L'intégrale de Choquet en tant qu'outil permettant d'agréger des utilités en présence de points de vue interactifs

Jean-Luc Marichal

Faculté d'Economie, Université de Liège

Sart Tilman – B31 – 4000 Liège, Belgique

e-mail: JL.Marichal@ulg.ac.be

Soient un ensemble *d'actions* $A = \{a, b, c, \ldots\}$ et un ensemble de *critères* $N = \{1, \ldots, n\}$ dans un problème d'aide multicritère à la décision. A chaque action $a \in A$ est associé un *profil* $x(a) = (x_1(a), \ldots, x_n(a)) \in \mathbb{R}^n$ où $x_i(a)$ représente l'utilité de a par rapport au critère i, avec $x_i(a) \in E_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Nous supposerons que toutes les utilités $x_i(a)$ sont définies sur une même échelle d'intervalles ($E_i = E \; \forall i$).

Supposons que les préférences sur A soient connues à l'avance et exprimées par le décideur au moyen d'une relation binaire $\succeq$. Dans le modèle classique de l'utilité multiattribut (MAUT), le problème consiste à construire une *fonction d'utilité* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ représentant les preferences du décideur, c'est à dire telle que

$$a \succ b \Leftrightarrow U[x(a)] > U[x(b)], \quad \forall a, b \in A.$$

Le sous-ensemble $S \subseteq N$ est dit *préférentiellement indépendant* de $N \setminus S$ si, pour tout $x_S, y_S \in E_S$ et tout $x_{N\setminus S}, z_{N\setminus S} \in E_{N\setminus S}$, nous avons

$$\begin{gathered}(x_S, x_{N\setminus S}) \succeq (y_S, x_{N\setminus S}) \\ \Updownarrow \\ (x_S, z_{N\setminus S}) \succeq (y_S, z_{N\setminus S}).\end{gathered}$$

L'ensemble des critères N est dit *mutuellement préférentiellement indépendant* si S est préférentiellement indépendant de $N \setminus S$ pour tout $S \subseteq N$.

Dans certains problèmes, ce principe pourrait être violé, comme on peut le voir dans l'exemple suivant

	prix	consommation	confort
voit. 1	10.000 Euro	10 ℓ/100 km	très bon
voit. 2	10.000 Euro	9 ℓ/100 km	bon
voit. 3	30.000 Euro	10 ℓ/100 km	très bon
voit. 4	30.000 Euro	9 ℓ/100 km	bon

Le décideur pourrait préférer la voiture 2 à la voiture 1, mais aussi la voiture 3 à la voiture 4.

Nous savons que ce principe est une condition nécessaire pour que la fonction d'utilité soit additive, c'est à dire pour qu'il existe un vecteur poids $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in [0, 1]^n$ vérifiant $\sum_i \omega_i = 1$ tel que

$$U[x(a)] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, x_i(a), \quad \forall a \in A.$$

Lorqu'il y a des critères interactifs, cette moyenne arithmétique pondérée peut être étendue à une intégrale de Choquet:

$$U[x(a)] = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}(a) \, [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})],$$

où $(\cdot)$ indique une permutation telle que $x_{(1)}(a) \leq \ldots \leq x_{(n)}(a)$. Aussi, $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$, et $A_{(n+1)} = \emptyset$. Nous observons ainsi que les poids ω_i relatifs aux critères, qui étaient supposés indépendant, ont été substitués par les poids $\mu(i_1, \ldots, i_k)$ relatifs à toute combinaison de critères interactifs.

Considérons les fonctions d'agrégation $M_\mu : E^n \to \mathbb{R}$. Ces fonctions s'identifient aux intégrales de Choquet lorsque les quatre conditions suivantes sont satisfaites:

- *linéarité par rapport à μ*: il existe des fonctions $g_T : E^n \to \mathbb{R}$, $T \subseteq N$, telles que
$$M_\mu(x) = \sum_{T \subseteq N} \mu(T) \, g_T(x),$$
- *croissance sur chaque argument*,
- *stabilité pour les transformations linéaires positives*: pour tout $r > 0$ et $s \in \mathbb{R}$,
$$M_\mu(r\,x + s) = r\,M_\mu(x) + s,$$
- *extension de μ*:
$$M_\mu(e_T) = \mu(T), \quad T \subseteq N,$$
où e_T est le vecteur d'incidence de T in $\{0, 1\}^n$.

Mots-clés: aide multicritère à la décision, critères interactifs, intégrale de Choquet.