Caractérisation de certaines fonctions d'agrégation utilisées en analyse multicritère

Jean-Luc Marichal
Pierre Mathonet
Eric Tousset

Réunion du G.E.M.M.E. 18 Octobre 1996

1. Introduction

Définition 1. Soit $m \in \mathbb{N}_0$. Une *m-fonction d'agrégation* $M^{(m)}$ définie sur $[a,b]$ est une fonction réelle de m variables :

$$M^{(m)} : [a,b]^m \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_m) \to M^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$$

Définition 2. Un *opérateur d'agrégation* M défini sur $[a,b]$ est une suite $(M^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ de m-fonctions d'agrégation définies sur $[a,b]$.

Exemple : La moyenne arithmétique

$$M = (M^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$$

$$M^{(1)}(x_1) = x_1$$

$$M^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$M^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\dots$$

Application en analyse multicritère

$A = \{a, b, c, \dots\}$: ensemble d'actions

$F = \{1, 2, \dots, m\}$: ensemble de critères

$R_1, \dots, R_m$: relations valuées sur A

$$R_i : A \times A \to [0,1]$$

$R_i(a,b)$ = degré de crédibilité de "a n'est pas moins bon que b" pour le critère i.

1. Phase de modélisation

- Recherche de modèles appropriés pour les relations valuées monocritères R_i $(i = 1, \dots, m)$
- Détermination de l'importance ω_i des critères.

2. Phase d'agrégation

Recherche d'une relation globale R sur A :

$$R = M_\omega^{(m)}(R_1, \dots, R_m)$$

$$\forall a, b \in A : R(a,b) = M^{(m)}(R_1(a,b), \dots, R_m(a,b))$$

3. Phase d'exploitation

$$R \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{rangement des actions} \\ \boxed{\text{ou}} \\ \text{choix des "meilleures" actions} \end{array} \right.$$

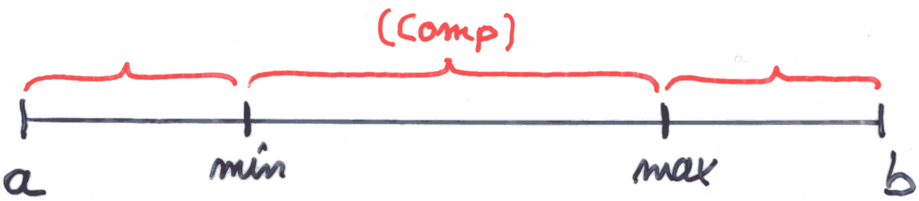
2. Propriétés de l'agrégation

2.1. Propriétés "naturelles"

La m-fonction d'agrégation $M^{(m)}$ définie sur $[a,b]$ est :

- symétrique (Sy) si $M^{(m)}$ est une fonction symétrique de ses arguments.
- croissante ($\nearrow$) si $M^{(m)}$ est une fonction croissante sur chaque argument.
- compensatoire (Comp) si $\forall\, \underline{x} \in [a,b]^m$, on a

$$\min_i x_i \leq M^{(m)}(x_1, \dots, x_m) \leq \max_i x_i$$



- idempotente (I) si $\forall\, x \in [a,b]$,

$$M^{(m)}(x, \dots, x) = x$$

2.2. Propriétés de stabilité

Supposons $x_1, \dots, x_m$ définis sur une échelle d'intervalle (températures, dates du calendrier, ...)

$$\begin{tikzcd} x_1, \dots, x_m \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\phi"] & M(x_1, \dots, x_m) \arrow[d, "\phi"] \\ \phi(x_1), \dots, \phi(x_m) \arrow[r, "M"] & \phi M(x_1, \dots, x_m) = M(\phi(x_1), \dots, \phi(x_m)) \end{tikzcd}$$

$$\phi(x) = rx + t \quad , r > 0$$

- Stabilité pour les transformations linéaires positives (SPL) :

$$M^{(m)}(rx_1 + t, \dots, rx_m + t) = r M^{(m)}(x_1, \dots, x_m) + t$$

$$\forall \underline{x} \in [a,b]^m \quad \forall r, t \in \mathbb{R}, r > 0$$

(SPL $\Rightarrow$ I)

- Stabilité pour la négation standard (SSN) :

$$M^{(m)}(1 - x_1, \dots, 1 - x_m) = 1 - M^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$$

$$\forall \underline{x} \in [a,b]^m$$

2.3 Propriétés algébriques

La m-fonction d'agrégation $M^{(m)}$ définie sur $[a,b]$ est :

- associative (A) si $m=2$ et $\forall x \in [a,b]^3$

$$M^{(2)}(M^{(2)}(x_1,x_2),x_3) = M^{(2)}(x_1, M^{(2)}(x_2,x_3))$$

- autodistributive (AD) si $m=2$ et $\forall x \in [a,b]^3$

$$M^{(2)}(x_1, M^{(2)}(x_2,x_3)) = M^{(2)}(M^{(2)}(x_1,x_2), M^{(2)}(x_1,x_3))$$

$$M^{(2)}(M^{(2)}(x_1,x_2),x_3) = M^{(2)}(M^{(2)}(x_1,x_3), M^{(2)}(x_2,x_3))$$

- bisymétrique (B) si $m \geq 2$ et

$$M^{(m)}(M^{(m)}(x_{11},\dots,x_{1m}),\dots, M^{(m)}(x_{m1},\dots,x_{mm}))$$

$$= M^{(m)}(M^{(m)}(x_{11},\dots,x_{m1}),\dots, M^{(m)}(x_{1m},\dots,x_{mm}))$$

pour toute matrice carrée

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} \in [a,b]^{m\times m}$$

L'opérateur d'agrégation M défini sur $[a,b]$ est

- **associatif (A)** si $\forall\, \underline{x} \in [a,b]^m$,

$$M^{(m)}(x_1,\dots,x_j,\boxed{x_{j+1},\dots,x_k},x_{k+1},\dots,x_m)$$
$$= M^{(m-k+j+1)}(x_1,\dots,x_j,\ \bar{x}\ ,x_{k+1},\dots,x_m)$$

- **décomposable (D)** si $\forall\, \underline{x} \in [a,b]^m$

$$M^{(m)}(x_1,\dots,x_j,\boxed{x_{j+1},\dots,x_k},x_{k+1},\dots,x_m)$$
$$= M^{(m)}(x_1,\dots,x_j,\ \bar{x},\dots,\bar{x}\ ,x_{k+1},\dots,x_m)$$

- **fortement décomposable (SD)** si $\forall\, \underline{x} \in [a,b]^m$

$$M^{(m)}(x_1,\dots,\boxed{x'_i},\dots,x_j,\dots,\boxed{x'_k},\dots,\boxed{x'_l},\dots)$$
$$= M^{(m)}(x_1,\dots,\bar{x}',\dots,x_j,\dots,\bar{x}',\dots,\bar{x}',\dots)$$

• fortement ~~décomposable~~ bisymétique (SB) si

$$M^{(p)}(M^{(m)}(x_{11},\dots,x_{1m}),\dots,M^{(m)}(x_{p1},\dots,x_{pm}))$$
$$= M^{(m)}(M^{(p)}(x_{11},\dots,x_{p1}),\dots,M^{(p)}(x_{1m},\dots,x_{pm}))$$

pour toute matrice

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm} \end{pmatrix} \in [a,b]^{p\times m}$$

3. Exemples

m-fonctions d'agrégation $M^{(m)}$

Moyenne arithmétique pondérée

$$WAM^{(m)}_{\omega^{(m)}}(x_1,\dots,x_m) = \sum_i \omega_i^{(m)} x_i$$

$$\sum_i \omega_i^{(m)} = 1 \,,\quad \omega_i^{(m)} \geq 0$$

Moyenne arithmétique

$$AM^{(m)}(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{m}\sum_i x_i$$

Opérateurs d'agrégation M

Moyenne arithmétique pondérée

$$WAM_\omega = \left(WAM^{(m)}_{\omega^{(m)}}\right)_{m\in\mathbb{N}_0}$$

$$\omega = \left(\omega^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}_0} \,,\ \sum \omega_i^{(m)} = 1 \,,\ \omega_i^{(m)} \geq 0$$

Moyenne arithmétique pondérée décomposable

$$DWAM_\theta = WAM_\omega \,,\quad \theta\in[0,1]$$

avec $$\omega_i^{(m)} = \frac{(1-\theta)^{m-i}\,\theta^{i-1}}{\sum_j (1-\theta)^{m-j}\,\theta^{j-1}}$$

Moyenne arithmétique

$$AM = \left(AM^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}_0} = DWAM_{\frac{1}{2}}$$

m-fonctions d'agrégation $M^{(m)}$ | Opérateurs d'agrégation M

Projection associée au i^{e} argument

$$P_i^{(m)}(x_1,\dots,x_m) = x_i$$

Minimum et maximum

$$MIN^{(m)}(x_1,\dots,x_m) = \min_i x_i$$

$$MAX^{(m)}(x_1,\dots,x_m) = \max_i x_i$$

Minimum et maximum partiels

$$MIN^{(m)}_{N^{(m)}}(x_1,\dots,x_m) = \min_{i\in N^{(m)}} x_i$$

$$MAX^{(m)}_{N^{(m)}}(x_1,\dots,x_m) = \max_{i\in N^{(m)}} x_i$$

$$N^{(m)} \neq \emptyset$$

Première et dernière projections

$$FP = (P_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0} = DWAM_0$$

$$LP = (P_m^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0} = DWAM_1$$

Minimum et maximum

$$MIN = (MIN^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$$

$$MAX = (MAX^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$$

Minimum et maximum partiels

$$MIN_N = (MIN^{(m)}_{N^{(m)}})_{m\in\mathbb{N}_0}$$

$$MAX_N = (MAX^{(m)}_{N^{(m)}})_{m\in\mathbb{N}_0}$$

$$N = (N^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$$

4. Caractérisations

$m=2$	$\nearrow$, SPL, A $MIN^{(2)}, MAX^{(2)}, P_1^{(2)}, P_2^{(2)}$	+ Sy $MIN^{(2)}, MAX^{(2)}$	+ SSN $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}$
$m=2$	$\nearrow$, SPL, AD $MIN^{(2)}, MAX^{(2)}$ $\{WAM^{(2)}_{\omega^{(2)}} \mid \omega^{(2)} \in [0,1]^2\}$	+ Sy $MIN^{(2)}, MAX^{(2)}, AM^{(2)}$	+ SSN $\{WAM^{(2)}_{\omega^{(2)}} \mid \omega^{(2)} \in [0,1]^2\}$
$m \geq 2$	$\nearrow$, SPL, B $\{MIN^{(m)}_{N^{(m)}} \mid N^{(m)} \subseteq \{1,\dots,m\}\}$ $\{MAX^{(m)}_{N^{(m)}} \mid N^{(m)} \subseteq \{1,\dots,m\}\}$ $\{WAM^{(m)}_{\omega^{(m)}} \mid \omega^{(m)} \in [0,1]^m\}$	+ Sy $MIN^{(m)}, MAX^{(m)}, AM^{(m)}$	+ SSN $\{WAM^{(m)}_{\omega^{(m)}} \mid \omega^{(m)} \in [0,1]^m\}$

$\nearrow$, SPL, A MIN, MAX, FP, LP	+ Sy MIN, MAX	+ SSN FP, LP
$\nearrow$, SPL, SD MIN, MAX, FP, LP, AM	+ Sy MIN, MAX, AM	+ SSN FP, LP, AM
$\nearrow$, SPL, D MIN, MAX $\{DWAM_\theta \mid \theta \in [0,1]\}$	+ Sy MIN, MAX, AM	+ SSN $\{DWAM_\theta \mid \theta \in [0,1]\}$
$\nearrow$, SPL, SB $\{MIN_N \mid N = (N^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}\}$ $\{MAX_N \mid N = (N^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}\}$ $\{WAM_\omega \mid \omega = (\omega^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}\}$	+ Sy MIN, MAX, AM	+ SSN $\{WAM_\omega \mid \omega = (\omega^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}\}$