nulle, de même que le pourcentage de corrélation. Si les données sont inopérantes pour séparer les signaux de marée, alors le pourcentage de corrélation vaut 100%. Remarquons que le pourcentage de corrélation ne dépend que des covariances a posteriori, alors que la variance expliquée dépend à la fois des covariances a priori et a posteriori.

Signalons pour terminer, que les constantes harmoniques, estimées au travers de l'équation (4.39) à partir des mesures altimétriques, sont les constantes harmoniques de la marée dite géocentrique. La marée géocentrique est la somme de la marée océanique, de la marée de la Terre solide et de la marée des effets de surcharge océanique. En pratique, les mesures altimétriques sont corrigées de la marée de la Terre solide au niveau du prétraitement. La marée de surcharge est calculée à partir de la solution inverse en faisant l'hypothèse qu'elle est simplement proportionnelle à la marée océanique; le coefficient de proportionnalité vaut -0.0667. Dans l'avenir, cette approximation assez grossière, que nous avons déjà critiquée au §I.4.3, sera remplacée par l'algorithme plus rigoureux détaillé dans Francis et Mazzega [1990] qui préserve la nature linéaire du problème.

IV.7.1 -Le tenseur des covariances a priori des marées

Compte tenu de la nature même de la mesure altimétrique, les covariances ne sont plus simplement les covariances d'une onde de marée dont les composantes en phase et en quadrature sont considérées comme indépendantes, mais bien l'ensemble des autocovariances et intercovariances entre les 11 ondes principales. Les cartes des composantes en phase ($k=1$) et en quadrature ($k=2$) pour chaque onde p des solutions globales de Schwiderski [1980a,b] ont été décomposées en harmoniques sphériques :

$$U_{pk}(r) = \sum_{n=0}^{180} \sum_{m=0}^n \left\{ R_{nm}^{pk} \cos(m\lambda) + S_{nm}^{pk} \sin(m\lambda) \right\} \bar{P}_{nm} \cos(\phi) \quad (4.51)$$

où \bar{P}_{nm} sont les fonctions de Legendre associées normalisées. Les coefficients du développement $(R_{nm}^{pk}, S_{nm}^{pk})$ sont calculés jusqu'au degré 180, ce qui correspond à la longueur d'onde minimale que l'on peut estimer, étant donné que le maillage des solutions de Schwiderski est de $1^\circ \times 1^\circ$. A partir de ces coefficients, on en déduit les autocovariances ($p=q$) et les intercovariances ($p \neq q$) sous la forme d'un développement en polynômes de Legendre :

$$C_{pk}^{qk'}(\psi) = \sum_{n=1}^{180} \sigma_{pk}^{qk'}(n) P_n \cos(\psi) \quad (4.52)$$

avec

$$\sigma_{pk}^{qk'}(n) = (2n+1) \sum_{m=0}^n \left(R_{nm}^{pk} R_{nm}^{qk'} + S_{nm}^{pk} S_{nm}^{qk'} \right) \quad (4.53)$$

Table IV.1 : Tenseur des covariances a priori entre les différents constituants des marées pour les composantes en phase (c) et en quadrature (s). Dans les triangles supérieurs des matrices sont reproduites les variances (cm^2) tandis que les triangles inférieurs contiennent les corrélations calculées selon la formule (4.50). Les cases vides correspondent aux intercovariances qui ont été omises.

		M ₂		S ₂		N ₂		K ₂	
		c	s	c	s	c	s	c	s
M ₂	c	499		110		110		30	
	s		599		210		100		58
S ₂	c	62%		63		18		17	
	s		81%		112		34		30
N ₂	c	93%		43%		28		5	
	s		90%		70%		21		9
K ₂	c	60%		98%		42%		5	
	s		81%		99%		70%		9

		K ₁		O ₁		P ₁		Q ₁	
		c	s	c	s	c	s	c	s
K ₁	c	74		50		24		10	
	s		69		39		22		7
O ₁	c	89%		43		16		9	
	s		85%		31		13		6
P ₁	c	99%		90%		8		3	
	s		99%		86%		7		2
Q ₁	c	81%		96%		82%		2	
	s		72%		94%		74%		1

		M _m		M _f		S _{sa}	
		c	s	c	s	c	s
M _m	c	0.5		0.56		0.4	
	s		0.25		0.04		0.27
M _f	c	82%		0.94		0.55	
	s		17%		0.21		0.17
S _{sa}	c	57%		57%		1	
	s		47%		32%		1.34

où ψ est la distance angulaire entre la paire de points pour laquelle la covariance est estimée. Les intercovariances entre les différentes espèces se sont révélées extrêmement faibles et seront donc négligées dans la suite des calculs ainsi que toutes les intercovariances entre les parties en phase et en quadrature. Tenant compte des symétries, il reste 52 fonctions de covariance que l'on peut disposer dans un tenseur qui comporte 22 autocovariances sur la diagonale. Afin de réduire le coût informatique, les fonctions de covariances ont été remplacées par des fonctions analytiques simples du type cosinus amorti:

$$C_{pk}^{qk'}(\psi) = v_{pk}^{qk'} \exp(-\psi/R_{pk}^{qk'}) \cos(\beta_{pk}^{qk'} \psi) \quad (4.54)$$

Ces fonctions analytiques ressemblent aux fonctions de covariance originelles (4.52), elles ont des spectres positifs et vérifient les propriétés des fonctions de covariance [Julian et Thiebaut, 1975]. Les trois paramètres, qui sont la variance (v), la longueur de corrélation (R) et la période du cosinus (β), ont été déterminés pour chacune des covariances par Jourdin [1989]. Les valeurs calculées des variances de chaque constituant des marées ont été utilisées alors que les valeurs moyennes (voir Table IV.2) des deux autres paramètres pour chaque espèce ont été adoptées afin d'alléger les calculs.

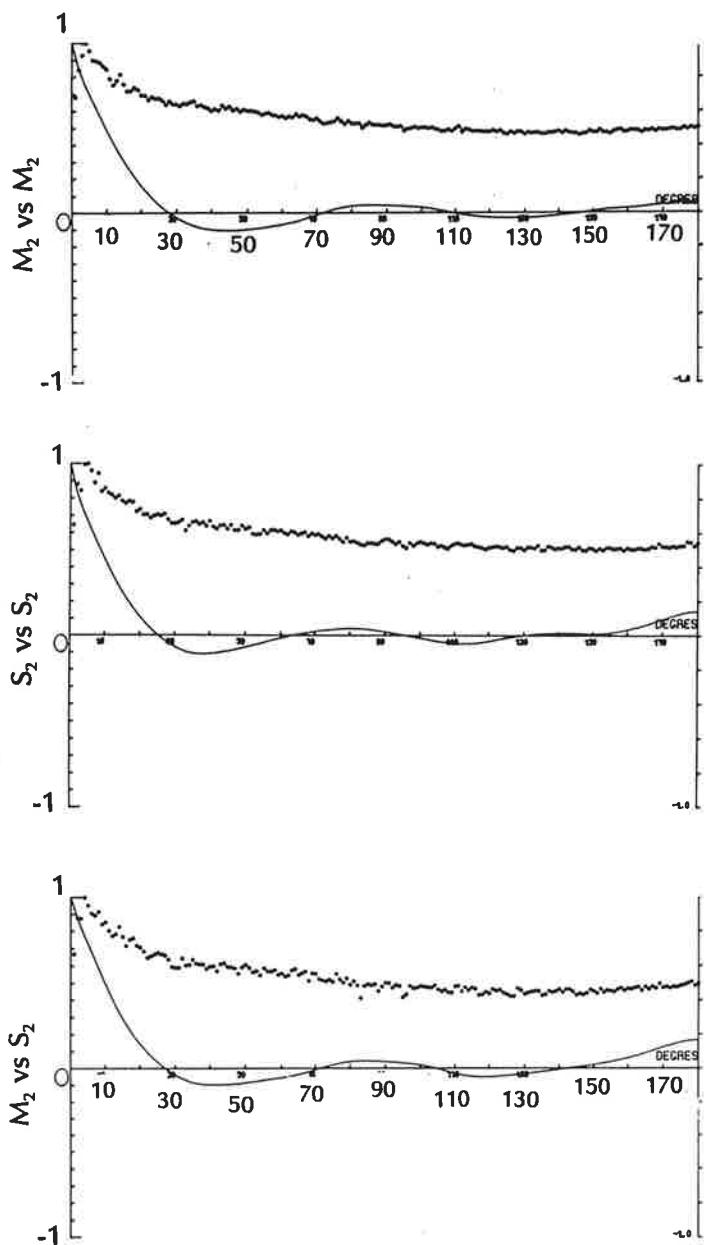
Les variances du tenseur $C_{pk}^{qk'}(\psi=0)$ ainsi que les corrélations entre les différents constituants des marées sont reproduites dans la Table IV.1. Les variances sont une mesure statistique de l'énergie de chaque constituant. Les corrélations quantifient statistiquement les "similitudes" des cartes cotidiales des différents constituants. Par exemple, les parties en phase de N_2 et K_2 sont semblables à 98% et 99% et donc, si l'on parvient à restituer l'un de ces deux constituants, l'autre est connu à 98-99%. La corrélation entre les ondes semi-diurnes est en moyenne de 74% alors que la moyenne des corrélations entre les ondes diurnes est de 87%. Le moins bon taux de corrélation entre les ondes semi-diurnes est peut-être dû à l'existence de fréquences de résonance dans la bande des fréquences semi-diurnes qui provoquent des distorsions de l'admittance.

La Figure IV.3 montre des exemples de spectres et de covariances $M_2 \times M_2$, $M_2 \times S_2$ et $S_2 \times S_2$. On peut constater que le tenseur des marées présente une forte corrélation spatiale sur une grande distance angulaire de l'ordre de 10 à 20 degrés. Cette corrélation à grande distance est une mesure statistique de la longueur spatiale des ondes de marées telles qu'elles se propagent en plein océan. Comme les fonctions de covariance ont été déduites d'un modèle global, elles sont représentatives plutôt des phénomènes pélagiques, car les mers littorales, vu leurs faibles étendues, sont sous-représentées.

L'information contenue dans le tenseur des covariances a priori peut se résumer en trois points:

- (1) Le tenseur spécifie que le signal de marée recherché a un spectre constitué d'un ensemble de raies dont on connaît les fréquences; les covariances entre deux fréquences qui ne font pas partie du spectre des marées sont nulles.
- (2) L'énergie moyenne de chaque onde de marée est spécifiée au travers de la variance a priori; l'estimation des variances à partir d'un modèle hydrodynamique indique que celles-ci sont très proches des valeurs de la marée d'équilibre.
- (3) Les longueurs caractéristiques des corrélations entre les différents constituants sont spécifiées par les covariances normalisées (c'est-à-dire par les fonctions de corrélation).

La méthode des moindres carrés généralisés permet, par l'intermédiaire des fonctions de covariance, d'exploiter l'ensemble des propriétés remarquables des marées océaniques. Comme les méthodes des concordances et de convolution, la fonctionnelle qui relie les constantes harmoniques aux données est supposée linéaire et les fréquences des marées sont considérées comme connues exactement. Les covariances a priori des marées quantifient la



Figures IV.3 : Exemples de spectres de puissance normalisés (points) et de fonctions de corrélations a priori (lignes continues) entre les parties en phase de (M_2, M_2) , (S_2, S_2) , (M_2, S_2) . Les abscisses indiquent le degré du développement en harmoniques sphériques des spectres et les distances angulaires (en degrés) des fonctions de corrélation [tiré de Mazzega et Jourdin, 1991].

cohérence spatiale à grande distance de la marée; cette caractéristique avait déjà été exploitée dans les méthodes d'analyse par concordance. Par ailleurs, les intercovariances entre les différentes ondes permettent de tenir compte de la nature lisse de l'admittance ou plus simplement de la similitude de la réponse du système océan sollicité par des forces périodiques dont les fréquences sont proches; ce credo du caractère lisse de l'admittance est à la base de la méthode de réponse. La méthode inverse est en quelque sorte une généralisation des méthodes existantes. Cette approche n'est devenue possible que grâce aux puissants moyens informatiques dont nous disposons aujourd'hui et aux modèles hydrodynamiques globaux qui permettent d'estimer les statistiques indispensables à la mise en oeuvre des méthodes inverses.

IV.7.2 - Covariances a priori des erreurs sur les données

Nous avons décrit dans le §II.2.4 l'ensemble des corrections qui ont été appliquées aux mesures altimétriques. Les erreurs résiduelles ont des amplitudes de plusieurs centimètres et leurs spectres couvrent de larges bandes de fréquences temporelles et de longueurs d'onde spatiales. Les informations sur les spectres de ces erreurs, qui pourraient permettre d'estimer les covariances associées, ne sont généralement pas fournies. En l'absence de ces informations, on en est réduit à déduire les fonctions de covariance à partir de données indépendantes (par exemple, des sorties de modèles numériques, ...) ou d'après des considérations théoriques.

Usuellement, les mesures altimétriques sont des moyennes calculées sur 1 seconde, dont les erreurs instrumentales ne sont pas corrélées d'une mesure à l'autre. L'erreur de l'altimètre est donc un bruit blanc dont la covariance a priori est représentée par

$$D_1(\tau^{ij}) = \sigma_{\text{alt}}^2 \delta(\tau^{ij}) \quad (4.55)$$

où τ^{ij} est l'intervalle de temps entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ mesure, σ_{alt}^2 est la variance de l'erreur. Dans notre application, les données que nous utilisons ont été moyennées sur 15 secondes (≈ 105 km) éliminant ainsi une partie des erreurs à courtes longueurs d'onde. La variance est estimée à $(10 \text{ cm})^2$: elle représente non seulement les erreurs de l'altimètre mais aussi une partie des erreurs résiduelles des corrections.

Les mesures altimétriques sont référencées par rapport au géoïde GEM-T1 développé jusqu'à l'ordre 36. Ce géoïde est pris comme modèle a priori de la surface moyenne. La covariance homogène et isotrope du signal résiduel est déduite du spectre de puissance des erreurs de GEM-T1 complété par le modèle de géoïde de Rapp[1986] jusqu'à l'ordre 360. La fonction de covariance analytique ajustée est de la forme:

$$D_2(\psi^{ij}) = \sigma_{\text{smo}}^2 \cos\left(2\pi \frac{\psi^{ij}}{Z_{\text{simo}}}\right) \exp\left[-\left(\frac{\psi^{ij}}{R_{\text{simo}}}\right)^2\right] \quad (4.56)$$

où σ_{simo}^2 ($= 210 \text{ cm}^2$) est la variance, Z_{simo} ($= 2000 \text{ km}$) est la période du cosinus et R_{simo} ($= 300 \text{ km}$) le rayon de corrélation de l'erreur du modèle de la surface moyenne océanique.

La variabilité océanique mésoéchelle est également considérée comme une source d'erreur. Le signal à la mésoéchelle est corrélé typiquement sur une distance d'une centaine de kilomètres et les tourbillons disparaissent au bout de quelques semaines [voir par exemple, DeMey et Robinson, 1987]. Ces caractéristiques inspirent le choix d'une covariance isotrope du type :

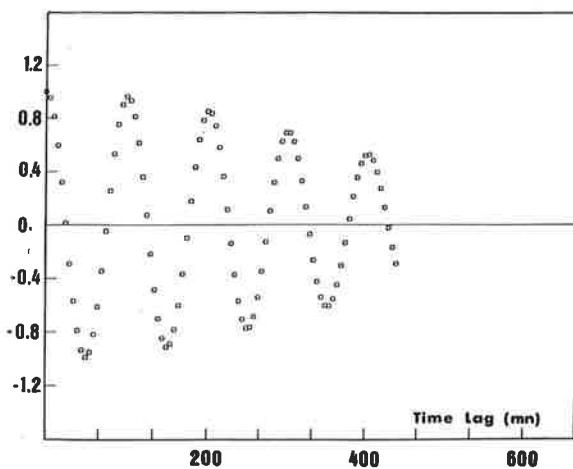


Figure IV.4 : Fonction de corrélation de l'erreur radiale d'orbite dont la fréquence caractéristique est 1 cycle par révolution (101 minutes) et le temps de décorrélation est de 5 périodes de révolution (505 minutes) [tiré de Mazzega et Houry, 1989].

$$D_3(\psi^{ij}, \tau^{ij}) = \sigma_{var}^2 \exp\left[-\left(\frac{\psi^{ij}}{R_{var}}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{\tau^{ij}}{\Delta T_{var}}\right)^2\right] \quad (4.57)$$

où σ_{var}^2 ($= 10$ cm) 2 est la variance de la variabilité, R_{var} ($= 130$ km) le rayon de corrélation de la variabilité et $\Delta T_{var} = 25$ jours le temps de décorrélation. Les valeurs des paramètres ont été choisies afin de représenter au mieux statistiquement les caractéristiques de la variabilité sur l'ensemble des océans. Dans l'avenir, les estimations des spectres de puissance de la variabilité, région par région [LeTraon et al., 1990], devraient permettre de raffiner la covariance de la variabilité mésoéchelle.

La fonction de covariance décrivant les erreurs résiduelles après application des corrections de propagation a été estimée par Benveniste [1989] à partir de l'analyse de données et de résultats de modèles. La fonction analytique qu'il a déduite est de la forme :

$$D_4(\psi^{ij}, \tau^{ij}) = \sigma_{geo}^2 \cos\left(2\pi \frac{\psi^{ij}}{d_{geo}}\right) \exp\left[-\frac{\psi^{ij}}{R_{geo}}\right] \exp\left[-\left(\frac{\tau^{ij}}{T_{geo}}\right)^2\right] \quad (4.58)$$

où σ_{geo}^2 ($= 10$ cm) 2 est la variance, d_{geo} ($= 3200$ km) est la période du cosinus, R_{geo} ($= 1700$ km) et T_{geo} ($= 5$ jours) sont les échelles spatiales et temporelles caractéristiques.

Le choix de la covariance de l'erreur d'orbite est plus délicat. L'erreur radiale d'orbite est la principale source d'erreur des mesures altimétriques de Geosat. Nous avons décrit dans le chapitre III les caractéristiques spectrales de l'erreur d'orbite qui est due essentiellement à l'incertitude du modèle du champ de gravité utilisé pour calculer les éphémérides. La plus grande partie de l'énergie spectrale de l'erreur d'orbite est concentrée autour de la période orbitale du satellite, ce qui a conduit Wunsch et Zlotnicki [1984] à proposer une fonction de covariance de la forme :

$$D_5(\tau^{ij}) = \sigma_{orb}^2 \cos\left(2\pi \frac{\tau^{ij}}{T_{orb}}\right) \exp\left[-\left(\frac{\tau^{ij}}{\Delta T}\right)^2\right] \quad (4.59)$$

où σ_{orb}^2 ($= 100$ cm) 2 est la variance de l'erreur d'orbite et ΔT ($= 5 T_{orb}$) est le temps de décorrélation (Figure IV.4). Le spectre a priori de l'erreur d'orbite tel qu'il est décrit par cette covariance est une fonction gaussienne centrée sur la période orbitale. Or, nous avons vu que le spectre de l'erreur d'orbite est composé d'un ensemble théoriquement infini de fréquences discrètes. De plus, ce spectre n'est pas stationnaire; il varie d'un arc d'intégration à l'autre et les forces de frottement modifient progressivement l'orbite et ses caractéristiques spectrales. Les premiers résultats d'inversion de mesures altimétriques ont montré très clairement que c'est l'erreur d'orbite et donc la manière dont ses propriétés sont spécifiées au travers des fonctions de covariance qui détermine la qualité des solutions inverses. Les résultats précédemment obtenus n'étant pas pleinement satisfaisants au regard de la précision que nous voulons atteindre, nous avons été amené à concevoir la méthode décrite au chapitre III pour réduire l'erreur radiale d'orbite dans les mesures altimétriques. Afin d'estimer la fonction de covariance de l'erreur d'orbite résiduelle après application de la correction d'erreur d'orbite par la méthode de démodulation, les erreurs du champ de gravité GEM-T2 jusqu'au degré et ordre (10,10) ont été introduites dans le programme SELECT (du Bureau Gravimétrique International, Mme Vales) qui est basé sur le formalisme de Kaula. Ce programme permet de calculer le spectre des perturbations orbitales du satellite suivant la composante radiale. P. Mazzega a sélectionné les fréquences dont l'amplitude est supérieure à 1 cm excluant les fréquences autour d'un cycle par révolution, qui ont été éliminées par la démodulation complexe. Il a ensuite calculé la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance obtenant ainsi la fonction de covariance des erreurs d'orbite résiduelles. Cette fonction a la

Table IV.2 : Résumé des principales caractéristiques des paramètres pour les fonctions d'autocorrélation des erreurs sur les données et des constituants des marées.

Type d'erreur	Fonction de covariance analytique	Ecart type (cm)	Longueur de corrélation (L), Temps de corrélation (T) ou Période (P)
Bruit instrumental	Dirac	10	
Erreur radiale d'orbite	Produit d'un cosinus et d'une fonction gaussienne	100	P = 1 cycle par révolution T = 5 révolutions
		150	P = 1 jour T = 2 jours
Variabilité mésoéchelle	Produit de fonctions gaussiennes	10	L = 130 km T = 25 jours
Erreurs résiduelles sur les corrections de propagation	Produit d'un cosinus amorti et d'une fonction gaussienne	10	L = 1700 km T = 5 jours P = 3200 km
Erreur sur la surface moyenne océanique	Produit d'un cosinus et d'une fonction gaussienne	210	L = 310 km P = 2040 km
M ₂	Cosinus amorti	23.4	
S ₂	Cosinus amorti	9.3	L = 14° (1550 km) P = 108° (1200 km)
N ₂	Cosinus amorti	4.9	
K ₂	Cosinus amorti	2.6	
K ₁	Cosinus amorti	8.5	
O ₁	Cosinus amorti	6.1	L = 15° (1660 km) P = 142° (15850 km)
P ₁	Cosinus amorti	2.7	
Q ₁	Cosinus amorti	1.3	
M _m	Cosinus amorti	0.6	L = 122° (14000 km) P = 220° (24425 km)
M _f	Cosinus amorti	0.7	
S _{sa}	Cosinus amorti	1.1	

même forme analytique que D_5 mais avec des paramètres différents : $\sigma_{\text{orb}}^2 = (150 \text{ cm})^2$, $\Delta T = 2 \text{ jours}$ et $T_{\text{orb}} = 1 \text{ jour}$. Cette période de 1 jour correspond à une période de résonance "pluri-journalière" (cfr. §III.4) particulièrement forte dans le cas de Geosat.

La fonction de covariance a priori des erreurs qui affectent les mesures altimétriques, en fonction de la distance angulaire et de l'intervalle de temps qui séparent deux données, est :

$$D(\psi^{ij}, \tau^{ij}) = D_1(\tau^{ij}) + D_2(\psi^{ij}) + D_3(\psi^{ij}, \tau^{ij}) + D_4(\psi^{ij}, \tau^{ij}) + D_5(\tau^{ij}) \quad (4.60)$$

Les principaux paramètres des fonctions d'autocovariance du signal de marée et des erreurs sont rassemblés dans la Table IV.2. Si on ne tient compte que des autocovariances de la marée, la variance totale (lorsque $\psi^{ij}=0$) de la marée est $(28 \text{ cm})^2$ alors que la variance totale des erreurs ($\psi^{ij}=0, \tau^{ij}=0$) est $(260 \text{ cm})^2$. La solution inverse est la solution optimale, étant donné toutes les informations a priori que nous venons de décrire.

Malgré le rapport signal sur bruit défavorable (de l'ordre de 0.01), une solution d'une précision meilleure que la dizaine de centimètres peut être obtenue, car les caractéristiques spectrales en fréquence et en longueur d'onde du signal de marée sont distinctes des caractéristiques spectrales des erreurs.

IV.7.3 - Le problème de l'aliasing

Plusieurs jours séparent les passages répétitifs du satellite Geosat au dessus d'un même point géographique, de sorte que les marées diurnes et semi-diurnes sont "vues" par le satellite comme des oscillations à basse fréquence de la surface de la mer (principe de l'aliasing ou repliement du spectre). Le signal de marée, dont l'amplitude est bien plus importante que celle de la plupart des signaux de variabilité océanique, doit être retranché des mesures altimétriques brutes afin de déterminer très précisément les autres signaux. Le repliement du spectre des marées vers les basses fréquences (ou aliasing) complique la séparation du signal des marées de celui des signaux de variabilité à longue période. En particulier, dans le cas de l'orbite héliosynchrone du satellite ERS1, les constituants lunaires K_2 et K_1 sont aliasés aux fréquences de 2 et 1 cycles par an et les constituants solaires P_1 et S_2 apparaissent en 1 cycle par an et à la fréquence nulle (Table IV.3). Cet exemple montre que non seulement les constituants des marées se confondent avec les variabilités océaniques annuelles et interannuelles, mais qu'il est très difficile de les distinguer entre eux, même dans le cadre de missions altimétriques s'étalant sur plusieurs années.

Le problème de l'aliasing, tel qu'il vient d'être présenté, repose sur une vision de l'analyse unidimensionnelle classique des séries temporelles. Jusqu'à présent, elle a guidé les recommandations sur les choix les plus judicieux des orbites des satellites altimétriques, dédiés à l'étude de la circulation océanique et des marées [Parke et al., 1987]. Cependant, il faut modifier cette vision unidimensionnelle dans le cas des analyses spatio-temporelles par méthodes inverses. La distribution géographique de l'échantillonnage spatio-temporel particulier du signal des marées appelle à reconstruire le problème de l'aliasing. Les cartes globales des marées océaniques montrent que les amplitudes et phases des différents constituants de la marée sont des fonctions spatialement lisses. Bien plus, les cartes cotidiales d'ondes de fréquences proches sont similaires (voir Table IV.1). Ces propriétés spatiales et en fréquence sont quantifiées statistiquement par les fonctions d'auto et d'intercovariances qui sont introduites comme informations a priori dans les inversions. Plus simplement, cela signifie que les mesures proches d'un point où l'on désire prédire la marée fournissent des informations statistiques sur la marée en ce point (apporté par les autocovariances) mais aussi

Table IV.3 : Périodes apparentes des principaux constituants de la marée en fonction de la période de répétitivité des satellites altimétriques [tiré de Jourdin, 1992].

Ondes		Périodes apparentes (jours)		
Constituants	Période (heures)	GEOSAT Prep = 17.0505 jours	ERS1 Prep = 35 jours	Topex/Poseidon Prep = 9.9156 jours
K ₂	11.967	88	181	87
S ₂	12.000	170	∞	62
M ₂	12.421	317	94	59
N ₂	12.653	52	90	50
K ₁	23.934	176	363	173
P ₁	24.066	4450	365	89
O ₁	25.819	113	75	46
Q ₁	26.868	74	133	69

que la restitution précise d'un constituant dominant de la marée aide à la restitution d'une constituante plus faible ou aliasé (grâce aux intercovariances).

Mazzega [1989] a montré à l'aide de simulations que les précisions des solutions de marées par inversion de mesures altimétriques sont insensibles au type d'orbite. En d'autres termes, la précision des solutions est indépendante des fréquences auxquelles les marées sont aliasées. On peut même dans le cas d'une orbite héliosynchrone parvenir à restituer l'onde solaire S_2 aliasée à la fréquence nulle. Le paramètre le plus important, qui contrôle la qualité des solutions inverses, est le rapport signal sur bruit (fonction essentiellement de l'erreur d'orbite) et moins la longueur des séries temporelles analysées. En conclusion, l'inversion des mesures altimétriques est une méthode d'analyse indifférente au phénomène de l'aliasing.

IV.8 - Formule d'inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques

Jusqu'à présent, dans les inversions des mesures marégraphiques, nous n'avons pris en compte que les autocovariances du signal de marée. Nous désirons estimer en une étape les constantes harmoniques des 11 constituants principaux des marées océaniques à partir de la combinaison des mesures marégraphiques et altimétriques. Pour ce faire, nous introduisons une nouvelle équation d'observation pour les mesures marégraphiques, plus complète et compatible avec l'équation d'observation des mesures altimétriques :

$$U_{qn}(r^i) = \int_{\text{sphère}} dr \sum_{p=1}^{11} \sum_{k=1}^2 U_{pk}(r) \delta(r-r^i) \delta(p-q) \delta(k-n) + \varepsilon_{qn}^m(r^i) \quad (4.61)$$

que l'on peut réécrire sous une forme plus compacte :

$$U_{qn}(r^i) = \sum_{p=1}^{11} \sum_{k=1}^2 [g_{qn}^{pk,i}(r) U_{pk}(r)] + \varepsilon_{qn}^m(r^i) \quad (4.62)$$

avec

$$g_{qn}^{pk,i}(r) = \int_{\text{sphère}} dr (.) \delta(r-r^i) \delta(p-q) \delta(k-n) \quad (4.63)$$

La solution de l'inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques, compte tenu des notations précédemment introduite ainsi que les opérateurs qui ont été défini, s'écrit sous forme matricielle :

$$\widehat{U} = C \cdot [G^T \ g^T] \cdot S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} h \\ U \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\widehat{C} = C \cdot [G^T \ g^T] \cdot S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} G \\ g \end{bmatrix} \cdot C \quad (4.65)$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} C_{\epsilon^a \epsilon^a} & 0 \\ 0 & C_{\epsilon^m \epsilon^m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G C G^T & G C g^T \\ g C G^T & g C g^T \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

On a supposé que les erreurs sur les mesures marégraphiques et altimétriques sont non corrélées. Les fonctions de covariances des erreurs sont comme précédemment des fonctions

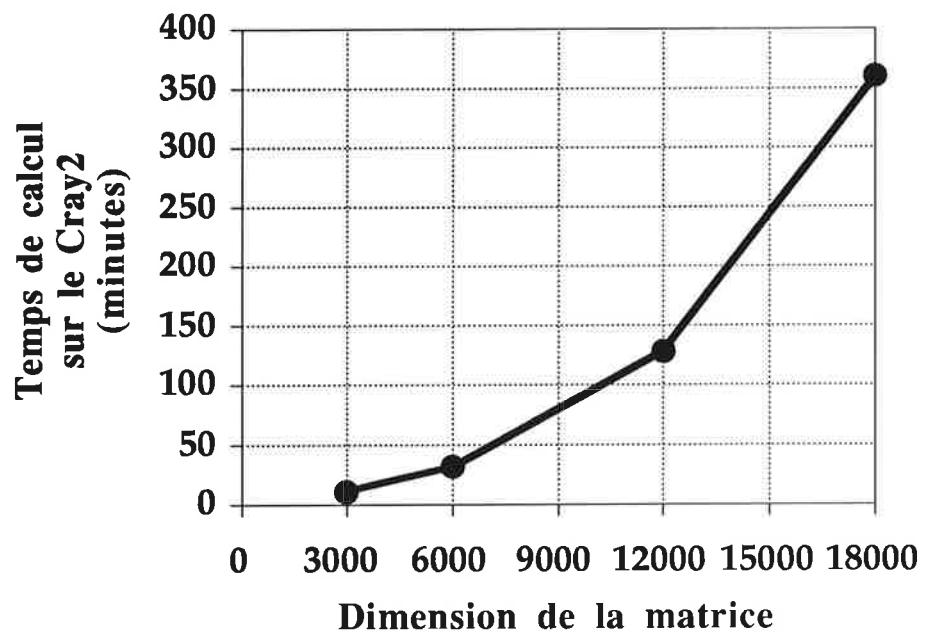


Figure IV.5 : Temps nécessaire sur le Cray2 à la factorisation et à la résolution par la méthode de Cholesky d'un système linéaire, dont la matrice est symétrique définie positive. Le temps suit une loi en N^2 [Bergé, communication personnelle 1993].

de Dirac. Les variances des erreurs altimétriques et marégraphiques ont été fixées à la même valeurs de $(10 \text{ cm})^2$. Cette valeur qui peut paraître excessive pour les mesures marégraphiques s'est imposée dans la pratique, car des valeurs plus faibles rendent la matrice S singulière pour des lots d'environ 15000 à 18000 données.

IV.9 - Résolution numérique

Les paragraphes précédents ont traité essentiellement des formules d'inversion ainsi que de la description des termes qui les composent. Il est un sujet que nous n'avons pas encore abordé et qui concerne la partie numérique et plus particulièrement l'inversion de la matrice S . Cette matrice est pleine, dimensionnée par le nombre de données à inverser et, de plus, comme elle est construite à partir de fonctions de covariance, elle est symétrique définie positive.

La solution des problèmes inverses comporte une multiplication matricielle de l'inverse de la matrice S par le vecteur des données D . Calculer explicitement l'inverse de S revient à résoudre N (nombre de données) systèmes linéaires. Il est donc bien plus économique de résoudre le système linéaire $S X = D$, dont la solution est $X = S^{-1} D$. La résolution de ce système linéaire se fait par la méthode classique de Cholesky conçue pour résoudre les systèmes linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Cette méthode consiste à calculer la factorisation $S = B^T B$ de Cholesky où B est une matrice triangulaire inférieure et puis à résoudre successivement les deux systèmes linéaires à matrices triangulaires : $B w = D$ et $B^T X = w$. Au total, la méthode de Cholesky nécessite de l'ordre de $N^3/6$ additions, $N^3/6$ multiplications, $N^2/2$ divisions et N extractions de racines, alors que la méthode générale de résolution de système linéaire de Gauss requiert $N^3/3$ additions, $N^3/3$ multiplications, $N^2/2$ divisions [Ciarlet, 1988].

La sous-programme de résolution par la méthode de Cholesky que nous utilisons provient de la librairie LINPACK. Un test mené sur la résolution d'un système ($18\ 000 \times 18\ 000$) a montré que les solutions inverses sont encore stables sur de très gros systèmes. En définitive, la dimension des matrices qui ont été inversées est conditionnée par la puissance des moyens de calcul dont nous disposons, c'est-à-dire par la place en mémoire centrale de l'ordinateur et le temps de calcul des inversions. Pour calculer les solutions de l'atlas OMP1/2 qui est décrit dans le chapitre suivant, la dimension des matrices inversées est de l'ordre de 11500×11500 . Cette dimension est un bon compromis entre le temps calcul dont nous disposons et le nombre de lots de données (et par conséquent le nombre total de données) qui peuvent être inversées. Enfin, signalons que le conditionnement des matrices est de l'ordre de 10^4 .

Nous avons vu que pour obtenir les solutions, il ne faut résoudre qu'un système linéaire. Par contre, le calcul des covariances a posteriori $C(r,r)$ nécessite la résolution d'un système linéaire par point r où on la calcule. En effet, l'inverse de la matrice S multiplie la fonction de covariance a priori qui diffère d'un point à l'autre. On comprendra donc pourquoi les cartes de covariances a posteriori que nous présenterons ont des résolutions beaucoup plus grossières que celles des solutions.

IV.10 - Conclusions

Dans ce chapitre technique, nous avons explicité les formules d'inversions des mesures marégraphiques, gravimétriques et altimétriques avec lesquelles les modèles globaux de marées océaniques présentés dans le chapitre V ont été calculés. La théorie des problèmes inverses fournit un outil d'analyse qui permet de traiter simultanément des mesures de nature différente. De plus, elle permet de prendre en compte des caractéristiques spatio-temporelles du signal des marées et des erreurs affectant les données au travers des fonctions de covariance et de généraliser les méthodes plus anciennes comme les méthodes des concordances ou de convolution.

Une grande part du travail consiste à choisir les différentes fonctions de covariance. Nous avons vu la grande utilité des modèles hydrodynamiques de marées océaniques grâce auxquels les fonctions de covariance du signal des marées peuvent être quantifiées. Les méthodes inverses permettent aussi de calculer des estimations des erreurs formelles; nous verrons dans le chapitre suivant leur grande utilité dans l'interprétation des résultats. Par ailleurs, le problème du repliement du spectre des marées, que l'on rencontre dans les méthodes classiques d'analyse des mesures altimétriques, est fortement réduit dans le cas d'analyse par méthodes inverses.

Enfin, le prix de cette généralisation des méthodes de détermination des constantes harmoniques des marées océaniques à partir de mesures hétérogènes est un coût de temps de calcul bien plus élevé que pour les méthodes existantes.

CHAPITRE V

CHAPITRE V: MODELES INVERSES DES MAREES OCEANIQUES

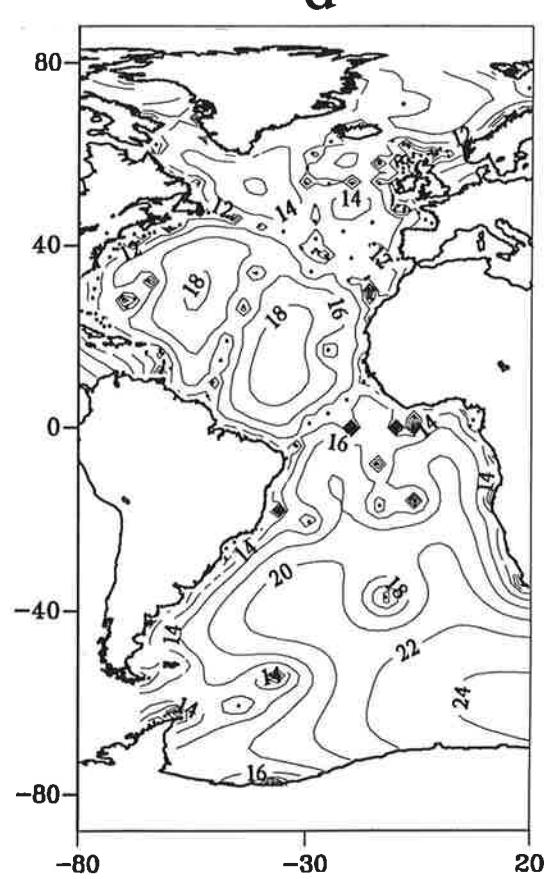
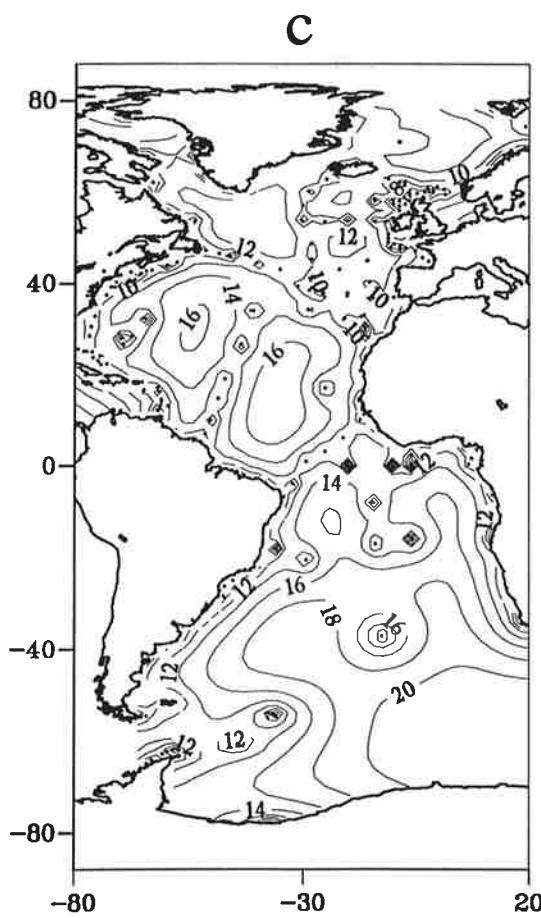
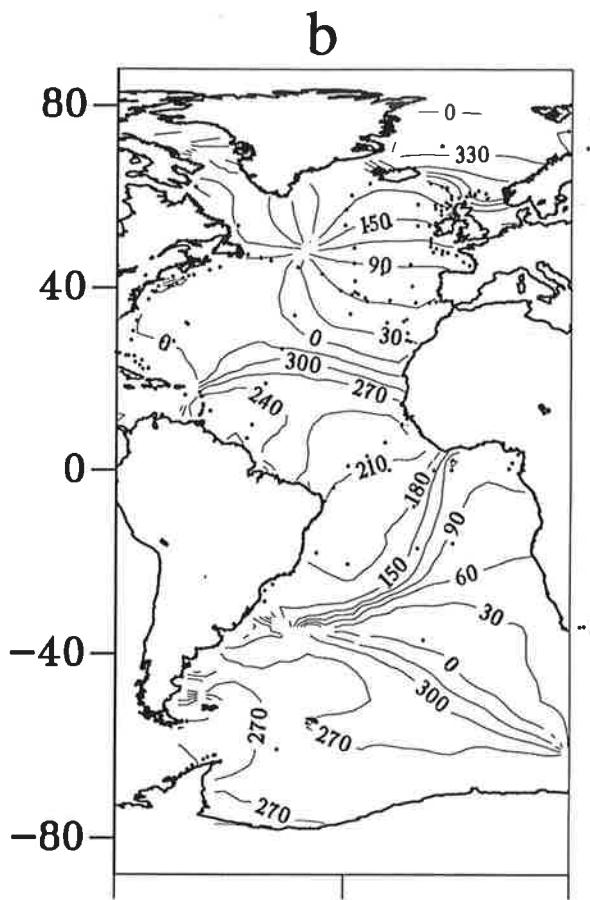
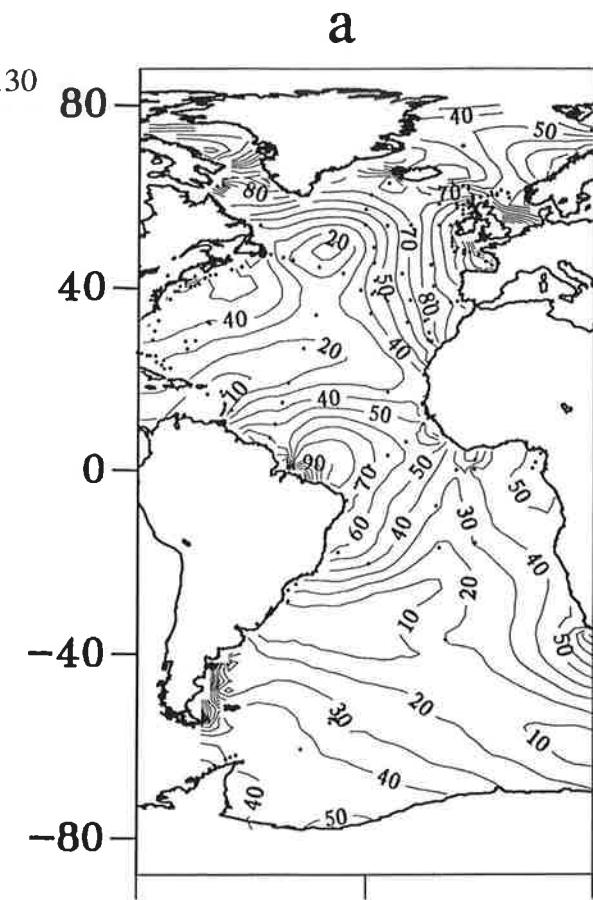
V.1 - Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des modèles de marées océaniques qui ont été obtenus par inversion des mesures marégraphiques, gravimétriques de marée terrestre et altimétriques. Ces modèles ont la particularité d'être des modèles globaux et basés sur l'analyse des mesures uniquement, sans aucune contrainte hydrodynamique, c'est-à-dire qu'ils sont à classer parmi les modèles du type "purement empirique". Les résultats sont présentés suivant l'ordre chronologique dans lequel ils ont été obtenus. Cet ordre correspond à une complexité croissante des schémas d'inversion en fonction du type et du nombre de plus en plus important de données inversées. Il a permis aussi d'affiner au fur et à mesure les fonctions de covariance et de déterminer la combinaison optimale de mesures pour restituer les marées océaniques.

Avant ce travail, aucune carte globale des amplitudes et phases des marées océaniques n'a été dressée de manière empirique à partir de l'analyse des mesures marégraphiques ou gravimétriques de marée terrestre. Par contre, il existe un nombre considérable de publications sur des cartes empiriques des marées océaniques tracées à partir de mesures marégraphiques sur de petites zones. En ce qui concerne, l'obtention de cartes de marées océaniques par inversion de mesures de marée gravimétrique, il n'y a eu jusqu'à présent qu'une seule tentative conduite par Kuo et Jachens [1977] qui ont dressé des cartes cotidales dans l'Atlantique nord et le Pacifique nord-est. Ce n'est que récemment que certains modélisateurs en marée océanique ont porté à nouveau un certain intérêt pour les mesures de marée gravimétrique suite à la publication de nos premiers résultats d'inversions [Jourdin et al., 1992]. C'est le cas, par exemple, de Zahel [1992] qui a développé un schéma d'assimilation des mesures gravimétriques dans son modèle hydrodynamique.

Les mesures altimétriques ont suscité de nombreux travaux qui ont relancé une approche purement empirique de modélisation des marées océaniques. Parmi tous ces travaux, le plus accompli est celui de Cartwright et Ray [1990, 1991] qui ont analysé deux ans de mesures altimétriques de Geosat par la méthode de convolution. A partir des fonctions d'admittance, ils ont dressé les cartes cotidales des ondes principales de la marée. La comparaison pour l'onde M_2 avec le modèle de Schwiderski révèle des divergences qui peuvent atteindre 5 à 10 cm sur de vastes régions. Les comparaisons de ces deux modèles sur un jeu de mesures marégraphiques montrent qu'ils sont de précision équivalente. Parallèlement à leur travail, Wagner a publié une solution pour l'onde M_2 à partir des mesures de Geosat [1990] qui d'après ses tests [Wagner, 1991] est d'une précision voisine de celle de Cartwright et Ray. Comme ces auteurs, nous avons obtenu des solutions de marées à partir des mesures altimétriques. Un pas supplémentaire a été franchi en utilisant conjointement des mesures marégraphiques et altimétriques.

Nos résultats démontrent la grande complémentarité des mesures marégraphiques et altimétriques. Ces deux types de mesures forment la combinaison optimale pour restituer les marées océaniques. L'utilisation des mesures de marée gravimétrique se heurte à un problème de méconnaissance du contenu exact de la mesure. Nous montrons qu'elles apportent des informations sur les marées en grande partie redondantes avec celles contenues dans les mesures marégraphiques. Les solutions des marées par inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques sont quantitativement bonnes. Elles ne sont pas encore équivalentes aux meilleures solutions actuelles. Les raisons en sont essentiellement la plus faible précision des mesures altimétriques que nous avons utilisées et le manque de données inversées localement. Dans l'avenir, une seconde itération sera effectuée. Cette nouvelle



Figures V.1 : Cartes cotidiales de l'onde M_2 obtenues par inversion des mesures marégraphiques (indiquées par les points) dans l'océan Atlantique. Amplitudes en cm (a), phases en degrés (b), écarts types en cm des composantes en phase (c) et en quadrature (d).

solution servira de solution a priori pour les inversions des mesures altimétriques de Topex/Poseidon.

V.2 - Résultats des inversions marégraphiques et gravimétriques

L'objectif de ces premiers essais d'inversions des mesures marégraphiques et gravimétriques de marée terrestre est de mettre en oeuvre la méthode inverse dans des configurations simples et peu coûteuses d'un point de vue informatique. C'est une étape préalable à un schéma d'inversion plus complexe comprenant des mesures d'altimétrie par satellite. Seules les constantes harmoniques de l'onde principale M_2 ont été inversées. Les composantes en phase et en quadrature de la marée ont été calculées indépendamment et ensuite combinées pour obtenir des cartes en amplitude et phase.

V.2.1 - Inversions des mesures marégraphiques

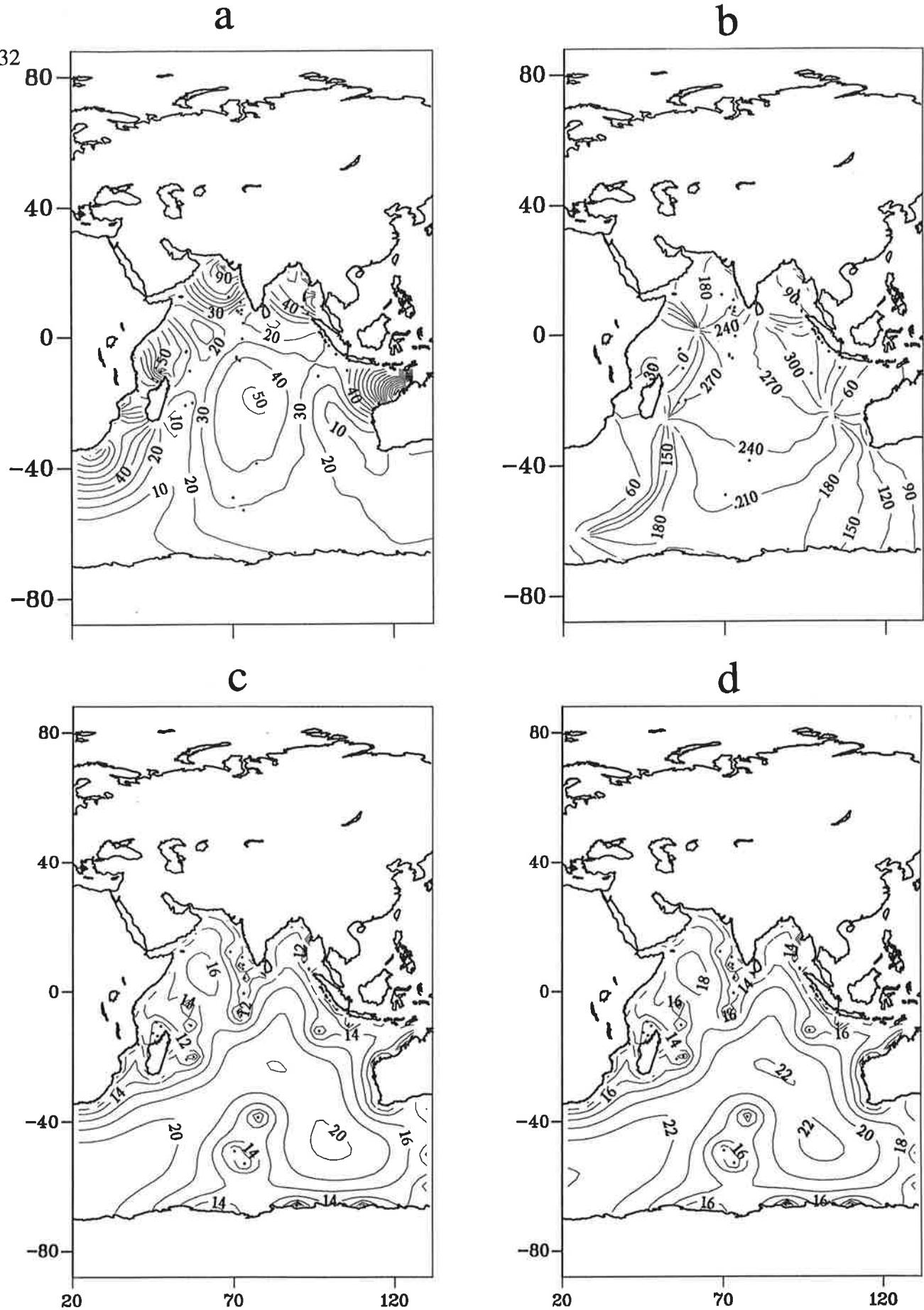
Les solutions inverses de l'onde de marée M_2 à partir des mesures marégraphiques seules ont été calculées séparément dans les océans Atlantique, Pacifique et Indien. Cette séparation naturelle permet de tenir compte de manière artificielle des continents, en ne considérant pas les corrélations des données situées dans des océans différents. Dans ces premières tentatives d'inversion, nous n'avons pas imposé la continuité des solutions aux frontières entre les différents océans. Celle-ci sera assurée ultérieurement en effectuant des inversions globales.

La plupart des mesures marégraphiques sont côtières; il y a quelques mesures pélagiques en grande majorité dans l'Atlantique nord. Afin de réduire le nombre de données à analyser et surtout d'éviter une redondance dans les mesures, nous avons choisi de façon aléatoire au maximum une donnée par degré carré. Environ 500 données ont été sélectionnées dans l'océan Atlantique ainsi que dans l'océan Pacifique et 200 dans l'océan Indien.

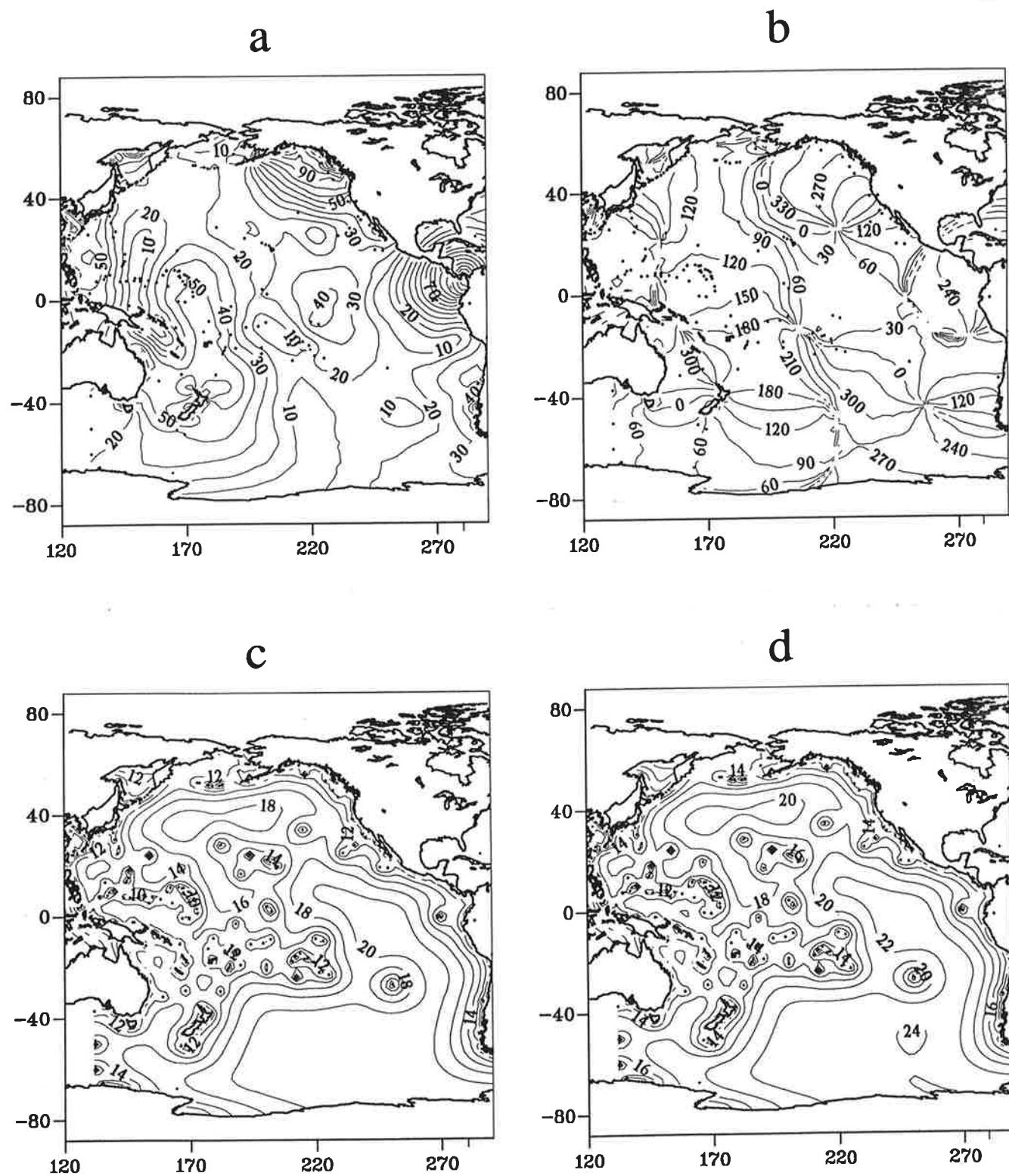
Les solutions pour les trois océans et les cartes des écarts types a posteriori sont présentées dans les Figures V.1-3. Les solutions sont qualitativement bonnes en comparaison avec le modèle hydrodynamique de Schwiderski [voir Figures I.6, p. 24] même en plein océan où les données sont éparses. Les principaux points amphidromiques sont bien localisés et les forts gradients des amplitudes, par exemple, le long des côtes du Pacifique en face de l'Amérique centrale et du Canada sont bien reproduits.

En toute logique, les écarts types des solutions ont des amplitudes très faibles près des données (inférieures à 5 cm) et ont des valeurs maximales (de l'ordre de 20 cm), proches des écarts types a priori, dans les régions où il n'y a pas de données. Ce qui signifie tout naturellement que, là où il n'y a pas de données, il n'y a pas eu d'amélioration notable en ce qui concerne la connaissance de la marée. Dans le cas particulier de l'inversion des mesures marégraphiques, la solution trouvée est une pure interpolation entre les données avec une contrainte de norme minimale sur les écarts aux données. Aux emplacements des données, la solution inverse adopte plus ou moins les valeurs des données suivant le degré de confiance sur leurs valeurs spécifiée par la fonction de covariance des erreurs sur les données. Ailleurs, l'information sur le signal des marées est propagée des données vers le point où la marée est interpolée par la fonction de covariance a priori sur le signal de marée. Lorsque la distance entre le point d'interpolation et la donnée la plus proche augmente, la quantité d'information propagée diminue; la solution inverse tend vers la solution a priori. Cette transition vers la solution a priori est d'autant plus lisse que la longueur de corrélation de la fonction de covariance du signal est grande.

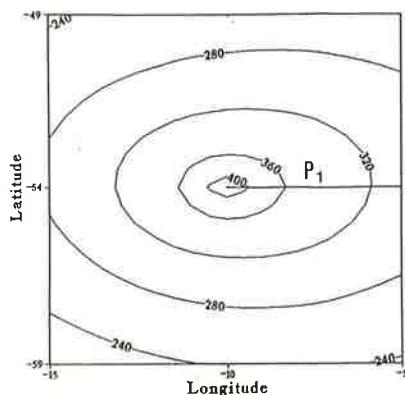
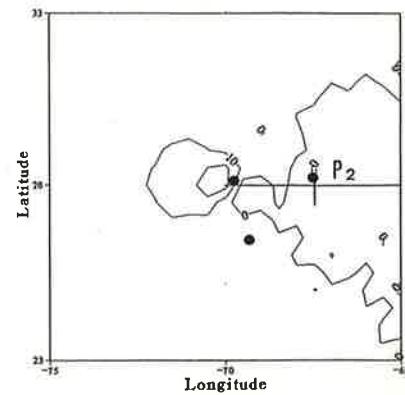
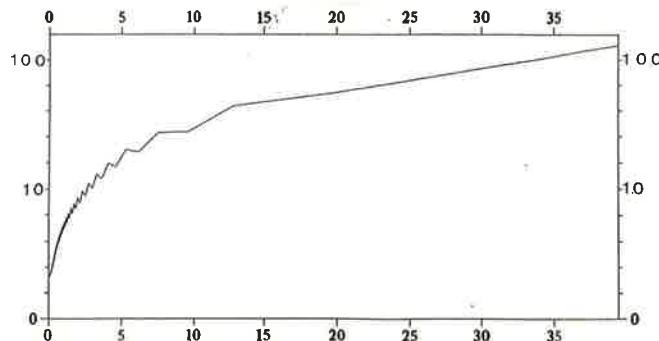
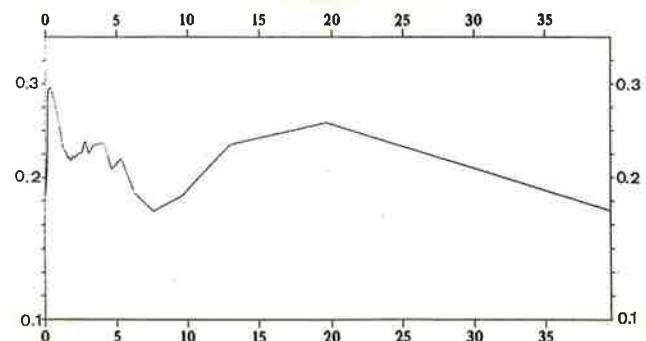
Les covariances a posteriori de la composante en phase ont été calculées dans deux boîtes de $10^\circ \times 10^\circ$ situées dans l'Atlantique (voir leurs localisations dans la Figure V.6). La valeur



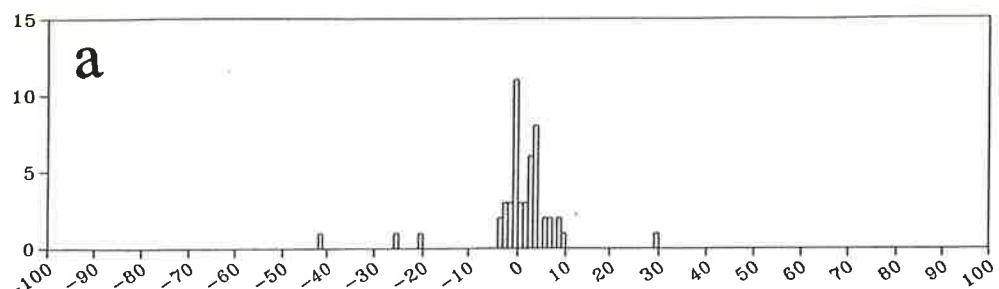
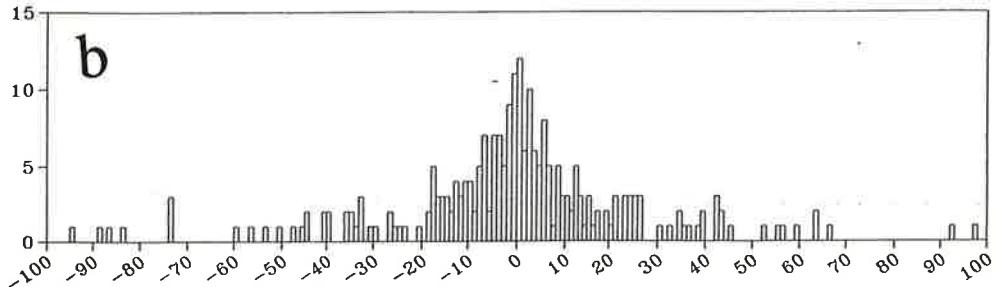
Figures V.2 : Cartes cotidiales de l'onde M_2 obtenues par inversion des mesures marégraphiques (indiquées par les points) dans l'océan Indien. Amplitudes en cm (a), phases en degrés (b), écarts types en cm des composantes en phase (c) et en quadrature (d).



Figures V.3 : Cartes cotidales de l'onde M_2 obtenues par inversion des mesures marégraphiques (indiquées par les points) dans l'océan Pacifique. Amplitudes en cm (a), phases en degrés (b), écarts types en cm des composantes en phase (c) et en quadrature (d).

a**b****c****d**

Figures V.4 : (a) et (b) Fonctions de covariance a posteriori (cm^2) calculées à partir de l'inversion des mesures marégraphiques dans deux boîtes $B1$ et $B2$ situées dans l'océan Atlantique (voir leurs positions dans la Figure V.6). (c) et (d) Amplitudes (cm^2) des spectres de Fourier des fonctions de covariance échantillonnées suivant les profils $P1$ et $P2$ en fonction de la longueur d'onde (en degré).

a**b**

Figures V.5 : Histogrammes des écarts (en cm) entre la solution inverse de l'onde M_2 obtenue par inversion des mesures marégraphiques dans l'océan Atlantique et les mesures marégraphiques insulaires et pélagiques (a) et les mesures de marégraphie côtières (b) non utilisées dans l'inversion.

au centre des boîtes (Figures V.4.a-b) est la variance a posteriori en ce point, tandis que les valeurs non centrales sont les covariances entre l'erreur en ces points et l'erreur au point central. La première boîte, dans l'Atlantique sud, est la covariance typique d'une région où il y a peu de données : la variance au centre (20.5 cm^2)² est proche de la variance a priori (24.3 cm^2)²; la covariance est lisse et l'erreur est corrélée sur de grandes distances; et la solution n'est que faiblement contrainte par les données. Par contre, dans la seconde boîte située dans l'Atlantique nord et qui contient trois données (dont les emplacements sont indiqués par des gros points dans la Figure V.4b), la variance n'est que de (4.9 cm^2)², la covariance a posteriori est non isotrope et la longueur de corrélation est inférieure à 1 degré. La solution est bien contrainte dans cette région. Dans chacune des boîtes, les covariances ont été échantillonnées suivant des profils rectilignes dessinés dans les Figures V.4a-b. Le spectre de Fourier du profil de la première boîte (Figure V.4c) est dominé par les grandes longueurs d'onde reflétant le caractère lisse et la grande longueur de corrélation de la fonction de covariance des erreurs sur la solution. A l'inverse, le spectre de Fourier du profil de la seconde boîte (Figure V.4d) est plutôt plat et peu énergétique; c'est celui d'un bruit aléatoire. Dans ce cas, la longueur de corrélation de la fonction de covariance des erreurs sur la solution est quasi nulle, caractéristique d'un problème bien résolu.

La solution inverse est en bon accord avec le modèle hydrodynamique de Schwiderski dans les régions où il y a des données. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque le modèle semi-empirique de Schwiderski est également contraint par des mesures marégraphiques. Les différences les plus importantes apparaissent dans l'hémisphère sud en raison du peu de données. La solution inverse est donc moins fiable comme l'indiquent les écarts types a posteriori qui sont égaux à l'écart type a priori. Par ailleurs, on peut s'attendre à ce que la solution inverse soit localement plus précise que le modèle hydrodynamique dans certaines régions. Ainsi, par exemple, au milieu de l'Atlantique nord, la solution inverse prédit une iso-amplitude de 20 cm sur la base de mesures pélagiques récentes, alors que le modèle de Schwiderski, qui n'a pas été contraint par ces données, donne une iso-amplitude de 30 cm. Sur ce point précis, la solution inverse est en accord avec le modèle aux éléments finis pour l'Atlantique nord de LeProvost et Vincent [1991].

La solution inverse a aussi été comparée aux données non incluses dans l'inversion. L'histogramme (Figure V.5a) des écarts entre la solution inverse et les mesures insulaires et pélagiques montre que les désaccords sont en moyenne inférieurs à 5 cm. Par contre, l'histogramme (Figure V.5b) des écarts entre la solution inverse et les mesures de marégraphie côtière sont bien plus importants. En effet, si on néglige les résidus supérieurs à 30 cm, on obtient une distribution quasi gaussienne d'une moyenne de 0.1 cm et de variance (10.9 cm^2)² pour la composante en phase (les résultats pour la composante en quadrature sont similaires). Les raisons de ce moins bon accord entre la solution inverse et les mesures côtières sont triples. Primo, la fonction de covariance a priori du signal de marée, qui est déduite à partir d'une moyenne statistique, a tendance à lisser les forts gradients des amplitudes de la marée que l'on rencontre dans les mers littorales. Dans ces mers, le signal de marée est plus énergétique et corrélé à moins grande distance qu'en moyenne sur tous les océans, comme on peut s'en assurer en calculant la fonction de covariance du signal de marée à partir des mesures de marégraphie côtière [Jourdin, communication personnelle]. Secundo, les données de marégraphie côtière sont, à l'inverse des données pélagiques, nombreuses et de qualité inégale. La sélection d'une mauvaise donnée contamine localement la solution, mais inversement la comparaison avec une mauvaise donnée donne une fausse idée de la qualité de la solution inverse. La troisième cause est le risque de contamination des constantes harmoniques le long des côtes par des phénomènes dynamiques locaux (atolls, port,...) qui ne sont pas pris en compte dans la solution inverse.

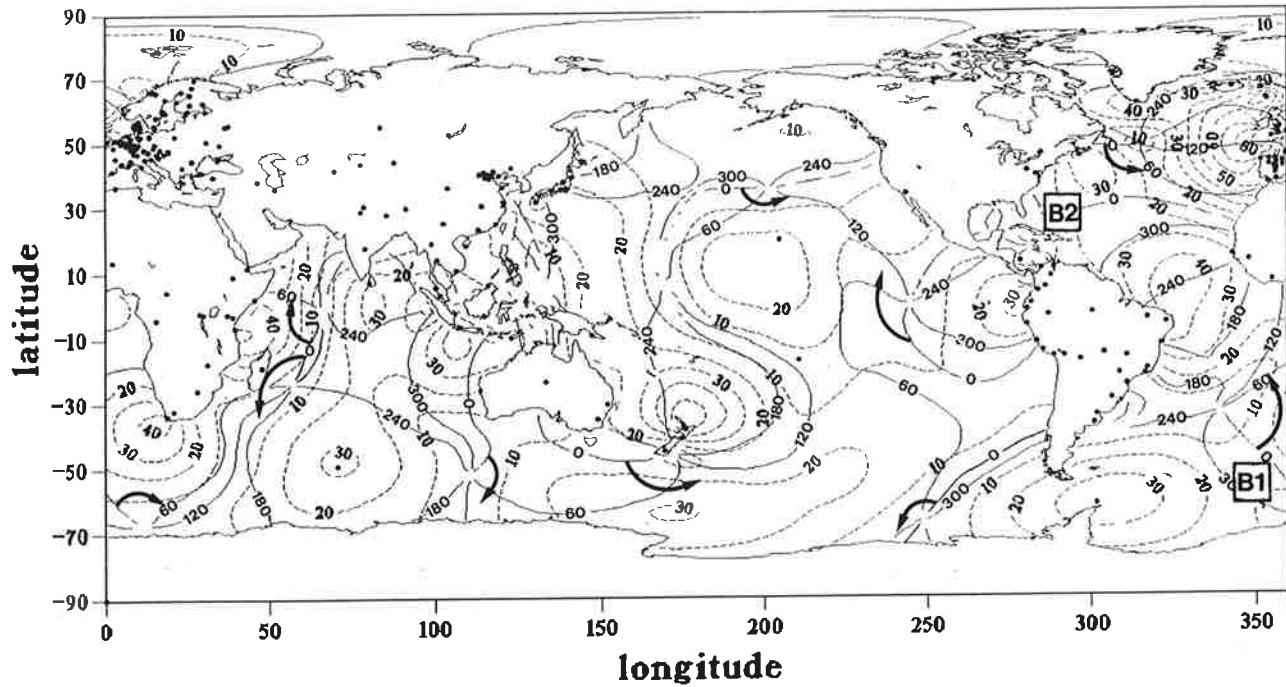


Figure V.6 : Carte cotidale de l'onde M_2 obtenue par inversion des mesures gravimétriques de marée terrestre (représentées par des points). Les amplitudes sont en centimètres et les phases en degrés.

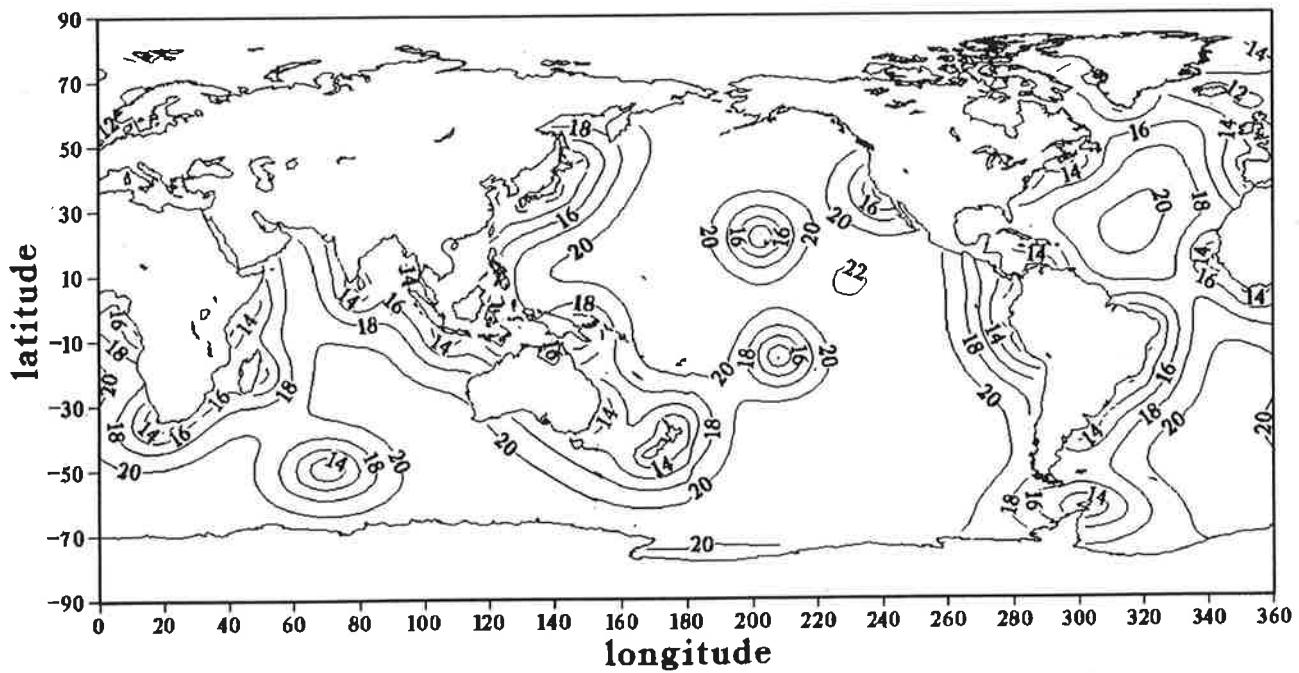


Figure V.7 : Ecarts types (en cm) de la solution de l'inversion des mesures gravimétriques de marée terrestre pour la composante en phase de l'onde M_2 .

Les tests de comparaison avec les mesures marégraphiques que nous venons de discuter doivent être considérés avec prudence. Les estimations sont certainement trop optimistes puisque, comme nous avons sélectionné au moins une donnée par degré carré, il y a toujours une donnée qui constraint la solution dans le voisinage immédiat (à une distance angulaire inférieure à 1 degré) de la donnée test. De plus, celui-ci n'est pas global puisque la couverture des mesures ne l'est pas.

L'inversion des mesures marégraphiques seules est riche en enseignement. Tout d'abord, elle a permis de valider la méthode inverse et a montré que l'emploi de covariances homogènes et isotropes est bien adapté à une restitution à l'échelle globale des marées océaniques. Les résultats montrent que les mesures de marégraphie côtière contiennent de l'information sur la marée en plein océan qui peut être exploitée au travers d'une méthode inverse. Le calcul des covariances a posteriori révèle que les mesures marégraphiques sont de bonnes contraintes pour évaluer les marées océaniques, mais ne sont pas suffisantes en raison du manque de mesures dans certaines régions. Enfin, il faut tempérer notre optimisme face à ces résultats en raison de la méconnaissance de la qualité des données qui détermine in fine la précision des solutions inverses.

V.2.2 - Inversion des mesures gravimétriques

La Banque de données ICET contient les constantes harmoniques de la marée terrestre de plus de 300 stations. Parmi celles-ci, nous en avons sélectionné 233. Nous avons éliminé les stations les plus anciennes, certaines stations côtières et celles dont les résultats sont douteux en raison de pannes instrumentales.

Les solutions de l'inversion des mesures de marée gravimétrique (Figure V.6) reproduisent les principaux traits caractéristiques de l'onde de marée M_2 . Elles sont cependant moins réalistes que celles obtenues par l'inversion des mesures marégraphiques. La plupart des points amphidromiques connus sont bien localisés et leurs sens de rotation sont corrects. Par contre, les amplitudes sont trop faibles. Les meilleurs résultats sont probablement obtenus dans l'Atlantique nord-est grâce aux nombreuses stations gravimétriques européennes. On peut constater que la solution en amplitude est bien plus lisse que la solution de l'inversion des mesures marégraphiques. Les mesures gravimétriques contiennent une information globale sur les marées océaniques; de ce fait, l'information sur les courtes longueurs d'onde est réduite, comme le confirme la fonction de covariance du signal des effets de surcharge océanique dont la longueur de corrélation est plus grande que celle de la fonction de covariance des marées océaniques (cfr. Figures IV.2). L'écart type a posteriori (Figure V.7) montre que les mesures gravimétriques ne contraignent la solution de la marée océanique pratiquement que le long des côtes et autour des îles où des mesures ont été effectuées. En dehors de ces régions, la solution tend vers la solution a priori (zéro), ce qui explique les amplitudes trop faibles.

La cause principale de ces résultats relativement modestes est la distribution géographique des mesures de marée gravimétrique. Il n'y a pratiquement pas de mesures de qualité sur le continent nord américain et, par conséquent, la restitution de la marée océanique dans le Pacifique nord-est et dans l'Atlantique nord-ouest n'est pas satisfaisante, comme le montrent les écarts types a posteriori. Dans l'hémisphère sud, il n'y pas de lacune en ce qui concerne la répartition géographique des stations, mais c'est la forme des continents qui empêche une bonne distribution spatiale des stations. Les écarts types a posteriori nous enseignent que les mesures gravimétriques peuvent contraindre les marées océaniques dans un rayon d'une dizaine de degrés autour de la station (voir les écarts types autour des îles) et donc les mesures gravimétriques sur les continents seuls ne peuvent pas contraindre la marée en haute mer. La seconde cause de ces résultats mitigés est que les vecteurs résidus inversés

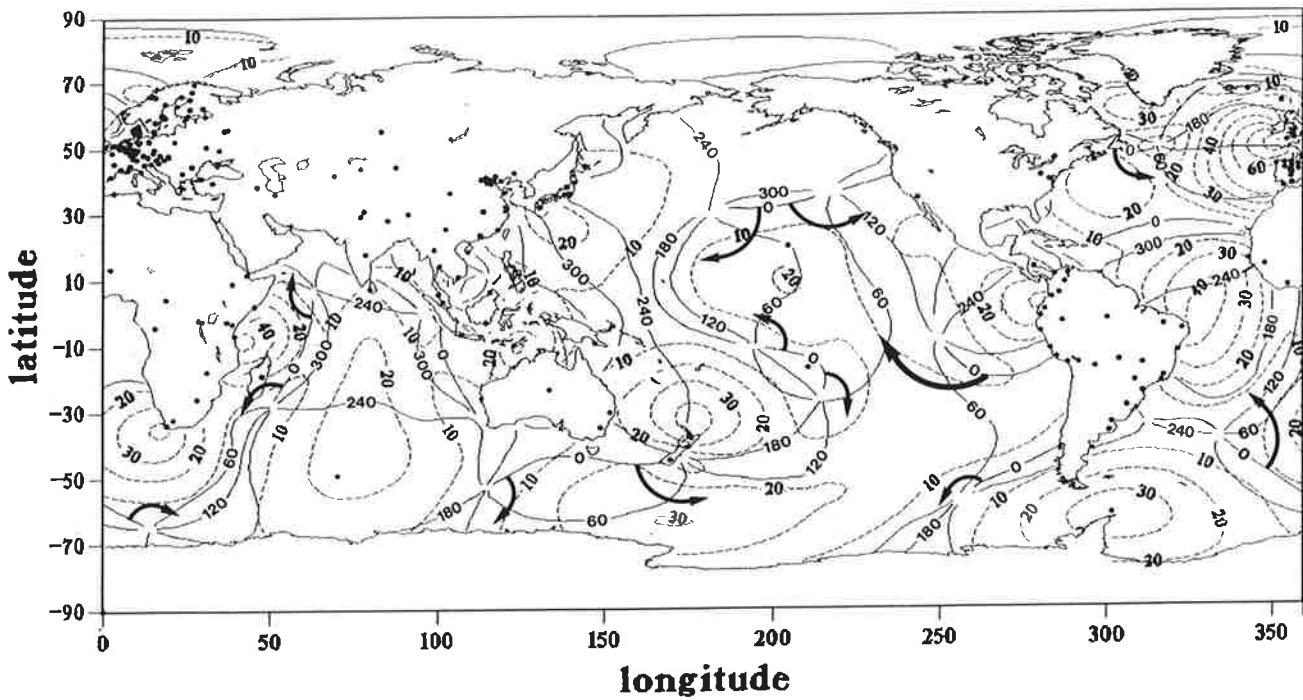


Figure V.8 : Carte cotidale de l'onde M_2 obtenue par inversion des vecteurs des effets de surcharge océanique calculés par la méthode de convolution de Farrell à partir du modèle de marée océanique de Schwiderski. Les amplitudes sont en centimètres et les phases en degrés.

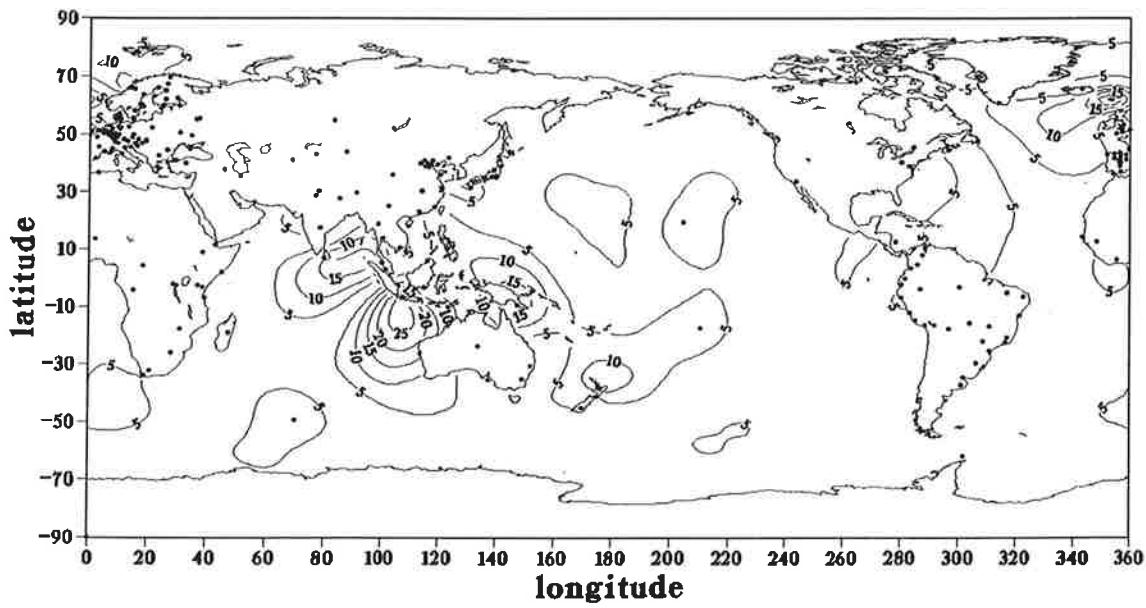


Figure V.9 : Amplitude (en cm) de la différence entre les cartes cotidales de l'onde M_2 obtenues par inversions des mesures gravimétriques de marée terrestre et des effets gravimétriques de surcharge océanique (Figure V.8).

contiennent non seulement les effets de surcharge océanique mais aussi une contribution (probablement de l'ordre de 10% du signal total) provenant de phénomènes d'origine géophysique non modélisés car mal connus comme ceux dus aux hétérogénéités locales ou d'origine tectonique [Yanshin et al., 1986; Melchior et Ducarme, 1991; Rydelek et al., 1991; Robinson, 1991]. Ces effets que nous considérons dans l'inversion comme des erreurs sont représentés en terme de covariance par une fonction de Dirac, car nous ne disposons d'aucune information précise sur leurs spectres de puissance. Il en résulte que les solutions inverses sont les constantes harmoniques de la marée plus une partie des erreurs projetées sur ces constantes. Enfin, le dernier facteur qui influe sur la précision des solutions est la manière dont les erreurs instrumentales (influences thermiques, sensibilité, effets barométriques, ...) sont modélisées. Nous avons fait l'hypothèse que les erreurs instrumentales sont non corrélées entre les différentes stations. Cette hypothèse est certainement contestable, car la plupart des instruments a été calibrée à la station fondamentale de Bruxelles [Ducarme, 1976] et des travaux récents [Baker et al., 1991] ont montré qu'une erreur systématique d'étalonnage en amplitude est fortement probable.

Afin de quantifier les effets des autres signaux géophysiques inclus dans les mesures de marée gravimétrique et des erreurs instrumentales sur la solution inverse, nous avons inversé les vecteurs des effets gravimétriques de surcharge océanique estimés par la méthode de convolution de Farrell à partir du modèle de Schwiderski aux emplacements géographiques des 233 stations de marée gravimétrique. La solution inverse (Figure V.8) restitue mieux la marée près des continents et n'est pas satisfaisante en plein océan. Ce résultat est cohérent avec les prédictions des écarts types a posteriori. Nous avons ensuite fait la différence entre cette solution et la solution de l'inversion des mesures gravimétriques (Figure V.9). Le signal résiduel représente la projection des erreurs instrumentales, des erreurs du modèle de Schwiderski et du signal autre que de marée océanique contenu dans les mesures gravimétriques sous forme d'amplitude de la marée océanique. A la lumière de cette expérience, il apparaît clairement qu'il y a une quantité d'information non négligeable et non attribuable aux marées océaniques dans les mesures gravimétriques. Le problème de la séparation de ces différentes contributions reste ouvert.

Améliorer les modèles des marées océaniques par inversion des mesures gravimétriques semble voué à l'échec tant que le contenu géophysique des mesures gravimétriques ne sera pas complètement élucidé. Toutefois, l'inversion des mesures gravimétriques pourrait contribuer à la résolution de ce problème à condition de ne pas restituer uniquement les constantes harmoniques de marée mais de restituer conjointement d'autres paramètres comme, par exemple, des coefficients de perturbation des fonctions de Green. Une telle approche rend le problème non linéaire et extrêmement coûteux d'un point de vue informatique. Cependant, si on arrive à séparer les effets de surcharge océanique des autres effets géophysiques, on devrait pouvoir mettre en évidence des anomalies locales ou régionales des marées terrestres et infirmer ou confirmer les anomalies régionales que l'on observe déjà dans les résidus de la Banque de données ICET [Melchior, communication personnelle 1993]. Nous n'avons pas poussé plus avant les investigations sur ce sujet, car elles nous éloignaient de notre objectif originel qui est l'amélioration des modèles de marées océaniques.

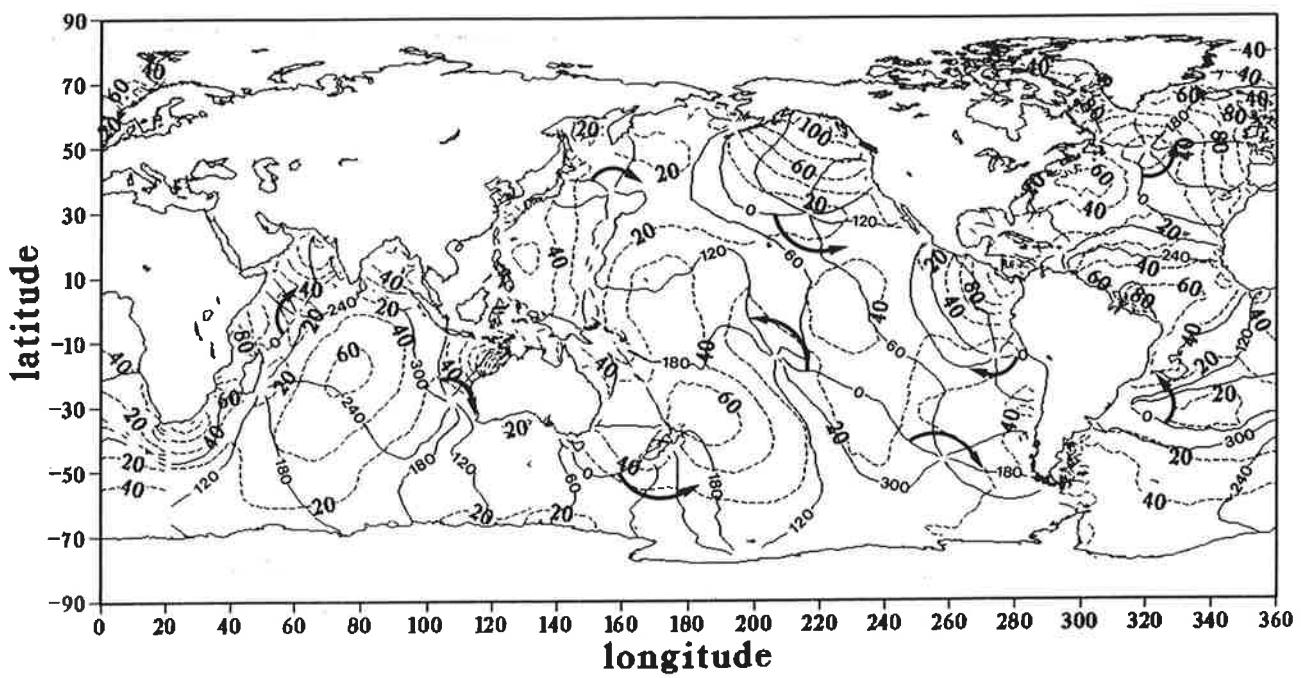


Figure V.10 : Carte cotidale de l'onde M_2 obtenue par inversion conjointe des mesures marégraphiques et gravimétriques de marée terrestre. Les amplitudes sont en centimètres et les phases en degrés.

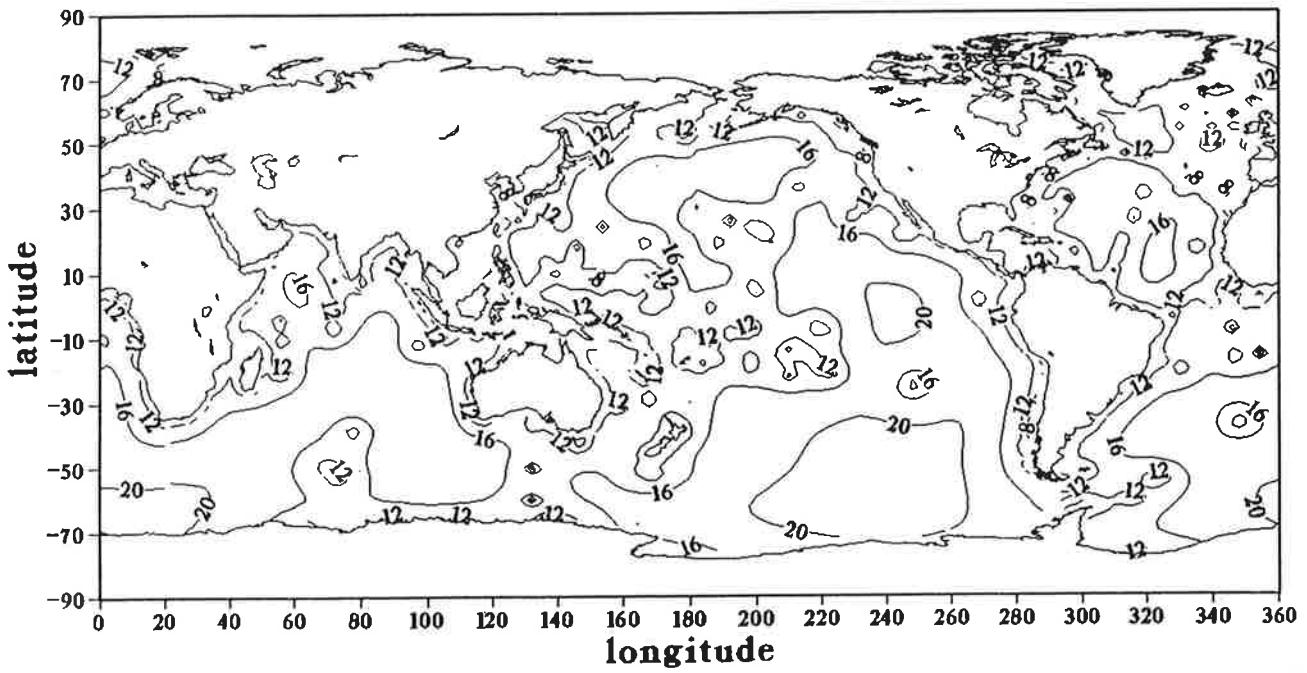


Figure V.11 : Ecart types (en cm) de la solution de l'inversion conjointe des mesures marégraphiques et gravimétriques de marée terrestre pour la composante en phase de l'onde M_2 .

V.2.3 - Inversion conjointe des mesures marégraphiques et gravimétriques

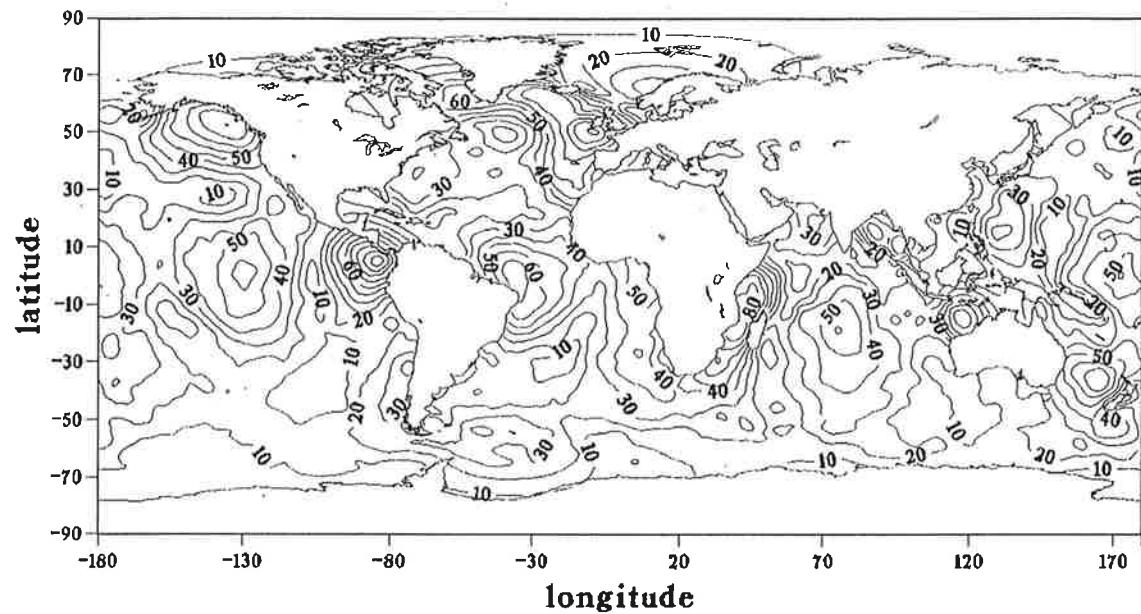
Inverser conjointement les mesures marégraphiques et gravimétriques procède d'une double intention : tester la complémentarité des deux types de données et leur cohérence. Les résultats (Figure V.10) de l'inversion conjointe sont décevants. En effet, on pouvait espérer une certaine complémentarité entre les mesures marégraphiques qui apportent une information ponctuelle et les mesures gravimétriques qui apportent une information globale sur la marée. Cette complémentarité n'a en pratique pas tenu ses promesses, car les mesures marégraphiques et gravimétriques contraignent les mêmes régions, c'est-à-dire les zones côtières (voir les écarts types a posteriori des solutions de l'inversion des mesures marégraphiques et gravimétriques seules). Or, les mesures marégraphiques seules contraignent déjà fortement la solution inverse et l'information de type intégral que les mesures gravimétriques pourraient apporter est redondante eu égard à la répartition des mesures marégraphiques dans les zones côtières. La non complémentarité des mesures marégraphiques et gravimétriques est quantifiée par le calcul des écarts types a posteriori. Ceux-ci (Figures V.11) sont globalement un peu plus faibles que les écarts types de l'inversion des mesures marégraphiques seules : les écarts types diminuent puisque l'information a priori a augmenté, mais ils ne diminuent que très peu puisque l'information supplémentaire est en partie redondante.

Cette conclusion repose sur l'interprétation des écarts types a posteriori qui dépendent uniquement de la répartition géographique des différentes mesures ainsi que des covariances a priori du signal des marées et des erreurs (ce terme comprend tout ce qui n'est pas signal des marées) sur les différentes mesures. De ce fait, elle pourrait être remise en question si nous disposions d'une description statistique plus réaliste de ces erreurs. On peut s'attendre à ce que les erreurs sur les mesures marégraphiques soient engendrées par des phénomènes de dynamique locale ou régionale et que les erreurs sur les mesures de marée gravimétrique d'origine géophysique aient des signatures à grandes longueurs d'onde. Ainsi, bien que la répartition géographique des mesures marégraphiques et gravimétriques de marée terrestre soit redondante, la combinaison de ces deux types de mesures devrait quand même apporter une contrainte intéressante pour restituer les marées océaniques en raison de la complémentarité des spectres des erreurs qui les affectent.

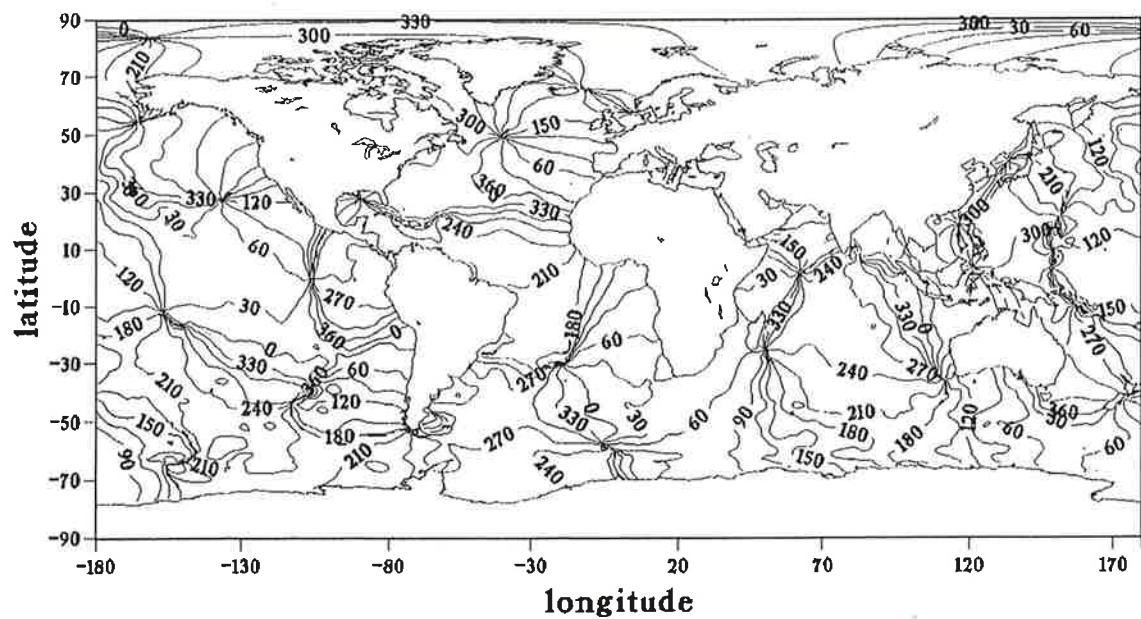
L'analyse sommaire du tracé de la solution conjointe montre que l'exactitude des résultats par rapport à l'inversion des mesures marégraphiques seules est dégradée. L'incohérence entre les deux lots de données est à l'origine de cette dégradation. C'est la méconnaissance du contenu géophysique des mesures gravimétriques, qui ne permet pas une description cohérente en terme de fonctions de covariance et qui conduit à des solutions peu probantes.

En conclusion, dans le cadre de ce thème, nous avons décidé de ne plus utiliser les mesures de marée gravimétrique dans les inversions. En effet, un effort très important concernant la modélisation du signal géophysique que contiennent les mesures de marée gravimétrique est nécessaire afin d'apporter une contribution utile au problème des marées océaniques. Cependant, elles restent d'une grande utilité pour tester de manière externe et globale les modèles de marées océaniques.

Amplitude M2 (cm) : OMP0



Phase M2 (dg) : OMP0

Figures V.12 : Modèle OMP0 : cartes cotidales pour l'onde M_2 .

V.3 - Résultats des inversions des mesures altimétriques et marégraphiques

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont le fruit d'un travail de recherche mené par une équipe (Mazzega, Bergé et Francis) dont l'objectif est d'obtenir le meilleur modèle empirique des marées océaniques à partir de mesures marégraphiques et altimétriques de Topex/Poseidon.

Le premier paragraphe concerne les premiers essais d'inversion des mesures altimétriques de Geosat pour restituer de manière globale les principaux constituants des marées. Ils ont permis de mettre au point la stratégie d'inversion conjointe de mesures marégraphiques et altimétriques qui a servi à dresser les cartes des marées océaniques d'un premier atlas, appelé OMP1/2.

V.3.1 - Inversion des mesures altimétriques

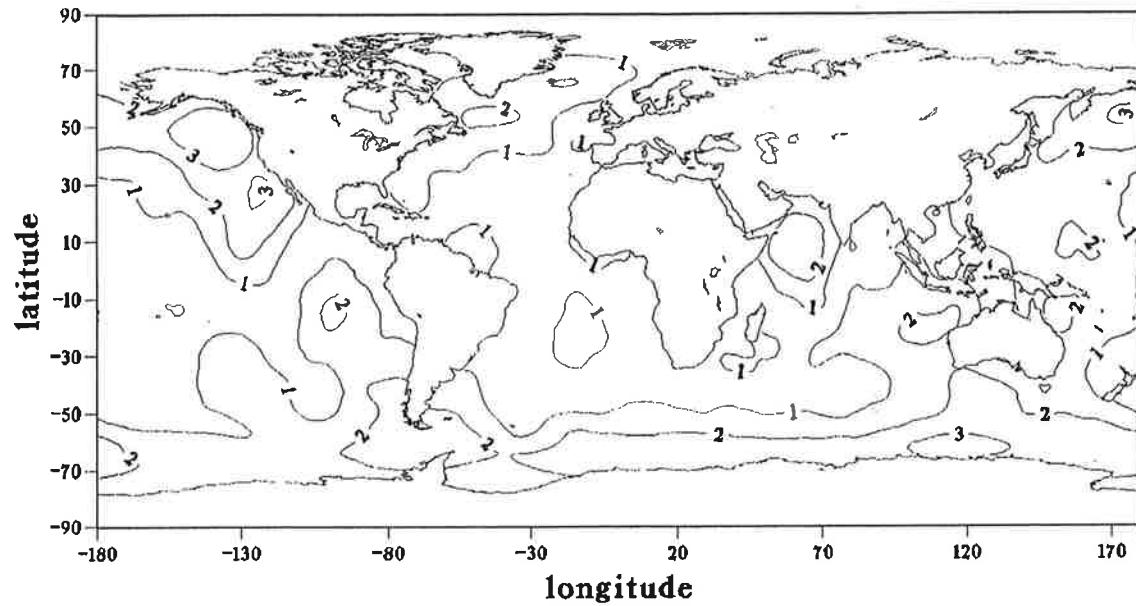
L'inversion des mesures altimétriques seules est à considérer comme une première expérience grande nature avant l'inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques. C'est un passage obligé afin de tester et de mettre au point le code d'inversion. En outre, au travers de cette expérience, l'apport de la mesure altimétrique à la modélisation des marées océaniques peut être apprécié.

Un an de mesures altimétriques de Geosat à partir du mois de novembre 1986 a été sélectionné. Après un moyennage de ces mesures sur 15 secondes et après élimination des données aberrantes, il en subsiste 10^6 . Inverser simultanément l'ensemble de ces données n'est actuellement pas envisageable. C'est pourquoi, 22 lots de mesures altimétriques de 12.000 données choisies de manière aléatoire (c'est-à-dire au total 264.000 données) ont été inversés séparément, obtenant ainsi 22 atlas de solutions des 8 ondes principales de marée (M_2 , N_2 , S_2 , K_2 , P_1 , O_1 , K_1 , Q_1) d'une résolution de $1^\circ \times 1^\circ$. L'atlas final, baptisé OMP0, est calculé en moyennant les solutions des 22 atlas. Le coût en temps de calcul est de 50 heures CPU sur CRAY2.

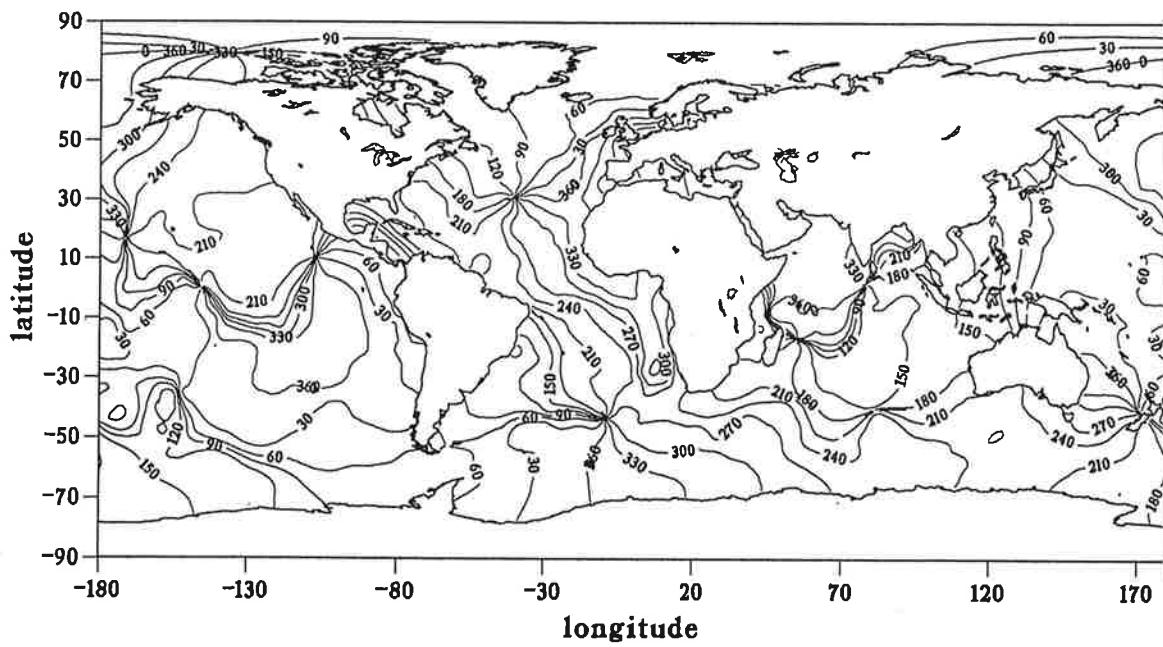
Les solutions de l'atlas OMP0 sont dans l'ensemble satisfaisantes sauf le long des côtes, où la couverture des mesures altimétriques est généralement très mauvaise. Par exemple, la restitution de l'onde principale de marée M_2 (Figure V.12) est à première vue qualitativement bonne. Dans le détail, par contre, elle révèle un certain nombre d'insuffisances : (1) les gradients des amplitudes le long des côtes sont trop faibles et même parfois pas du tout restitués comme au large de la côte ibérique; (2) les points anti-amphidromiques (c'est-à-dire points de maximum d'amplitude) en plein océan ont, par rapport au modèle de Schwiderski, des amplitudes beaucoup trop fortes; et (3) les solutions sont bruitées, ce qui se traduit par des lignes d'iso-amplitude et d'iso-phase sinuées. Malgré tout, il faut noter la relativement bonne restitution même pour l'onde Q_1 (Figure V.13) qui a une amplitude centimétrique en plein océan alors que l'erreur radiale d'orbite est de l'ordre du mètre.

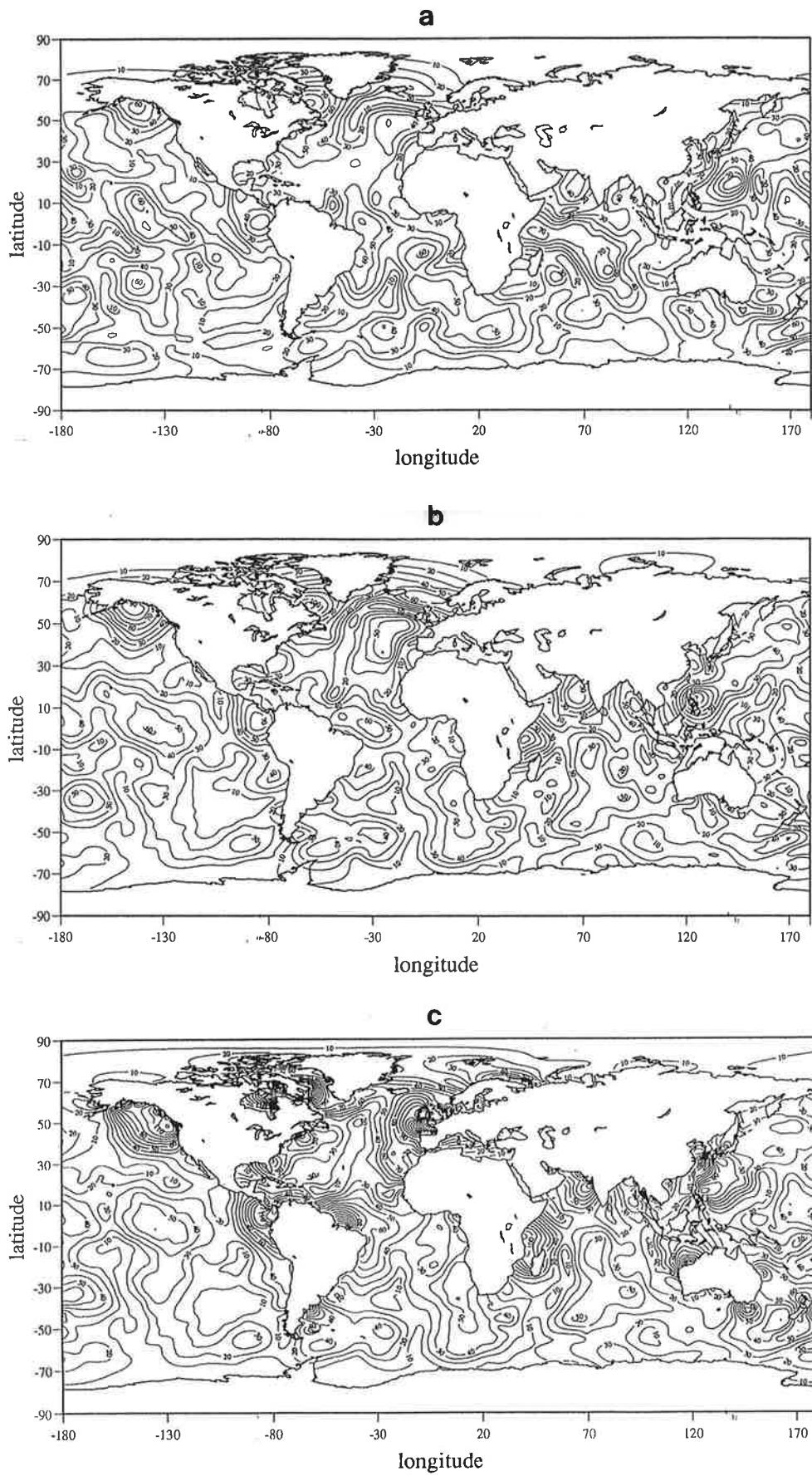
Les solutions des 22 atlas sont individuellement très bruitées. Ce bruit n'étant pas corrélé d'un atlas à l'autre est fortement réduit par le processus de moyennage mais reste perceptible (voir point (3) du paragraphe précédent). De nombreux tests ont montré que les solutions partielles sont surtout sensibles au choix de la fonction de covariance de l'erreur radiale d'orbite. Il a donc été décidé de corriger préalablement aux inversions les mesures altimétriques de l'erreur radiale d'orbite par la méthode de démodulation complexe décrite au chapitre III. Les Figures V.14 permettent de visualiser, sur les solutions partielles, les améliorations qui ont été introduites progressivement. La Figure V.14a montre le résultat de l'inversion de 3.000 mesures altimétriques avec la configuration et le choix des fonctions de covariance avec lesquelles les solutions OMP0 ont été calculées. On remarque les amplitudes

Amplitude Q1 (cm) : OMP0



Phase Q1 (dg) : OMP0

Figures V.13 : Modèle OMP0 : cartes cotidales pour l'onde Q_1 .



Figures V.14 : (a) Amplitude (en cm) de l'onde M_2 obtenue par inversion de 3000 mesures altimétriques sans correction préalable de l'erreur radiale d'orbite par la méthode de démodulation complexe, (b) avec cette correction appliquée et (c) avec cette correction et 400 mesures marégraphiques.

Marégraphes utilisés dans la solution OMP1/2

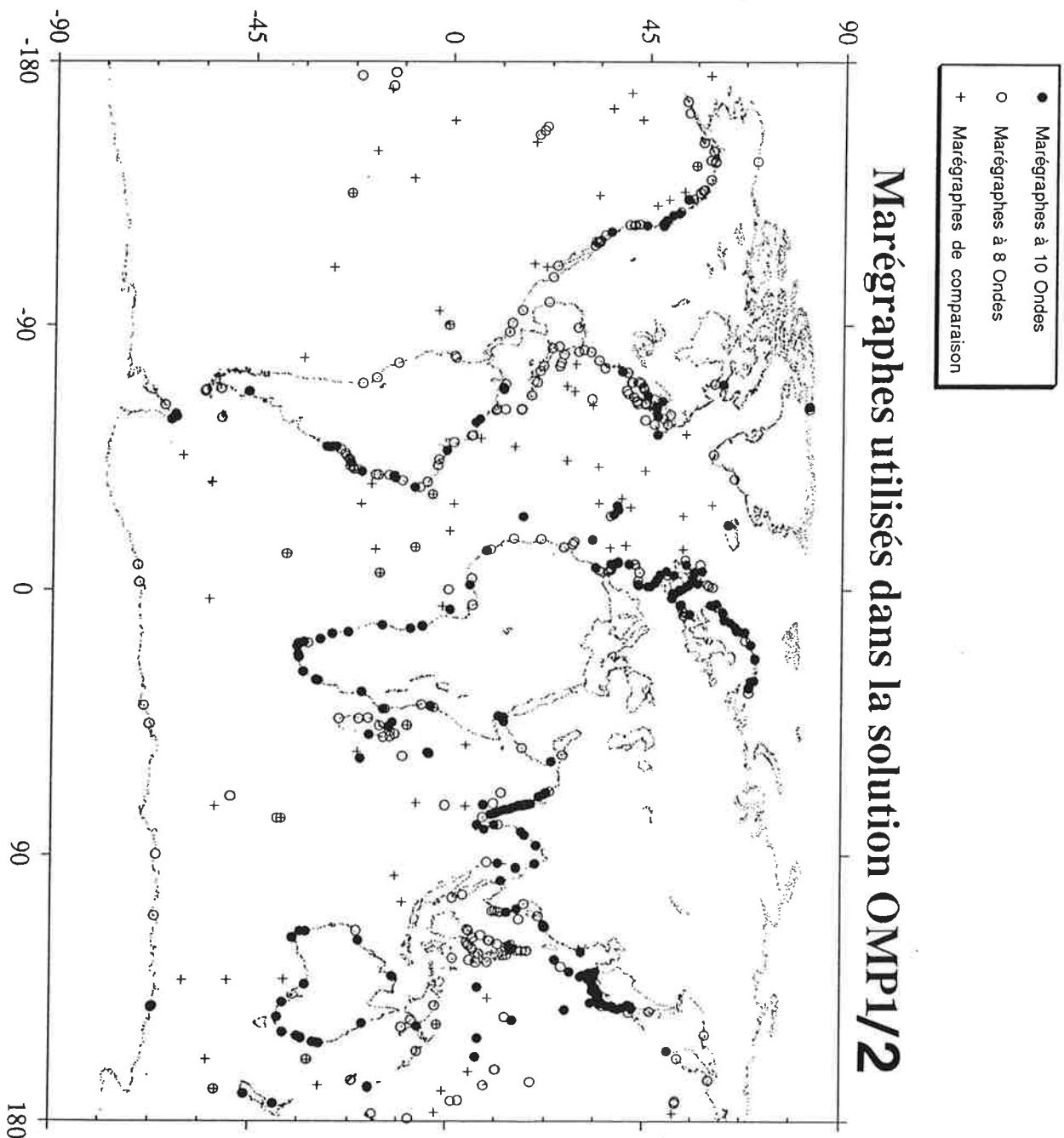


Figure V.15 : Localisation des stations marégraphiques dont les constantes harmoniques ont été utilisées soit dans les inversions soit pour valider les solutions inverses.

trop élevées au milieu des océans ainsi que la mauvaise restitution des gradients d'amplitude le long des côtes. La Figure V.14b montre le résultat de l'inversion de ces mêmes 3.000 mesures altimétriques mais cette fois corrigées de l'erreur radiale d'orbite par la méthode de démodulation et en introduisant une nouvelle fonction de covariance pour prendre en compte les erreurs d'orbite résiduelles après correction. L'amélioration de la solution est nette; non seulement les maxima d'amplitude qui étaient précédemment trop élevés sont atténués vers des valeurs plus réalistes, mais de plus les gradients des amplitudes le long des côtes sont plus énergétiques et donc mieux restitués. Enfin, une troisième étape a consisté à inverser conjointement aux 3.000 mesures altimétriques 400 mesures marégraphiques. On peut observer une nouvelle amélioration des résultats de l'inversion (Figure V.14c) montrant l'intérêt d'inverser simultanément des mesures altimétriques et marégraphiques.

V.3.2 - Inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques

Compte tenu de l'ensemble des résultats d'inversions qui ont été présentés précédemment, un certain nombre d'enseignements pour améliorer les solutions inverses des marées océaniques a pu être tiré. Tout d'abord, l'inversion conjointe de mesures marégraphiques et altimétriques donne les meilleurs résultats en raison de la grande complémentarité de ces deux types de mesures. Les mesures altimétriques seules ne permettent pas d'obtenir de solutions correctes le long des côtes où précisément la plupart des stations marégraphiques sont situées. L'ensemble des tests effectués sur de petits lots de mesures altimétriques pour améliorer les solutions de marée ont montré qu'une bonne évaluation de l'erreur radiale d'orbite est indispensable. Toutes les mesures altimétriques inversées ont été corrigées de l'estimation de l'erreur d'orbite par la méthode de démodulation complexe. Enfin, comme le nombre de données inversées conditionne la précision ultime des solutions des marées, le plus grand nombre possible de mesures altimétriques (fonction du temps CPU disponible) sera utilisé dans les inversions.

V.3.2.1 - Atlas OMP1/2

L'atlas des solutions de marées océaniques OMP1/2 est le résultat de l'inversion de 88 lots de données constitués chacun de 6.000 mesures altimétriques (soit 520.000 données au total) et de 310 ou 311 stations de mesures marégraphiques (équivalentes à environ 5.500 données). Les 44 premiers lots contiennent le même jeu de mesures marégraphiques qui comprend les constantes harmoniques des 8 ondes principales de la marée de 311 stations marégraphiques ainsi que les 3 ondes principales à longues périodes pour 122 de ces stations. Les 44 lots suivants ont aussi en commun un jeu de 310 mesures marégraphiques constitué des constantes harmoniques des 8 ondes pour toutes les stations et parmi celles-ci les constantes harmoniques des 3 ondes à longues périodes de 125 stations sont incluses. Ces deux jeux de mesures marégraphiques ne contiennent que des mesures de marégraphie côtière ou insulaire (Figure V.15) et les mesures pélagiques ont été conservées afin de valider les solutions finales. La sélection des mesures marégraphiques est une opération laborieuse qui a été effectuée "à la main". Une première sélection a consisté à écarter toutes les stations marégraphiques pour lesquelles on ne dispose pas des constantes harmoniques pour les 8 ondes principales. Ensuite, les constantes harmoniques de chaque station ont été comparées avec celles des stations les plus proches ainsi qu'avec le modèle de Schwiderski. Cette opération permet de repérer et d'éliminer les mesures aberrantes ou peu représentatives de la marée dans une zone confinée. Une fois ce criblage des données terminé, les deux jeux de mesures marégraphiques ont été constitués en veillant à ce que la répartition géographique et le nombre de stations comprenant les constantes harmoniques des ondes à longues périodes soient équilibrés dans les deux jeux.

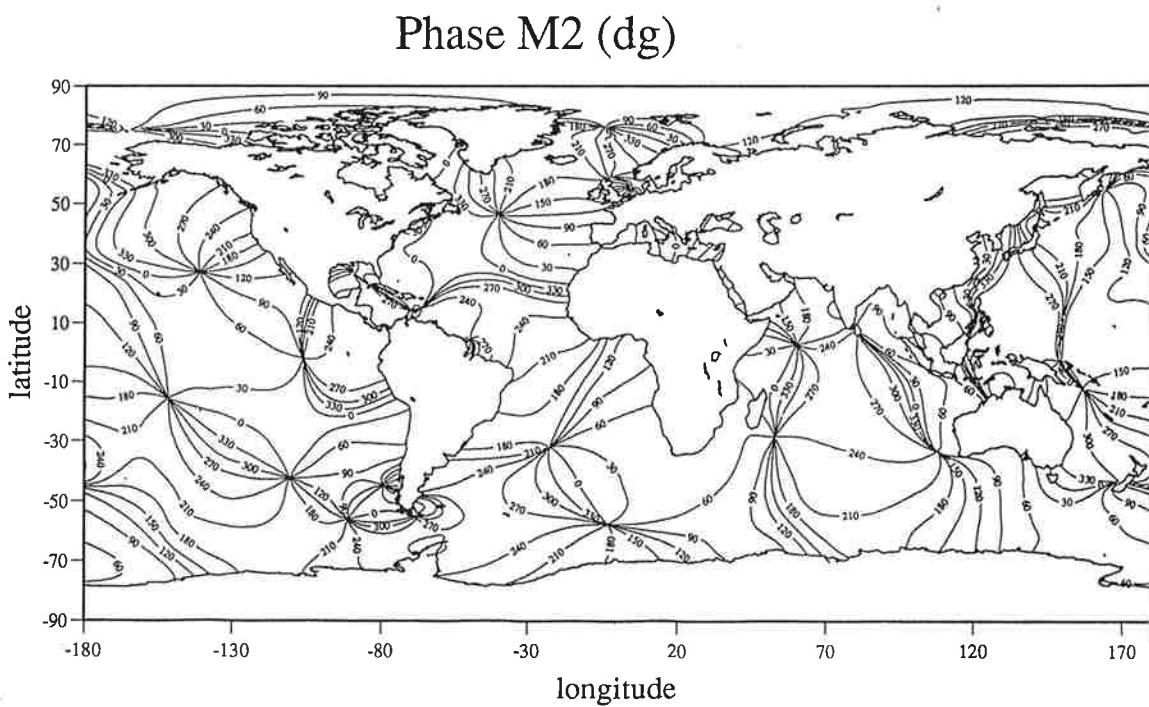
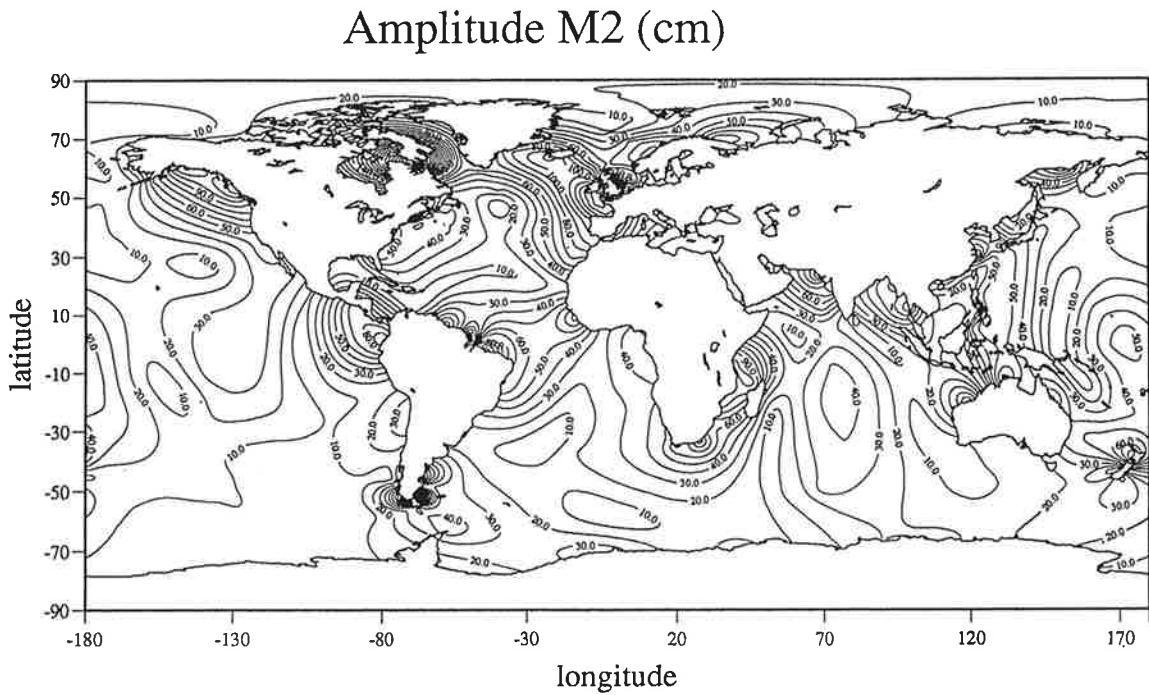
L'atlas final est obtenu à partir de la moyenne pondérée des deux atlas issus de la moyenne des solutions inverses calculées à partir des 44 premiers et 44 derniers lots de données. Les poids de la moyenne pondérée sont fonctions de la distance au marégraphe le plus proche dont les mesures sont considérées comme très précises. L'atlas comprend les cartes cotidales des 11 ondes principales de marées (M_2 , N_2 , S_2 , K_2 , P_1 , O_1 , K_1 , Q_1 , M_m , M_f , S_{sa}), la surface moyenne océanique ainsi qu'une estimation de l'erreur radiale d'orbite résiduelle. La résolution des cartes est de $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ et les solutions couvrent les océans compris entre 67° degré de latitude nord et 67° degré de latitude sud à l'exclusion des mers fermées. Environ 4×10^6 paramètres ont été estimés pour un coût total de 325 heures CPU sur CRAY2.

Les cartes cotidales des 11 ondes principales des marées ainsi que de la surface moyenne océanique sont reproduites dans les Figures IV.16 à IV.27. L'amélioration des solutions par rapport à l'atlas OMP0 est visible; en particulier, les solutions sont bien moins bruitées ce qui se traduit par des cartes beaucoup plus lisses.

La comparaison visuelle des solutions de l'atlas OMP1/2 avec celles du modèle de Schwiderski montre un accord satisfaisant. En particulier, pratiquement tous les gradients des amplitudes le long des côtes ainsi que la majorité des points amphidromiques sont bien restitués. Par contre, les amplitudes sont globalement et pour toutes les ondes plus faibles dans les solutions OMP1/2.

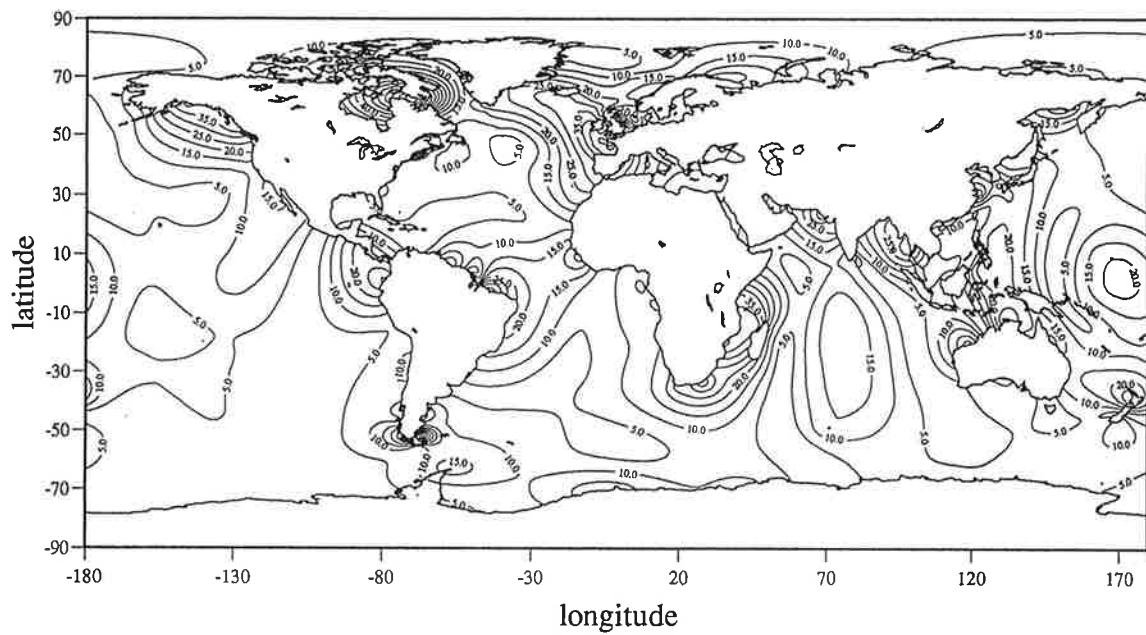
En ce qui concerne les ondes semi-diurnes, les solutions OMP1/2 présentent quelques désaccords par rapport au modèle de Schwiderski. Tout d'abord, les solutions OMP1/2 montrent un amphidrome près de l'embouchure de l'Amazone et un gradient des amplitudes à la pointe de l'Afrique du Sud, qui n'apparaissent pas dans les solutions de Schwiderski. L'existence d'un pseudo-amphidrome dans l'estuaire de l'Amazone est corroboré par les mesures marégraphiques *in situ* ainsi que par un article récent sur les variations du niveau de l'eau dans l'estuaire de l'Amazone [Minster et al., 1993]. Il semblerait donc que sur ce point particulier la solution de Schwiderski soit mise en défaut. Par contre, la structure observée à la pointe de l'Afrique du sud du côté de l'océan Indien a été engendrée par des valeurs erronées (dues à un problème d'unité) des mesures marégraphiques qui ont été utilisées dans les inversions. Un autre désaccord important concerne l'amplitude de l'anti-amphidrome situé au milieu de l'océan Pacifique côté est; les valeurs des amplitudes des solutions OMP1/2 sont de l'ordre de 50 à 60% de celles de Schwiderski. Nous n'avons pas d'explication sur ce point. Enfin, la structure complexe de la marée sur le plateau des Falkland n'est, à première vue, pas restituée de manière tout à fait satisfaisante dans les solutions de OMP1/2. Ainsi, par exemple, des amphidromes qui auraient dû prendre place du côté de l'océan Atlantique apparaissent de l'autre côté de l'Amérique latine dans l'océan Pacifique. Les causes de cette migration d'amphidrome et plus globalement de la moins bonne restitution des marées dans les régions de la ceinture circum polaire antarctique par inversion sont l'absence totale de mesures altimétriques au-delà de 67° de latitude sud et le nombre insuffisant de stations marégraphiques.

Les solutions pour les ondes diurnes de l'atlas OMP1/2 sont globalement en bon accord avec les cartes de Schwiderski. Il y a cependant quelques petites différences en ce qui concerne les emplacements ou les structures des amphidromes. Les petites variations observées sont essentiellement dues aux faibles valeurs des amplitudes des marées diurnes sur de larges étendues et, de ce fait, une petite variation des amplitudes peut entraîner des déplacements importants des points amphidromiques. D'autre part, les ondes diurnes selon les modèles de Schwiderski présentent un gradient des amplitudes aux abords du continent Antarctique. Ces gradients ne sont pas restitués dans les solutions OMP1/2 en raison du manque de mesures dans ces régions, problème que nous avons déjà abordé au sujet de ondes semi-diurnes.

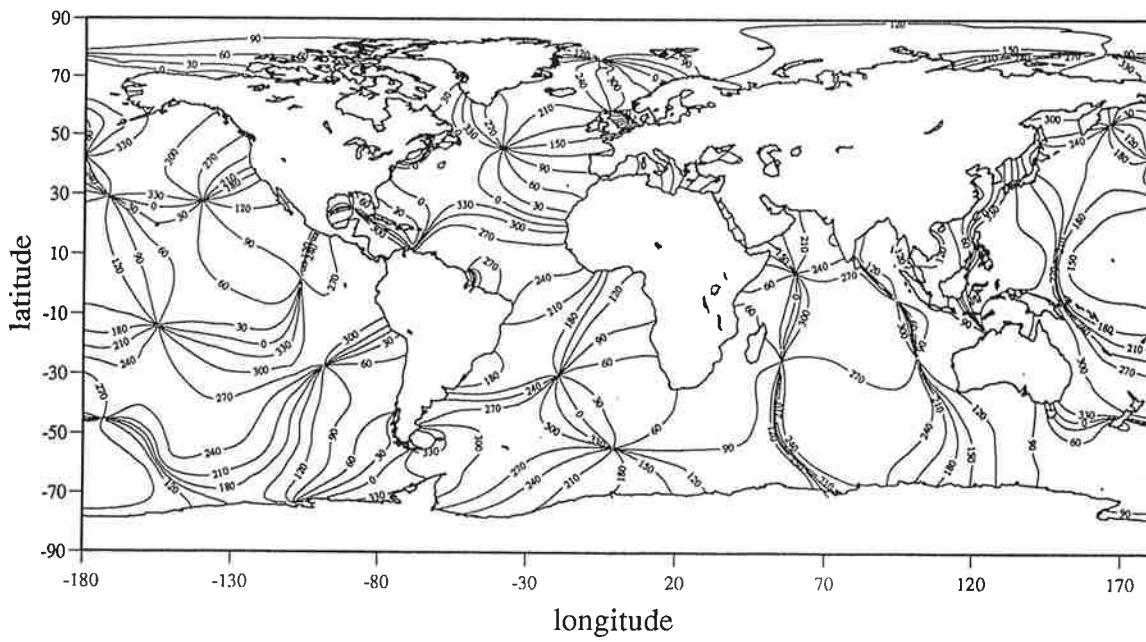


Figures V.16 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde M_2 .

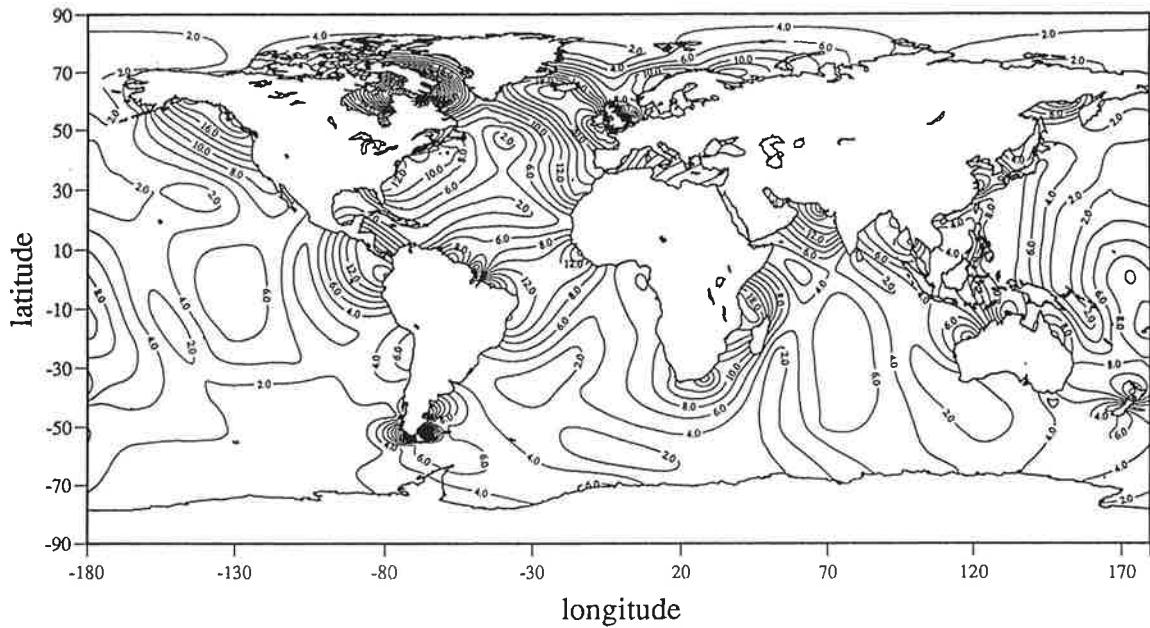
Amplitude S2 (cm)



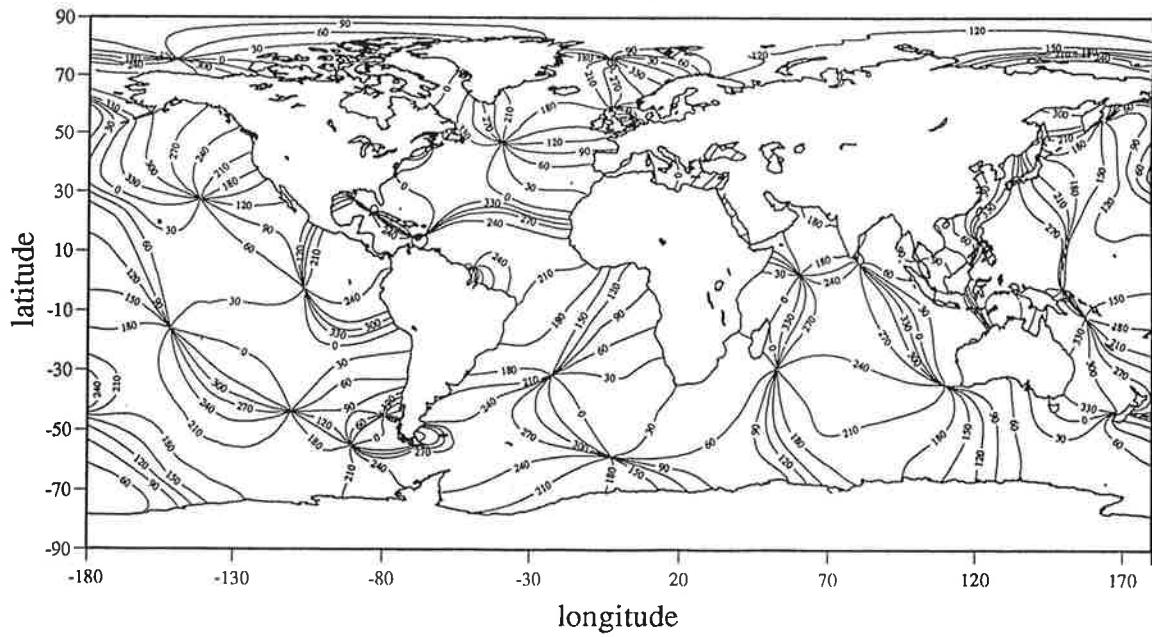
Phase S2 (dg)

Figures V.17 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde S₂.

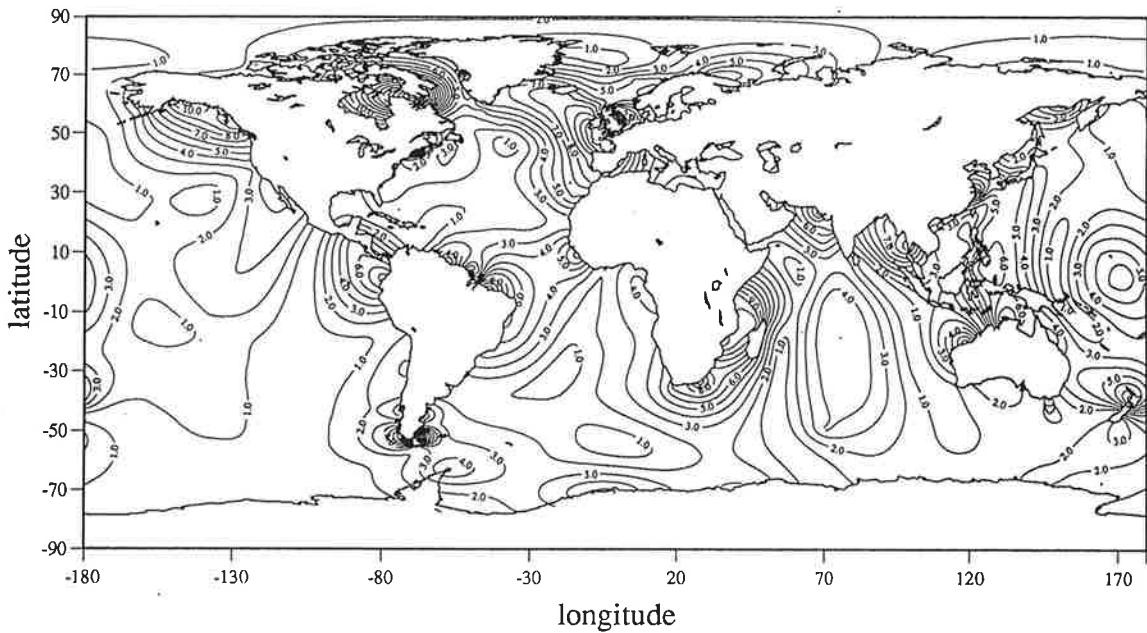
Amplitude N2 (cm)



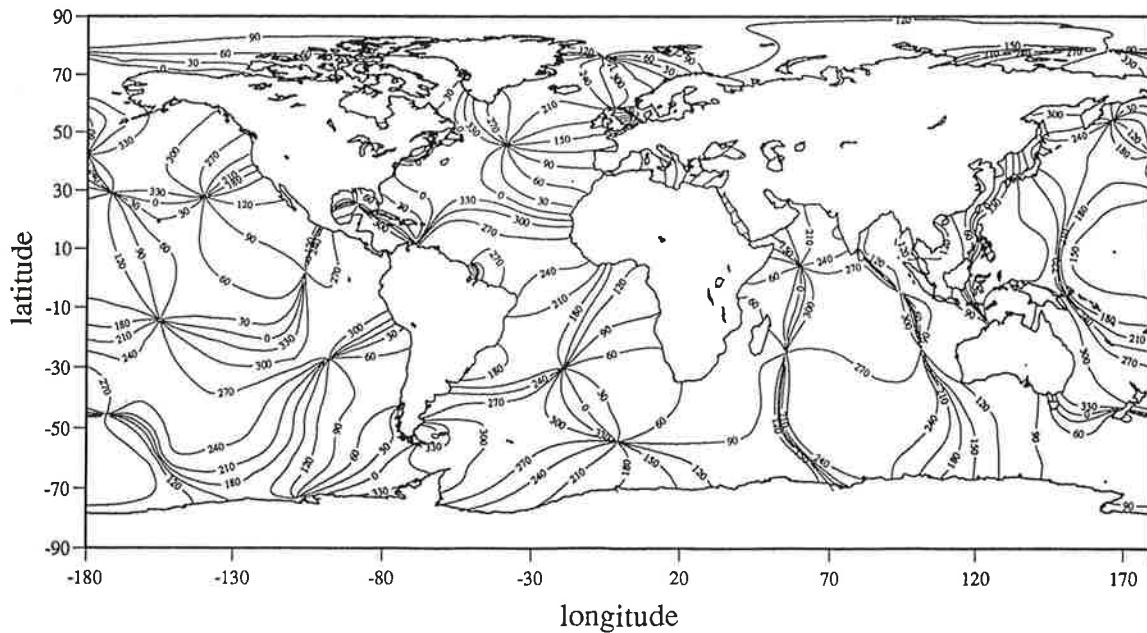
Phase N2 (dg)

Figures V.18 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde N₂.

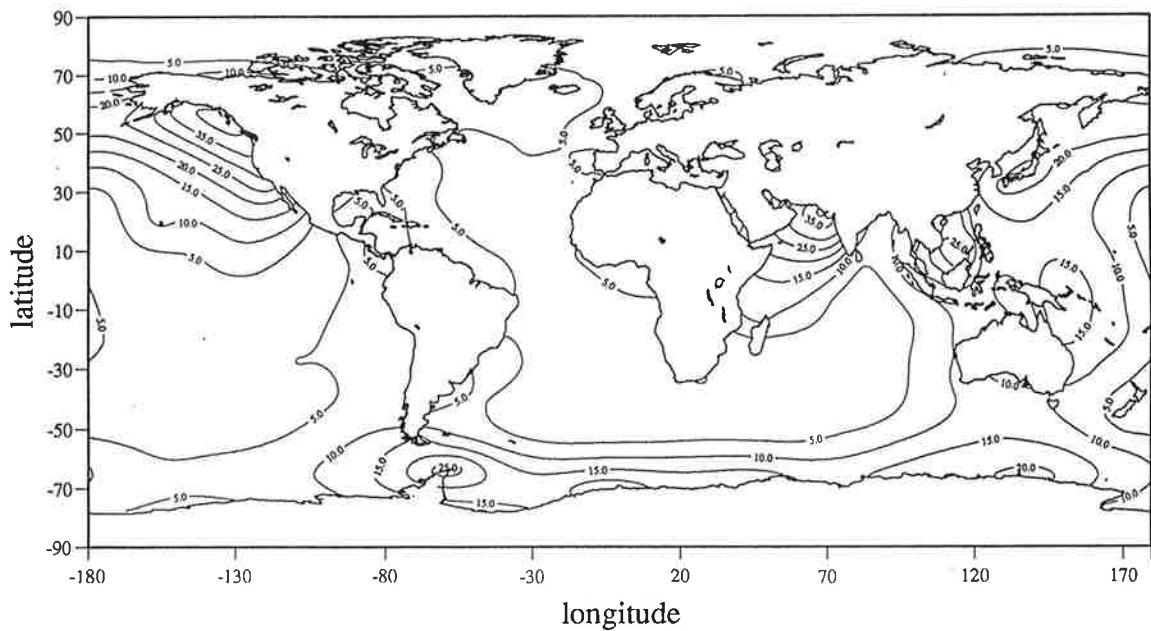
Amplitude K2 (cm)



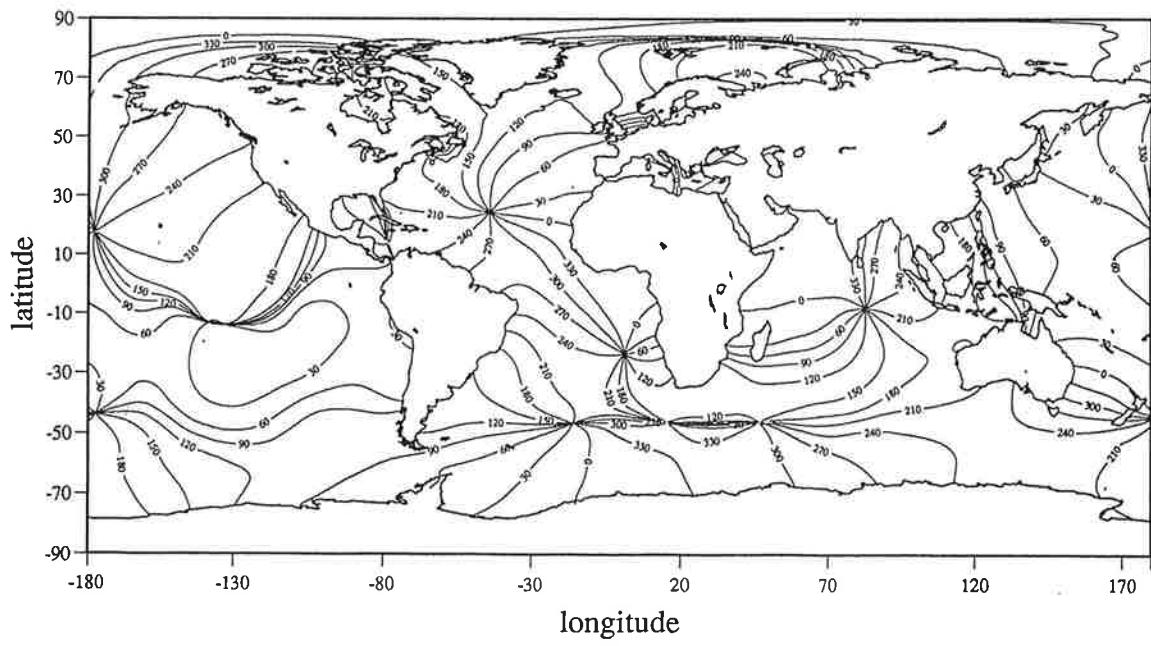
Phase K2 (dg)



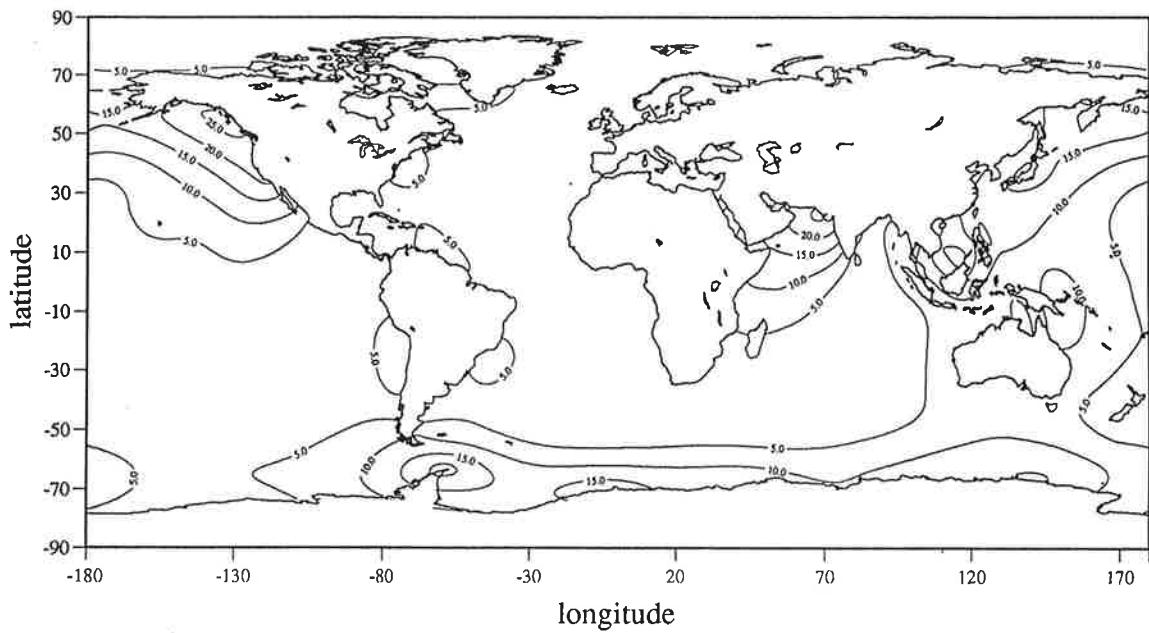
Amplitude K1 (cm)



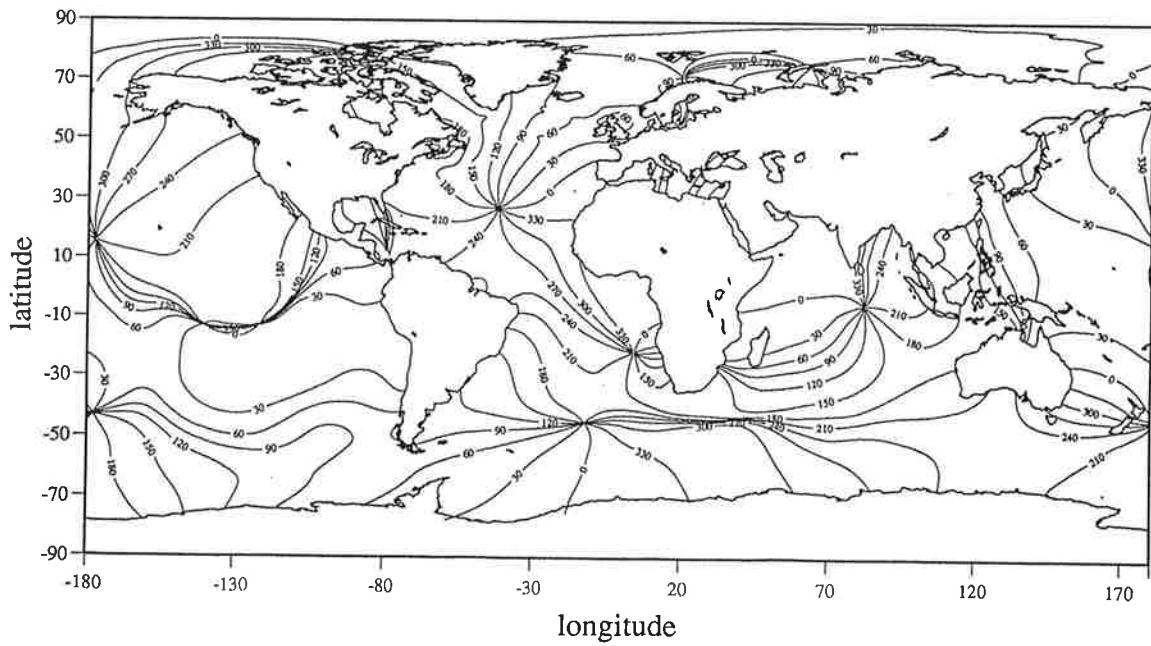
Phase K1 (dg)

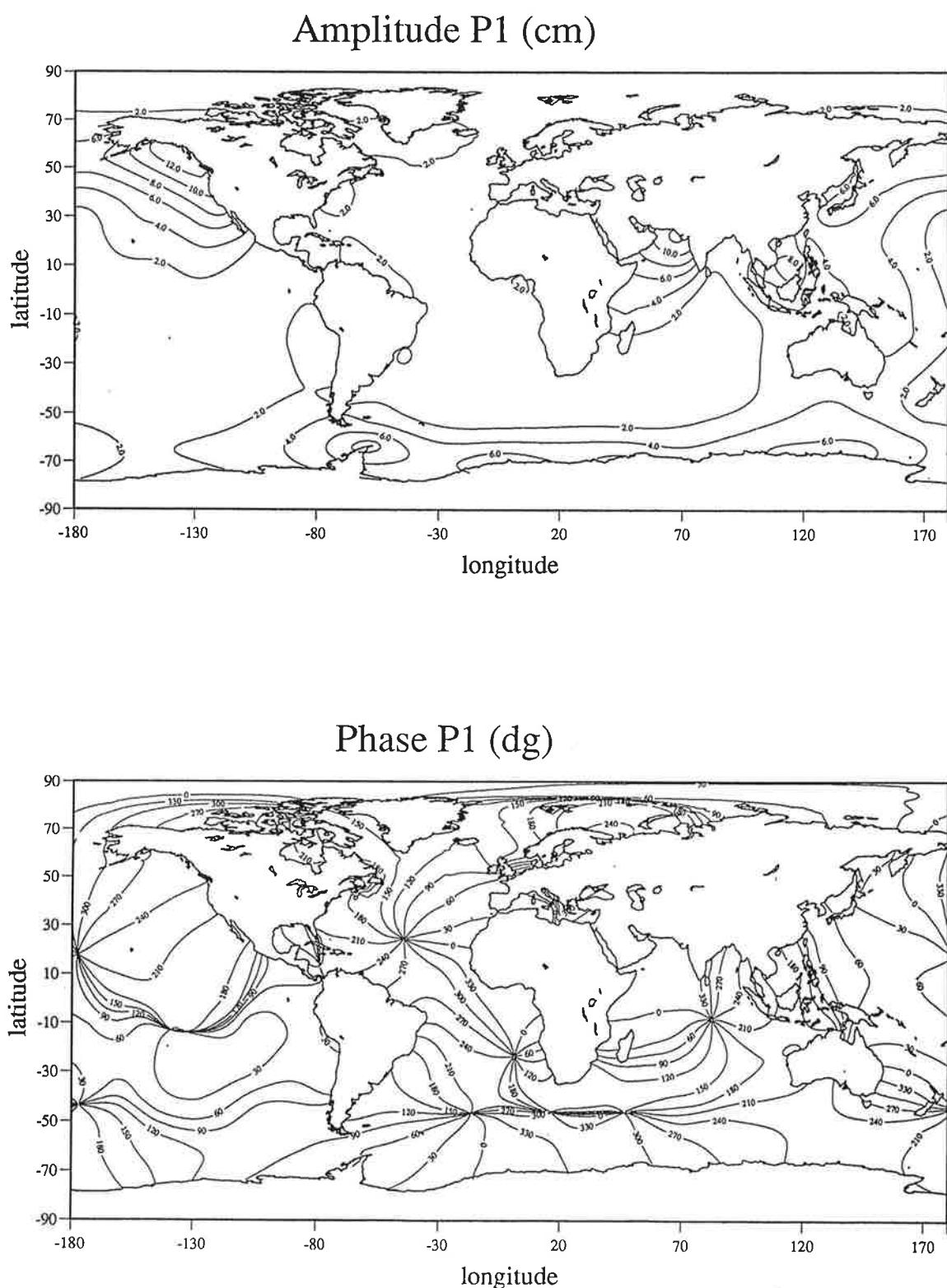
Figures V.20: Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde K₁.

Amplitude O1 (cm)



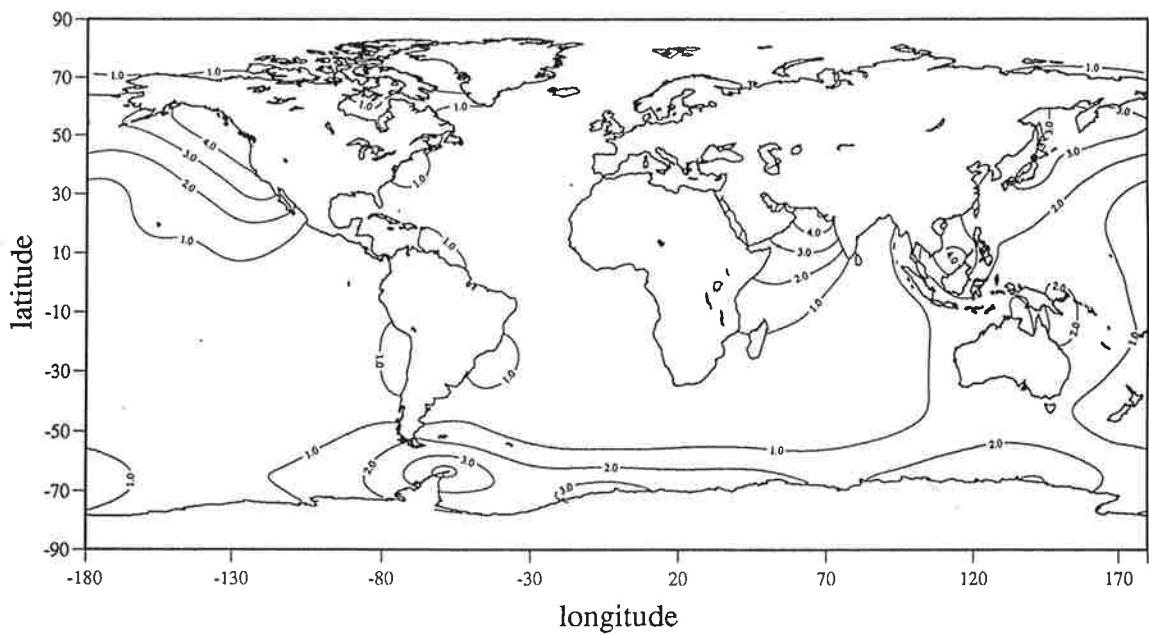
Phase O1 (dg)

Figures V.21 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde O₁.

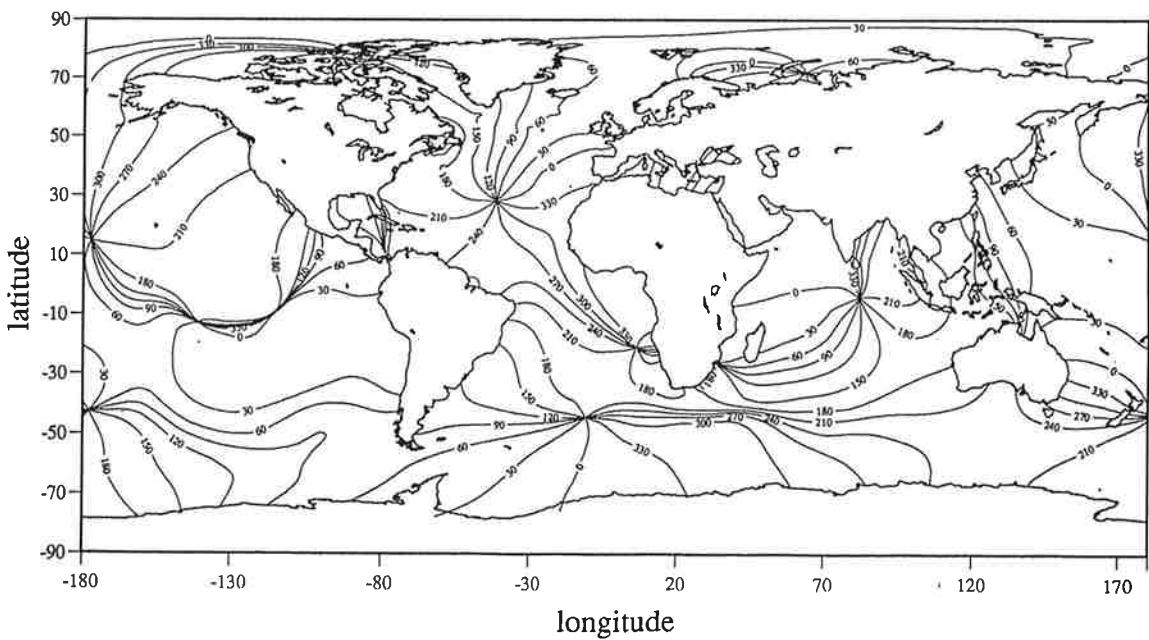


Figures V.22 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde P_1 .

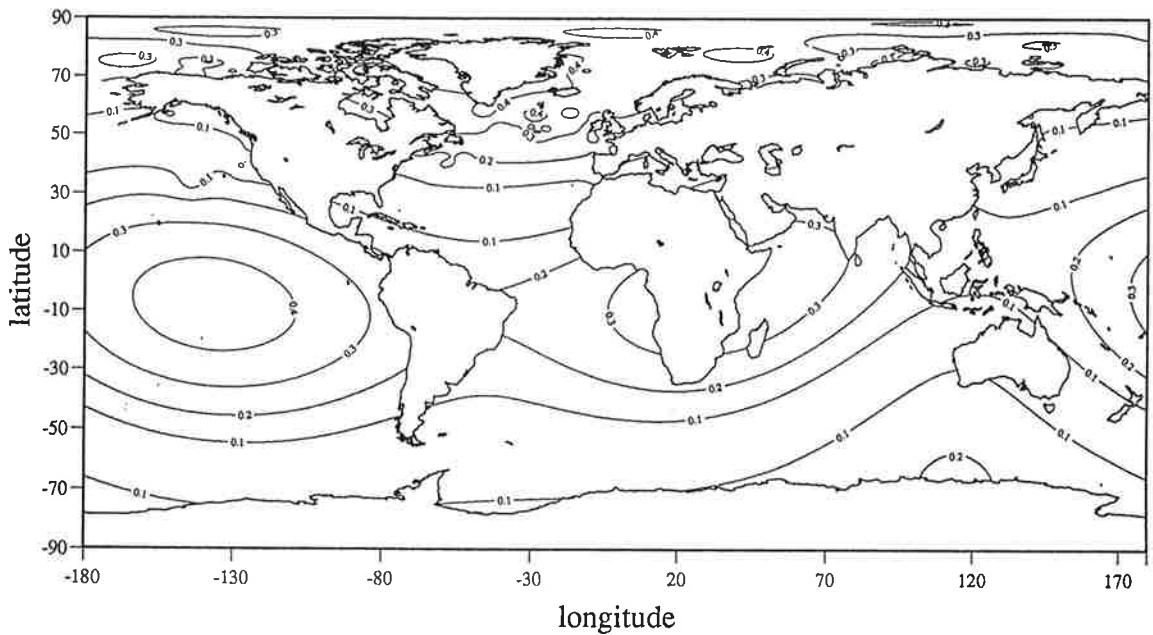
Amplitude Q1 (cm)



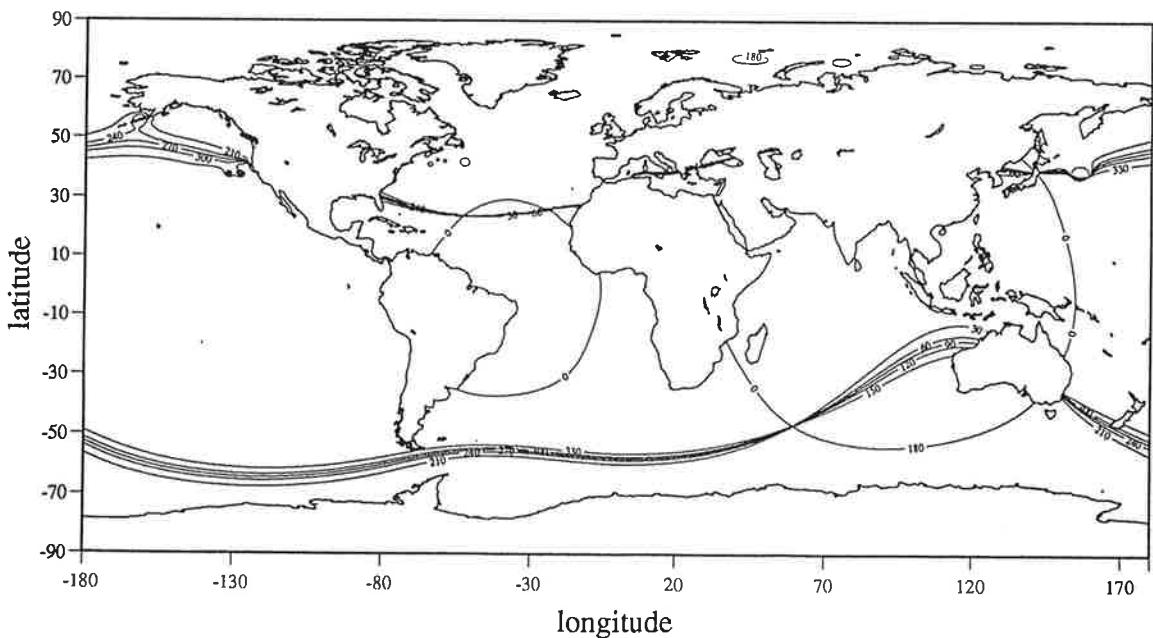
Phase Q1 (dg)

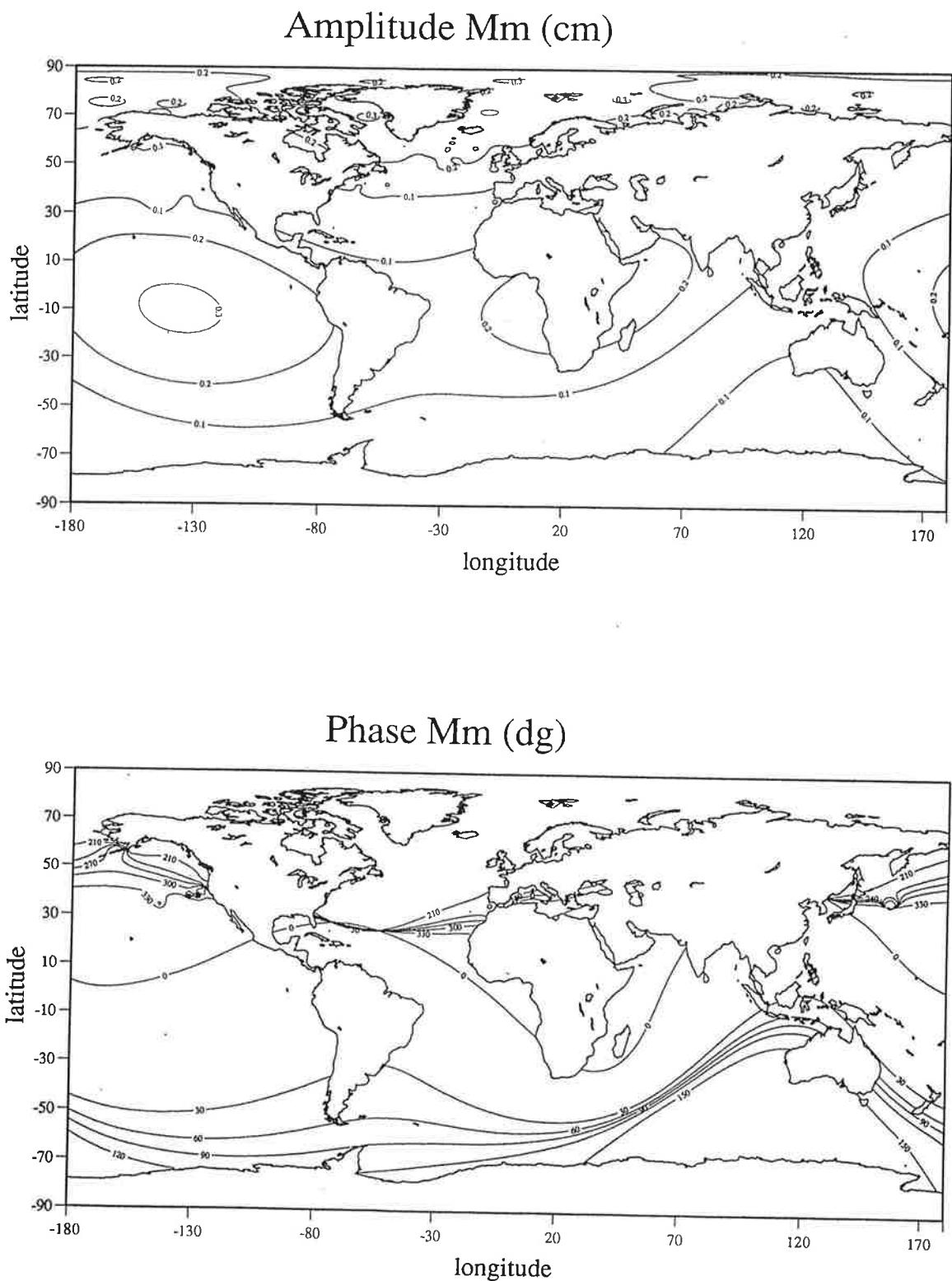
Figures V.23 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde Q_1 .

Amplitude Mf (cm)

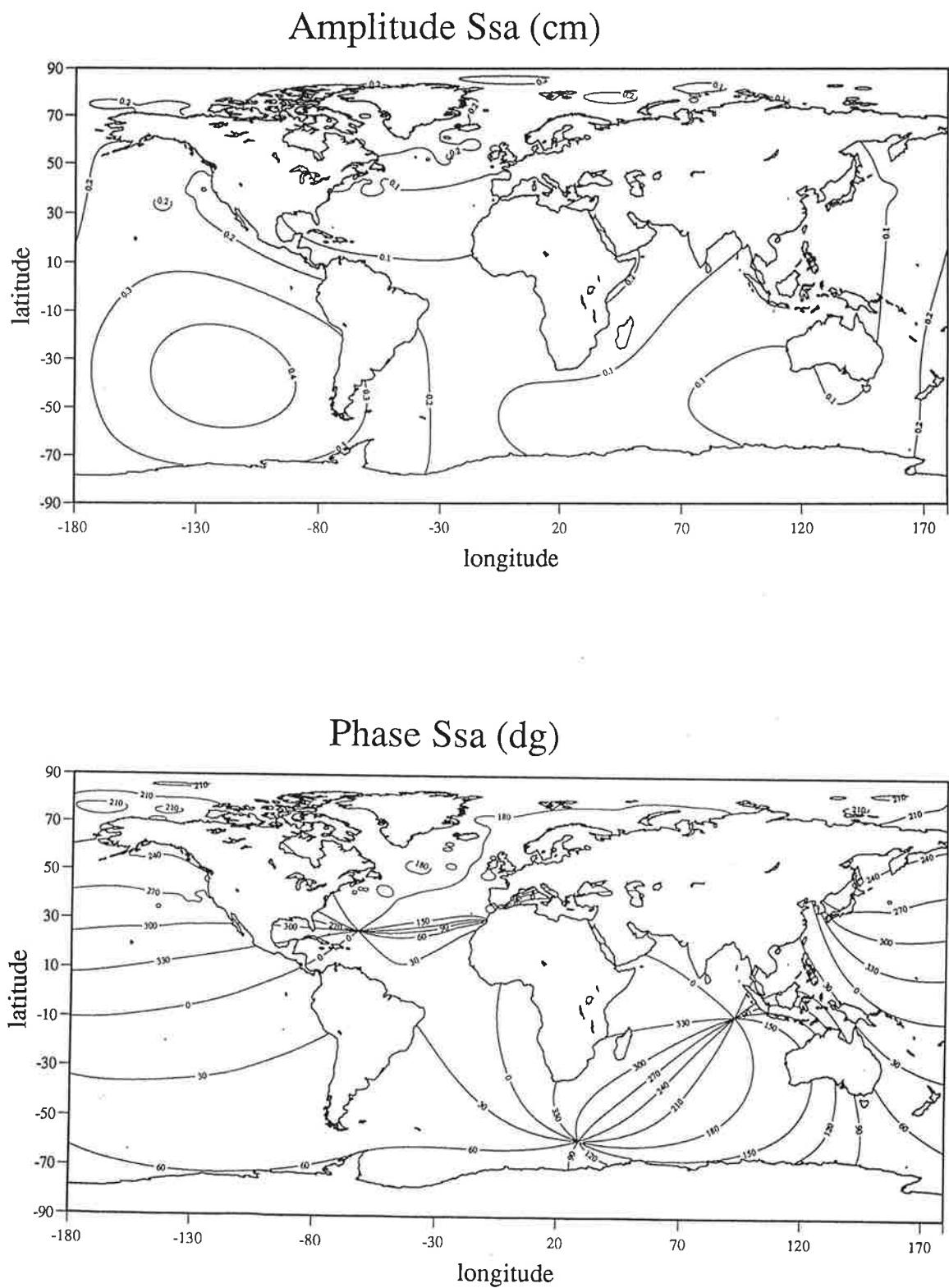


Phase Mf (dg)

Figures V.24 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde M_f.



Figures V.25 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde M_m .



Figures V.26 : Modèle OMP1/2 : cartes cotidales pour l'onde S_{sa} .

Surface Moyenne (cm)

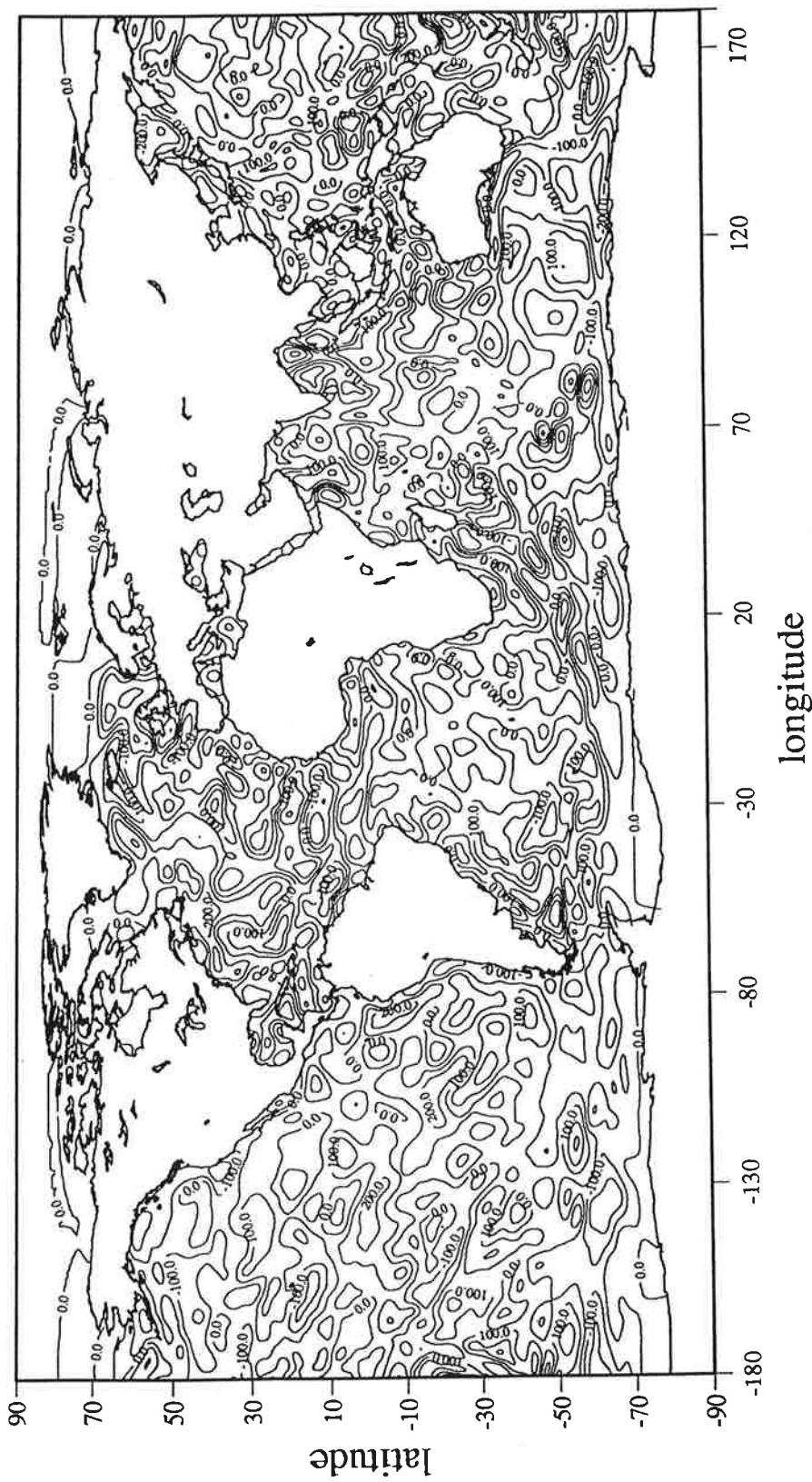


Figure V.27 : Modèle OMP1/2 : hauteur (en cm) de la surface moyenne océanique par rapport au géoïde GEM-T1 (36,36).

Erreur en cosinus M2

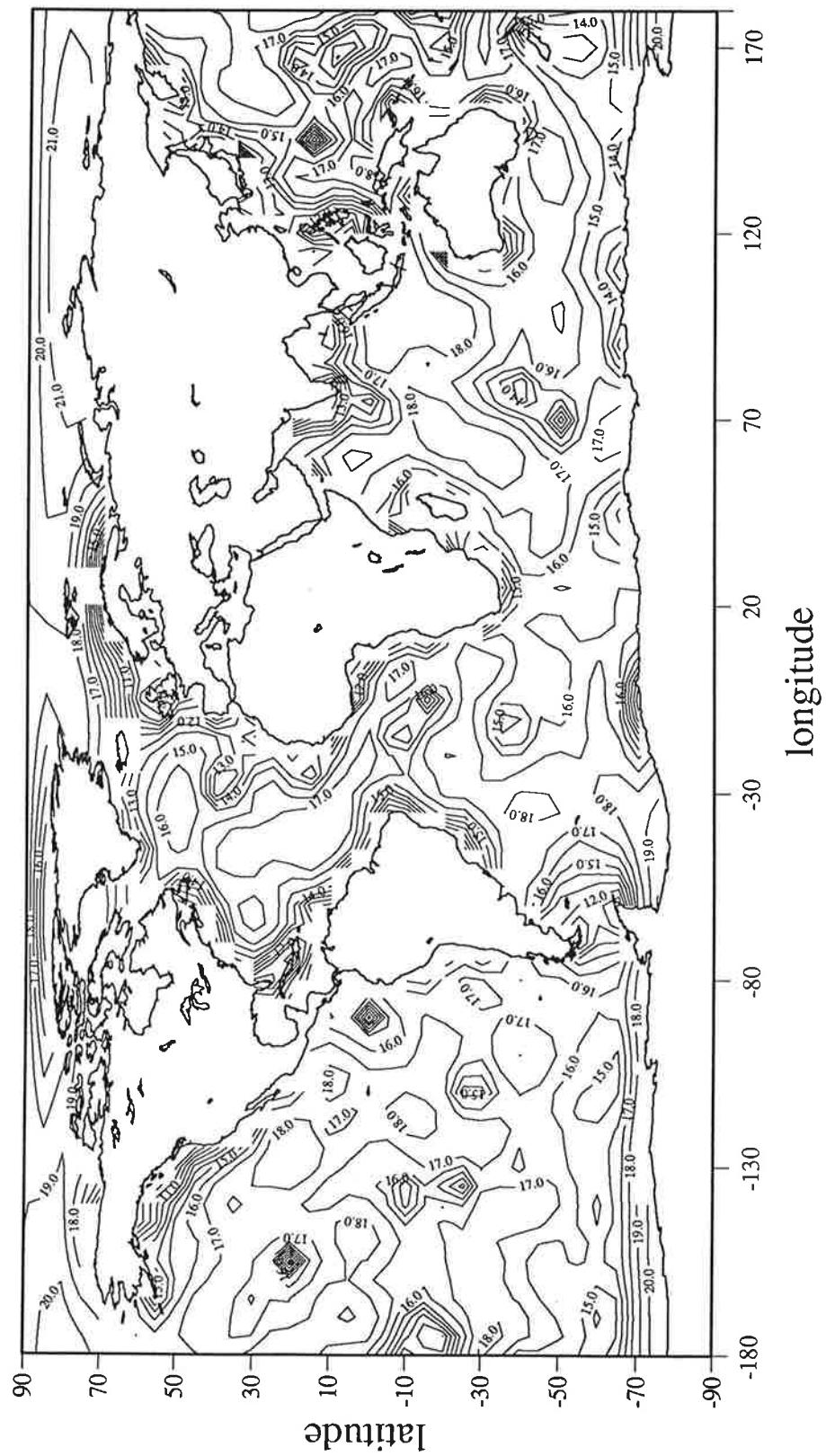
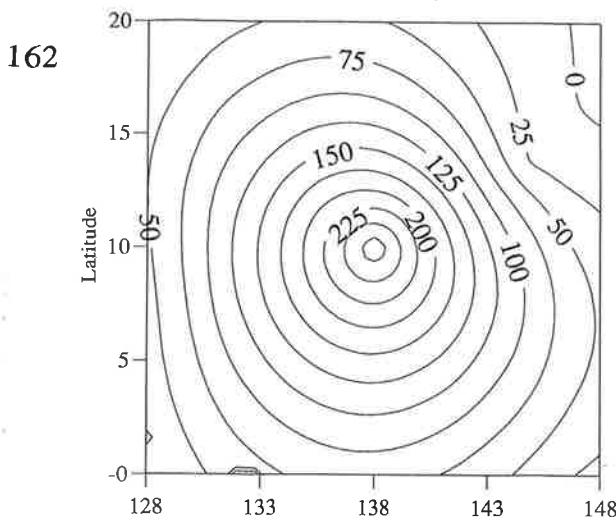
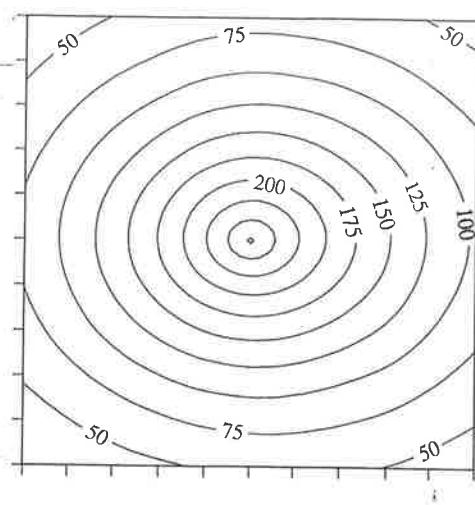


Figure V.28 : Ecarts types (en cm) a posteriori pour la composante en phase de l'onde M_2 de l'inversion conjointe de 6000 mesures altimétriques et de 310 mesures marégraphiques.

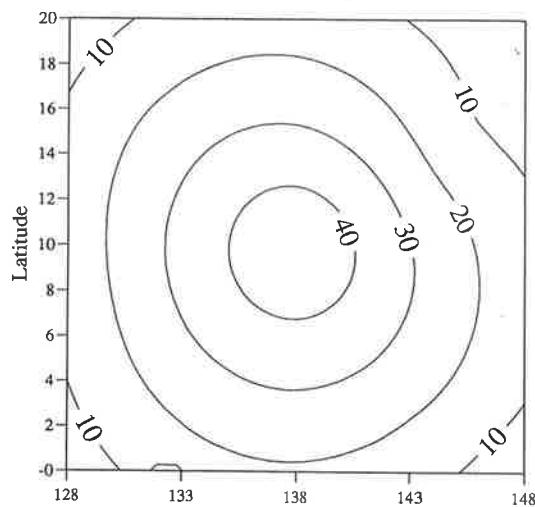
a
Cosinus M2/M2



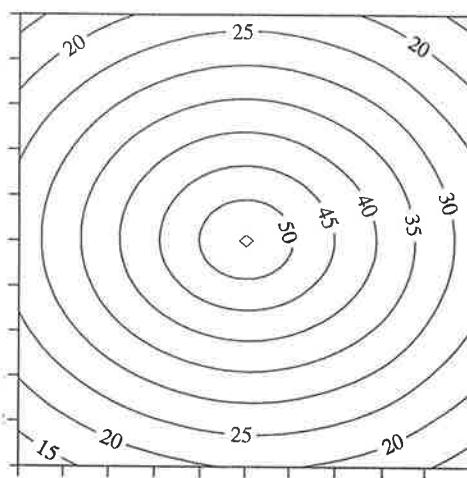
b
Moyenne Cosinus M2/M2



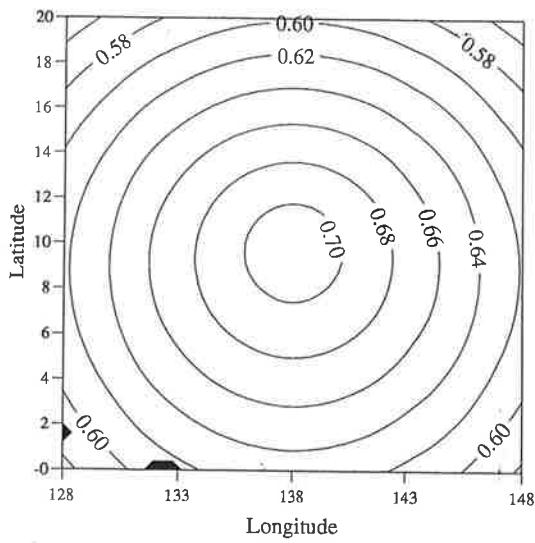
c
Cosinus K1/K1



d
Moyenne Cosinus K1/K1



e
Cosinus Mf/Mf



f
Moyenne Cosinus Mf/Mf

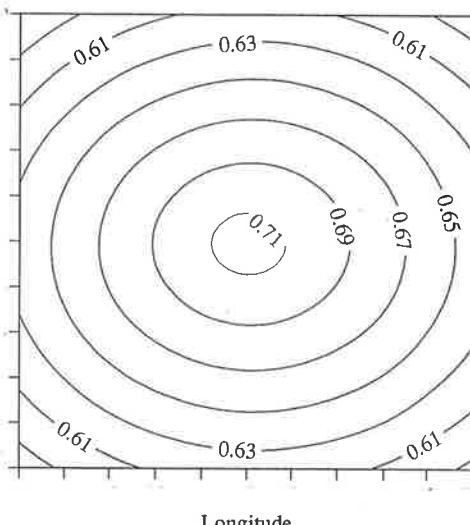


Figure V.29 : Fonctions de covariance *a posteriori* (en cm^2) dans deux boîtes carrées de 20° de côté pour les composantes en phase des ondes M_2 (a-b), K_1 (c-d) et M_f (e-f).

Les solutions pour les longues périodes présentent la répartition zonale caractéristique de ce type d'onde. Les amplitudes sont beaucoup trop faibles par rapport à Schwiderski ainsi que par rapport à la marée d'équilibre. On retrouve bien des concentrations de phase aux latitudes moyennes comme dans les solutions de Schwiderski, mais pas exactement aux mêmes endroits. Ces résultats peuvent être considérés comme inespérés vu que les ondes à longues périodes ont des amplitudes de l'ordre du centimètre et que l'on cherche à les estimer à partir de mesures dont les erreurs sont de l'ordre du mètre. Nous insistons sur le caractère très préliminaire de ces solutions pour les ondes à longues périodes qui ont été obtenues en spécifiant un écart type de 10 cm pour les erreurs sur les mesures marégraphiques afin de régulariser le problème inverse. Dans le futur, lorsque nous disposerons de très bonnes solutions pour les ondes semi-diurnes et diurnes, la restitution des ondes à longues périodes se fera dans une seconde étape en analysant le signal résiduel après soustraction des ondes dominantes, augmentant ainsi le rapport signal sur bruit.

V.3.2.2 - Analyse des erreurs internes de l'atlas OMP1/2

En raison du coût informatique exorbitant que requiert le calcul des covariances a posteriori, seules les cartes des écarts types des solutions avec une résolution de $5^\circ \times 5^\circ$ et les fonctions de covariance a posteriori en six emplacements caractéristiques ont été calculées.

Les écarts types de la solution d'une des 88 solutions inverses partielles sont reproduits dans la Figure V.28. Il ne s'agit que de la composante en phase de l'onde M_2 ; les cartes des écarts types des autres ondes et des autres composantes ne sont pas reproduites, car elles sont semblables à un facteur d'échelle près. En première analyse, on remarque que les écarts types sont minima aux emplacements des mesures marégraphiques, ce qui prouve leur poids prédominant pour contraindre les solutions de marées. Les minima des écarts types sont quant à eux situés en plein océan et loin des mesures marégraphiques inversées. Leurs amplitudes sont de l'ordre de 17-18 cm et sont à comparer à la valeur de l'écart type a priori qui est 23.4 cm. A partir de ces chiffres, on en déduit que la variance expliquée dans les zones où la marée est la moins bien restituée est de l'ordre de 40%. Ce résultat confirme la nécessité d'inverser le plus grand nombre possible données, que ce soit en une étape ou en plusieurs lots. Les écarts types de la solution obtenue en moyennant les 88 solutions partielles devraient théoriquement présenter les mêmes contours mais avec des amplitudes divisées par la racine carrée de 88 (≈ 9.4), à condition que les solutions partielles soient indépendantes les unes des autres. Les écarts types de la solution OMP1/2 seraient donc inférieurs à 2 cm partout. Cependant, ce n'est certainement pas le cas puisque les 44 premiers et 44 derniers lots de données qui ont été inversés ont en commun un jeu de données marégraphiques. De plus, toutes les mesures altimétriques contiennent des erreurs corrélées et des erreurs systématiques. En pratique, on peut obtenir une assez bonne estimation de l'exactitude des solutions en calibrant les écarts types a posteriori à partir de mesures marégraphiques qui n'ont pas été utilisées dans les inversions.

Les fonctions de covariance a posteriori ont été calculées dans six boîtes carrées de 20° de côté. Nous présentons le résultat pour une boîte située dans le Pacifique sud-ouest et proche de mesures marégraphiques qui ont été inversées comme l'indiquent les distorsions des fonctions de covariance (Figures V.29ac) des ondes diurnes et semi-diurnes. Il n'y a pas de distorsion de la covariance de l'onde M_f (Figure V.29e) car, nous ne disposons pas de constantes harmoniques correspondantes en cet endroit. Les moyennes des covariances a posteriori dans les six boîtes et pour les mêmes ondes sont présentées dans les Figures V.29.bdf. L'étude de ces covariances nous révèle que les covariances a posteriori sont grossièrement homogènes et isotropes et qu'elles présentent des longueurs de corrélation de l'ordre

Table V.1 : Comparaison des solutions de marées océaniques des modèles OMP1/2, de Schwiderski [1980a-b] et de Cartwright et Ray [1991] avec les observations en 80 stations marégraphiques qui nous ont été communiquées par Ray [1992]. Les premières valeurs sont les moyennes des différences entre les modèles et les observations; les secondes valeurs sont les écarts types (1σ).

Modèle	Composante en phase (cm)	Composante en quadrature (cm)
M_2		
Schwiderski	-0.98 \pm 3.65	+0.39 \pm 3.78
OMP1/2	+1.74 \pm 8.04	+0.55 \pm 6.88
Cartwright et Ray	-0.02 \pm 3.64	+0.40 \pm 4.03
S_2		
Schwiderski	-0.01 \pm 1.82	-0.21 \pm 1.56
OMP1/2	+0.44 \pm 3.51	+0.93 \pm 4.47
Cartwright et Ray	+0.25 \pm 2.51	-0.13 \pm 2.81
O_1		
Schwiderski	-0.06 \pm 1.18	+0.19 \pm 1.62
OMP1/2	-0.80 \pm 2.52	-0.38 \pm 3.15
Cartwright et Ray	-0.30 \pm 1.36	-0.08 \pm 1.32
K_1		
Schwiderski	-0.31 \pm 1.55	+0.12 \pm 1.51
OMP1/2	-0.41 \pm 4.29	+0.04 \pm 3.20
Cartwright et Ray	-0.68 \pm 1.99	-0.26 \pm 1.84

de 80% des longueurs de corrélation du signal a priori des marées. On en déduit que les moyennes et courtes longueurs d'onde du signal des marées n'ont pas été restituées.

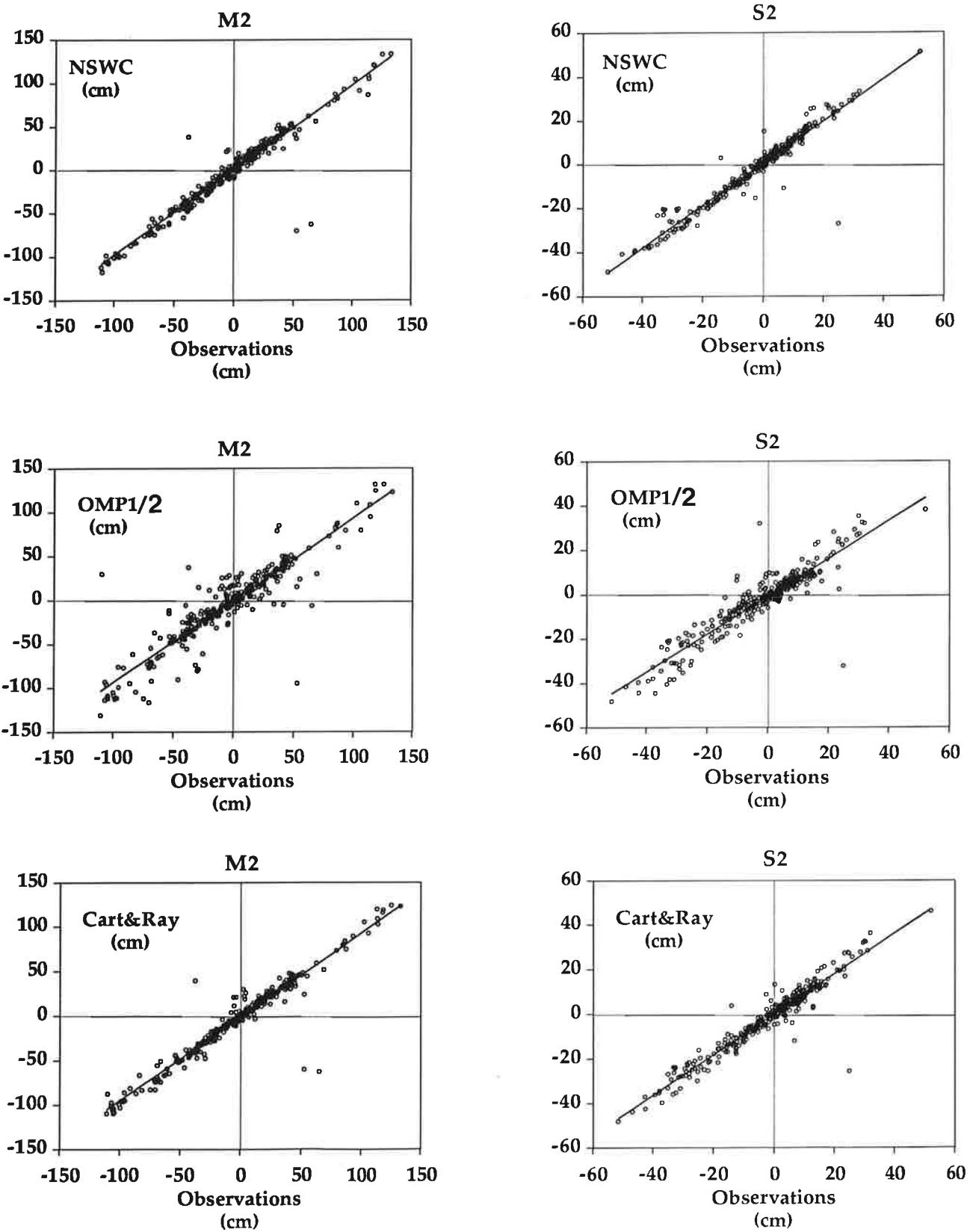
V.3.2.3- Comparaison externe de l'atlas OMP1/2

La précision des solutions de marée du modèle OMP1/2 des ondes principales a été testée sur deux jeux de mesures marégraphiques qui n'ont pas été utilisées dans les inversions. Les mêmes comparaisons ont été effectuées sur les modèles de Schwiderski [1980a-b] et de Cartwright et Ray [1991] afin de situer le niveau de précision de l'atlas OMP1/2 par rapport à ces deux modèles qui sont à l'heure actuelle les deux meilleurs modèles globaux.

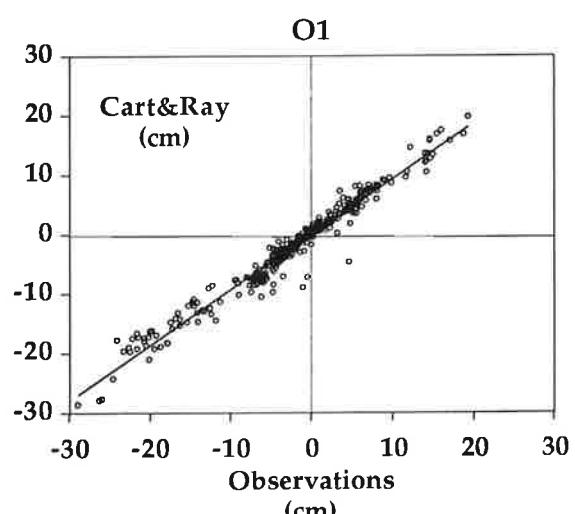
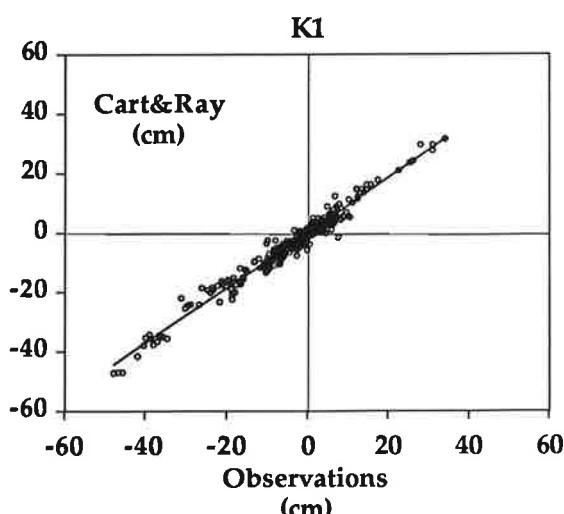
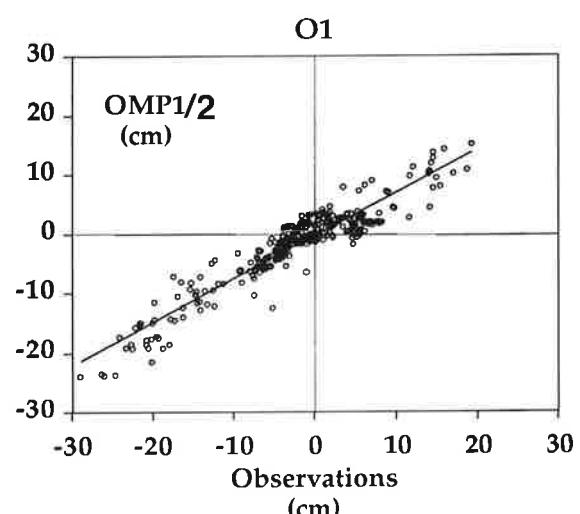
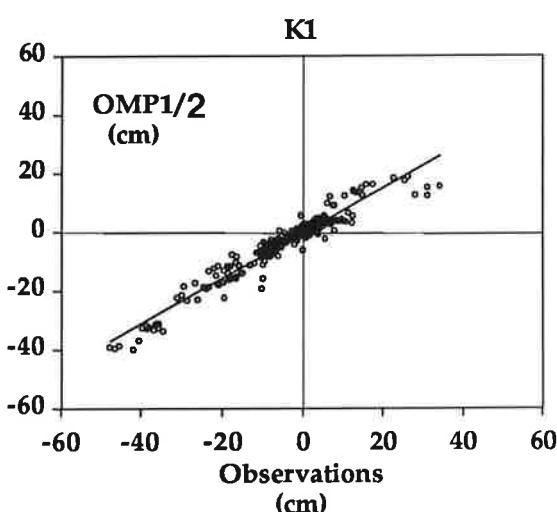
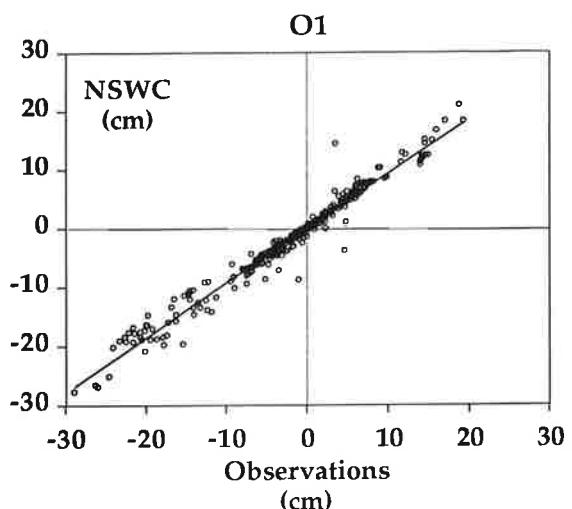
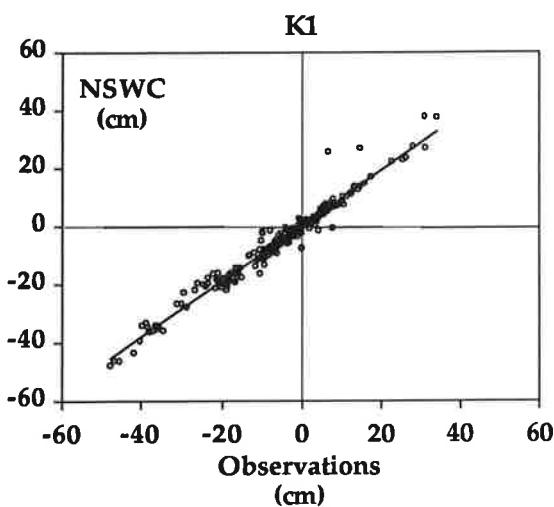
Les comparaisons entre les observations et les modèles doivent être interprétées avec prudence. Les tests ne sont pas significatifs à l'échelle globale et peuvent être statistiquement biaisés, car il y a des lacunes dans la couverture géographique des mesures marégraphiques. De plus, les erreurs sur les mesures et sur les interpolations des modèles aux points des observations sont en partie responsables des écarts entre les constantes harmoniques des stations marégraphiques et celles des modèles.

Le premier jeu de stations marégraphiques est celui avec lequel Cartwright et Ray [1991] ont validé leurs modèles. Ces auteurs ont rassemblé les mesures de différentes compilations IAPSO ainsi que des mesures récentes non publiées qu'ils ont retenues pour la très grande précision des instruments avec lesquels elles ont été enregistrées. Les stations sont en majorité pélagiques avec quelques stations insulaires choisies dans des régions où le signal des marées ne risque pas d'être contaminé par des effets locaux. Pour ces premières comparaisons, on s'est contenté de calculer les moyennes et les écarts types des différences entre les observations et les trois modèles (OMP1/2, Schwiderski et Cartwright et Ray) pour les composantes en phase et en quadrature (Table V.1). On voit que globalement ce sont les solutions de Schwiderski qui sont en meilleur accord avec la nature. Ce résultat est logique puisque plus ou moins 80% des mesures de ce jeu de comparaison ont servi à contraindre le modèle de Schwiderski [Cartwright et Ray, 1991]. Les solutions de Cartwright et Ray présentent des accords avec les observations qui sont très proches des accords des solutions de Schwiderski. Par contre, les solutions OMP1/2 sont globalement moins bonnes avec des valeurs des écarts types doubles de celles des deux autres modèles.

Les solutions des trois modèles globaux ont été comparées avec un second jeu de mesures marégraphiques constitué uniquement des mesures pélagiques de la compilation IAPSO III [Smithson, 1993]. Seules les stations dont les durées d'enregistrement sont supérieures à 27 jours ont été conservées. Lorsque plusieurs stations sont localisées dans le même degré carré, elles sont remplacées par une mesure synthétique formée à partir des moyennes des constantes harmoniques de ces stations. Cette opération permet d'obtenir des constantes harmoniques compatibles avec la résolutions des modèles. Il en résulte un jeu de 173 stations pélagiques dont les emplacements sont repérés dans la Figure V.15. Les résultats des comparaisons sont présentés dans les Figures V.30-31 où les valeurs des constantes harmoniques composantes en phase et en quadrature confondues (car elles sont statistiquement équivalentes) sont portées en fonction des constantes harmoniques déduites des observations. La Table V.2 complète les graphiques en donnant les paramètres des droites de régression entre les valeurs observées et celles des modèles. Les écarts types des résidus après ajustement "biais plus pente" quantifient les dispersions autour des droites et indiquent que les solutions OMP1/2 "collent" moins bien aux observations que les deux autres modèles dont les performances sur ce point sont équivalentes. Les pentes des droites de régression renseignent sur le rapport moyen des amplitudes des composantes en phase et en quadrature entre les modèles et les observations. On peut constater que les pentes sont inférieures à 1 pour les 4 ondes principales des trois modèles et que donc tous les modèles sont moins



Figures V.30 : Comparaisons entre les composantes en phase et en quadrature confondues des constantes harmoniques de 173 stations pélagiques (axes horizontaux) et les modèles de Schwiderski (NSWC), OMP1/2 et Cartwright et Ray (axes verticaux) pour les ondes semi-diurnes M_2 et S_2 .



Figures V.31 : Comparaisons entre les composantes en phase et en quadrature confondues des constantes harmoniques de 173 stations pélagiques (axes horizontaux) et les modèles de Schwiderski (NSWC), OMP1/2 et Cartwright et Ray (axes verticaux) pour les ondes diurnes K₁ et O₁.

Table V.2 : Comparaison des solutions des marées océaniques des modèles NSWC, OMP1/2, et Cart&Ray avec 173 mesures pélagiques provenant de la compilation IAPSO III [Simthson, 1993] : écart type (σ), corrélation (r) et pente de la droite de régression (a).

Modèle	σ , cm	r	a
		M_2	
NSWC	11.77	0.964	0.977 ± 0.015
OMP1/2	18.39	0.911	0.933 ± 0.023
Cart&Ray	11.40	0.963	0.937 ± 0.014
		S_2	
NSWC	4.05	0.963	0.963 ± 0.014
OMP1/2	5.40	0.921	0.849 ± 0.020
Cart&Ray	4.06	0.959	0.906 ± 0.015
		O_1	
NSWC	1.46	0.983	0.928 ± 0.009
OMP1/2	2.23	0.939	0.725 ± 0.014
Cart&Ray	1.56	0.981	0.934 ± 0.010
		K_1	
NSWC	2.17	0.983	0.953 ± 0.010
OMP1/2	2.62	0.963	0.769 ± 0.012
Cart&Ray	2.08	0.983	0.929 ± 0.009

NSWC = Naval Surface Weapons Center [Schwiderski, 1980a-b].

Cart&Ray = Modèle de Cartwright et Ray [1991].

Table V.3 : Variances expliquées (en %) par le modèle OMP1/2 aux emplacements des mesures marégraphiques inversées, respectivement pour les composantes en phase (c) et en quadrature (s).

M_2		S_2		N_2		K_2	
c	s	c	s	c	s	c	s
85	89	78	77	79	78	73	77

K_1		O_1		P_1		Q_1	
c	s	c	s	c	s	c	s
81	89	82	78	80	89	73	51

énergétiques que les observations. En particulier, les pentes de régression relatives au modèle OMP1/2 sont les plus faibles, confirmant chiffre à l'appui un déficit en énergie dans les solutions que nous avions déjà évoqué lors de la comparaison visuelle de nos solutions avec le modèle de Schwiderski.

Il apparaît très nettement que les solutions du modèle OMP1/2 ont des amplitudes trop faibles. Deux autres tests ont permis de confirmer ce point. Le premier test a consisté à calculer les variances expliquées ($= 100 [1 - \text{variance(après)}/\text{variance(avant)}]]$) des composantes en phase et en quadrature des constantes harmoniques aux emplacements des mesures marégraphiques qui ont été inversées. Les valeurs des variances expliquées (Table V.3) pour les 8 ondes principales sont comprises entre 70 et 80%, à l'exception de la composante en quadrature de l'onde Q₁ probablement à cause d'un rapport signal sur bruit très défavorable. On en déduit donc que 20 à 30% du signal des marées aux stations marégraphiques qui ont constraint les modèles OMP1/2 n'a pas été restitué. Dans le second test, la marée totale a été calculée sous la trace du satellite Geosat sur une période d'un an à partir du modèle de Schwiderski et du modèle OMP1/2. Les variances de la marée totale prédicta par ces deux modèles sont respectivement $(30.25 \text{ cm})^2$ pour Schwiderski et $(24.54 \text{ cm})^2$ pour OMP1/2. Le rapport des variances est de 0.66 et donc globalement le modèle OMP1/2 présente un déficit en terme d'énergie de l'ordre de 35% par rapport à Schwiderski.

Table V.4 : R.m.s des divers signaux, composant la mesure altimétrique, calculés sur une série de un an de mesures de Geosat.

Signal	Moyenne (cm)	r.m.s. (cm)
DA	9.92	142.96
Surface moyenne océanique de l'atlas OMP1/2	8.54	112.98
Prédiction de la marée avec l'atlas OMP1/2	-0.40	24.54
DA - Surface moyenne océanique de l'atlas OMP1/2	1.37	59.90
DA - Surface moyenne océanique de l'atlas OMP1/2 - Prédiction de la marée avec l'atlas OMP1/2	1.77	55.31

DA = hauteur de la mer par rapport au géoïde GEM-T1 corrigée de l'erreur d'orbite par la méthode de démodulation et de l'erreur d'orbite résiduelle estimée (OMP1/2)

V.4 - Conclusions

Le modèle OMP1/2, qui comprend les solutions globales des marées océaniques obtenues par inversion conjointe de mesures marégraphiques et altimétriques, n'a pas atteint le niveau de précision des meilleurs modèles actuels. L'analyse des erreurs formelles et les comparaisons avec d'autres modèles et des mesures marégraphiques indépendantes révèlent que les moyennes et courtes longueurs d'onde du signal des marées sont trop lissées dans les solutions OMP1/2, ce qui se traduit par des solutions pas assez énergétiques. Il y a deux causes à ce lissage excessif. Primo, la distribution géographique des données inversées est trop lâche à l'échelle régionale, ce qui ne permet pas de restituer les courtes longueurs d'ondes du signal des marées. Secundo, le rapport signal sur bruit dans les mesures altimétriques est très faible. Les larges barres d'erreur sur les données et leur petit nombre font que la solution inverse est contrôlée par la fonction de covariance du signal. Si la longueur de corrélation est très grande, comme dans le cas des marées (de l'ordre du millier de kilomètres), l'information contenue dans les données se propage à grande distance lissant fortement les solutions inverses au détriment des moyennes et courtes longueurs d'onde du signal des marées. Si, par contre la longueur de corrélation est très petite, la solution inverse tend rapidement vers la solution à priori, lorsque la distance à la donnée la plus proche augmente.

Dans l'avenir, les solutions de marées océaniques et la surface moyenne océanique de OMP1/2 ainsi que la solution inverse de l'erreur radiale d'orbite seront soustraîtes aux mesures altimétriques pour augmenter leur rapport signal sur bruit. La Table V.4 donne les r.m.s. après soustraction des différentes composantes de la mesure altimétrique. Les résidus qui ont un r.m.s. de 55.31 cm seront analysés pour extraire les moyennes et courtes longueurs d'onde du signal des marées et de la surface moyenne océanique encore présentes. La méthode d'analyse sera la méthode inverse qui ne sera plus appliquée à un grand nombre de lots de données réparties sur le globe entier, mais à un grand nombre de données confinées autour de chaque point de la grille des solutions. Cette densification des mesures à l'échelle régionale devrait permettre de restituer les longueurs d'ondes manquantes. Les fonctions de covariance de cette seconde itération, qui portera sur l'analyse des résidus, seront les fonctions de covariance a posteriori des solutions OMP1/2. Celles-ci sont, comme nous l'avons montré, de la même forme que les fonctions de covariance du signal des marées mais avec des longueurs de corrélation plus courtes. Cette approche itérative a été éprouvée pour restituer les courtes longueurs d'onde de la surface moyenne océanique et s'est révélée très efficace [Blanc et al., 1991]. Elle permettra aussi de spécifier des fonctions de covariance en fonction de la dynamique locale; on pourra, par exemple, augmenter la variance et diminuer la corrélation de la fonction de covariance du signal dans les mers littorales où l'on sait que le signal des marées est bien plus énergétique qu'en haute mer et se décorrèle bien plus vite.

Les solutions de cette seconde itération seront ajoutées aux solutions de l'atlas OMP1/2 pour former un nouvel atlas, OMP1. Celui-ci comprendra les solutions des marées et de la surface moyenne océanique améliorées avec l'ensemble des cartes d'erreurs. Ces dernières sont indispensables pour toute exploitation ultérieure des ces solutions comme, par exemple, leur assimilation dans un modèle hydrodynamique.

Le développement de la seconde itération devrait non seulement permettre une amélioration rapide et sensible des solutions OMP1/2, mais il fournira l'outil qui permettra d'introduire au fur et à mesure les mesures altimétriques des missions en cours (ERS1 et Topex/Poseidon).

CONCLUSION

CONCLUSION

L'objectif de cette thèse était d'appliquer les méthodes inverses, très répandues en sismologie, au problème de la modélisation des marées océaniques à partir d'un ensemble de mesures hétérogènes. Les résultats obtenus contribuent à démontrer la grande potentialité des techniques inverses étendues à un domaine de recherche dans lequel les approches statistiques sont très peu développées. Les méthodes inverses permettent d'estimer non seulement la solution optimale eu égard à l'ensemble des données mais fournit aussi une description détaillée de l'erreur sur la solution. Cet élément nouveau en recherche sur les marées donne une estimation quantitative des amplitudes et surtout du spectre des erreurs sur les solutions. Ces informations sont indispensables pour exploiter les résultats. Elles permettent aussi de décider des sites où il serait judicieux de faire des observations ou de déterminer quel type de mesures est le plus susceptible d'améliorer les solutions, c'est-à-dire des mesures dont le spectre des erreurs est distinct de celui des erreurs sur les solutions.

L'inversion conjointe des mesures marégraphiques et altimétriques a fourni les meilleures solutions de marées océaniques. Cette combinaison de mesures est actuellement la combinaison optimale tant que le contenu des mesures gravimétriques de marée terrestre ne sera pas complètement clarifié. Les solutions de marées océaniques que nous avons obtenues par inversion de mesures marégraphiques et altimétriques ne sont pas assez énergétiques. Nous avons estimé qu'environ 70% du signal de marée a été restitué et que le manque d'énergie est dû à un lissage excessif des courtes et moyennes longueurs d'onde du signal des marées. Il en résulte que la précision subdécimétrique n'a pu être atteinte. Nous avons discuté les deux causes principales qui sont le faible rapport signal sur bruit (environ 0.1) et un échantillonnage trop lâche des données inversées. La voie à suivre pour améliorer à court terme les premières solutions a été esquissée. Elle repose sur une seconde itération comportant l'analyse des résidus après soustraction de la surface moyenne océanique, de l'erreur radiale d'orbite et des marées océaniques et une densification de l'échantillonnage des données inversées pour récupérer le signal de marée à courtes et moyennes longueurs d'onde. Ultérieurement, une nouvelle itération sera opérée avec les données de Topex/Poseidon afin de bénéficier de leur meilleur rapport signal sur bruit.

Le schéma d'inversion que nous avons adopté prélude à de nombreuses sophistications. Dans un premier temps, les fonctions de covariance, que nous avons choisies homogènes et isotropes, peuvent être remplacées par des fonctions de covariance dépendant de la position géographique afin de mieux tenir compte des particularités dynamiques de la marée océanique en haute mer et dans les mers littorales. On peut aussi songer à assimiler les solutions inverses dans un modèle hydrodynamique, les erreurs formelles des solutions inverses fournissant des renseignements précieux et nécessaires au schéma d'assimilation. Un schéma encore plus complet consisterait à opérer en une seule étape une modélisation hydrodynamique et une assimilation des différents types de mesure, dans lequel non seulement l'équation de continuité serait perturbée mais aussi les valeurs de la bathymétrie et les coefficients de frottement sur le fond. En fait, l'ensemble des possibilités qui nous sont offertes ne connaît qu'une limite, celle de notre imagination; et leur réalisation ne dépend que de la puissance de calcul dont nous disposons.

ANNEXE

ANNEXE : DECONVOLUTION DE SPECTRES DE FOURIER

Généralités

La transformée de Fourier (ou spectre de Fourier) d'une fonction $f(t)$ quelconque (assez régulière pour que sa transformée de Fourier existe) est définie par la fonction complexe :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

où ω est la pulsation et $e^{-i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. Comme les séries traitées numériquement sont toujours finies, les bornes de l'intégrale le sont aussi. Supposons, sans perte de généralité, que la fonction $f(t)$ est discrétisée avec un pas régulier sur l'intervalle de temps compris entre $-T$ et $+T$, alors (A.1) devient :

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.2})$$

ou encore

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(t) \cdot p_T(t)\} e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.3})$$

où $p_T(t)$ est la fonction "fenêtre" rectangulaire définie par :

$$p_T = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > T \\ 1 & \text{si } |t| < T \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

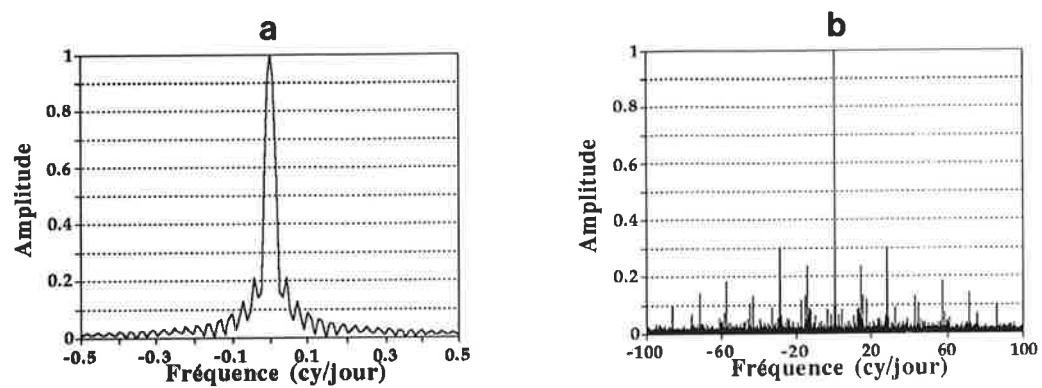
Le théorème de convolution permet de réécrire (A.3) sous une autre forme :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_T(\omega - \omega') F(\omega') d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} P_T(\omega) * F(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec P_T la transformée de Fourier de p_T et $*$ qui représente le produit de convolution. Cette nouvelle écriture montre clairement que les spectres calculés numériquement (dénotés par un accent circonflexe) ne sont pas les spectres "vrais", mais bien les spectres vrais convolus par le spectre de la fonction fenêtre ou fonction d'échantillonnage qui vaut 1 sur l'intervalle de mesure et 0 ailleurs. Dans le cas simple d'une série définie sur un intervalle de temps $[-T, +T]$ et sans interruption, le spectre de la fonction d'échantillonnage est :

$$P_T(\omega) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega} \quad (\text{A.6})$$

qui est la fonction sinus cardinal. Ainsi, en raison de la nature finie des séries, les pics des spectres calculés numériquement sont diffractés : c'est ce que l'on appelle le "leakage" dans la littérature anglo-saxonne. Si, comme c'est le cas dans la plupart des applications, la série temporelle des données ne contient pas d'interruptions, le leakage ne présente qu'un inconvénient mineur, car les effets sont confinés autour des raies spectrales du signal réel et on peut les atténuer en multipliant la série temporelle par une fonction d'apodisation appropriée. Par contre, si, comme dans le cas des séries altimétriques, les séries temporelles présentent un nombre important d'interruptions qui ne peuvent être comblées par une interpolation, alors la fonction du spectre d'échantillonnage est la somme des spectres d'une suite de fonctions



Figures A.1: (a) spectre normalisé de la fonction rectangulaire p_T avec $T=17$ jours; (b) spectre normalisé de la fonction d'échantillonnage du premier cycle (17 jours) des mesures altimétriques de Geosat dont le spectre est étalé : les fréquences dominantes en 1, 2 et 3 cy/rev reflètent la géométrie de l'échantillonnage et donc essentiellement la distribution géographique des continents.

rectangulaires qui est bien plus riche qu'une simple fonction sinus cardinal et peut présenter un étalement assez considérable (voir Figures A.1). La conséquence est un enrichissement artificiel des spectres calculés qui présentent des raies spectrales non existantes dans le signal réel engendrées dans le voisinage immédiat des pics réels mais aussi loin de ceux-ci.

Les spectres des mesures altimétriques ne sont donc pas représentatifs du contenu spectral réel. Le problème qui se pose à nous est de trouver une méthode pour "nettoyer" ces spectres et obtenir les spectres vrais.

La déconvolution

Soient $F(\omega)$ le spectre de f , $G(\omega)$ le spectre de la fonction d'échantillonnage (que l'on peut calculer, puisque l'on connaît l'échantillonnage des données) et $H(\omega)$ le spectre calculé; ils sont liés entre-eux par le théorème de convolution (faisant abstraction des constantes) :

$$F(\omega) * G(\omega) = H(\omega) \quad (\text{A.7})$$

Le problème à résoudre est le suivant : connaissant H et G , déduire F . Résoudre ce problème revient à déconvoluer l'équation (A.7) que l'on peut réécrire sous la forme complexe :

$$(F^R(\omega) + i F^I(\omega)) * (G^R(\omega) + i G^I(\omega)) = H^R(\omega) + i H^I(\omega) \quad (\text{A.8})$$

où les exposants R et I désignent respectivement les parties réelle et imaginaire des différents spectres. Développant (A.8), on obtient :

$$F^R(\omega)*G^R(\omega)-F^I(\omega)*G^I(\omega)+i\{F^R(\omega)*G^I(\omega)+F^I(\omega)*G^R(\omega)\}=H^R(\omega)+iH^I(\omega) \quad (\text{A.9})$$

équivalent au système :

$$\begin{cases} F^R(\omega) * G^R(\omega) - F^I(\omega) * G^I(\omega) = H^R(\omega) \\ F^R(\omega) * G^I(\omega) + F^I(\omega) * G^R(\omega) = H^I(\omega) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

explicitement,

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \{F^R(\omega').G^R(\omega-\omega') - F^I(\omega').G^I(\omega-\omega')\} d\omega' = H^R(\omega) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \{F^R(\omega').G^I(\omega-\omega') + F^I(\omega').G^R(\omega-\omega')\} d\omega' = H^I(\omega) \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

Soient $F^R(i)$, $F^I(i)$, $G^R(i)$, $G^I(i)$, $H^R(i)$, $H^I(i)$ pour $i \in [-N, N]$ les spectres discrets de $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$, le système précédent devient, pour tout i :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=-N}^{j=+N} F^R(j).G^R(i-j) - F^I(j).G^I(i-j) = H^R(i) \\ \sum_{j=-N}^{j=+N} F^R(j).G^I(i-j) + F^I(j).G^R(i-j) = H^I(i) \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

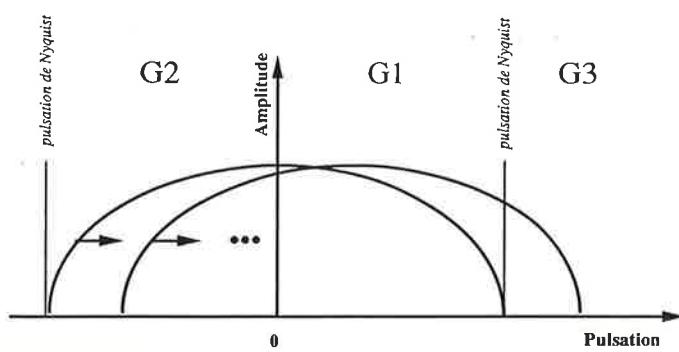


Figure A.2 : Illustration de la discréétisation de l'intégrale de convolution.

Puisque les fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ sont réelles, les relations suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} F^R(-i) &= F^R(i) & G^R(-i) &= G^R(i) & H^R(-i) &= H^R(i) \\ F^I(-i) &= -F^I(i) & G^I(-i) &= -G^I(i) & H^I(-i) &= -H^I(i) \end{aligned}$$

permettant d'écrire le système sous forme matricielle en fonction des indices de sommes i positifs (équivalents aux fréquences positives) uniquement :

$$\left| \begin{array}{c} H^R(0) \\ H^R(1) \\ \vdots \\ H^R(N) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} G^R_1 + G^R_2 + G^R_3 & - (G^I_1 - G^I_2 + G^I_3) \\ G^I_1 + G^I_2 - G^I_3 & G^R_1 - G^R_2 - G^R_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} F^R(0) \\ F^R(1) \\ \vdots \\ F^R(N) \\ F^I(0) \\ F^I(1) \\ \vdots \\ F^I(N) \end{array} \right|$$

où

$$G^R_1 = \left| \begin{array}{cccc} G^R(0) & G^R(1) & \cdots & G^R(N) \\ G^R(1) & G^R(0) & \cdots & G^R(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & G^R(0) \\ G^R(N) & \cdots & \cdots & G^R(1) \\ & \cdots & \cdots & G^R(0) \end{array} \right| \quad G^R_2 = \left| \begin{array}{cccc} 0 & G^R(1) & G^R(2) & \cdots & G^R(N) & G^R(N) \\ 0 & G^R(2) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & G^R(N) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right|$$

$$G^R_3 = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & G^R(N) \\ 0 & G^R(N) & \cdots & 0 & G^R(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & G^R(N) & \cdots & G^R(2) & G^R(1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$G^I_1 = \left| \begin{array}{cccc} G^I(0) & -G^I(1) & -G^I(2) & \cdots & -G^I(N) \\ G^I(1) & G^I(0) & -G^I(1) & \cdots & -G^I(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & G^I(0) & -G^I(1) \\ G^I(N) & \cdots & \cdots & G^I(1) & G^I(0) \end{array} \right| \quad G^I_2 = \left| \begin{array}{cccc} 0 & G^I(1) & G^I(2) & \cdots & G^I(N) & G^I(N) \\ 0 & G^I(2) & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & G^I(N) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right|$$

$$G^I_3 = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & G^I(N) \\ 0 & G^I(N) & \cdots & G^I(N) & G^I(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & G^I(N) & \cdots & G^I(2) & G^I(1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Comme $F^I(0)=G^I(0)=H^I(0)=0$ (car ce sont les spectres de fonctions réelles), la $n+2$ ième ligne de F , de G et de H ainsi que la $n+2$ ième colonne de G sont superflues. Le système final à résoudre se réduit à un système de $2N+1$ équations à $2N+1$ inconnues.

Convoluter deux spectres F et G revient à calculer une moyenne glissante de F en utilisant G comme fonction de poids. Cela signifie que la convolution H de F et G , pour une fréquence donnée, est le produit de F par G centré sur cette même fréquence. Ce produit est l'opération qui est effectuée quand une ligne de la matrice G est multipliée par le vecteur colonne F donnant un scalaire qui est égal à un des éléments du vecteur colonne H . Ainsi, lorsque le spectre G est déplacé sur l'axe des fréquences pour calculer les moyennes successives de F (ou éléments successifs de H), on peut définir trois régions comme illustrées dans la Figure A.2 : une région comprise entre $[0, \omega_N]$ où ω_N est la fréquence de Nyquist, une seconde région entre $]-\infty, 0]$, et une troisième région entre $[\omega_N, +\infty[$. A chacune de ces régions et à chaque moyenne correspondent des valeurs du spectre de G formant trois matrices d'indices différents. Les matrices G^{R_1} et G^{I_1} sont respectivement symétriques et antisymétriques, car la fonction $g(t)$, dont les spectres sont issus, est réelle. Les matrices G^{R_2} et G^{I_2} sont triangulaires supérieures, car les spectres (parties réelle et imaginaire) sont finis; lorsque le spectre G est déplacé vers les fréquences positives durant la convolution, il y a de moins en moins d'éléments dans la région 2 et donc sur les lignes des matrices d'indices 2. Inversement, il y a de plus en plus d'éléments dans la région 3 et sur les lignes des matrices d'indice 3 qui sont dès lors triangulaires inférieures. Ces matrices, G^{R_3} et G^{I_3} , ont été rajoutées pour tenir compte du repliement du spectre (ou aliasing) au-delà de la fréquence de Nyquist, à condition que cette fréquence soit la dernière fréquence du spectre calculé.

Résolution numérique

Le problème de la déconvolution se réduit à la résolution d'un système linéaire qui se résume à :

$$G.F = H \quad (A.13)$$

où $F(2n+1)$ est le vecteur des inconnues, $G(2n+1, 2n+1)$ est la matrice "fenêtre" (ou d'échantillonnage) et $H(2n+1)$ est le spectre brut à déconvoluter. On recherche la solution de norme L_2 minimum par méthode des moindres carrés qui s'obtient en résolvant l'équation normale:

$$(G^T G) F = G^T H \quad (A.14)$$

$$F = (G^T G)^{-1} G^T H \quad (A.15)$$

La déconvolution est un problème mathématiquement mal posé [Tikhonov, 1976], ce qui se traduit par des instabilités numériques, c'est-à-dire que de faibles perturbations sur les données provoquent de grandes variations sur la solution. Les méthodes de régularisation permettent d'obtenir des solutions numériques stables. Parmi celles-ci, une des méthodes les plus couramment utilisées consiste à résoudre le problème des moindres carrés par une décomposition en valeurs singulières. Ce choix est doublement motivé. Primo, il est fortement conseillé, pour des raisons de stabilité numérique, d'éviter la formation explicite de l'équation normale. Secundo, on peut éliminer les petites valeurs singulières ce qui permet, en diminuant le rang de la matrice, d'augmenter la précision de la solution.

Nous rappelons brièvement ce qu'est une décomposition en valeurs singulières : pour toute matrice $A(m,n)$, il existe une matrice orthogonale $U(n,m)$, une matrice orthogonale $V(m,n)$ et une matrice diagonale $\Sigma(m,n)$ d'éléments diagonaux $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ telles que

$$A = U \Sigma V^T \quad (A.16)$$

schématiquement

$$\boxed{A} = \boxed{U} \quad \boxed{\Sigma} \quad \boxed{V^T}$$

Ce produit matriciel est appelé la décomposition en valeurs singulières de A. Les colonnes de U (ou de V) sont appelées les vecteurs singuliers gauches (ou droits) de A et les σ_j valeurs singulières de A. Les colonnes de U (ou de V) sont les vecteurs propres de AA^T (ou de A^TA) et les valeurs propres correspondantes sont, dans les deux cas, σ_j^2 .

L'interprétation géométrique de la décomposition en valeurs singulières est que pour toute transformation linéaire, des bases orthogonales existent à la fois dans l'espace source et l'espace image (données par les vecteurs singuliers gauches et droits). Sur ces bases orthogonales, la transformation linéaire est représentée par une matrice diagonale. En outre, $\text{rang}(A)=p$ si et seulement si $\sigma_1 \neq 0, \dots, \sigma_p \neq 0$ et $\sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$. Si $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_n$ sont très petits par rapport à $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ alors A est numériquement équivalente à une matrice de rang p et nous dirons que A est effectivement de rang p.

Supposons maintenant que la matrice A soit de rang p, alors la solution de norme L₂ minimum (ou par moindres carrés) du système $Ax=b$ est obtenue en formant l'équation normale:

$$(A^TA)\hat{x} = A^T b \quad (\text{A.17})$$

et après décomposition en valeurs singulières,

$$\hat{x} = V\Sigma^+U^T b \quad (\text{A.18})$$

où Σ^+ est la matrice diagonale (n,m) d'éléments diagonaux $1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_p, 0, \dots, 0$. La matrice $V\Sigma^+U^T$ est appelée pseudo-inverse de A, généralement notée A^+ .

La régularisation par élimination des plus petites valeurs propres est justifiée brièvement ci-après :

Soit le système à résoudre $Ax=b$; si ϵ est l'erreur de mesure sur b, le système s'écrit alors:

$$A(x+\Delta x) = b+\epsilon \quad (\text{A.19})$$

on supposera que les éléments du vecteur ϵ sont de moyenne nulle non corrélés et ont une même variance σ^2 , c'est-à-dire $\text{var}(\epsilon) = \sigma^2 I$. Sous ces hypothèses et considérant que le rang de A est complet, il est possible de calculer la matrice de variance $E[\Delta x \Delta x^T]$, E désignant la moyenne probabiliste :

$$E[(A^TA)^{-1} A^T \epsilon \epsilon^T A (A^TA)^{-1}] = \sigma^2 (A^TA)^{-1} \quad (\text{A.20})$$

et donc

$$E(\|\Delta x\|^2) = \sigma^2 \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \quad (\text{A.21})$$

D'où : l'erreur de la solution estimée par moindres carrés peut être considérable, s'il y a des valeurs singulières très petites; l'élimination de ces dernières diminue sensiblement la variance de cette erreur.

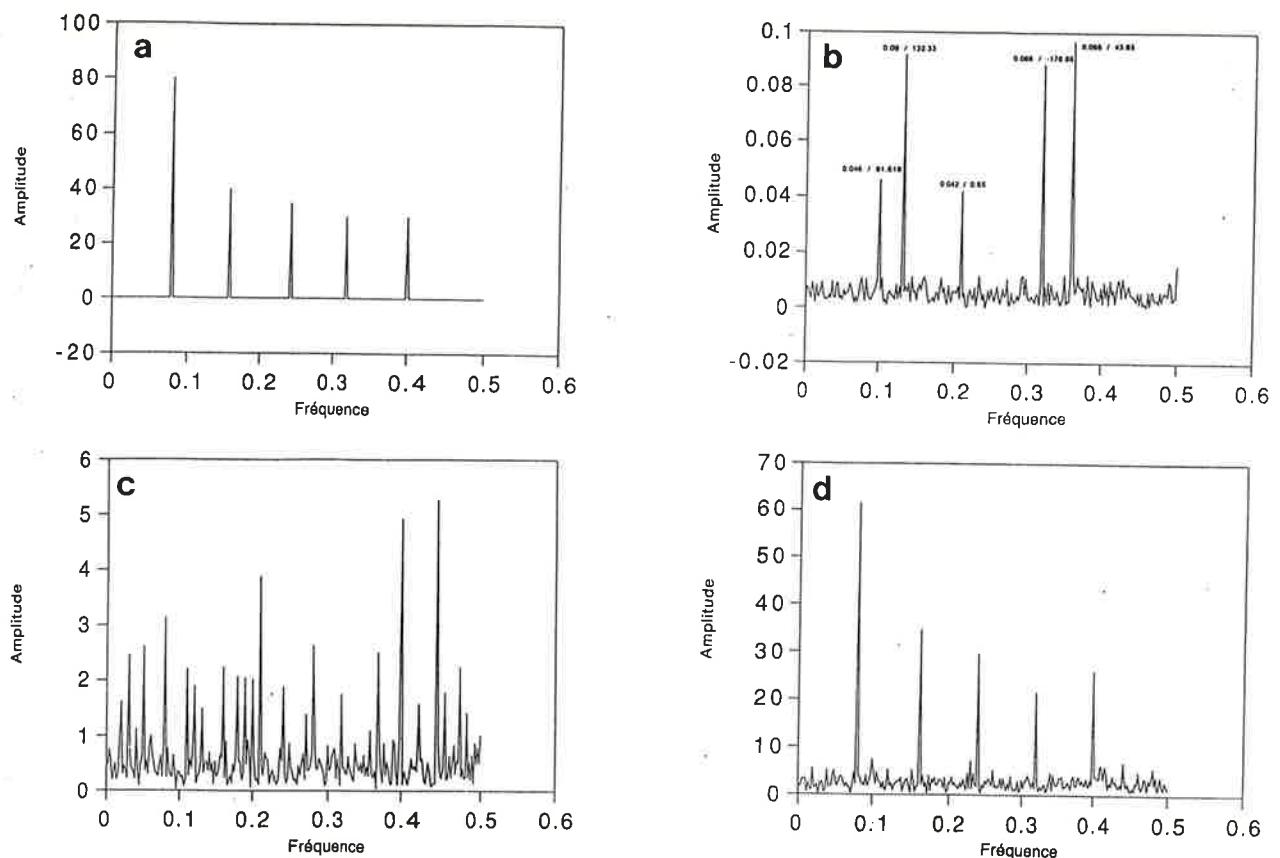
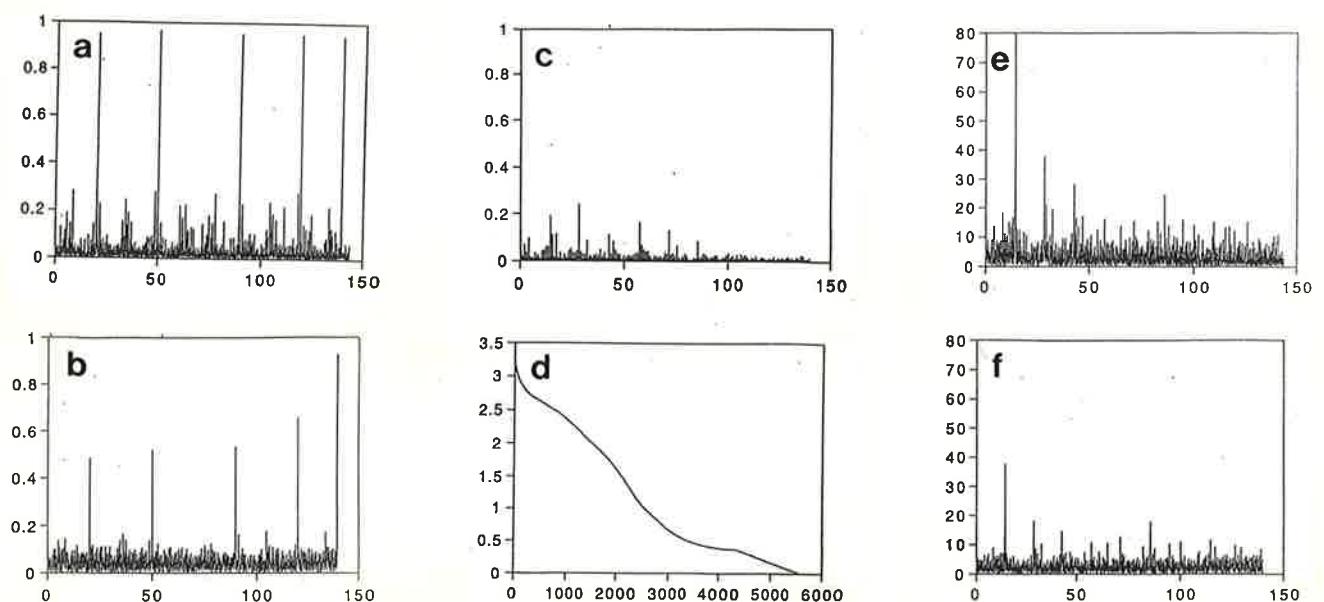


Figure A.3 : Déconvolution d'un cas test: (a) spectre réel (F); (b) spectre de la fonction d'échantillonnage (G); (c) spectre à déconvoluer (H) qui est la convolution de F et G ; (d) résultat de la déconvolution.



Figures A.4 : (a) Spectre d'une fonction test formée de 5 sinusoïdes de mêmes amplitudes échantillonées aux dates des mesures d'un cycle de 17 jours de Geosat; (b) Résultat de la déconvolution du spectre (a) en utilisant le spectre (c) de la fonction d'échantillonnage; (d) Valeurs singulières de la matrice G qui est la même dans les deux cas présentés ici (les valeurs singulières inférieures à 0.4 ont été éliminées); (e) Spectre du cycle de 17 jours de mesures altimétriques de Geosat; (f) Résultat de la déconvolution du spectre (e).

Enfin, il est important de rappeler, dans le contexte présent, les résultats du théorème de Gauss-Markov : si A est de rang n alors la solution x par moindres carrés est la meilleure estimation linéaire, non biaisée et de variance minimum ; de plus, si A est de rang inférieur, alors la solution x par moindres carrés de norme L_2 minimum est la meilleure estimation linéaire et non biaisée orthogonale à l'espace noyau de A .

Exemple

Une fonction $f(t)$ formée de la somme de 5 fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont choisies à intervalle régulier est multipliée par une fonction d'échantillonnage $g(t)$. Celle-ci comporte 5 pics irrégulièrement espacés et 40% des valeurs prises au hasard ont été mises à zéro afin de générer du bruit. Les spectres des fonctions F et G ainsi que celui de leur produit sont reproduits dans les Figures (A.3). Le résultat de la déconvolution du spectre H connaissant le spectre G par la méthode décrite ci-dessus est montré dans la Figure (A.3d). Si la déconvolution était parfaite les Figures (A.3a) et (A.3d) seraient identiques. Ce n'est pas le cas, parce que la déconvolution est un problème extrêmement mal posé et que faute d'information a priori pour contraindre la solution, on doit éliminer un nombre important (1 sur 5) de valeurs propres pour stabiliser le résultat. Il en résulte une atténuation des amplitudes du signal restitué de plus de 10%. Toutefois, les raies spectrales sont bien séparées du bruit résiduel attestant un succès partiel de la méthode.

Déconvolution de séries altimétriques.

Les tests de déconvolution des spectres de séries altimétriques ont porté sur le premier cycle de 17 jours de Geosat. Ce cycle comporte environ 13.000 données moyennées sur une minute. Tous les spectres ont été tronqués à la fréquence de 140 cycles par jour bien en-dessous de la fréquence de Nyquist (720 cycles par jour); les spectres contiennent 2800 fréquences, ce qui est un bon compromis entre la résolution des spectres et le nombre de données que l'on peut traiter.

Le spectre de la fonction d'échantillonnage peut être obtenu en calculant le périodogramme de la fonction d'échantillonnage. Cependant, les fortes discontinuités de cette fonction engendrent le phénomène bien connu de Gibbs. C'est pourquoi, nous avons préféré déduire de manière empirique le spectre de la fonction d'échantillonnage à partir du périodogramme d'une série temporelle sinusoïdale de fréquence 140 cycles/jour échantillonnée aux dates des mesures. Ce dernier est le spectre de la fonction d'échantillonnage décalé de la fréquence 140 cycles/jour car le spectre calculé est la convolution entre le spectre de la fonction d'échantillonnage et la fonction de Dirac en 140 cycles/jour. Après "recalage" du spectre, on obtient le spectre de la fonction d'échantillonnage (Figure A.4c).

Le résultat de la déconvolution du spectre d'une série formée de la somme de 5 sinusoïdes échantillonnées aux dates des données est reproduit dans les Figures (A.4 a-b). Il y a une atténuation progressive des amplitudes vers les basses fréquences accompagnée d'une diminution du rapport signal sur bruit. La dégradation progressive des résultats est due vraisemblablement à un problème concernant la manière d'introduire le spectre de la fonction d'échantillonnage dans le code (problème qui a été détecté plus tard).

Une fois le système normal d'équations décomposé en valeurs singulières, la déconvolution du spectre de n'importe quel signal échantillonné sur la même grille se fait par simple multiplication matricielle (voir équ. A.18), car le noyau (= matrice G) est le même. Dans les Figures A.4, on trouve les résultats de la déconvolution du spectre du premier cycle des données altimétriques de Geosat. Ces résultats sont à considérer avec beaucoup de précautions car les amplitudes des basses fréquences sont fortement atténueres comme dans le cas test.

Les investigations n'ont pas été poussées plus avant pour plusieurs raisons :

(1) le coût informatique de ce type de méthode de déconvolution est bien trop élevé : une décomposition en valeurs singulières d'une matrice 5.600×5.600 requiert près de 2 heures CPU sur Cray 2.

(2) la démodulation complexe a mis en évidence la non stationnarité des caractéristiques spectrales des séries altimétriques. La transformée de Fourier n'est plus l'outil adéquat pour étudier les séries altimétriques et donc, dans ce contexte, le problème de la déconvolution devient obsolète.

REFERENCES

REFERENCES

- Accad, Y. and Pekeris, C. L., Solution of the equations for the M_2 and S_2 tides in the world ocean from a knowledge of the tidal potential alone, *Phil. Trans. R. Soc. London, A*, 290, 235-266, 1978.
- Baker, T.F., Methods of tidal loading computation, *Bull. d'Inform. Marées Terr.*, 94, 6365-6373, 1985.
- Baker, T.F., Edge, R.J. and Jeffries, G., European tidal gravity : An improved agreement between observations and models, *Geophys. Res. Lett.*, 16, 1109-1112, 1989.
- Baker, T.F., Edge, R.J. and Jeffries, G., Tidal gravity and ocean tide loading in Europe, *Geophys. J. Int.*, 107, 1-11, 1991.
- Beaumont, C. and Berger, J., Earthquake prediction : modification of the earth tide tilts and strains by dilatancy, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 39, 11-121, 1974.
- Bennett, A.F. and P.C. McIntosh, Open ocean modeling as an inverse problem : Tidal theory, *J. Phys. Oceanogr.*, 12, 1004-1018, 1982.
- Benveniste, J., Observer la circulation des océans à grande échelle par altimétrie satellitaire, Thèse de doctorat de l'Université P. Sabatier, Toulouse, France, 198 pages, 1989.
- Blanc, F., S. Houry, P. Mazzega and J.F. Minster, High resolution, High-Accuracy Altimeter Derived Mean Sea Surface in Norwegian Sea, *Mar. Geod.*, 14, 57-76, 1991.
- Bloomfield, P., Fourier Analysis of Times Series: An Introduction, Wiley, New York, 1976.
- Bretherton, F.P., R.E. Davis and C.B. Fandry, A technique for objective analysis and design of oceanographic experiments applied to MODE-73, *Deep Sea Research*, 23, 559-582, 1976.
- Brown, Tables of the motion of the Moon, Vol.3, New Haven, 1919.
- Canceill, P., Restitution subdécimétrique des marées dans l'océan Pacifique par un modèle hydrodynamique aux éléments finis, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1993.
- Cartwright, D.E., Ocean Tides, *Reports on Progress in Physics* 40, 655-708, 1977.
- Cartwright, D.E. and Tayler, R.J., New computations of the tide-generating potential, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 23, 45-74, 1971.
- Cartwright, D.E. and Edden, A.C., Corrected tables of tidal harmonics, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 33, 253-264, 1973.
- Cartwright, D.E. and Ray, R.D., Oceanic Tides from Geosat Altimetry, *J. Geophys. Res.*, 95, 3069-3090, 1990.
- Cartwright, D.E. and Ray, R.D., Energetics of Global Ocean Tides from Geosat altimetry, *J. Geophys. Res.*, 96, 16897-16912, 1991.
- Chelton, D.B. and M.G. Schlax, Spectral Characteristics of Time-Dependent Orbit Errors in Altimeter Height Measurements, *J. Geophys. Res.*, 98, 12579-12600, 1993.
- Cheney, R.E., Marsch J.G. and Beckley B.D., Global mesoscale variability from collinear tracks of Seasat altimeter data, *J. Geophys. Res.*, 88, 4343-4354, 1983.
- Cheney, R. E., B. C. Douglas, R. W. Agreen, L. Miller, D. L. Porter, and N.S. Doyle, Geosat altimeter geophysical data record user handbook, NOAA Tech. Memo. NOS NGS-46, 32pp., Natl. Ocean. Serv., Rockville, Md., 1987.
- Ciarlet, P.G., Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1988.
- Colombo, O.L., Altimetry, Orbits and Tides, NASA Tech. Memo. TM 86180, 173pp., 1984.
- Darwin, G.H., The harmonic analysis of tidal observations, pp. 49-118 of: British Association for the Advance of Science - Report for 1883.
- Dehant, V., Integration of the gravitational motion of equations for an elliptical uniformly rotating Earth with an inelastic mantle, *Phys. Earth. Planet. Inter.*, 49, 242-258, 1987.
- DeMey, P. and A.R. Robinson, Assimilation of altimeter eddy fields in a limited area quasi-geostrophic model, *Journal of Physical Oceanography*, 17, 2280, 2293, 1987.

- De Meyer, F., A multi input-single output model for Earth tide data, Bull. d'Inform. Marées Terr., 88, 5628-5674, 1982.
- Doodson, A.T., The harmonic development of the tide-generating potentiel, Proc. R. Soc. London, A, 100, 305-329, 1921.
- Doodson, A.T., Tides in oceans bounded by meridians, III - semi-diurnal tides, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, 237, 311-373, 1938.
- Douglas, B.C., R.W. Agreen, and D.T. Sandwell, Observing global ocean circulation with Seasat altimeter data, Mar. Geod., 8, 67-83, 1984.
- Ducarme, B., A fundamental station for trans-world tidal gravity profiles, Geophys. J. Int., 107, 9-11, 1991.
- Ducarme, B., A data bank for Earth tides, 18th IUGG Gen. Assembly, Symp. 6, Hamburg, Bull. d'Inform. Marées Terr., 91, 5963-5980, 1984.
- Ducarme, B., Tidal potential developments for precise tidal evaluation, Bull. d'Infom. Marées Terr., 104, 7338-7360, 1989.
- Engelis, T., Radial orbit error reduction and sea surface topography determination using satellite altimetry, Report N°377, Dept. of Geod. Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, 178pp., 1987.
- Farrell, W.E., Deformation of the earth by surface loads, Rev. Geophys. Space Phys., 10, 761-797, 1972.
- Foreman, M.G.G. and R.F. Henry, The harmonic analysis of tidal model time series, Adv. Water Ressources, Vol. 12, 109-120, 1989.
- Francis, O., Interactions between Earth and Ocean tides, Bull d'Inform. Marées Terr., 112, 8131-8145, 1992.
- Francis, O. and Bergé, M., Estimate of the radial orbit error by complex demodulation, sous presse dans Journal of Geophysical Research, 1993.
- Francis, O. and Dehant, V., Recomputation of the Green's functions fot tidal loading estimations, Bull. d'Inform. Marées Terr., 100, 6962-6986, 1987.
- Francis, O. and Mazzega, P., Global charts of ocean tide loading effects, J. Geophys. Res., 95(C7), 11411-11424, 1990.
- Francis, O. and Mazzega, P., M_2 world ocean tide from tide gauge measurements, Geophysical Research Letters, 18, 1167-1170, 1991.
- Garrett, C. and D. Greenberg, Predicting Changes in Tidal Regime : The Open Boundary Problem, Journal of Geophysical Oceanography, 7, 171-181, 1977.
- Genco, M.L., Les marées océaniques dans l'océan Atlantique : modélisation et bilan énergétique, Thèse de doctorat de l'Université Scientifique, Technologique et Médicale de Grenoble, France, 1993.
- Godin, G., The analysis of Tides, University of Toronto Press, 1972.
- Gotlib, V.Y. and B.A. Kagan, Resonance periods in the world ocean, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 252, 725-728, 1980.
- Haines, B.J., G.H. Born, J.G. Marsh and R.G. Williamson, A summary of precise orbit computation for the Geosat exact repeat mission, Johns Hopkins APL Technical Digest, volume 10, Number 4, 393-404, 1989.
- Haines, B.J., G.H. Born, G.W. Rosborough, J.G. Marsh and R.G. Williamson, Precise orbit computation for the Geosat Exact Repeat Mission, J. Geophys. Res., 95, 2871-2886, 1990.
- Haines, B.J., G.H. Born, R.G. Williamson and C.J. Koblinsky, Application of the GEM-T2 gravity field to altimetric satellite orbit computation, submitted to J. Geophys. Res., 1992.
- Hendershott, M.C., The effects of solid Earth deformation on global ocean tides , Geophys, J. R. astr. Soc., 29, 389-402, 1972.
- Hendershott, M.C., Numerical models of ocean tides, In the Sea, vol. 6, 47-95, John Wiley, New York, 1977.
- Houry, S., Restitution de la surface moyenne océanique par utilisation de mesures altimétriques et de marégraphes rattachés par techniques spatiales, Thèse de doctorat de l'Université P. Sabatier, Toulouse, France, 210 pages, 1989.

- Houry S., Minster J.F., Brossier C., Dominh K., Gennero M.C., Cazenave A., and P. Vincent, Radial orbit error reduction and mean sea surface computation from the Geosat altimeter data, submitted to *J. Geophys. Res.*, 1993.
- International Hydrographic Organization, Tides, Harmonic constants, Ocean and Aquat. Sci. Dep. of Fish. and Oceans, Ottawa, 1979.
- Jourdin, F., Restitution de la marée océanique par inversion de données altimétriques satellitaires, Mémoire de Diplôme d'ingénieur géophysicien de l'Ecole et Observatoire de Physique du Globe de Strasbourg, Université Louis Pasteur, 153 pages, 1989.
- Jourdin, F., Assimilation de mesures marégraphiques et altimétriques dans un modèle hydrodynamique de marées océaniques, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, pp. 241, 1992.
- Jourdin, F., Francis, O., Vincent, P. and Mazzega, P., Some results of heterogeneous inversions for ocean tides, *Journal Geophysical Research*, 20, 267-20,288, 1991.
- Julian, P.R. and H.J. Thiebaux, On some properties of correlations functions used in optimum interpolation schemes, *Monthly weather Review*, 103, 605-6616, 1975.
- Kaula, W.M., Theory of Satellite Geodesy, Blaisdell, Waltham, Mass., 1966.
- Krige, D.G., A statistical approach to some basic mine evaluation problems on the Witwatersrand, *J. Chem. Min. Soc. S. Africa*, 119-139, 1951.
- Kuo, J.T. and Jachens, R.C., Indirect mapping of ocean tides by solving the inverse problem for tidal gravity observations, *Ann. Geophys.*, 33, (1/2), 73-82, 1977.
- Lambeck, K., Geophysical Geodesy. The slow deformation of the Earth, Clarendon Press, Oxford, 718 pages, 1988.
- Lambert, A., Earth tides analysis and prediction by the response method, *J. Geophys. Res.*, 79, 4952-4960, 1974.
- Laudet, P., Détermination du Périodogramme d'un jeu de données non équidistantes. Application à l'orbitographie, Rapport Interne Centre National d'Etudes Spatiales, 88/CT/DTI/MS/MO/252, Toulouse, France, 1988.
- LeProvost, C., Décomposition spectrale du terme quadratique de frottement dans les équations des mers littorales. Méthode d'analyse, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.276, Sér. A, pp.571-574, 1973a.
- LeProvost, C., Décomposition spectrale du terme quadratique de frottement dans les équations des mers littorales. Résultats, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.276, Sér. A, pp.653-656, 1973b.
- LeProvost, C. and Vincent, P., Finite-element method for modelling ocean tides, In : *Tidal Hydrodynamics*, 41-60, ed. Parker, B., John Wiley, New York, 1991.
- LeTraon, P.Y., M.C. Rouquet and C. Brossier, Spatial scales of mesoscale variability in the North Atlantic as deduced from Geosat data, *Journal of Geophysical Research*, 95, 20267-20285, 1990.
- Longuet-Higgins, M.S. and Pond, G.S., The free oscillations of a fluid on a hemisphere bounded by meridians of longitude, *Phil. Trans. R. Soc. London*, A, 266, 193-233, 1970.
- Lyard, F., Modélisation de la marée océanique : Application à l'océan Indien, Thèse de doctorat de l'Université Scientifique, Technologique et Médicale de Grenoble, France, 1992.
- MacIntosh, P.C., Oceanographic Data Interpolation : Objective Analysis and Splines, *Journal of Geophysical Research*, vol. 95, 13529-13541, 1990.
- Marsh, J.G., A.C. Brenner, B.D. Beckley, and T.V. Martin, Global Mean Sea Surface based upon the SEASAT Altimeter Data, *J. Geophys. Res.*, 91, 3501-3506, 1986.
- Matthews, P.M., Buffet, B.A., Herring, T.A. and Shapiro, I.I., Forced Nutations of the Earth: Influence of Inner Core Dynamics. 1. Theory, 2. Numerical Results and Comparisons, 3. Very Long Interferometry Data Analysis, *J. Geophys. Res.*, 96, 8219-8273, 1991.
- Mazzega, P., The M_2 oceanic tide recovered from SEASAT altimetry in the Indian ocean, *Nature*, 302, 514-516, 1983.

- Mazzega, P., M₂ model of the global ocean tide derived from SEASAT altimetry, *Mar. Geod.*, 9, 335-363, 1985.
- Mazzega, P., How radial orbit errors are mapped in altimetric surfaces, *J. Geophys. Res.*, 91, 6609-6628, 1986.
- Mazzega, P., The solar tides and the sun-synchronism of satellite altimetry, *Geophys. Res. Lett.*, 16, 507-510, 1989.
- Mazzega, P. and Houry, S., 1989. An experiment to invert Seasat altimetry for the Mediterranean and Black Sea mean sea surface, *Geophys. J.*, 96, 259-272, 1989.
- Mazzega, P. and Jourdin, F., Inverting SEASAT altimetry for tides in the Northeast Atlantic : preliminary results, In : *Tidal Hydrodynamics*, 569-592, ed. Parker, B., John Wiley, New York, 1991.
- Melchior, P., Les interactions des marées terrestres et des marées océaniques, *Ann. Geophys.*, T37(1), 189-198, 1981.
- Melchior, P., The tides of the Planet Earth, Pergamon Press, 2nd Edition, 641pp, 1983.
- Melchior, P., The phase lag of Earth tides and the bracking of the Earth's rotation, *Phys. Earth. Planet. Inter.*, 56, 186-188, 1989.
- Melchior, P., A new data bank for tidal gravity measurements (DB92), submitted to *Phys. Earth. Planet. Inter.*, 1992.
- Melchior, P., Tidal Interactions in the Earth Moon System, IUGG General Assembly, Vienna 1991, Union Lecture, IUGG Chronicle n°210, 1992.
- Melchior, P. and Ducarme, B., Tidal Gravity anomalies and tectonics, In : Proc. 11th Int. Sympos. on Earth Tides, Helsinki, Ed. J. Kakkuri , 445-454, 1991a.
- Melchior, P. and Ducarme, B., A study of the observed tidal residue vectors B versus oceanic tidal load vectors L, In : Proc. 11th Int. Sympos. on Earth Tides, Helsinki, Ed. J. Kakkuri , 431-444, 1991b.
- Minster, J.F., M.L. Genco and C. Brossier, Variations of the sea level in the Amazona estuary, *Continental Shelf Research*, sous presse, 1993.
- Molodensky, S.M. and Kramer, M.V., Izvestiya, Physics of solid earth, 16, 1, 1980.
- Moritz, H., Least-squares collocation, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, vol. 16, N°3, 421-430, 1978.
- Moritz, H., Advanced Physical Geodesy, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, FRG, 1980.
- Munk, W.H. and D.E. Cartwright, Tidal spectroscopy and prediction, *Phil. Trans. R. Soc.*, 259, 533-581, 1966.
- Nouel, F., Doris : une précision d'orbite inférieure à 10 cm, *Aviso News Letters*, CNES, n°2, 7-8, 1993.
- Parke, M.E. and Hendershott, M.C., M₂, S₂, K₁ models of the Global Ocean Tide on an Elastic Earth, *Mar. Geod.*, 3, 379-408, 1980.
- Parke, M.E., R.H. Stewart and D.L. Farless, On the choice of orbits for an altimetric satellite to study ocean circulation and tides, *Journal of Geophysical Research*, 92, 11693-11707, 1987.
- Perigaud, C. and J.F. Minster, Les courants océaniques vus de l'espace, *Pour la Science*, 1985.
- Platzman, G.W., G.A. Curtis, K.S. Hansen and R.D. Slater, Normal modes of the worls ocean; II-Description of modes in the period range 8 to 80 hours, *J. Phys. Oceanog.*, 11(5), 579-603, 1981.
- Proudman, J., On the dynamic equations of the tides , I, II, III, *Proc. London Math. Soc.*, 18, 1-68, 1917.
- Pugh, D.T., Tides , Surges and Mean Sea Level, Wiley, 472 pages, 1987.
- Rao, C.R., Linear Statistical Inference and Its Application, (2nd edition), 625 pp., Wiley, New York, 1973.
- Rapp, R.H., The gravity field of the earth and prospects for improvements of its determination, in *Space Geodesy and Geodynamics*, pp. 55-74, eds Anderson, A.J. and Cazenave, A., Academic Press, London, 1986.

- Robinson, E. S., Correlation of tidal gravity and heat flow in eastern North America, *Phys. Earth planet. Inter.*, 67, 231-236, 1991.
- Rosborough, G.W., and J.A. Marshall, Effect of Orbit Error on Determining Sea Surface Variability Using Satellite Altimetry, *J. Geophys. Res.*, 95, 5273-5277, 1990.
- Rowton, S., D.A. Williams, J.J. McCarthy, D.E., Pavlis, S.B. Luthcke, L.S. Tsoussi, *Geodyn II*, Systems Description, Vol. I, II and III, Report NASA Goddard Space Flight Center, 1992.
- Rummel, R., and R.H. Rapp, Undulation and anomaly estimation using GEOS-3 altimeter data without precise satellite orbits, *Bull. Geod.*, 51, 73-88, 1977.
- Rydelek, P.A., Zurn, W. and Hinderer, J., On tidal gravity heat flow and lateral heterogeneities, *Phys. Earth. planet. Inter.*, 68, 215-259, 1991.
- Sanchez, B.V., Proudman Functions and their application to tidal estimation in the world ocean, In: *Tidal Hydrodynamics*, Ed. B.B. Parker, 27-39, 1991.
- Sanchez, B.V., D.B., Rao and P.G. Wolfson, Objective analysis for tides in an enclosed basin, *Mar. Geod.*, 9(1), 71-91, 1985.
- Scargle, J.D., Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical Aspects of spectral analysis of unevenly spaced data, *Astroph. J.*, 263, 835-853, 1982.
- Schrama, E.J., The Role of Orbit Errors in Processing of Satellite Altimeter Data, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, N°33, 1989.
- Schrama, E.J., Some remarks on several definitions of geographically correlated orbit errors : consequences for satellite altimetry, *Manuscripta Geodaetica*, 17, 282-294, 1992.
- Schwiderski, E.W., Ocean tides, part I : Global ocean tidal equations, *Mar. Geod.*, 3, 161-217, 1980a.
- Schwiderski, E.W., Ocean tides, part II : A hydrodynamical interpolation model, *Mar. Geod.*, 3, 219-255, 1980b.
- Schwiderski, E.W., On tidal friction and deceleration of the Earth's rotation, *Mar. Geod.*, 9, 399-450, 1985.
- Simon, B., The species concordance method of tide prediction, In : *Tidal Hydrodynamics*, 725-735, ed. Parker, B., John Wiley, New York, 1991.
- Sirkes, Z. and C. Wunsch, Note on apparent systematic and periodic errors in Geosat orbits, *Geophys. Res. Lett.*, VOL.17, N°9, 1307-1310, 1990.
- Smithson, M.J., Pelagic tidal constants (3) (compiled by the IAPSO Advisory Committee on Tides and Mean Sea Level), Publication Scientifique, International Association for the Physical Sciences of the Ocean, IUGG, N°35, 191 pp., 1992.
- Tai, C.K., Geosat Crossover Analysis in the Tropical Pacific 1. Constrained Sinusoidal Crossover Adjustment, *J. Geophys. Res.*, 93, 10621-10629, 1988.
- Tai, C.K., How to observe the gyre to global scale variability in satellite altimetry : signal attenuation by orbit error removal, *J. Atm. and Ocean Techn.*, 8, 2, 271-288, 1991.
- Tamura, Y., A harmonic development of the tide generating potential, *Bull. d'Inf. Marées Terrstres*, 99, 6813-6855, 1987.
- Tapley, B.D. and G.W. Rosborough, Geographically correlated orbit errors and its effect on satellite altimetry missions, *J. Geophys. Res.*, 90, 11817-11831, 1985.
- Tarantola, A., *Inverse Problem Theory : Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, Amsterdam, 1987.
- Tarantola, A. and B. Valette, *Inverse Problems = Quest for Information*, *J. Geophys.*, 50, 159-170, 1982.
- Tikhonov, A.N., *Méthodes de résolution de problèmes mal posés.*, Mir, Moscou, 1976.
- Unesco, Observation de l'océan par satellite : problèmes et perspectives, Rapport du groupe de travail 70 du SCOR, Documents techniques de l'Unesco, sur les sciences de la mer, N°46, 1989.
- Valorge, C., Logiciel d'orbitographie Zoom : structure d'accueil du problème dynamique (SADYN), Manuel d'exploitation, TE/IS/MS/MO1990-072, 1990.

- Vincent, P., Modélisation aux éléments finis des marées océaniques, Thèse de doctorat de l'Université Scientifique, Technologique et Médicale de Grenoble, France, 165 pages, 1987.
- Vincent, P. et LeProvost, C., Semidiurnal tides in the northeast Atlantic from a finite element numerical model, *J. Geophys. Res.*, 93, 543-555, 1988.
- Wagner, C.A., Radial variations of a satellite due to gravitational errors: Implications for satellite altimetry, *J. Geophys. Res.*, 90, 3027-3036, 1985.
- Wagner, C.A., The M₂ tide from Geosat altimetry, *Manuscripta geodaetica*, 15, 283-290, 1990.
- Wagner, C.A., How well do we know the deep ocean tides ? An intercomparison of altimetric, hydrodynamic, and gage data, *Manuscripta Geodaetica*, 16, 118-140, 1991.
- Wahr, J., Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64, 677-703, 1981.
- Webb, D.J., Tides and tidal friction in a hemispherical ocean centred on the equator, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 61, 573-600, 1980.
- Woodworth, P.L., Accuracy of existing ocean tide models, Paper presented at Conference on the use of Satellite Data in Climate Models, Alpbach, Austria, June 10-12, 1985.
- Woodworth, P.L. and Cartwright, D.E., Extraction of the M₂ ocean tide from SEASAT altimeter data, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 84, 227-255, 1986.
- Wunsch, C. and V. Zlotnicki, The accuracy of altimetric surfaces, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 78, 795-808, 1984.
- Xi Qin Wen, A new complete development of the tide generating potential for the epoch J2000.0, *Bull. d'Inf. Marées Terrestres*, 99, 6786-6812, 1987.
- Yanshin, A.L., Melchior, P., Keilis-Borok, V.I., De Becker, M., Ducarme, B. and Sadoovsky, A.M., Global distribution of tidal anomalies and an attempt of its geotectonic interpretation, In : Proc. 10th Int. Symp. Earth Tides, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 731-755, 1986.
- Zahel, W., Modeling ocean tides with and without assimilating data, *J. Geophys. Res.*, 96, 20379-20391, 1991.
- Zahel, W., A global hydrodynamic numerical 1°-model of the ocean tides; the oscillation of the M₂ tide and its distribution of energy dissipation, *Annales de Géophysique*, Tome N°33, pp.31-40, 1977.
- Zahel, W., Fitting ocean tide dynamics to gravimetry and sea surface topography data, reprint du papier présenté à l'assemblée générale de l'IUGG, Vienne, Autriche, 1992.
- Zlotnicki, V., L.-L. Fu and W. Patzert, Seasonal variability in global sea level observed by Geosat altimetry, *J. Geophys. Res.*, 94, 17959-17969, 1989.
- Zschau, J., Tidal friction in the solid earth : loading tides versus body tides, In *Tidal Friction and the Earth's Rotation*, eds Brosche and Sündermann, pp.62-94, Springer-Verlag, 1978.
- Zürn, W., Beaumont, C. and Slichter, L.B., Gravity tides and ocean loading in southern Alaska, *J. Geophys. Res.*, 91, 4923-4932, 1976.