Opérateurs d'agrégation et leurs propriétés en présence de critères interactifs :

ii) Applications à l'aide multicritère à la décision

Marc ROUBENS

Jean-Luc MARICHAL

Université de Liège

<u>Exemple</u> (Grabisch, 1996)

3 étudiants : a, b, c.

3 critères : mathématique (M), physique (P), littérature (L)

Opérateur d'agrégation : moyenne arith. pondérée (WAM)
Poids : 3, 3, 2.

étudiant	M	P	L	WAM_w
a	18	16	10	15.25
b	10	12	18	12.75
c	14	15	15	14.62

Aucun vecteur poids (w_M, w_P, w_L) vérifiant

$$w_M = w_P > w_L$$

ne peut favoriser c :

$$c \succ a \iff w_L > w_M$$

<u>Remède</u> : substituer au vecteur poids une mesure non-additive.

Définition (Choquet, 1953)

Une capacité sur $N = \{1, \dots, n\}$ est une fonction d'ensemble $v : 2^N \to [0,1]$ telle que

i) $v(\emptyset) = 0$, $v(N) = 1$

ii) $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$

Par exemple,

$$v(\emptyset) = 0$$

$v(\{M\}) = 0.45$ $\quad$ $v(\{P\}) = 0.45$ $\quad$ $v(\{L\}) = 0.30$

$v(\{M,P\}) = 0.50$ $\quad$ $v(\{M,L\}) = 0.90$ $\quad$ $v(\{P,L\}) = 0.90$

$$v(\{M,P,L\}) = 1$$

Fonctions pseudo-Booléennes :

$$v \quad \longleftrightarrow \quad f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$$

$$v(S) \quad = \quad f(e_S)$$

Théorème (Hammer & Rudeanu, 1968)

Toute fonction pseudo-booléenne $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ a une représentation unique en tant que polynôme multilinéaire à n variables :

$$f(x) = \sum_{T \subseteq N} a(T) \prod_{i \in T} x_i \,, \qquad x \in \{0,1\}^n$$

où $a(T) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{aligned} v(S) &= \sum_{T \subseteq S} a(T), & S \subseteq N \\ a(S) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T), & S \subseteq N \end{aligned}}$$

$a : 2^N \to \mathbb{R}$ est la représentation de Möbius de v.

L'intégrale de Choquet

Définition

Soit v une capacité sur N. L'intégrale (discrète) de Choquet d'une fonction $x : N \to [0,1]$ %. à v est définie par

$$C_v(x) := \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \left[v(\{(i), \dots, (n)\}) - v(\{(i+1), \dots, (n)\}) \right]$$

avec la convention que $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

Théorème (Chateauneuf & Jaffray, 1989)

$$\boxed{C_v(x) = \sum_{T \subseteq N} a(T) \bigwedge_{i \in T} x_i , \qquad x \in [0,1]^n}$$

Remarque : si v est additif

alors $C_v(x) = \sum_{i=1}^{n} v(i)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} a(i)\, x_i$

Théorème (Marichal, 1998)

Soit $M_v : [0,1]^m \to \mathbb{R}$ un opérateur d'agrégation dépendant d'une capacité v sur N.
Alors, M_v est

- linéaire % à v :

$\exists\, g_T : [0,1]^m \to \mathbb{R}$, $T \subseteq N$ tels que

$$M_v(x) = \sum_{T \subseteq N} a(T)\, g_T(x) \qquad \forall x\ \forall v$$

- croissant % à chaque variable
- stable pour les transformations linéaires positives

$$M_v(r x_1 + s, \ldots, r x_m + s) = r\, M_v(x_1, \ldots, x_m) + s$$

$\forall x \in [0,1]^m \quad \forall r > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$

- une extension de v :

$$M_v(e_S) = v(S), \qquad S \subseteq N$$

si et seulement si $M_v = C_v$.

Indices d'importance (ou indices de pouvoir)

Quel est le poids réel d'un critère i ?

Etant donné $i \in N$, il peut arriver que

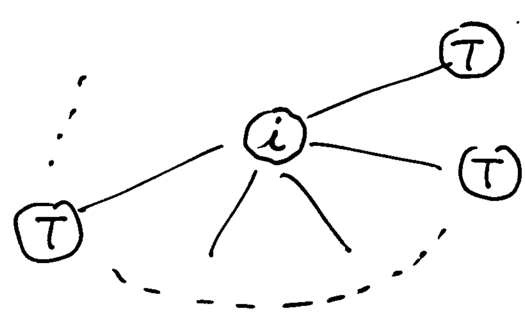
- $v(i) = 0$
- $v(T \cup i) \gg v(T)$ pour plusieurs $T \not\ni i$.

L'importance globale de $i \in N$ ne devrait pas être déterminée uniquement par $v(i)$ mais par tous les $v(T \cup i)$ et $v(T)$ tels que $T \not\ni i$.

La contribution marginale de i dans la coalition $T \not\ni i$ est définie par

$$\delta_i\, v(T \cup i) = v(T \cup i) - v(T)$$

Un indice de pouvoir de i est donné par une valeur moyenne des contributions marginales de i seul dans toutes les coalitions



$$\phi^v(i) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} p_T^i\, \delta_i v(T \cup i)\ , \quad \sum_{T \subseteq N \setminus i} p_T^i = 1\ , \quad p_T^i \geq 0$$

- Indice de pouvoir de Banzhaf (1965)

$$\phi_B^v(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{T \not\ni i} \delta_i v(T \cup i)$$

$$= \sum_{T \ni i} \frac{1}{2^{t-1}} a(T)$$

- Indice de pouvoir de Shapley (1953)

$$\phi_{Sh}^v(i) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n-1}{t}} \sum_{\substack{T \not\ni i \\ |T|=t}} \delta_i v(T \cup i)$$

$$= \sum_{T \not\ni i} \frac{(n-t-1)!\, t!}{n!} \delta_i v(T \cup i)$$

$$= \sum_{T \ni i} \frac{1}{t} a(T)$$

Propriété remarquable :

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_{Sh}^v(i) = 1 \qquad \forall v$$

Indices d'interaction

Interaction entre 2 joueurs / critères

La différence

$$a(ij) = v(ij) - v(i) - v(j) + v(\emptyset)$$
$$= v(ij) - [v(i) + v(j)]$$

semble refléter un degré d'interaction entre i et j

- inter. positive $a(ij) > 0$: i et j devraient coopérer
- inter. négative $a(ij) < 0$: i et j ne devraient pas coopérer
- inter. nulle $a(ij) = 0$: i et j agissent indépendamment.

Un indice d'interaction entre i et j devrait considérer non seulement $v(i)$, $v(j)$, $v(ij)$ mais aussi tous les $v(T \cup ij)$, $v(T \cup i)$, $v(T \cup j)$, $v(T)$ tels que $T \not\ni i,j$.

Considérons, pour tout $T \not\ni i,j$:

$$\underbrace{[v(T \cup ij) - v(T \cup i)]}_{\substack{\text{contribution de } j \\ \text{en présence de } i}} - \underbrace{[v(T \cup j) - v(T)]}_{\substack{\text{contribution de } j \\ \text{en l'absence de } i}}$$

> 0 : i et j ont intérêt à coopérer

< 0 : i et j n'ont pas intérêt à coopérer

$= 0$: i et j agissent indépendamment.

$$\delta_{ij}\, v(T \cup ij) = v(T \cup ij) - v(T \cup i) - v(T \cup j) + v(T)$$

= interaction marginale entre i et j, en présence des éléments de $T \not\ni i,j$.

Indice d'interaction entre i et j :

$$I^v(ij) = \sum_{T \not\ni ij} p_T^{ij}\, \delta_{ij}\, v(T \cup ij), \quad \sum_{T \not\ni ij} p_T^{ij} = 1, \quad p_T^{ij} \geq 0$$

Indice d'interaction à la Shapley (Murofushi & Soneda, 1993)

$$I_{sh}^v(ij) = \sum_{T \not\ni ij} \frac{(n-t-2)!\, t!}{(n-1)!}\, \delta_{ij}\, v(T \cup ij)$$

Des indices d'interaction parmi un sous-ensemble $S \subseteq N$ peuvent être définis comme extensions naturelles du cas $|S| = 2$. (Grabisch & Roubens, 1998)

$$I^v(S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} p_T^S \, \delta_S v(T \cup S) \, , \; \sum_{T \subseteq N \setminus S} p_T^S = 1 \, , \; p_T^S \geq 0$$

Indice d'interaction à la Shapley :

$$I_{Sh}^v(S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} \frac{(n-t-s)!\, t!}{(n-s+1)!} \, \delta_S v(T \cup S)$$

$$\boxed{I_{Sh}^v(S) = \sum_{T \supseteq S} \frac{1}{t-s+1} \, a(T)}$$

$$I_{Sh}^v(i) = \phi_{Sh}^v(i) = \sum_{T \ni i} \frac{1}{t} \, a(T)$$

Propriété de récurrence

$$I^v(S) = I^{v_{\cup i}^{N \setminus i}}(S \setminus i) - I^{v^{N \setminus i}}(S \setminus i)$$

Interaction relative à S : interaction relative à $S \setminus i$ en présence de i moins l'interaction relative à $S \setminus i$ en l'absence de i.

Modèle additif

Si v est additif alors $I^v(S) = 0 \;\; \forall \, |S| \geq 2$.

Exemple des étudiants

étudiant	M	P	L	WAM_w	C_v
a	18	16	10	15.25	13.90
b	10	12	18	12.75	13.60
c	14	15	15	14.62	14.60

$$WAM_w : a \succ c \succ b$$
$$C_v : c \succ a \succ b$$

Poids réels : $I_{sh}(M) = 0.29$ $I_{sh}(P) = 0.29$ $I_{sh}(L) = 0.42$

Interactions : $I_{sh}(MP) = -0.45$ $I_{sh}(ML) = 0.10$

$I_{sh}(PL) = 0.10$

$$I_{sh}(MPL) = -0.10$$

veto – faveur :

	M	P	L	
$\text{veto}(C_v; i)$	0.36	0.36	0.52	andness = 0.42
$\text{faveur}(C_v; i)$	0.57	0.57	0.60	orness = 0.58

Entropie :

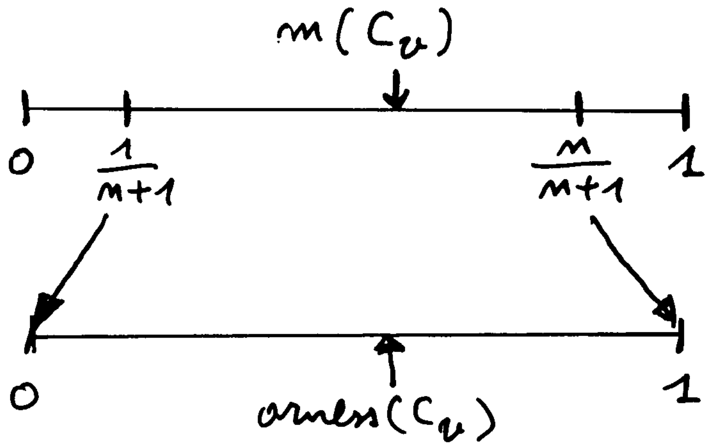
$$disp(v) = 0.82$$

Degré de disjonction

$$\min x_i \le C_v(x) \le \max x_i$$

Valeur moyenne de C_v :

$$m(C_v) = \int_{[0,1]^n} C_v(x)\,dx$$



$$m(\min) = \frac{1}{n+1}$$

$$m(\max) = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{orness}(C_v) = \frac{m(C_v) - m(\min)}{m(\max) - m(\min)} \in [0,1]$$

Remarque : $m(C_v) = I_{sh}^{v}(\emptyset) = \sum_{T \subseteq N} \frac{1}{t+1} a(T)$

C_v	$\text{orness}(C_v)$
WAM_ω	$1/2$
OWA_ω	$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (i-1)\,\omega_i$
OS_k	$\frac{k-1}{n-1}$
médiane	$1/2$

Indices de veto et faveur

Soit $M : [0,1]^n \to [0,1]$ un operateur d'agrégation.

- Un critère i est un veto pour M si

$$M(x_1, \dots, x_n) \leq x_i \quad \forall x \in [0,1]^n.$$

(un mauvais score sur i entraîne un mauvais score globa

- Un critère i est une faveur pour M si

$$M(x_1, \dots, x_n) \geq x_i \quad \forall x \in [0,1]^n.$$

(un bon score sur i entraine un bon score global)

Etant donné un critère $i \in N$ et une capacité v sur N, comment définir un degré de veto de i pour C_v ?

1re tentative : Soit x v.a. unif. distribuée dans $[0,1]$

$$\text{veto}(C_v ; i) = \Pr[C_v(x) \leq x_i]$$

Mais $\quad \Pr[WAM_w(x) \leq x_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } w_i = 1 \\ 1/2 & \text{sinon.} \end{cases}$

Non continu %. à v
donc non linéaire

2e tentative : caractérisation axiomatique.

L'indice veto $(C_v ; i)$ vérifie

- Linéarité % à v

$$\text{veto}(C_v ; i) = \sum_{T \subseteq N} p_T^i \, v(T) \qquad \forall v \; \forall i$$

- Symétrie

$$\text{veto}(C_v ; i) = \text{veto}(C_{\pi v} ; \pi(i)) \qquad \forall \pi \; \forall v \; \forall i$$

- Dictature

$$\text{veto}(\min_S ; i) = 1 \qquad \forall S \subseteq N \quad \forall i \in S$$

$$\min_{k \in S} x_k \leq x_i \qquad \forall i \in S$$

- Normalisation

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{veto}(C_v ; i) = \text{andness}(C_v) \qquad \forall v$$

si et seulement si

$$\boxed{\text{veto}(C_v ; i) = 1 - \frac{n}{n-1} \sum_{T \not\ni i} \frac{1}{t+1} \, a(T)}$$

faveur

faveur

faveur faveur

faveur max_S

$$\max_{k \in S} x_k \geqslant x_i \quad \forall i \in S$$

faveur omess (C_v)

$$\boxed{\text{faveur}(C_v; i) = \frac{n}{n-1} \sum_{T \not\ni i} \frac{1}{t+1} \left(a(T \cup i) + a(T)\right) - \frac{1}{n-1}}$$

C_v	$\mathrm{veto}(C_v; i)$	$\mathrm{faveur}(C_v; i)$
AM	$1/2$	$1/2$
WAM_ω	$\frac{1}{2} + \frac{n(\omega_i - 1/n)}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2} + \frac{n(\omega_i - 1/n)}{2(n-1)}$
OWA_ω	$1 - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (j-1)\,\omega_j$	$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (j-1)\,\omega_j$
médiane	$1/2$	$1/2$
min	1	0
max	0	1

Indice de dispersion

Considérons une intégrale de Choquet symétrique :

$$OWA_\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, x_{(i)} , \qquad x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Yager (1988) a proposé d'utiliser l'entropie de ω comme mesure d'utilisation des scores partiels

$$\mathrm{disp}(\omega) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \ln \omega_i$$

Exemple :

OWA_ω	ω	orness	disp(ω)
AM	$(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$	$1/2$	1
médiane	$(0 \dots 1 \dots 0)$	$1/2$	0

Entropie d'une capacité (Marichal, 1998)

$$\boxed{\mathrm{disp}(v) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{T \not\ni i} \frac{(n-t-1)!\, t!}{n!} [\delta_i v(T \cup i)] \ln [\delta_i v(T \cup i)]}$$

Propriétés

i) $\mathrm{disp}(v_{WAM_\omega}) = \mathrm{disp}(v_{OWA_\omega}) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \ln \omega_i$

ii) $0 \leq \mathrm{disp}(v) \leq 1$

iii) $\mathrm{disp}(v) = 1 \iff v = v_{AM}$

iv) $\mathrm{disp}(v) = 0 \iff v(S) \in \{0,1\} \quad \forall S$

Dans ce cas $C_v(x) \in \{x_1, \dots, x_n\}$

Capacités d'ordre 2

Modèle additif (n coefficients)

$$\omega \to WAM_\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a(i)\, x_i$$

Modèle général (2^n coefficients)

$$v \to C_v(x) = \sum_{T \subseteq N} a(T) \bigwedge_{i \in T} x_i$$

Comment interpréter $v(S), a(S), I_{Sh}(S)$ lorsque $|S| \geq 3$

Approximation : on suppose $I_{Sh}(S) = 0 \quad \forall\, |S| \geq 3$

$$(\Leftrightarrow \; a(S) = 0 \quad \forall\, |S| \geq 3)$$

$$\Downarrow$$

Modèle d'ordre 2 $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right.$ coefficients$\left.\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} v(S) &= \sum_{i \in S} a(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq S} a(ij) \\ C_v(x) &= \sum_{i \in N} a(i) x_i + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} a(ij)\,(x_i \wedge x_j) \end{aligned}}$$

$$I_{Sh}(i,j) = a(ij) \in [-1, 1]$$

Détermination des poids des critères interactifs
Modèle d'ordre 2

Données N = ens. de critères

Paramètres

- Préordre partiel sur N : $\succsim_N$
- Préordre partiel sur les paires de critères : $\succsim_P$
- Signe des interactions entre certaines paires $a(ij)$: $>0, =0, <0$.

Apprentissage

- A = ens. d'actions
- Table de scores x_i^a (même éch. d'int.)
- Préordre partiel sur A : $\succsim_A$

Inconnues : $a(i)$ et $a(ij)$, $i,j \in N$

$$i \succ_N j \iff a(i) > a(j)$$

$$ij \succ_P kl \iff a(ij) > a(kl)$$

$$\text{sign}(ij) = 1 \iff a(ij) > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a \succ_A b \iff C_v(a) - C_v(b) > \delta \\ a =_A b \iff -\delta \leq C_v(a) - C_v(b) \leq \delta \end{array}\right\} \text{semiordre partiel avec seuil } \delta$$

On se ramène donc à un problème de satisfaction de contraintes linéaires

<u>Proposition</u> $x \in \mathbb{R}^n$ est solution de

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i & i = 1 \dots p \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_j < d_i & i = 1 \dots q \end{cases} \qquad (*)$$

ssi $\exists\ \varepsilon > 0$ t.q.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i & i = 1 \dots p \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_j \leq d_i - \varepsilon & i = 1 \dots q \end{cases} \qquad (**)$$

En particulier, une solution existe ssi le PL

$$\max \quad Z = \varepsilon$$

$$\text{s.c.} \quad (**)$$

a une solution optimale $x^* \in \mathbb{R}^n$ avec une valeur optimale $\varepsilon^* > 0$.

Dans ce cas x^* est une solution réalisable de $(*)$.

$\max \quad z = \varepsilon$

s.c. $C(a) - C(b) \geq \delta + \varepsilon$ si $a \succ_A b$; $-\delta \leq C(a) - C(b) \leq \delta$ si $a \sim_A b$ } semi-ordre partiel avec seuil δ

$a_i - a_j \geq \varepsilon$ si $i \succ_N j$; $a_i = a_j$ si $i \sim_N j$ } rangement des critères (poids apparents)

$a_{ij} - a_{kl} \geq \varepsilon$ si $ij \succ_P kl$; $a_{ij} = a_{kl}$ si $ij \sim_P kl$ } rangement des paires de critères (interactions)

$a_{ij} \geq \varepsilon$ (resp. $\leq -\varepsilon$) si $a_{ij} > 0$ (resp < 0) ; $a_{ij} = 0$ si $a_{ij} = 0$ } signe des interactions

$\sum_i a_i + \sum_{\{i,j\}} a_{ij} = 1$; $a_i \geq 0 \quad \forall i \in N$; $a_i + \sum_{j \in T} a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in N \; \forall T \not\ni i$ } conditions limite et monotonie

$C(a) = \sum_{i \in N} a_i x_i^a + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} a_{ij} (x_i^a \wedge x_j^a) \quad \forall a \in A$ } déf. de C_v

Remarques :

i) Polyèdre vide $\Rightarrow$ { δ trop grand ? décideur incohérent ? Modèle d'ordre 2 trop pauvre ?

ii) $a_i \in [0,1]$ et $a_{ij} \in [-1,1]$, donc $\varepsilon^* \leq 2$.

iii) Si $x_i^a \in [0,1]$ devient $x_i^a \in [p,q]$

$$C(a) - C(b) \geq \delta + \frac{\varepsilon}{q-p}$$

- $q-p$ grand $\longrightarrow \frac{\varepsilon}{q-p}$ petit $\longrightarrow C(a)$ peu contr.
- $q-p$ petit $\longrightarrow \varepsilon$ petit $\longrightarrow a_i$ ou a_{ij} peu contr.

Exemple 2

3 critères : algèbre (A), probabilité (P), statistique (S)

Orientation : statistique

$$S \succ_N \begin{cases} A \\ P \end{cases}$$

Raisonnement du décideur : si un étudiant est excellent en statistique alors il est excellent, quelque soient les autres cotes. Sinon, on prend en compte les autres cotes.

étudiant	A	P	S
a	12	12	19
b	16	16	15
c	19	19	12

$$a \succ_A c \succ_A b$$

Remarque : aucune mesure additive ne peut produire ce rangement

$\Rightarrow$ on passe à l'ordre 2 (interactions)

Le décideur annonce que

$$I(PS) < 0$$

Pour $\delta = 0.025$, on trouve

$$\varepsilon^* = 0.06$$

	A	P	S
$a(i)$	0.71	0.06	1
$I_{sh}(i)$	0.36	0.03	0.62
$veto(i)$	0.24	0.07	0.42
$faveur(i)$	0.80	0.47	1

$$omess(C_v) = 0.76 \quad (\text{élevé})$$
$$disp(v) = 0.35 \quad (\text{faible})$$

I	P	S
A	0	-0.71
P		-0.06

étudiant	A	P	S	C_v
a	12	12	19	19
b	16	16	15	15.77
c	19	19	12	17.38

On ajoute une contrainte : $\text{omess}(C_v) \leq 0.6$

$\varepsilon^* = 0.03$

	A	P	S
$a(i)$	0.46	0.03	0.82
$I_{sh}(i)$	0.32	0.11	0.57
$\text{veto}(i)$	0.38	0.27	0.54
$\text{faveur}(i)$	0.60	0.38	0.82

$\text{omess}(C_v) = 0.60$

$\text{disp}(v) = 0.66$

I	P	S
A	0.18	−0.46
P		−0.03

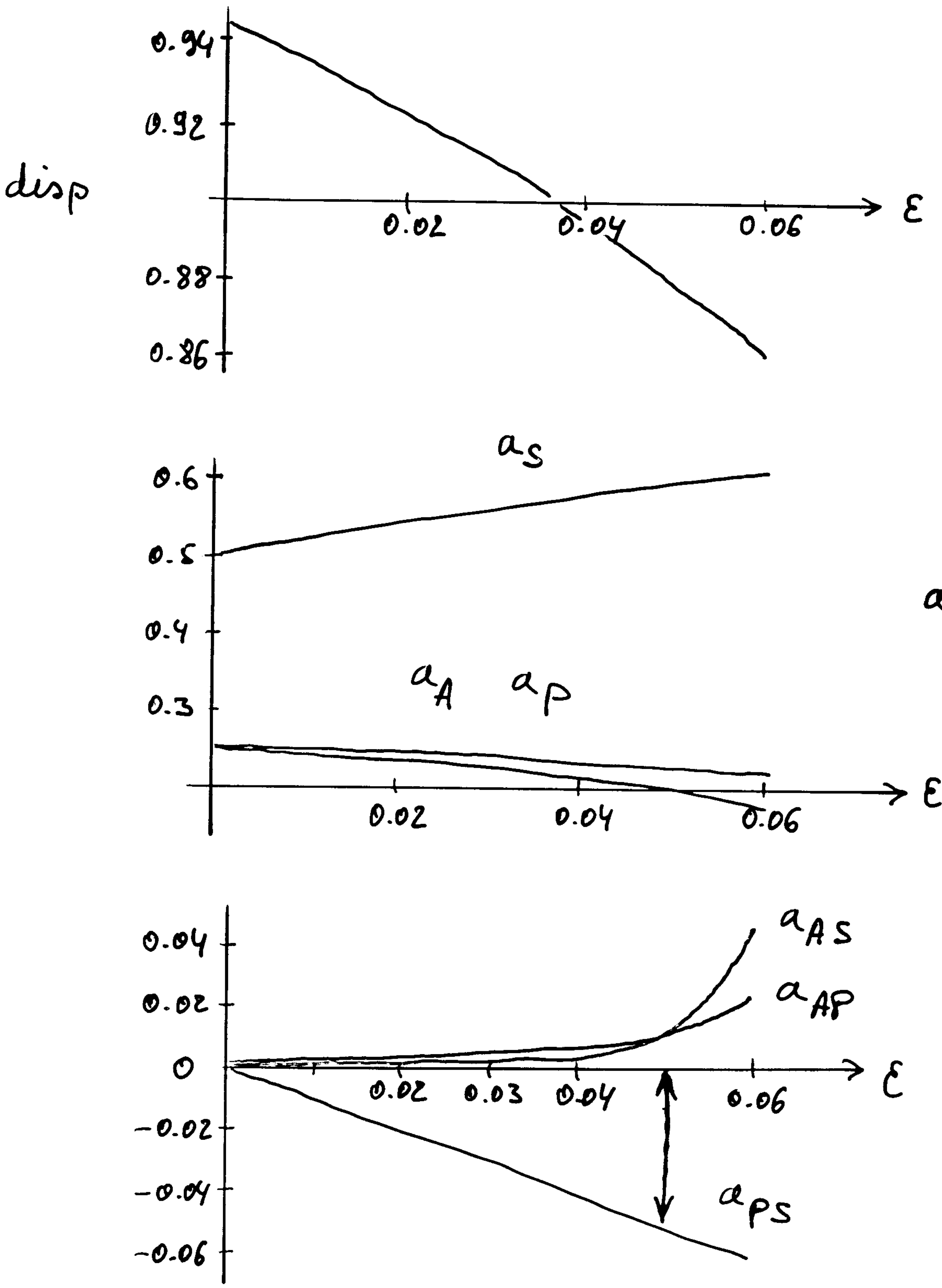
étudiant	A	P	S	C_v
a	12	12	19	17.71
b	16	16	15	15.67
c	19	19	12	16.69

Autre approche

ε est un paramètre variable

1) on maximise la dispersion sous les mêmes contraintes

2) on choisi ε (après optimisation) de telle sorte que la solution soit suffisamment contrastée.



$a_S > \begin{cases} a_A \\ a_P \end{cases}$

<u>OK</u>

$a_{PS} < 0$

$\boxed{\varepsilon = 0.05}$