Agrégation de critères interactifs au moyen de l'intégrale de Choquet discrète

Jean-Luc MARICHAL

Université de Liège

1. Agrégation en aide multicritère à la décision

- Alternatives $A = \{a, b, c, \dots\}$
- Critères $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- Profil $a \in A \longrightarrow (x_1^a, \dots, x_n^a) \in \mathbb{R}^n$

  scores partiels commensurables

- Opérateur d'agrégation $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

	critère 1	...	critère n	score global
a	x_1^a	...	x_n^a	$M(x_1^a, \dots, x_n^a)$
b	x_1^b	...	x_n^b	$M(x_1^b, \dots, x_n^b)$
⋮	⋮		⋮	⋮

Exemple : moyenne arithmétique pondérée

$$MAP_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

avec $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \geq 0 \quad \forall i$

2. Que signifie critères interactifs ?

Exemple :

	Statistique	Probabilités	Algèbre
Poids :	0.30	0.30	0.40

$$MAP_w(1,0,0) = w_{St} = 0.30$$
$$MAP_w(0,1,0) = w_{Pr} = 0.30$$
$$MAP_w(1,1,0) = 0.60 \;!$$

Quel est le poids de $\{St, Pr\}$?

Définition (Choquet, 1953 ; Sugeno, 1974)

Une mesure floue sur N est une fonction $v : 2^N \to [0,1]$ telle que

i) $v(\emptyset) = 0$, $v(N) = 1$

ii) $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$.

$v(S)$ est interprété comme le poids d'importance du sous-ensemble S de critères

Une mesure floue est additive si

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T) \qquad \text{si } S \cap T = \emptyset$$

$\rightarrow$ critères "indépendants"

2.1 Corrélation

- Les critères $i,j \in N$ sont positivement corrélés si on peut observer une corrélation positive entre les scores partiels relatifs à i et ceux relatifs à j.

  La satisfaction simultanée de i et j est fréquente

  Exemple : Statistique et Probabilités

  Modélisation : $v(i,j) < v(i) + v(j)$

  $$v(T \cup ij) - v(T \cup i) < v(T \cup j) - v(T) \qquad \forall T \not\ni i,j$$

- En cas d'$=$, les critères i et j sont non corrélés

- Supposons i et j négativement corrélés.

  La satisfaction simultanée de i et j est plutôt rare

  Exemple : Droit et Algèbre

  Modélisation : $v(ij) > v(i) + v(j)$

  $$v(T \cup ij) - v(T \cup i) > v(T \cup j) - v(T) \qquad \forall T \not\ni i,j$$

2.2 Interchangeabilité / complémentarité

Soient $i, j \in N$.

- Interchangeabilité : Le décideur souhaite que la satisfaction d'un seul critère produise presque le même effet que la satisfaction des deux.

  Exemple : Sciences et Littérature

  $$\text{Importance de } \{i,j\} \approx \left\{ \begin{array}{l} \text{Importance de } i \\ \text{Importance de } j \end{array} \right.$$

  Modélisation :

  $$v(T \cup ij) \approx \left\{ \begin{array}{l} v(T \cup i) \\ v(T \cup j) \end{array} \right\} > v(T) \qquad \forall T \not\ni ij$$

- Complémentarité : Le décideur souhaite que la satisfaction d'un seul critère produise très peu d'effet par rapport à la satisfaction des deux.

  Exemple : Anglais et Néerlandais

  $$\text{Importance de } \{i,j\} > \left\{ \begin{array}{l} \text{Importance de } i \\ \text{Importance de } j \end{array} \right.$$

  Modélisation :

  $$v(T \cup ij) > \left\{ \begin{array}{l} v(T \cup i) \\ v(T \cup j) \end{array} \right\} \approx v(T) \qquad \forall T \not\ni i,j$$

2.3 (In)dépendance préférentielle (MAUT)

Soient les profils $x, x' \in \mathbb{R}^n$.

x est "préféré" à x' ($x \succeq x'$) si $M(x) \geq M(x')$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall S \subseteq N$, on note

$$x S y := \sum_{i \in S} x_i e_i + \sum_{i \notin S} y_i e_i$$

Définition

Le sous-ensemble S est préférentiellement indépendant de $N \setminus S$ si $\forall x, x', y, z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$xSy \succeq x'Sy \iff xSz \succeq x'Sz$$

Théorème (Scott et Suppes, 1958)

Si $M = MAP_w$ alors tout S est préférentiellement indépendant de $N \setminus S$.

Exemple (Roubens, 1999)

Restaurants	CG	ST	PF
a	18	15	19
b	15	18	19
c	18	15	11
d	15	18	11

Aucune MAP ne peut modéliser $a \succ b$ et $c \prec d$!

3. L'intégrale de Choquet discrète

Définition

Soit $v \in \mathcal{F}_N$. L'intégrale de Choquet (discrète) de $x \in \mathbb{R}^n$ par rapport à v est définie par

$$C_v(x) = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \left[v(\{(i), \dots, (n)\}) - v(\{(i+1), \dots, (n)\}) \right]$$

avec la convention que $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

Exemple Si $x_3 \leq x_1 \leq x_2$, on a

$$\begin{aligned} C_v(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \left[v(3,1,2) - v(1,2) \right] \\ &+ x_1 \left[v(1,2) - v(2) \right] \\ &+ x_2 \; v(2) \end{aligned}$$

Cas particulier :

$$v \text{ additif} \Rightarrow C_v = MAP_w$$

$$C_v(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, v(i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i$$

4. Propriétés de l'intégrale de Choquet

4.1 Linéarité par rapport à la mesure floue v

Il existe 2^n fonctions $f_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(T \subseteq N)$ telles que

$$C_v = \sum_{T \subseteq N} v(T)\, f_T \qquad (v \in \mathcal{F}_N)$$

En effet, on montre que

$$C_v(x) = \sum_{T \subseteq N} v(T) \left[\sum_{K \supseteq T} (-1)^{|K|-|T|} \bigwedge_{i \in K} x_i \right]$$

4.2 Monotonie

Pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x_i \leq x'_i \;\; \forall i \in N \;\Rightarrow\; C_v(x) \leq C_v(x')$$

4.3 Stabilité par rapport aux transformations linéaires positives

Supposons que chaque critère $i \in N$ est une échelle d'intervalle, c'est-à-dire une application

$$x_i : A \to \mathbb{R}$$

définie à une transformation linéaire positive près

$$\varphi(t) = rt + s \quad (r > 0)$$

Exemple : cotes obtenues en Algèbre

Sur $[0,20]$: $16, 11, 7, 14$

Sur $[0,1]$: $0.80, 0.55, 0.35, 0.70$

Sur $[-1,1]$: $0.60, 0.10, -0.30, 0.40$

Supposons que tous les critères définissent la même échelle d'intervalle

$$\begin{tikzcd}
(x_1,\dots,x_n) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\text{agr.}"] & (rx_1+s,\dots,rx_n+s) \arrow[d, "\text{agr.}"] \\
M(x_1,\dots,x_n) \arrow[r, "\varphi"] & \boxed{\begin{array}{c} M(rx_1+s,\dots,rx_n+s) \\ \parallel \\ r\,M(x_1,\dots,x_n)+s \end{array}}
\end{tikzcd}$$

$$C_v(rx_1+s,\dots,rx_n+s) = r\,C_v(x_1,\dots,x_n)+s$$

Les profils peuvent être plongés dans $[0,1]^n$.

4.4. Pondération appropriée par v

Que signifie

"$v(S)$ = poids d'importance de S" ?

<u>Notation</u> : $\forall S \subseteq N$, e_S = vecteur caractéristique de S dans $\{0,1\}^n$

Exemple : $N = \{1,2,3\}$

$e_{\{1,3\}} = (1,0,1)$

- <u>Cas de l'opérateur MAP_w</u> :

Poids d'un critère :

$$MAP_w(e_{\{i\}}) = w_i \qquad (i \in N)$$

Poids d'un groupe S de critères indépendants :

$$MAP_w(e_S) = \sum_{i \in S} w_i$$

- <u>Cas de l'intégrale de Choquet</u>

Poids d'un groupe S de critères dépendants :

$$\boxed{C_v(e_S) = v(S) \qquad (S \subseteq N)}$$

Exemple :

Statistique Probabilités Algèbre

Poids de $\{St, Pr\}$:

$$M_v(1,1,0) = v(\{St, Pr\})$$

Si St et Pr étaient non corrélés :

$$M_v(1,1,0) = v(\{St\}) + v(\{Pr\})$$

La corrélation s'exprime par

$$v(\{St, Pr\}) < v(\{St\}) + v(\{Pr\})$$

Définition alternative

$$v(\{St, Pr\}) = \cancel{C_v(1,1,0)}$$

= évaluation globale minimale qu'on est prêt à donner à l'alternative qui présente le profil $(1,1,?)$

$$= \min_{x \in [0,1]} C_v(1,1,x)$$

$$\boxed{v(S) := \min_{x \in [0,1]^n} C_v((1,\dots,1)_S\, x) \qquad (S \subseteq N)}$$

5. Caractérisation de l'intégrale de Choquet

Théorème (Marichal, 1998)

Les opérateurs $M_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(v \in \mathcal{F}_N)$ sont

- linéaires par rapport à v
- croissants sur chaque argument
- stables pour les transformations linéaires positives
- proprement pondérés par v

si et seulement si $M_v = C_v$ pour tout $v \in \mathcal{F}_N$.