# L'utilisation de l'intégrale de Sugeno discrète en aide multicritère à la décision

Jean-Luc Marichal
Faculté d'Economie, Université de Liège
Boulevard du Rectorat 7 - B31, B-4000 Liège, Belgique
Email: jl.marichal@ulg.ac.be

**Abstract**

Nous présentons un modèle permettant d'agréger des critères de décision lorsque l'information disponible est de nature qualitative. L'utilisation de l'intégrale de Sugeno en tant que fonction d'agrégation est justifiée par une approche axiomatique.

**Mots clés:** aide multicritère à la décision, échelle ordinale, fonction d'agrégation, intégrale (floue) de Sugeno.

Considérons un ensemble fini d'actions potentielles $A = \{a, b, c, \ldots\}$ parmi lequelles le décideur doit choisir. Considérons également un ensemble fini de critères à satisfaire $N = \{1, \ldots, n\}$. Chaque critère $i \in N$ est représenté par une application $g_i$ de l'ensemble des actions $A$ vers une échelle ordinale finie donnée

$$X_i = \{r_1^{(i)} < \cdots < r_{k_i}^{(i)}\} \subset \mathrm{I\!R},$$

c'est-à-dire une échelle unique à l'ordre près. Par exemple, une échelle d'évaluation de l'importance d'articles scientifiques par des "referees" telle que

1=Faible, 2=Moyen, 3=Bon, 4=Très bon, 5=Excellent

est une échelle ordinale finie. Le codage par des nombres réels est utilisé uniquement pour fixer un ordre sur l'échelle.

Pour chaque action $a \in A$ et chaque critère $i \in N$, $g_i(a)$ représente l'évaluation de $a$ pour le critère $i$. Nous faisons l'hypothèse que toutes les applications $g_i$ sont données à l'avance.

Notre but principal est de construire un critère unique à partir des critères donnés. Un tel critère, qui est sensé être un représentant des critères originaux, est modélisé par une application $g$ de $A$ vers une échelle ordinale finie donnée

$$X = \{r_1 < \cdots < r_k\} \subset \mathrm{I\!R}.$$

La valeur $g(a)$ représente alors l'évaluation globale de l'action $a$ exprimée dans l'échelle $X$. Sans perte de généralité, nous pouvons plonger cette échelle dans l'intervalle unitaire $[0, 1]$ et fixer les points extrêmes $r_1 := 0$ et $r_k := 1$.

Pour agréger proprement les évaluations partielles de $a \in A$, nous supposerons qu'il existe $n$ applications non-décroissantes $U_i : X_i \to X$ $(i \in N)$ et une fonction d'agrégation $M : X^n \to X$ telles que

$$g(a) = M[U_1(g_1(a)), \ldots, U_n(g_n(a))] \qquad (a \in A).$$

Les applications $U_i$, appelées *fonctions d'utilité*, permettent d'exprimer toutes les évaluations partielles dans l'échelle commune $X$, de telle sorte que la fonction $M$ agrège des évaluations commensurables (comparables). Nous faisons aussi l'hypothèse que $U_i(r_1^{(i)}) = 0$ et $U_i(r_{k_i}^{(i)}) = 1$ pour tout $i \in N$.

Nous présentons un cadre axiomatique pour définir un modèle d'agrégation approprié. Comme présenté ci-dessus, ce modèle est déterminé par l'application $g$, qui peut en fait être construite en deux étapes:

1. La fonction d'agrégation $M$ peut être identifiée au moyen d'une approche axiomatique. Celle que nous proposons ici conduit à l'intégrale de Sugeno discrète, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$\mathcal{S}_v(x) := \bigvee_{i=1}^{n} \Big[x_{(i)} \wedge v(\{(i), \ldots, (n)\})\Big] \qquad (x \in [0,1]^n),$$

   où $v$ est une mesure floue sur $N$, c'est-à-dire une fonction d'ensemble monotone $v : 2^N \to [0,1]$ vérifiant $v(\emptyset) = 0$ et $v(N) = 1$. De plus, $(\cdot)$ représente une permutation sur $N$ telle que $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

2. Chaque fonction d'utilité $U_i$ $(i \in N)$ peut être identifiée en posant des questions appropriées au décideur. Pour obtenir ces fonctions, nous présentons une procédure basée sur l'identité suivante ($e_S$ représente le vecteur caractéristique de $S$ dans $\{0,1\}^n$):

$$\mathcal{S}_v(U_i(r_j^{(i)})\, e_{\{i\}} + e_S) = \text{médiane}\Big(U_i(r_j^{(i)}), v(S), v(S \cup \{i\})\Big),$$

   valable pour tout $i \in N$, tout $S \subseteq N \setminus \{i\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, k_i\}$. Ainsi par exemple, si

$$v(S) < \mathcal{S}_v(U_i(r_j^{(i)})\, e_{\{i\}} + e_S) < v(S \cup \{i\})$$

   alors l'utilité $U_i(r_j^{(i)})$ est immédiatement donnée par

$$U_i(r_j^{(i)}) = \mathcal{S}_v(U_i(r_j^{(i)})\, e_{\{i\}} + e_S).$$

## References


[1] J.-L. Marichal, On Sugeno integral as an aggregation function, *Fuzzy Sets and Systems*, to appear.

[2] J.-L. Marichal, Axiomatic foundations for a qualitative multicriteria decision making theory. Preprint 9920, GEMME, Faculty of Economics, University of Liège, Belgium, 1999.

[3] J.-L. Marichal and M. Roubens, Consensus with ordinal data, *7th Eur. Congr. on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT'99)*, Aachen, Germany, September 13–16, 1999.

[4] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.

[5] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in: M.M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines (Eds.), *Fuzzy Automata and Decision Processes*, (North-Holland, Amsterdam, 1977): 89–102.