

---

# Calcul de Malliavin sur les variétés Riemanniennes

## *Application à un problème de filtrage non linéaire*

Jang SCHILTZ

`schiltzj@cu.lu`

Université du Luxembourg  
Faculté de Droit, d'Économie et de Finance

# Aperçu général

---

# Aperçu général

---

- Les idées essentielles du Calcul de Malliavin

# Aperçu général

---

- Les idées essentielles du Calcul de Malliavin
- Équations différentielles stochastiques sur les variétés riemanniennes

# Aperçu général

---

- Les idées essentielles du Calcul de Malliavin
- Équations différentielles stochastiques sur les variétés riemanniennes
- Calcul de Malliavin sur les variétés riemanniennes

# Aperçu général

---

- Les idées essentielles du Calcul de Malliavin
- Équations différentielles stochastiques sur les variétés riemanniennes
- Calcul de Malliavin sur les variétés riemanniennes
- Filtrage non linéaire sur les variétés riemanniennes

# Les idées essentielles du Calcul de Malliavin

# L'espace de Wiener

---



# L'espace de Wiener

---

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

# L'espace de Wiener

---

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  le complété de la  $\sigma$ -algèbre de Borel sur  $\Omega$  par rapport à la mesure  $P$ .

# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  le complété de la  $\sigma$ -algèbre de Borel sur  $\Omega$  par rapport à la mesure  $P$ .

Notons  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  la filtration définie par la famille  $\mathcal{F}_t$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ , engendrée par  $\{w(s) : 0 \leq s \leq t, w \in \Omega\}$  et contenant les sous-ensembles de  $\mathcal{F}$  de mesure nulle.

# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

On appelle  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  l'espace de Wiener standard.

# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

On appelle  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  l'espace de Wiener standard.

En fait, on peut considérer chaque trajectoire  $t \rightarrow W(t, \omega)$  du processus de Wiener comme un élément  $\omega$  de  $C_0([0, T])$ .

# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

On appelle  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  l'espace de Wiener standard.

En fait, on peut considérer chaque trajectoire  $t \rightarrow W(t, \omega)$  du processus de Wiener comme un élément  $\omega$  de  $C_0([0, T])$ .

On note

$$W(t, \omega) = \omega(t)$$

# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

On appelle  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  l'espace de Wiener standard.

En fait, on peut considérer chaque trajectoire  $t \rightarrow W(t, \omega)$  du processus de Wiener comme un élément  $\omega$  de  $C_0([0, T])$ .

On note

$$W(t, \omega) = \omega(t) = w_t(\omega)$$



# L'espace de Wiener

Soit  $\Omega = C_0([0, T])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues  $\omega$  sur  $[0, T]$  telles que  $\omega(0) = 0$ , muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t)|.$$

Notons  $P$  la mesure de Wiener standard, c'est-à-dire la mesure de probabilité de transition  $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}|x - y|^2)$ , pour  $t > 0; x, y \in \mathbb{R}$ .

On appelle  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  l'espace de Wiener standard.

En fait, on peut considérer chaque trajectoire  $t \rightarrow W(t, \omega)$  du processus de Wiener comme un élément  $\omega$  de  $C_0([0, T])$ .

On note

$$W(t, \omega) = \omega(t) = w_t(\omega) = w_t.$$

# La dérivée de Malliavin

---

Soient  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire,  $g \in L^2([0, T])$  et  $\gamma(t) = \int_0^t g(s) ds \in \Omega$ .

# La dérivée de Malliavin

---

Soient  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire,  $g \in L^2([0, T])$  et  $\gamma(t) = \int_0^t g(s) ds \in \Omega$ .

La dérivée directionnelle de  $F$  dans la direction  $\gamma \in \Omega$  au point  $\omega \in \Omega$  est alors la variable aléatoire  $D_\gamma F$  définie par

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{d}{d\varepsilon} [F(\omega + \varepsilon\gamma)]_{\varepsilon=0}.$$

# La dérivée de Malliavin

Soient  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire,  $g \in L^2([0, T])$  et  $\gamma(t) = \int_0^t g(s)ds \in \Omega$ .

La dérivée directionnelle de  $F$  dans la direction  $\gamma \in \Omega$  au point  $\omega \in \Omega$  est alors la variable aléatoire  $D_\gamma F$  définie par

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{d}{d\varepsilon} [F(\omega + \varepsilon\gamma)]_{\varepsilon=0}.$$

Supposons qu'il existe une fonction  $\psi(t, x) \in L^2([0, T] \times \Omega)$  telle que

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \psi(t, \omega)g(t)dt.$$

# La dérivée de Malliavin

Soient  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire,  $g \in L^2([0, T])$  et  $\gamma(t) = \int_0^t g(s)ds \in \Omega$ .

La dérivée directionnelle de  $F$  dans la direction  $\gamma \in \Omega$  au point  $\omega \in \Omega$  est alors la variable aléatoire  $D_\gamma F$  définie par

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{d}{d\varepsilon} [F(\omega + \varepsilon\gamma)]_{\varepsilon=0}.$$

Supposons qu'il existe une fonction  $\psi(t, x) \in L^2([0, T] \times \Omega)$  telle que

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \psi(t, \omega)g(t)dt.$$

On dit alors que  $F$  est différentiable et on pose

$$D_t F(\omega) := \psi(t, \omega).$$

# La dérivée de Malliavin

Soient  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire,  $g \in L^2([0, T])$  et  $\gamma(t) = \int_0^t g(s)ds \in \Omega$ .

La dérivée directionnelle de  $F$  dans la direction  $\gamma \in \Omega$  au point  $\omega \in \Omega$  est alors la variable aléatoire  $D_\gamma F$  définie par

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{d}{d\varepsilon} [F(\omega + \varepsilon\gamma)]_{\varepsilon=0}.$$

Supposons qu'il existe une fonction  $\psi(t, x) \in L^2([0, T] \times \Omega)$  telle que

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \psi(t, \omega)g(t)dt.$$

On dit alors que  $F$  est différentiable et on pose

$$D_t F(\omega) := \psi(t, \omega).$$

On appelle  $D_t(F) \in L^2([0, T] \times \Omega)$  la dérivée de Malliavin de  $F$ .

# L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

---

Une fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite régulière si elle est de la forme

$$F(\omega) = f(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\theta_i = \int_0^T f_i(t) dw_t$ , pour  $f_i \in L^2([0, T])$ .

# L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

---

Une fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite régulière si elle est de la forme

$$F(\omega) = f(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\theta_i = \int_0^T f_i(t) dw_t$ , pour  $f_i \in L^2([0, T])$ .

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions régulières.



# L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

Une fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite régulière si elle est de la forme

$$F(\omega) = f(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\theta_i = \int_0^T f_i(t) d\omega_t$ , pour  $f_i \in L^2([0, T])$ .

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions régulières.

On note  $T_t$  le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck défini  $\forall F \in \mathcal{S}$ , par

$$T_t F(\omega) = \int_{\Omega} F(e^{-t}\omega + \sqrt{1 - e^{-2t}}u) P(du).$$

# L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck

Une fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite régulière si elle est de la forme

$$F(\omega) = f(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\theta_i = \int_0^T f_i(t) d\omega_t$ , pour  $f_i \in L^2([0, T])$ .

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions régulières.

On note  $T_t$  le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck défini  $\forall F \in \mathcal{S}$ , par

$$T_t F(\omega) = \int_{\Omega} F(e^{-t}\omega + \sqrt{1 - e^{-2t}}u) P(du).$$

On appelle opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck le générateur  $L$  du semi-groupe  $T_t$ , défini par

$$LF(\omega) = \frac{d}{dt} T_t F(\omega) \Big|_{t=0}.$$

# Les espaces de Sobolev généralisés

---

# Les espaces de Sobolev généralisés

---

$\forall p > 1, \forall s \in \mathbb{R}$ , on introduit la norme

$$\|F\|_{s,p} = \|(I - L)^{s/2} F\|_p.$$

# Les espaces de Sobolev généralisés

---

$\forall p > 1, \forall s \in \mathbb{R}$ , on introduit la norme

$$\|F\|_{s,p} = \|(I - L)^{s/2} F\|_p.$$

On définit alors les espaces de Sobolev généralisés par

$$\mathbb{D}^{s,p} = \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{s,p}}.$$

# Les espaces de Sobolev généralisés

$\forall p > 1, \forall s \in \mathbb{R}$ , on introduit la norme

$$\|F\|_{s,p} = \|(I - L)^{s/2} F\|_p.$$

On définit alors les espaces de Sobolev généralisés par

$$\mathbb{D}^{s,p} = \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{s,p}}.$$

Soit  $\mathbb{D}^\infty$  l'espace des fonctionnelles de Wiener régulières défini par

$$\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{p>1} \bigcap_{s>0} \mathbb{D}^{p,s}.$$

# Les espaces de Sobolev généralisés

$\forall p > 1, \forall s \in \mathbb{R}$ , on introduit la norme

$$\|F\|_{s,p} = \|(I - L)^{s/2} F\|_p.$$

On définit alors les espaces de Sobolev généralisés par

$$\mathbb{D}^{s,p} = \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{s,p}}.$$

Soit  $\mathbb{D}^\infty$  l'espace des fonctionnelles de Wiener régulières défini par

$$\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{p>1} \bigcap_{s>0} \mathbb{D}^{p,s}.$$

$\mathbb{D}^\infty$  est alors un espace vectoriel normé complet.

# Les espaces de Sobolev généralisés

$\forall p > 1, \forall s \in \mathbb{R}$ , on introduit la norme

$$\|F\|_{s,p} = \|(I - L)^{s/2} F\|_p.$$

On définit alors les espaces de Sobolev généralisés par

$$\mathbb{D}^{s,p} = \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{s,p}}.$$

Soit  $\mathbb{D}^\infty$  l'espace des fonctionnelles de Wiener régulières défini par

$$\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{p>1} \bigcap_{s>0} \mathbb{D}^{p,s}.$$

$\mathbb{D}^\infty$  est alors un espace vectoriel normé complet.

De plus,  $\mathbb{D}^\infty$  est une algèbre.



# Propriétés des diffusions

---

# Propriétés des diffusions

---

processus de diffusion  $x_t$

# Propriétés des diffusions

---

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

# Propriétés des diffusions

---

processus de diffusion  $x_t$

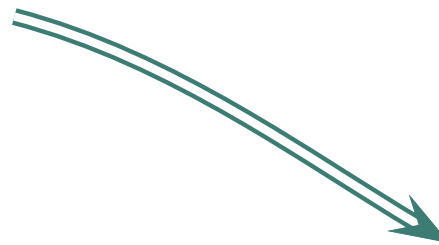
$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

générateur infinitésimal  $L$

# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$



générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$



générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

$$L = A(t, x) + \sum_{j=1}^m A_j^2(t, x)$$

# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

$$L = A(t, x) + \sum_{j=1}^m A_j^2(t, x)$$

# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

semi-groupe

générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

$$L = A(t, x) + \sum_{j=1}^m A_j^2(t, x)$$



# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

$$L = A(t, x) + \sum_{j=1}^m A_j^2(t, x)$$

semi-groupe

$$T_t = e^{tL}$$

# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

$$L = A(t, x) + \sum_{j=1}^m A_j^2(t, x)$$

semi-groupe

$$T_t = e^{tL}$$

# Propriétés des diffusions

processus de diffusion  $x_t$

$$dx_t = A_0(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^m A_j(t, x_t)dw_t^j$$

générateur infinitésimal  $L$

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^x[f(x_t) - f(x)]}{t}$$

$$L = A(t, x) + \sum_{j=1}^m A_j^2(t, x)$$

semi-groupe

$$T_t = e^{tL}$$

$L$  hyperelliptique ssi  $x_t$  admet une densité de classe  $\mathcal{C}^\infty$

# Équations différentielles stochastiques sur les variétés riemanniennes

# Conditions sur les variétés

---

Soient  $M$  et  $N$  des variétés riemanniennes  $\sigma$ -compactes, connexes, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dimensions respectives  $m$  et  $n$  et de métriques riemanniennes associées  $g_M$  et  $g_N$ .

# Conditions sur les variétés

---

Soient  $M$  et  $N$  des variétés riemanniennes  $\sigma$ -compactes, connexes, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dimensions respectives  $m$  et  $n$  et de métriques riemanniennes associées  $g_M$  et  $g_N$ .

Considérons des champs de vecteurs  $A_0, \dots, A_d$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ , qui dépendent du temps et une application  $\Pi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$  dans  $N$ , tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

# Conditions sur les variétés

(C.1)  $M$  est muni d'un atlas  $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$  de cartes relativement compactes, tel que  $\forall i \in I, \forall \alpha \in \{0, \dots, d\}$ , si  $A_\alpha(t, x) = \sigma_\alpha^j(t, x) \frac{\partial}{\partial \phi_i^j}$  désigne l'expression du champs de vecteurs  $A_\alpha$  dans les coordonnées locales  $(\phi_i^1, \dots, \phi_i^m)$ , on peut prolonger les fonctions  $\sigma_\alpha^j(t, x)$  en des fonctions sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^m$ , telles que,  $\forall \alpha \in \{0, \dots, d\}$ , les fonctions  $\sigma_\alpha^j(t, x)$ , ainsi que leurs dérivées par rapport à  $x$  sont Hölder-continus en  $t$  uniformément sur  $[0, T] \times \mathcal{K}$ , pour tout sous-ensemble compact  $\mathcal{K}$  dans  $\mathbb{R}^m$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x$ , pour  $t$  fixé dans  $[0, T]$  et qu'eux-mêmes ainsi que leurs dérivées de tous ordres par rapport à  $x$  sont uniformément bornés.

# Conditions sur les variétés

- (C.1)**  $M$  est muni d'un atlas  $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$  de cartes relativement compactes, tel que  $\forall i \in I, \forall \alpha \in \{0, \dots, d\}$ , si  $A_\alpha(t, x) = \sigma_\alpha^j(t, x) \frac{\partial}{\partial \phi_i^j}$  désigne l'expression du champs de vecteurs  $A_\alpha$  dans les coordonnées locales  $(\phi_i^1, \dots, \phi_i^m)$ , on peut prolonger les fonctions  $\sigma_\alpha^j(t, x)$  en des fonctions sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^m$ , telles que,  $\forall \alpha \in \{0, \dots, d\}$ , les fonctions  $\sigma_\alpha^j(t, x)$ , ainsi que leurs dérivées par rapport à  $x$  sont Hölder-continus en  $t$  uniformément sur  $[0, T] \times \mathcal{K}$ , pour tout sous-ensemble compact  $\mathcal{K}$  dans  $\mathbb{R}^m$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x$ , pour  $t$  fixé dans  $[0, T]$  et qu'eux-mêmes ainsi que leurs dérivées de tous ordres par rapport à  $x$  sont uniformément bornés.
- (C.2)**  $\Pi$  est une fonction propre, i.e. pour toute partie compacte  $K$  de  $N$ , l'image réciproque  $\Pi^{-1}(K)$  est une partie compacte de  $M$ .



# Existence et unicité du processus

---

**Théorème :** *Soit  $x_0$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeurs dans  $M$ .*

# Existence et unicité du processus

**Théorème :** *Soit  $x_0$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeurs dans  $M$ .*

*Alors, sous la condition (C.1), l'équation différentielle stochastique*

$$x_t = x_0 + \int_0^t A_0(s, x_s) ds + \int_0^t A_\alpha(s, x_s) \circ dw_s^\alpha,$$

*où  $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^d)$  désigne le  $\mathcal{F}_t$ -processus de Wiener standard sur  $\Omega$  admet une solution unique*

*$(X(t, x_0, w))_{t \in [0, \theta(w) \wedge T]}$  à valeurs dans  $M$  (ici  $\theta(w)$  désigne le temps d'explosion de la solution).*

# Existence et unicité du processus

**Théorème :** *Soit  $x_0$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeurs dans  $M$ .*

*Alors, sous la condition (C.1), l'équation différentielle stochastique*

$$x_t = x_0 + \int_0^t A_0(s, x_s) ds + \int_0^t A_\alpha(s, x_s) \circ dw_s^\alpha,$$

*où  $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^d)$  désigne le  $\mathcal{F}_t$ -processus de Wiener standard sur  $\Omega$  admet une solution unique*

*$(X(t, x_0, w))_{t \in [0, \theta(w) \wedge T]}$  à valeurs dans  $M$  (ici  $\theta(w)$  désigne le temps d'explosion de la solution).*

**Remarque :** A partir de maintenant, pour une carte  $(U, \phi)$ , on va identifier  $x \in U$  avec ses coordonnées locales  $\phi(x) \in \phi(U)$ .

# Calcul de Malliavin sur les variétés riemanniennes

# Conditions supplémentaires

---

Pour éviter des problèmes d'explosion, on impose à partir de maintenant qu'une des deux conditions ci-dessous soit vérifiée :

# Conditions supplémentaires

---

Pour éviter des problèmes d'explosion, on impose à partir de maintenant qu'une des deux conditions ci-dessous soit vérifiée :

**(C.3)**  $M$  est une variété compacte.

# Conditions supplémentaires

---

Pour éviter des problèmes d'explosion, on impose à partir de maintenant qu'une des deux conditions ci-dessous soit vérifiée :

**(C.3)**  $M$  est une variété compacte.

Trouver des hypothèses raisonnables, assurant la non-explosion de la solution sur une variété  $\sigma$ -compacte, est beaucoup plus délicat.

# Conditions supplémentaires

Pour éviter des problèmes d'explosion, on impose à partir de maintenant qu'une des deux conditions ci-dessous soit vérifiée :

**(C.3)**  $M$  est une variété compacte.

Trouver des hypothèses raisonnables, assurant la non-explosion de la solution sur une variété  $\sigma$ -compacte, est beaucoup plus délicat. Ainsi, même si  $M$  est une variété riemannienne

complète et si le générateur infinitésimal  $A_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d A_\alpha^2$  est le

Laplacien, on a besoin de conditions sur la décroissance à l'infini de la courbure, laquelle ne doit pas tendre trop vite vers moins l'infini, lorsqu'on s'éloigne à l'infini sur la variété.



# Conditions supplémentaires

Pour éviter des problèmes d'explosion, on impose à partir de maintenant qu'une des deux conditions ci-dessous soit vérifiée :

(C.3)  $M$  est une variété compacte.

(C.4) Les images des cartes contiennent une boule de rayon fixe et les dérivées des coefficients des champs de vecteurs dans ces coordonnées locales restent bornées.

Trouver des hypothèses raisonnables, assurant la non-explosion de la solution sur une variété  $\sigma$ -compacte, est beaucoup plus délicat. Ainsi, même si  $M$  est une variété riemannienne

complète et si le générateur infinitésimal  $A_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^d A_\alpha^2$  est le

Laplacien, on a besoin de conditions sur la décroissance à l'infini de la courbure, laquelle ne doit pas tendre trop vite vers moins l'infini, lorsqu'on s'éloigne à l'infini sur la variété.

# Point de départ

---

La famille de morphismes  $x \mapsto X(t, x, w)$  est un flot de difféomorphismes de  $M$  dans lui-même qu'on note  $(X(t, w))_{t \in [0, T]}$ .

# Point de départ

---

La famille de morphismes  $x \mapsto X(t, x, w)$  est un flot de difféomorphismes de  $M$  dans lui-même qu'on note  $(X(t, w))_{t \in [0, T]}$ .

Fixons maintenant la variable  $x_0$  à valeurs dans  $M$

# Point de départ

---

La famille de morphismes  $x \mapsto X(t, x, w)$  est un flot de difféomorphismes de  $M$  dans lui-même qu'on note  $(X(t, w))_{t \in [0, T]}$ .

Fixons maintenant la variable  $x_0$  à valeurs dans  $M$  et posons

$$x_t(w) = X(t, x_0, w)$$

# Point de départ

---

La famille de morphismes  $x \mapsto X(t, x, w)$  est un flot de difféomorphismes de  $M$  dans lui-même qu'on note  $(X(t, w))_{t \in [0, T]}$ .

Fixons maintenant la variable  $x_0$  à valeurs dans  $M$  et posons

$$x_t(w) = X(t, x_0, w)$$

et

$$y_t(w) = \Pi(x_t(w)).$$

# Régularité du processus $y_t$

---

Posons

$$\mathbb{D}^\infty(M) = \{G : \Omega \rightarrow M; F(G) \in \mathbb{D}^\infty, \quad \forall F \in \mathcal{C}_0^\infty(M)\},$$

où  $\mathcal{C}_0^\infty(M)$  désigne l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  à support compact.

# Régularité du processus $y_t$

Posons

$$\mathbb{D}^\infty(M) = \{G : \Omega \rightarrow M; F(G) \in \mathbb{D}^\infty, \quad \forall F \in \mathcal{C}_0^\infty(M)\},$$

où  $\mathcal{C}_0^\infty(M)$  désigne l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  à support compact.

Alors,  $\mathbb{D}^\infty(M)$  est l'espace de toutes les fonctionnelles "infiniment différentiables" à valeurs dans  $M$ .

# Régularité du processus $y_t$

---

On appelle espace de Cameron-Martin  $H$  le sous-espace de  $\Omega$  qui comporte les fonctions  $h(t)$  dont toutes les composantes  $\dot{h}^\alpha(t)$  sont absolument continues et admettent une dérivée  $h^\alpha(t)$  de carré intégrable.



# Régularité du processus $y_t$

---

On appelle espace de Cameron-Martin  $H$  le sous-espace de  $\Omega$  qui comporte les fonctions  $h(t)$  dont toutes les composantes  $\dot{h}^\alpha(t)$  sont absolument continues et admettent une dérivée  $h^\alpha(t)$  de carré intégrable.

**Théorème :**  $\forall t \in [0, T], y_t(w)$  appartient à  $\mathbb{D}^\infty(N)$ .

# Régularité du processus $y_t$

On appelle espace de Cameron-Martin  $H$  le sous-espace de  $\Omega$  qui comporte les fonctions  $h(t)$  dont toutes les composantes  $\dot{h}^\alpha(t)$  sont absolument continues et admettent une dérivée  $h^\alpha(t)$  de carré intégrable.

**Théorème :**  $\forall t \in [0, T], y_t(w)$  appartient à  $\mathbb{D}^\infty(N)$ .

*De plus,  $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(N), \forall h \in H$ , on a  $\forall t \in [0, T]$*

$$\langle D(f(y_t))(w), h \rangle_H = (\Pi_*)_{x_t(w)} \int_0^t \dot{h}^\alpha(s) \left\{ (X(t, w) \circ X(s, w)^{-1})_* A_\alpha \right\}_{t, x_t(w)} f ds.$$

# La matrice de Malliavin

On définit un champ de tenseur  $B^0$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, T] \times M$  du type (2,0) par

$$B_{t,x}^0(u_1, u_2) = \sum_{\alpha=1}^d u_1((A_\alpha)_{t,x}) u_2((A_\alpha)_{t,x}), \quad t \in [0, T]; \quad x \in M; \quad u_1, u_2 \in T_x^* M$$

# La matrice de Malliavin

On définit un champ de tenseur  $B^0$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times M$  du type (2,0) par

$$B_{t,x}^0(u_1, u_2) = \sum_{\alpha=1}^d u_1((A_\alpha)_{t,x}) u_2((A_\alpha)_{t,x}), \quad t \in [0, T]; \quad x \in M; \quad u_1, u_2 \in T_x^* M$$

La matrice de covariance de Malliavin, associée au processus stochastique  $y_t$ , est alors la forme bilinéaire définie positive  $\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w)$  sur  $T_{y_t(w)}^* N$ , définie,  $\forall u_1, u_2 \in T_{y_t(w)}^* N$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , par

$$\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w)(u_1, u_2) = \int_0^t (\Pi_*)_{x_t(w)} \left\{ \left( X(t, w) \circ X(s, w)^{-1} \right)_* B^0 \right\} (u_1, u_2) ds.$$

# La matrice de Malliavin

On définit un champ de tenseur  $B^0$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, T] \times M$  du type (2,0) par

$$B_{t,x}^0(u_1, u_2) = \sum_{\alpha=1}^d u_1((A_\alpha)_{t,x}) u_2((A_\alpha)_{t,x}), \quad t \in [0, T]; \quad x \in M; \quad u_1, u_2 \in T_x^* M$$

$$\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w)(u_1, u_2) = \int_0^t (\Pi_*)_{x_t(w)} \left\{ \left( X(t, w) \circ X(s, w)^{-1} \right)_* B^0 \right\} (u_1, u_2) ds.$$

Comme  $T_{y_t(w)}^* N$  est muni du produit interne induit par la métrique riemannienne  $g_N$ , on peut définir le déterminant  $\det(\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w))$  de manière habituelle.

# La matrice de Malliavin

On définit un champ de tenseur  $B^0$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times M$  du type (2,0) par

$$B_{t,x}^0(u_1, u_2) = \sum_{\alpha=1}^d u_1((A_\alpha)_{t,x}) u_2((A_\alpha)_{t,x}), \quad t \in [0, T]; \quad x \in M; \quad u_1, u_2 \in T_x^* M$$

$$\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w)(u_1, u_2) = \int_0^t (\Pi_*)_{x_t(w)} \left\{ \left( X(t, w) \circ X(s, w)^{-1} \right)_* B^0 \right\} (u_1, u_2) ds.$$

Comme  $T_{y_t(w)}^* N$  est muni du produit interne induit par la métrique riemannienne  $g_N$ , on peut définir le déterminant  $\det(\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w))$  de manière habituelle. On pose

$$g^t(w) = \begin{cases} 1 / \det(\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w)) & \text{si } \det(\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle(w)) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Le théorème de Hörmander

---

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall x \in M$ ,  $\mathcal{L}_{t,x}$  le sous-espace de  $T_x M$  engendré par les champs de vecteurs  $(A_i)_{t,x}$ ,  $i = 1, \dots, d$  et  $([A_{i_q}, [\dots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \dots]])_{t,x}$ ,  $0 \leq i_j \leq d$ ,  $j = 0, \dots, q$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ .

# Le théorème de Hörmander

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall x \in M$ ,  $\mathcal{L}_{t,x}$  le sous-espace de  $T_x M$  engendré par les champs de vecteurs  $(A_i)_{t,x}$ ,  $i = 1, \dots, d$  et  $([A_{i_q}, [\dots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \dots]])_{t,x}$ ,  $0 \leq i_j \leq d$ ,  $j = 0, \dots, q$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ .

Considérons l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad (\Pi_*)_x \mathcal{L}_{t,x} = T_y N,$$

$\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall x \in M$ , où  $y = \Pi(x)$ .



# Le théorème de Hörmander

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall x \in M$ ,  $\mathcal{L}_{t,x}$  le sous-espace de  $T_x M$  engendré par les champs de vecteurs  $(A_i)_{t,x}$ ,  $i = 1, \dots, d$  et  $([A_{i_q}, [\dots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \dots]])_{t,x}$ ,  $0 \leq i_j \leq d$ ,  $j = 0, \dots, q$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ .

Considérons l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad (\Pi_*)_x \mathcal{L}_{0,x} = T_y N,$$

$\forall x \in M$ , où  $y = \Pi(x)$ .

# Le théorème de Hörmander

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall x \in M$ ,  $\mathcal{L}_{t,x}$  le sous-espace de  $T_x M$  engendré par les champs de vecteurs  $(A_i)_{t,x}$ ,  $i = 1, \dots, d$  et  $([A_{i_q}, [\dots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \dots]])_{t,x}$ ,  $0 \leq i_j \leq d$ ,  $j = 0, \dots, q$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ .

Considérons l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad (\Pi_*)_x \mathcal{L}_{0,x} = T_y N,$$

$\forall x \in M$ , où  $y = \Pi(x)$ .

**Théorème :** *Supposons la condition de Hörmander (H) vérifiée. Alors,  $\forall t \in ]0, T]$ , la loi de probabilité du processus  $y_t$  admet une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à l'élément de volume riemannien.*

# Filtrage non linéaire sur les variétés riemanniennes

# La première variété

---

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilités complet et  $w, v$  deux processus de Wiener indépendants de dimensions respectives  $d$  et  $n$ .

# La première variété

---

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilités complet et  $w, v$  deux processus de Wiener indépendants de dimensions respectives  $d$  et  $n$ .

Soit  $M$  une variété riemannienne connexe, orientée, de dimension  $m$ , muni de la métrique riemannienne  $g_M$ .

# La première variété

---

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilités complet et  $w, v$  deux processus de Wiener indépendants de dimensions respectives  $d$  et  $n$ .

Soit  $M$  une variété riemannienne connexe, orientée, de dimension  $m$ , muni de la métrique riemannienne  $g_M$ .

Soit  $Gl(M)$  le fibré des repères linéaires sur  $M$  et  $p_M$  la projection de  $Gl(M)$  sur  $M$ .

# La première variété

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilités complet et  $w, v$  deux processus de Wiener indépendants de dimensions respectives  $d$  et  $n$ .

Soit  $M$  une variété riemannienne connexe, orientée, de dimension  $m$ , muni de la métrique riemannienne  $g_M$ .

Soit  $Gl(M)$  le fibré des repères linéaires sur  $M$  et  $p_M$  la projection de  $Gl(M)$  sur  $M$ .

Désignons par  $(x^i, e_j^i)$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , les coordonnées locales dans un voisinage du point  $(x, e)$  dans  $Gl(M)$  et par  $\{\Gamma_{il}^q\}$  les symboles de Christoffel de la connection riemannienne sur  $M$ , compatible avec la métrique  $g_M$ .

# Les champs de vecteurs

---

Soient des champs de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dépendant du temps  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, d$  sur  $GL(M)$ , dont la représentation en coordonnées locales est donnée par

$$A_j(t, x, e) = a_j^i(t, x, e) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{il}^q e_p^l \frac{\partial}{\partial e_q^p} \right).$$



# Les champs de vecteurs

---

$$A_j(t, x, e) = a_j^i(t, x, e) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{il}^q e_p^l \frac{\partial}{\partial e_q^p} \right).$$

De plus, on note  $A_0$  un champ de vecteurs  $A_0$  sur  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dépendant du temps, s'écrivant

$$A_0(t, x) = a_0^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

# Les champs de vecteurs

$$A_j(t, x, e) = a_j^i(t, x, e) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{il}^q e_p^l \frac{\partial}{\partial e_q^p} \right).$$

De plus, on note  $A_0$  un champ de vecteurs  $A_0$  sur  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dépendant du temps, s'écrivant

$$A_0(t, x) = a_0^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Notons  $\tilde{A}_0$  son relèvement horizontal par rapport à la connection  $\{\Gamma_{il}^q\}$ .

# Les champs de vecteurs

$$A_j(t, x, e) = a_j^i(t, x, e) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{il}^q e_p^l \frac{\partial}{\partial e_q^p} \right).$$

De plus, on note  $A_0$  un champ de vecteurs  $A_0$  sur  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dépendant du temps, s'écrivant

$$A_0(t, x) = a_0^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Notons  $\tilde{A}_0$  son relèvement horizontal par rapport à la connection  $\{\Gamma_{il}^q\}$ . Alors,  $\tilde{A}_0$  est donné en coordonnées locales par

$$\tilde{A}_0(t, x, e) = \alpha_0^i(t, x) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{il}^q e_p^l \frac{\partial}{\partial e_q^p} \right).$$

# Le signal

---

Soit  $r_t = (x_t, e_t)$ , le processus stochastique, solution de l'équation différentielle stochastique

$$r_t = r_0 + \int_0^t \tilde{A}_0(s, r_s) ds + \int_0^t A_\alpha(s, r_s) \circ dw_s^\alpha,$$

avec  $r_0 = (x_0, e_0)$  dans  $Gl(M)$ .

# Le signal

Soit  $r_t = (x_t, e_t)$ , le processus stochastique, solution de l'équation différentielle stochastique

$$r_t = r_0 + \int_0^t \tilde{A}_0(s, r_s) ds + \int_0^t A_\alpha(s, r_s) \circ dw_s^\alpha,$$

avec  $r_0 = (x_0, e_0)$  dans  $Gl(M)$ .

Considérons le signal  $(x_t)_{t \in [0, T]}$  à valeurs dans  $M$ , défini  $\forall t \in [0, T]$  par

$$x_t = p_M(r_t).$$

# Le signal

Soit  $r_t = (x_t, e_t)$ , le processus stochastique, solution de l'équation différentielle stochastique

$$r_t = r_0 + \int_0^t \tilde{A}_0(s, r_s) ds + \int_0^t A_\alpha(s, r_s) \circ dw_s^\alpha,$$

avec  $r_0 = (x_0, e_0)$  dans  $Gl(M)$ .

Considérons le signal  $(x_t)_{t \in [0, T]}$  à valeurs dans  $M$ , défini  $\forall t \in [0, T]$  par

$$x_t = p_M(r_t).$$

En coordonnées locales le processus  $r_t$  s'écrit

$$\begin{cases} dx_t^i = a_0^i(t, x_t) dt + a_\alpha^i(t, x_t, e_t) \circ dw_t^\alpha \\ de_{\alpha t}^i = -\Gamma_{m k}^i(x_t) e_{\alpha t}^k \circ dx_t^m. \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

# La deuxième variété

---

Soit  $N$  une variété  $\sigma$ -compacte, connexe de dimension  $n$ , muni de la métrique riemannienne associée  $g_N$ .

# La deuxième variété

---

Soit  $N$  une variété  $\sigma$ -compacte, connexe de dimension  $n$ , muni de la métrique riemannienne associée  $g_N$ .

Soit  $O(N)$  le fibré des repères orthonormaux sur  $N$  et  $p_N$  la projection de  $O(N)$  sur  $N$ .



# La deuxième variété

---

Soit  $N$  une variété  $\sigma$ -compacte, connexe de dimension  $n$ , muni de la métrique riemannienne associée  $g_N$ .

Soit  $O(N)$  le fibré des repères orthonormaux sur  $N$  et  $p_N$  la projection de  $O(N)$  sur  $N$ .

Désignons par  $(y^i, f_j^i)$ ,  $j = 1, \dots, n$  l'écriture en coordonnées locales autour du point  $(y, f)$  de  $O(N)$ .

# La deuxième variété

---

Soit  $N$  une variété  $\sigma$ -compacte, connexe de dimension  $n$ , muni de la métrique riemannienne associée  $g_N$ .

Soit  $O(N)$  le fibré des repères orthonormaux sur  $N$  et  $p_N$  la projection de  $O(N)$  sur  $N$ .

Désignons par  $(y^i, f_j^i)$ ,  $j = 1, \dots, n$  l'écriture en coordonnées locales autour du point  $(y, f)$  de  $O(N)$ .

Soit  $\{\gamma_{il}^a\}$  les symboles de Christoffel de la connection affine sur  $N$ , compatible avec la métrique  $g_N$ .

# La deuxième variété

Soit  $N$  une variété  $\sigma$ -compacte, connexe de dimension  $n$ , muni de la métrique riemannienne associée  $g_N$ .

Soit  $O(N)$  le fibré des repères orthonormaux sur  $N$  et  $p_N$  la projection de  $O(N)$  sur  $N$ .

Désignons par  $(y^i, f_j^i)$ ,  $j = 1, \dots, n$  l'écriture en coordonnées locales autour du point  $(y, f)$  de  $O(N)$ .

Soit  $\{\gamma_{il}^q\}$  les symboles de Christoffel de la connection affine sur  $N$ , compatible avec la métrique  $g_N$ .

Notons  $\{H_1, \dots, H_n\}$  la famille des champs de vecteurs horizontaux canoniques sur  $O(N)$  par rapport à la connection riemannienne  $\{\gamma_{il}^q\}$

# Les champs de vecteurs

---

Remarquons qu'au voisinage de  $(y, f)$  dans  $O(N)$ ,  $H_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  s'écrit comme

$$H_j = f_j^i \left( \frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma_{il}^q f_p^l \frac{\partial}{\partial f_p^q} \right).$$

# Les champs de vecteurs

Remarquons qu'au voisinage de  $(y, f)$  dans  $O(N)$ ,  $H_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  s'écrit comme

$$H_j = f_j^i \left( \frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma_{il}^a f_p^l \frac{\partial}{\partial f_p^a} \right).$$

Introduisons un champ de vecteurs  $h(t, x_t, y)$  dépendant du temps, borné, de classe  $C^\infty$  sur  $N$ , dont la représentation en coordonnées locales est donnée par

$$h(t, x_t, y) = h^i(t, x_t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

# Les champs de vecteurs

Remarquons qu'au voisinage de  $(y, f)$  dans  $O(N)$ ,  $H_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  s'écrit comme

$$H_j = f_j^i \left( \frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma_{il}^q f_p^l \frac{\partial}{\partial f_p^q} \right).$$

Introduisons un champ de vecteurs  $h(t, x_t, y)$  dépendant du temps, borné, de classe  $C^\infty$  sur  $N$ , dont la représentation en coordonnées locales est donnée par

$$h(t, x_t, y) = h^i(t, x_t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Soit  $\tilde{h}$  son relevé horizontal par rapport à la connection  $\{\gamma_{il}^q\}$ . Alors,  $\tilde{h}$  est donnée en coordonnées locales par

$$\tilde{h}(t, x_t, y) = h^i \left( \frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma_{il}^q f_p^l \frac{\partial}{\partial f_p^q} \right).$$

# Le processus d'observation

On définit alors,  $\forall t \in [0, T]$ , le processus d'observation  $(y_t)_{t \in [0, T]}$  par

$$y_t = p_N(s_t),$$

où  $s_t = (y_t, f_t)$  est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$s_t = s_0 + \int_0^t \tilde{h}(s, x_s, s_s) ds + \int_0^t H_j(s_s) \circ dw_s^j,$$

avec  $s_0 = (y_0, f_0)$  dans  $O(N)$ .

# Le processus d'observation

On définit alors,  $\forall t \in [0, T]$ , le processus d'observation  $(y_t)_{t \in [0, T]}$  par

$$y_t = p_N(s_t),$$

où  $s_t = (y_t, f_t)$  est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$s_t = s_0 + \int_0^t \tilde{h}(s, x_s, s_s) ds + \int_0^t H_j(s_s) \circ dw_s^j,$$

avec  $s_0 = (y_0, f_0)$  dans  $O(N)$ .

En coordonnées locales, on obtient

$$\begin{cases} dy_t^i = \tilde{h}^i(t, x_t, y_t) dt + H_j^i(t, y_t, f_t) \circ dv_t^j \\ df_{\alpha t}^i = -\gamma_{m k}^i(y_t) e_{\alpha t}^k \circ dy_t^m \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$



# Le filtre

---

De plus,  $p_N$  étant une fonction propre,

$$\sigma(s_\tau / 0 \leq \tau \leq t) = \sigma(y_\tau / 0 \leq \tau \leq t)$$

ce qui implique qu'il est équivalent d'observer le processus stochastique  $(x_t)_{t \in [0, T]}$  à travers  $s_t$  ou à travers  $y_t$ .

# Le filtre

---

De plus,  $p_N$  étant une fonction propre,

$$\sigma(s_\tau / 0 \leq \tau \leq t) = \sigma(y_\tau / 0 \leq \tau \leq t)$$

ce qui implique qu'il est équivalent d'observer le processus stochastique  $(x_t)_{t \in [0, T]}$  à travers  $s_t$  ou à travers  $y_t$ .

On définit alors le filtre par

# Le filtre

De plus,  $p_N$  étant une fonction propre,

$$\sigma(s_\tau / 0 \leq \tau \leq t) = \sigma(y_\tau / 0 \leq \tau \leq t)$$

ce qui implique qu'il est équivalent d'observer le processus stochastique  $(x_t)_{t \in [0, T]}$  à travers  $s_t$  ou à travers  $y_t$ .

On définit alors le filtre par

**Définition :**  $\forall t \in [0, T], \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ , notons  $\pi_t \psi$  le filtre associé au système signal-observation  $(x_t, y_t)$ , défini par

$$\pi_t \psi = E[\psi(x_t) / \mathcal{Y}_t],$$

où  $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_\tau, 0 \leq \tau \leq t)$ .

# Une copie de l'espace probabilisé

---

Soit  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$  une copie indépendante de l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

# Une copie de l'espace probabilisé

---

Soit  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$  une copie indépendante de l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Considérons sur l'espace de probabilités  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ , le processus  $(\tilde{x}_t)_{t \in [0, T]}$  à valeurs dans  $M$ , de même loi de probabilité que le processus  $(x_t)_{t \in [0, T]}$ .

# Une copie de l'espace probabilisé

Soit  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$  une copie indépendante de l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Considérons sur l'espace de probabilités  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ , le processus  $(\tilde{x}_t)_{t \in [0, T]}$  à valeurs dans  $M$ , de même loi de probabilité que le processus  $(x_t)_{t \in [0, T]}$ .

Ceci équivaut à dire que sur l'espace  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ , on a

$$\tilde{x}_t = p_M(\tilde{r}_t),$$

où  $\tilde{r}_t$  désigne la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\tilde{r}_t = \tilde{r}_0 + \int_0^t \tilde{A}_0(s, \tilde{r}_s) ds + \int_0^t A_\alpha(s, \tilde{r}_s) \circ dw_s^\alpha,$$

avec  $\tilde{r}_0 = r_0$ .

# L'exponentielle de Girsanov

On introduit alors l'exponentielle de Girsanov associée aux processus stochastiques  $(\tilde{x}_t)_{t \in [0, T]}$  et  $(y_t)_{t \in [0, T]}$  par

$$\begin{aligned} \Lambda_t(\tilde{x}_t, y_t) = & \exp \left( \int_0^t \langle h(s, \tilde{x}_s, y_s), dy_s \rangle_{y_s} \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j,k=1}^n \gamma_{kj}^k(y_s) h^j(s, \tilde{x}_s, y_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr} \left( \frac{\partial H}{\partial y}(s, \tilde{x}_s, y_s) \right) ds \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^t \langle h(s, \tilde{x}_s, y_s), h(s, \tilde{x}_s, y_s) \rangle_{y_s} ds \right) \quad P \otimes \tilde{P} \text{ p.s.} \end{aligned}$$

où  $H = (h^1, \dots, h^n)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$  désigne le produit scalaire dans  $T_y N$  induit par la métrique riemannienne  $g_N$ .

# Le filtre non normalisé

On peut définir le filtre non normalisé, associé à notre problème de filtrage, par

**Définition :**  $\forall t \in [0, T], \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ , notons  $\rho_t(\psi)$  le filtre non normalisé, associé au système signal-observation  $(x_t, y_t)$ , défini par

$$\rho_t(\psi) = E_{\tilde{P}}[\psi(\tilde{x}_t) \Lambda(\tilde{x}_t, y_t)],$$

où  $E_{\tilde{P}}$  désigne l'espérance par rapport à la probabilité  $\tilde{P}$ .



# Le filtre non normalisé

On peut définir le filtre non normalisé, associé à notre problème de filtrage, par

**Définition :**  $\forall t \in [0, T], \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ , notons  $\rho_t(\psi)$  le filtre non normalisé, associé au système signal-observation  $(x_t, y_t)$ , défini par

$$\rho_t(\psi) = E_{\tilde{P}}[\psi(\tilde{x}_t) \Lambda(\tilde{x}_t, y_t)],$$

où  $E_{\tilde{P}}$  désigne l'espérance par rapport à la probabilité  $\tilde{P}$ .

On a la formule de Bayes abstraite

**Théorème :**  $\forall t \in [0, T], \forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ , on a

$$\pi_t = \frac{\rho_t \psi}{\rho_t \mathbf{1}}.$$

# Les théorèmes

---

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall r \in Gl(M)$ ,  $\mathcal{L}_{t,r}$ , l'idéal engendré par les champs de vecteurs  $A_1, \dots, A_d$  dans l'algèbre de Lie  $Lie(\tilde{A}_0, A_1, \dots, A_d)$ , évalué au point  $(t, r)$ .

# Les théorèmes

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall r \in Gl(M)$ ,  $\mathcal{L}_{t,r}$ , l'idéal engendré par les champs de vecteurs  $A_1, \dots, A_d$  dans l'algèbre de Lie  $Lie(\tilde{A}_0, A_1, \dots, A_d)$ , évalué au point  $(t, r)$ .

Alors, sous la condition

$$(H') \quad (p_{M*})_r \mathcal{L}_{t,r} = T_x M,$$

$\forall r \in Gl(M)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , où  $x = p_M(r)$ , on a :

# Les théorèmes

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall r \in Gl(M)$ ,  $\mathcal{L}_{t,r}$ , l'idéal engendré par les champs de vecteurs  $A_1, \dots, A_d$  dans l'algèbre de Lie  $Lie(\tilde{A}_0, A_1, \dots, A_d)$ , évalué au point  $(t, r)$ .

Alors, sous la condition

$$(H') \quad (p_{M*})_r \mathcal{L}_{t,r} = T_x M,$$

$\forall r \in Gl(M)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , où  $x = p_M(r)$ , on a :

**Théorème :** *Supposons que la condition (H') est vérifiée et que la variété  $M$  et les champs de vecteurs  $\tilde{A}_0, A_1, \dots, A_d$  vérifient la condition (C.1) ainsi que une des conditions (C.3) ou (C.4). Alors,  $\forall t \in ]0, T]$ , la loi du filtre  $\pi_t$  admet une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à l'élément de volume riemannien sur  $M$ .*

# Les théorèmes

Notons,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall r \in Gl(M)$ ,  $\mathcal{L}_{t,r}$ , l'idéal engendré par les champs de vecteurs  $A_1, \dots, A_d$  dans l'algèbre de Lie  $Lie(\tilde{A}_0, A_1, \dots, A_d)$ , évalué au point  $(t, r)$ .

Alors, sous la condition

$$(H') \quad (p_{M*})_r \mathcal{L}_{t,r} = T_x M,$$

$\forall r \in Gl(M)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , où  $x = p_M(r)$ , on a :

**Théorème :** *Supposons que la condition (H') est vérifiée et que la variété  $M$  et les champs de vecteurs  $\tilde{A}_0, A_1, \dots, A_d$  vérifient la condition (C.1) ainsi que une des conditions (C.3) ou (C.4). Alors,  $\forall t \in ]0, T]$ , la loi du filtre  $\pi_t$  admet une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à l'élément de volume riemannien sur  $M$ .*

**Proposition :**  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\Lambda(\tilde{x}_t, y_t)$  appartient à l'espace  $\mathbb{D}^\infty$ .

# Solution de l'EDS (1)

---

# Solution de l'EDS (1)

---

La condition (C.1) assure que les équations

$$\begin{cases} dx_t^i = \sigma_0^i(t, x_t) dt + \sigma_\alpha^i(t, x_t) \circ dw_t^\alpha \\ x_0^i = x^i \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

possèdent une unique solution  $(X(t, x, w))_{t \in [0, T]}$ , qui n'explose pas.

# Solution de l'EDS (1)

La condition (C.1) assure que les équations

$$\begin{cases} dx_t^i = \sigma_0^i(t, x_t) dt + \sigma_\alpha^i(t, x_t) \circ dw_t^\alpha \\ x_0^i = x^i \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

possèdent une unique solution  $(X(t, x, w))_{t \in [0, T]}$ , qui n'explose pas.

Fixons  $x = (x^1, \dots, x^m) \in U$ .



# Solution de l'EDS (1)

La condition (C.1) assure que les équations

$$\begin{cases} dx_t^i = \sigma_0^i(t, x_t) dt + \sigma_\alpha^i(t, x_t) \circ dw_t^\alpha \\ x_0^i = x^i \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

possèdent une unique solution  $(X(t, x, w))_{t \in [0, T]}$ , qui n'explose pas.

Fixons  $x = (x^1, \dots, x^m) \in U$ . Posons  $\nu_U(w) = \inf_{t > 0} \{X(t, x, w) \notin U\}$

# Solution de l'EDS (1)

La condition (C.1) assure que les équations

$$\begin{cases} dx_t^i = \sigma_0^i(t, x_t) dt + \sigma_\alpha^i(t, x_t) \circ dw_t^\alpha \\ x_0^i = x^i \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

possèdent une unique solution  $(X(t, x, w))_{t \in [0, T]}$ , qui n'explose pas.

Fixons  $x = (x^1, \dots, x^m) \in U$ . Posons  $\nu_U(w) = \inf_{t > 0} \{X(t, x, w) \notin U\}$

Définissons  $(X_U(t, x, w))_{t \in [0, T]}$  par

$$X_U(t, x, w) = X(t \wedge \nu_U(w), x, w).$$

# Solution de l'EDS (1)

La condition (C.1) assure que les équations

$$\begin{cases} dx_t^i = \sigma_0^i(t, x_t) dt + \sigma_\alpha^i(t, x_t) \circ dw_t^\alpha \\ x_0^i = x^i \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

possèdent une unique solution  $(X(t, x, w))_{t \in [0, T]}$ , qui n'explose pas.

Fixons  $x = (x^1, \dots, x^m) \in U$ . Posons  $\nu_U(w) = \inf_{t > 0} \{X(t, x, w) \notin U\}$

Définissons  $(X_U(t, x, w))_{t \in [0, T]}$  par

$$X_U(t, x, w) = X(t \wedge \nu_U(w), x, w).$$

On peut ainsi construire une solution locale  $X_U$  pour chaque  $x$  dans  $M$  et chaque voisinage  $U$  de  $x$ .

# Solution de l'EDS (2)

---

Si  $(U, \phi)$  et  $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$  sont deux cartes à intersection non vide et si  $x \in U \cap \tilde{U}$ , alors,  $X_U(t, x, w) = X_{\tilde{U}}(t, x, w)$ , pour tout  $t \leq \nu_U(w) \wedge \nu_{\tilde{U}}(w)$ .

# Solution de l'EDS (2)

---

Enfin, on construit une solution globale à partir des différentes solutions locales.

# Solution de l'EDS (2)

---

Finalemment, on construit une solution globale à partir des différentes solutions locales.

Considérons pour chaque  $w$  dans  $\Omega$  la totalité des cartes  $(U_1, \phi_1), \dots, (U_l, \phi_l)$  telles que  $x_0(w) \in U_i, \quad \forall i, i = 1, \dots, l.$

# Solution de l'EDS (2)

Enfin, on construit une solution globale à partir des différentes solutions locales.

Considérons pour chaque  $\omega$  dans  $\Omega$  la totalité des cartes  $(U_1, \phi_1), \dots, (U_l, \phi_l)$  telles que  $x_0(\omega) \in U_i, \quad \forall i, i = 1, \dots, l$ .

Alors, le processus  $\hat{X}(t, x_0, \omega) = X_{U_j}(t, x_0, \omega)$  est bien défini pour  $t \in [0, \hat{\nu}_{x_0} \wedge T]$ , où  $\hat{\nu}_{x_0}(\omega) = \max_{1 \leq i \leq l} \{\nu_{U_i}(\omega)\}$ .

# Solution de l'EDS (2)

Finalemment, on construit une solution globale à partir des différentes solutions locales.

Considérons pour chaque  $w$  dans  $\Omega$  la totalité des cartes  $(U_1, \phi_1), \dots, (U_l, \phi_l)$  telles que  $x_0(w) \in U_i, \quad \forall i, i = 1, \dots, l.$

Alors, le processus  $\hat{X}(t, x_0, w) = X_{U_j}(t, x_0, w)$  est bien défini pour  $t \in [0, \hat{\nu}_{x_0} \wedge T]$ , où  $\hat{\nu}_{x_0}(w) = \max_{1 \leq i \leq l} \{\nu_{U_i}(w)\}.$

Posons  $\nu_1(w) = \hat{\nu}_{x_0(w)} \wedge T$  et  $x_t = \hat{x}_t$ , pour  $t \in [0, \nu_1]$ .



# Solution de l'EDS (2)

Finalemment, on construit une solution globale à partir des différentes solutions locales.

Considérons pour chaque  $w$  dans  $\Omega$  la totalité des cartes  $(U_1, \phi_1), \dots, (U_l, \phi_l)$  telles que  $x_0(w) \in U_i, \quad \forall i, i = 1, \dots, l.$

Alors, le processus  $\hat{X}(t, x_0, w) = X_{U_j}(t, x_0, w)$  est bien défini pour  $t \in [0, \hat{\nu}_{x_0} \wedge T]$ , où  $\hat{\nu}_{x_0}(w) = \max_{1 \leq i \leq l} \{\nu_{U_i}(w)\}.$

Posons  $\nu_1(w) = \hat{\nu}_{x_0(w)} \wedge T$  et  $x_t = \hat{x}_t$ , pour  $t \in [0, \nu_1]$ .

Récurivement, si  $\nu_n(w)$  et  $x_t = X(t, x_0, w)$  sont définis, pour  $t$  dans  $[0, \nu_n(w)]$ , alors on pose sur l'ensemble  $\{w; \nu_n(w) < T\}$ ,  $x_n = x_{\nu_n}$ ,  $w_n = \theta_{\nu_n} w$ , où  $(\theta_t w)(s) = w_{t+s} - w_t$  et  $\nu_{n+1} = \hat{\nu}_{x_n}(w_n) \wedge T.$

# Solution de l'EDS (2)

Finale­ment, on construit une solution globale à partir des différentes solutions locales.

Considérons pour chaque  $w$  dans  $\Omega$  la totalité des cartes  $(U_1, \phi_1), \dots, (U_l, \phi_l)$  telles que  $x_0(w) \in U_i, \quad \forall i, i = 1, \dots, l.$

Alors, le processus  $\hat{X}(t, x_0, w) = X_{U_j}(t, x_0, w)$  est bien défini pour  $t \in [0, \hat{\nu}_{x_0} \wedge T]$ , où  $\hat{\nu}_{x_0}(w) = \max_{1 \leq i \leq l} \{\nu_{U_i}(w)\}.$

Posons  $\nu_1(w) = \hat{\nu}_{x_0(w)} \wedge T$  et  $x_t = \hat{x}_t$ , pour  $t \in [0, \nu_1]$ .

Récursivement, si  $\nu_n(w)$  et  $x_t = X(t, x_0, w)$  sont définis, pour  $t$  dans  $[0, \nu_n(w)]$ , alors on pose sur l'ensemble  $\{w; \nu_n(w) < T\}$ ,  $x_n = x_{\nu_n}, w_n = \theta_{\nu_n} w$ , où  $(\theta_t w)(s) = w_{t+s} - w_t$  et  $\nu_{n+1} = \hat{\nu}_{x_n}(w_n) \wedge T.$

Puis, on définit  $x_t = \hat{X}(t - \nu_n, x_n, w_n)$  pour  $t$  dans  $[\nu_n, \nu_{n+1}]$ .

# Théorème de Hörmander (1)

---

# Théorème de Hörmander (1)

---

Il suffit de montrer que

$$f(y_t)g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(N), \forall t \in ]0, T].$$

# Théorème de Hörmander (1)

Il suffit de montrer que

$$f(y_t)g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(N), \forall t \in ]0, T].$$

**Proposition :** *Pour tout opérateur différentiel  $\partial$  sur  $N$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ , il existe  $p > 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$  et une application linéaire continue  $\xi : \mathbb{D}^{p,r} \rightarrow L^1(P)$ , tels que,  $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ ,  $\forall G \in \mathbb{D}^{p,r}$ ,*

$$E(\partial f(y_t) \phi(y_t) G) = E(f(y_t) \xi(G)).$$

# Théorème de Hörmander (1)

Il suffit de montrer que

$$f(y_t)g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(N), \forall t \in ]0, T].$$

**Proposition :**  $\forall G \in \mathbb{D}^\infty$ , la fonction  $g_G(x) = \langle \delta_x, G \rangle$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$

$$E(f(y_t) G) = \int_M f(x) g_G(x) \nu(dx),$$

# Théorème de Hörmander (1)

Il suffit de montrer que

$$f(y_t)g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(N), \forall t \in ]0, T].$$

**Proposition :**  $\forall G \in \mathbb{D}^\infty$ , la fonction  $g_G(x) = \langle \delta_x, G \rangle$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$

$$E(f(y_t) G) = \int_M f(x) g_G(x) \nu(dx),$$

En particulier, la fonction  $p$ , définie par  $p(x) = \langle \hat{\delta}_x, 1 \rangle$  est la densité de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de la loi du processus stochastique  $(y_t)_{t \in [0, T]}$  par rapport à  $\nu$ .

# Théorème de Hörmander (2)

---

Il suffit de démontrer que  $g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \forall t \in ]0, T]$ .



# Théorème de Hörmander (2)

---

Il suffit de démontrer que  $g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \forall t \in ]0, T]$ .

Soit  $(V_0, \tilde{\phi})$  une carte relativement compacte sur  $N$ , telle que  $y_0 \in V_0$  et soit  $(U_0, \phi)$  une carte de l'atlas qui vérifie la condition (C.1) telle que  $x_0 \in U_0$ .

# Théorème de Hörmander (2)

Il suffit de démontrer que  $g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \forall t \in ]0, T]$ .

Soit  $(V_0, \tilde{\phi})$  une carte relativement compacte sur  $N$ , telle que  $y_0 \in V_0$  et soit  $(U_0, \phi)$  une carte de l'atlas qui vérifie la condition (C.1) telle que  $x_0 \in U_0$ .

Alors, il existe un sous-ensemble compact  $\tilde{U}_0$  de  $U_0$  tel que  $\Pi(\tilde{U}_0) \subset V_0$  et  $\phi^q = \tilde{\phi}^q \circ \Pi$ ,  $1 \leq q \leq n$  dans  $\tilde{U}_0$ .

# Théorème de Hörmander (2)

Il suffit de démontrer que  $g^t \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P) \forall t \in ]0, T]$ .

Soit  $(V_0, \tilde{\phi})$  une carte relativement compacte sur  $N$ , telle que  $y_0 \in V_0$  et soit  $(U_0, \phi)$  une carte de l'atlas qui vérifie la condition (C.1) telle que  $x_0 \in U_0$ .

Alors, il existe un sous-ensemble compact  $\tilde{U}_0$  de  $U_0$  tel que  $\Pi(\tilde{U}_0) \subset V_0$  et  $\phi^q = \tilde{\phi}^q \circ \Pi$ ,  $1 \leq q \leq n$  dans  $\tilde{U}_0$ .

Soit  $\nu$  le temps d'arrêt défini par  $\nu(w) = \inf\{t; \tilde{X}(t, x_0, w) \notin \tilde{U}_0\}$ .

# Théorème de Hörmander (3)

---

Soit  $\tilde{y}_t(w)$  la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\tilde{y}_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t \partial_k \sigma_\alpha^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) \circ d\omega_s^\alpha + \int_0^t \partial_k \sigma_0^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) ds.$$

# Théorème de Hörmander (3)

Soit  $\tilde{y}_t(w)$  la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\tilde{y}_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t \partial_k \sigma_\alpha^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) \circ dw_s^\alpha + \int_0^t \partial_k \sigma_0^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) ds.$$

Alors,  $\forall 0 \leq s < t \leq \nu$ , on a

$$D_s^j \tilde{x}_t^i = \tilde{y}_l^i(t) (\tilde{y}(s)_k^s)^{-1} \sigma_j^k(s, \tilde{x}_s)$$

# Théorème de Hörmander (3)

Soit  $\tilde{y}_t(w)$  la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\tilde{y}_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t \partial_k \sigma_\alpha^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) \circ dw_s^\alpha + \int_0^t \partial_k \sigma_0^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) ds.$$

Alors,  $\forall 0 \leq s < t \leq \nu$ , on a

$$D_s^j \tilde{x}_t^i = \tilde{y}_l^i(t) (\tilde{y}(s)_k^s)^{-1} \sigma_j^k(s, \tilde{x}_s) \text{ i.e. } D_s^i \tilde{x}_t = \tilde{y}_t \tilde{y}_s^{-1} \sigma_i(s, \tilde{x}_s).$$

# Théorème de Hörmander (3)

Soit  $\tilde{y}_t(w)$  la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\tilde{y}_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t \partial_k \sigma_\alpha^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) \circ dw_s^\alpha + \int_0^t \partial_k \sigma_0^i(s, \tilde{x}_s) \tilde{y}_j^k(s) ds.$$

Alors,  $\forall 0 \leq s < t \leq \nu$ , on a

$$D_s^j \tilde{x}_t^i = \tilde{y}_l^i(t) (\tilde{y}(s)_k^s)^{-1} \sigma_j^k(s, \tilde{x}_s) \text{ i.e. } D_s^i \tilde{x}_t = \tilde{y}_t \tilde{y}_s^{-1} \sigma_i(s, \tilde{x}_s).$$

$\forall t \in [0, T]$ ,  $\forall \zeta \in \mathbb{R}^m$ , on définit la forme quadratique  $a_t(w)$  sur  $\mathbb{R}^m$  par

$$a_t(w)[\zeta] = \tilde{y}_t \sum_{r=1}^d \int_0^\nu \langle \zeta, (\tilde{y}_s^{-1} \sigma_\alpha(s, \tilde{x}_s)) (\tilde{y}_s^{-1} \sigma_\alpha(s, \tilde{x}_s))^\top \zeta \rangle ds \tilde{y}_t^\top.$$

# Théorème de Hörmander (4)

Ceci nous permet de définir,  $\forall t \in [0, T]$ , la variable aléatoire  $\xi_t$  par

$$\xi_t(w) = \varepsilon_0 \left\{ \inf_{\eta \in S^{n-1}} a_t(w)[\tilde{\eta}] \right\}^n,$$

où  $\tilde{\eta} = (\eta, 0, \dots, 0) \in S^{m-n}$ ,  $\eta \in S^{n-1}$  et

$$\varepsilon_0 = \inf \left\{ \det(g_N)_{\Pi(x)} \left( \frac{\partial}{\partial \phi^q}, \frac{\partial}{\partial \phi^r} \right); x \in U_0 \right\}.$$



# Théorème de Hörmander (4)

Ceci nous permet de définir,  $\forall t \in [0, T]$ , la variable aléatoire  $\xi_t$  par

$$\xi_t(w) = \varepsilon_0 \left\{ \inf_{\eta \in S^{n-1}} a_t(w)[\tilde{\eta}] \right\}^n,$$

où  $\tilde{\eta} = (\eta, 0, \dots, 0) \in S^{m-n}$ ,  $\eta \in S^{n-1}$  et

$$\varepsilon_0 = \inf \left\{ \det(g_N)_{\Pi(x)} \left( \frac{\partial}{\partial \phi^q}, \frac{\partial}{\partial \phi^r} \right); x \in U_0 \right\}.$$

**Lemme :**  $\forall t \in ]0, \nu]$

$$0 \leq \xi_t \leq \det(\langle\langle Dy_t, Dy_t \rangle\rangle) \quad p.s.$$

# Théorème de Hörmander (4)

Ceci nous permet de définir,  $\forall t \in [0, T]$ , la variable aléatoire  $\xi_t$  par

$$\xi_t(w) = \varepsilon_0 \left\{ \inf_{\eta \in S^{n-1}} a_t(w)[\tilde{\eta}] \right\}^n,$$

où  $\tilde{\eta} = (\eta, 0, \dots, 0) \in S^{m-n}$ ,  $\eta \in S^{n-1}$  et

$$\varepsilon_0 = \inf \left\{ \det(g_N)_{\Pi(x)} \left( \frac{\partial}{\partial \phi^q}, \frac{\partial}{\partial \phi^r} \right); x \in U_0 \right\}.$$

**Lemme :**  $\forall t \in ]0, \nu]$

$$0 \leq \xi_t \leq \det(\langle \langle Dy_t, Dy_t \rangle \rangle) \quad p.s.$$

**Lemme :**  $\forall t \in ]0, T]$ ,

$$\xi_t^{-1} \in \bigcap_{p \in [1, +\infty[} L^p(P).$$