Le calcul des variations stochastique

3. Différentiation sur les espaces de Sobolev généralisés

Soit $\Omega = C_0([0,T])$ l'espace des fonctions réelles continues ω sur $[0,T]$ telles que $\omega(0) = 0.$ Muni de la norme uniforme

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |\omega(t)|$$

cet espace est un espace de Banach dont le dual Ω^* peut être identifié à l'espace $\mathrm{M}([0,T])$ des mesures avec signe ν sur $[0,T]$, muni de la norme

$$\|\nu\| = \sup_{|f|\le 1} \int_0^T f(t)\,d\nu(t) = |\nu|([0,T]).$$

Définition 3.1 *L'espace $\Omega = C_0([0,T])$ est appelé espace de Wiener, parce qu'on peut considérer chaque trajectoire*

$$t \to W(t,\omega)$$

du processus de Wiener comme un élément ω de $C_0([0,T])$. Ainsi, on peut identifier $W(t,\omega)$ avec la valeur $\omega(t)$ au temps t d'un élément $\omega \in C_0([0,T])$:

$$W(t,\omega) = \omega(t).$$

De cette façon, le processus de Wiener devient l'espace $\Omega = C_0([0,T])$ et sa loi de probabilité P devient la mesure μ définie sur les ensembles cylindrés de Ω par

$$\mu(\{\omega; \omega(t_1) \in F_1, \ldots, \omega(t_k) \in F_k\}) = P[W_{t_1} \in F_1, \ldots, W_{t_k} \in F_k]$$
$$= \int_{F_1\times\cdots\times F_k} \rho(t_1, 0, x_1)\rho(t_2 - t_1, x_1, x_2)\cdots\rho(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)\,dx_1\cdots dx_k,$$

où $F_i \subset R$, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ et

$$\rho(t,x,y) = (2\pi t)^{-1/2}\exp(-\tfrac{1}{2}|x-y|^2); \qquad t > 0;\ x, y \in R.$$

On appelle la mesure μ la mesure de Wiener sur Ω.

Définition 3.2 *Soit* $L^2([0,T])$ *l'espace des fonctions déterministes, définies sur l'intervalle* $[0,T]$ *et de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit* $F:\Omega\to R$ *une variable aléatoire,* $g\in L^2([0,T])$ *et*

$$\gamma(t)=\int_0^t g(s)\,ds\in\Omega. \tag{3.1}$$

La dérivée directionnelle de F dans la direction $\gamma\in\Omega$ *au point* $\omega\in\Omega$ *est alors la variable aléatoire* $D_\gamma F$ *définie par*

$$D_\gamma F(\omega)=\frac{d}{d\varepsilon}[F(\omega+\varepsilon\gamma)]_{\varepsilon=0}, \tag{3.2}$$

si cette quantité existe.

Remarquons qu'on considère seulement la dérivée dans des directions du type (3.1). L'espace des éléments $\gamma\in\Omega$ qui peuvent être écrits sous la forme (1.10) pour une fonction $g\in L^2([0,T])$ est appelée espace de Cameron-Martin. On le note *H*.

Définition 3.3 *Supposons qu'une variable aléatoire* $F:\Omega\to R$ *admet une dérivée directionnelle dans toutes les directions* $\gamma\in H$ *dans le sens fort où la limite*

$$D_\gamma F(\omega):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[F(\omega+\varepsilon\gamma)-F(\omega)] \tag{3.3}$$

existe dans $L^2(\Omega)$. *Supposons de plus, qu'il existe une fonction* $\psi(t,x)\in L^2([0,T]\times\Omega)$ *telle que*

$$D_\gamma F(\omega)=\int_0^T\psi(t,\omega)\,g(t)\,dt. \tag{3.4}$$

On dit alors que F est différentiable et on pose

$$\boldsymbol{D}_t F(\omega):=\psi(t,\omega). \tag{3.5}$$

On appelle $\boldsymbol{D}_t F(\omega)\in L^2([0,T]\times\Omega)$ *la dérivée de F et on note* $\mathsf{D}_{1,2}$ *l'ensemble de toutes les variables aléatoires différentiables.*

Exemple 3.4 Soit $F(\omega)=\int_0^T f(s)\,dW_s=\int_0^T f(s)\,d\omega(s)$, avec $f(s)\in L^2([0,T])$.

Alors, pour $\gamma(t)=\int_0^t g(s)\,ds$, on a

$$F(\omega+\varepsilon\gamma)=\int_0^T f(s)\big(d\omega(s)+\varepsilon\, d\gamma(s)\big)$$
$$=\int_0^T f(s)\,d\omega(s)+\varepsilon\int_0^T f(s)g(s)ds$$

et par conséquent $\frac{1}{\varepsilon}[F(\omega+\varepsilon\gamma)-F(\omega)]=\int_0^T f(s)g(s)ds$ pour tout $\varepsilon>0.$ D'après la définition 3.3, $F\in \mathsf{D}_{1,2}$ et pour tout t dans $[0,T]$ et tout ω dans Ω,

$$\boldsymbol{D}_t F(\omega)= f(t). \qquad (3.6)$$

En particulier, si on choisit $f(t)=\chi_{[0,t_1]}(t)$, alors $F(\omega)=\int_0^T \chi_{[0,t_1]}(s)\,dW_s=W(t_1,\omega)$ et on obtient donc

$$\boldsymbol{D}_t\big(W(t_1,\omega)\big)=\chi_{[0,t_1]}(t). \qquad (3.7)$$

Notons P la famille de variables aléatoires $F:\Omega\to R$ de la forme

$$F(\omega)=\varphi(\theta_1,\ldots,\theta_n),$$

où $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ est un polynôme aux n variables $x_1,\ldots,x_n$ et $\theta_i=\int_0^T f_i(t)\,dW_t$ pour une fonction déterministe $f_i\in L^2([0,T])$. De telles variables aléatoires sont appelées des polynômes de Wiener. P est dense dans $L^2(\Omega)$ et on a le lemme suivant :

Lemme 3.5 *Soit* $F(\omega)=\varphi(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\mathsf{P}$ *. Alors,* $F\in\mathsf{D}_{1,2}$ *et*

$$\boldsymbol{D}_t F(\omega)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\, f_i(t). \qquad (3.8)$$

Preuve : Notons $\psi(t,\omega)$ le membre droit de l'égalité (3.8). Comme,

$$\sup_{s\in[0,T]} E[|W_s|^N]<+\infty,\ \text{ pour tout } N\in N,$$

il est facile à voir que

$$\frac{1}{\varepsilon}[F(\omega+\varepsilon\gamma)-F(\omega)]=\frac{1}{\varepsilon}[\varphi\big(\theta_1+\varepsilon(f_1,g),\ldots,\theta_n+\varepsilon(f_n,g)\big)-\varphi(\theta_1,\ldots,\theta_n)]$$
$$\to\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\,D_\gamma(\theta_i)\ \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } \varepsilon\to 0.$$

Donc F admet une dérivée directionnelle dans la direction γ au sens fort et (3.6) implique que

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \psi(t,\omega)\, g(t)\, dt.$$

□

Introduisons une norme sur $\mathbb{D}_{1,2}$. Soit pour toute variable aléatoire F dans $\mathbb{D}_{1,2}$ la norme définie par

$$\|F\|_{1,2} = \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|D_t F\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}. \tag{3.9}$$

Malheureusement, on ne sait pas si l'espace $\mathbb{D}_{1,2}$ est fermé pour cette norme. Pour éviter les difficultés on travaille alors sur un espace légèrement différent.

Définition 3.6 *On note $D_{1,2}$ la fermeture de la famille $\mathbb{P}$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{1,2}$.*

Ainsi $D_{1,2}$ est formé de toutes les variables aléatoires $F \in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $F_n \in \mathbb{P}$ vérifiant

$$F_n \to F \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } n \to +\infty \tag{3.10}$$

et

$$(\boldsymbol{D}_t F_n)_{n\geq 1} \text{ converge dans } L^2([0,T]\times\Omega) \tag{3.11}$$

Il est bien sûr tentant de définir la dérivée d'une variable aléatoire dans $D_{1,2}$ par

$$D_t F := \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{D}_t F_n .$$

Pour pouvoir le faire, il faut cependant s'assurer que cette relation définit la dérivée de façon unique. En d'autres mots, si G_n désigne une autre suite qui converge vers F, est-ce qu'on a nécessairement

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{D}_t F_n = \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{D}_t G_n \,?$$

En considérant la différence $H_n = F_n - G_n$, le théorème suivant répond affirmativement à cette question.

Théorème 3.7 *Supposons qu'une suite* $(H_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* P *vérifie les propriétés*

$$H_n \to 0 \;\; dans\; L^2(\Omega)\; quand\; n \to +\infty \tag{3.12}$$

$$(\boldsymbol{D}_t H_n)_{n\geq 1}\; converge\, dans\; L^2([0,T]\times\Omega)\; quand\; n \to +\infty . \tag{3.13}$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{D}_t H_n = 0.$$

La démonstration est basée sur la proposition suivante :

Proposition 3.8 (Formule d'intégration par parties) *Soient* $F \in \mathsf{D}_{1,2}, \varphi \in \mathsf{D}_{1,2}$ *et* $\gamma(t) = \int_0^t g(s)\,ds$*, avec* $g \in L^2([0,T])$*. Alors,*

$$E[D_\gamma F \cdot \varphi] = E\left[F \cdot \varphi \int_0^T g(s)\,dW_s\right] - E[F \cdot D_\gamma \varphi]. \tag{3.14}$$

Preuve : D'après le théorème de Girsanov,

$$E[F(\omega+\varepsilon\gamma)\cdot\varphi(\omega)] = E\left[F(\omega)\varphi(\omega-\varepsilon\gamma)\cdot\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s)dW_s - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^T g^2(s)ds\right)\right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
E[D_\gamma F(\omega)\cdot\varphi(w)] &= E\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[F(\omega+\varepsilon\gamma)-F(\omega)]\cdot\varphi(\omega)\right] \\
&= E\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[F(\omega+\varepsilon\gamma)\varphi(\omega)-F(\omega)\varphi(\omega)]\right] \\
&= E\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}F(\omega)[\varphi(\omega-\varepsilon\gamma)\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^T g^2(s)ds\right) - \varphi(w)]\right] \\
&= E\left[F(\omega)\cdot\frac{d}{d\varepsilon}[\varphi(\omega-\varepsilon\gamma)\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^T g^2(s)ds\right)]_{\varepsilon=0}\right] \\
&= E[F(\omega)\varphi(\omega)\cdot\int_0^T g(s)\,dW_s] - E[F(\omega)\,D_\gamma\varphi(\omega)].
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 3.7 : La proposition 3.8 implique que

$$\begin{aligned}
E[D_\gamma H_n \cdot \varphi] &= E[H_n\,\varphi\cdot\int_0^T g(s)\,dW_s] - E[H_n \cdot D_\gamma\varphi] \\
&\to 0 \;\; \text{quand } n \to +\infty \text{ pour tout } \varphi \in \mathsf{P}.
\end{aligned}$$

Comme $(D_\gamma H_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^2(\Omega)$ et que $\mathbb{P}$ est dense dans $L^2(\Omega)$, $D_\gamma H_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. Comme ceci est vrai pour toute direction de la forme $\gamma = \int_0^{\cdot} g(s)\,ds$, on a $\boldsymbol{D}_t H_n \to 0$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$.

□

Ceci nous permet d'énoncer la définition suivante :

Définition 3.9 *Soit* $F \in \mathcal{D}_{1,2}$, *c'est-à-dire tel qu'il existe une suite* $(F_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathbb{P}$ *vérifiant*

$$F_n \to F \quad dans\ L^2(\Omega)$$

et

$$(\boldsymbol{D}_t F_n)_{n\geq 1}\ est\ convergent\ dans\ L^2([0,T]\times\Omega).$$

Alors on appelle dérivée de Malliavin de F la variable aléatoire définie par

$$D_t F = \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{D}_t F_n. \tag{3.15}$$

La dérivée directionnelle de F dans la direction γ *est donnée par*

$$D_\gamma F = \int_0^T D_t F\, g(t)\,dt,$$

pour tout $\gamma = \int_0^t g(s)ds,$ *avec* $g \in L^2([0,T]).$

Remarque 3.10 On dispose maintenant de deux définitions a priori différentes de la dérivée d'une variable aléatoire :

1) La dérivée $\boldsymbol{D}_t F$ de $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ donnée par la définition 3.3.

2) La dérivée de Malliavin $D_t F$ de $F \in \mathcal{D}_{1,2}$ donnée par la définition 3.9.

Le résultat suivant montre cependant que ces deux dérivées coïncident, si $F \in \mathbb{D}_{1,2} \cap \mathcal{D}_{1,2}$.

Lemme 3.11 *Soit* $F \in \mathbb{D}_{1,2} \cap \mathcal{D}_{1,2}$. *Supposons qu'il existe une suite* $(F_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathbb{P}$ *vérifiant*

$$F_n \to F \quad dans\ L^2(\Omega)\ et\ (\boldsymbol{D}_t F_n)_{n\geq 1}\ est\ convergent\ dans\ L^2([0,T]\times\Omega).$$

Alors,

$$\boldsymbol{D}_t F = \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{D}_t F_n. \tag{3.16}$$

Donc

$$D_t F = \boldsymbol{D}_t F \text{ pour } F \in \mathbb{D}_{1,2} \cap D_{1,2}. \tag{3.17}$$

Preuve : Les hypothèses du lemme assurent que $D_\gamma F_n$ converge dans $L^2(\Omega)$ pour tout $\gamma(t) = \int_0^t g(s)\,ds$, avec $g \in L^2([0,T])$. La proposition 3.8 implique alors que

$$E[(D_\gamma F_n - D_\gamma F)\cdot\varphi] = E[(F_n - F)\varphi \int_0^t g(s)\,dW_s] - E[(F_n - F)\cdot D_\gamma \varphi]$$
$$\to 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathbb{P}.$$

Donc, $D_\gamma F_n \to D_\gamma F$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui implique (3.16).

□

Remarque 3.12 Remarquons que la définition de l'espace $D_{1,2}$ implique que si $F_n \in D_{1,2}$ pour $n \geq 1$ et $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega)$ et si $(D_t F_n)_{n\geq 1}$ est convergent dans $L^2([0,T]\times\Omega)$, alors $F \in D_{1,2}$ et $D_t F = \lim_{n\to+\infty} D_t F_n$.

Comme toute variable aléatoire F dans $L^2(\Omega)$ peut être représenté par sa décomposition en chaos de Wiener

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \text{ avec } f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n),$$

il est naturel de se demander si on peut exprimer la dérivée de Malliavin de F en fonction de cette décomposition. Considérons d'abord un cas particulier.

Lemme 3.13 *Soit $F(\omega) = I_n(f_n)$ pour quelque $f_n \in \hat{L}^2([0,T]^n)$. Alors, $F \in D_{1,2}$ et*

$$D_t F(\omega) = n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t)), \tag{3.18}$$

où la notation $I_{n-1}(f_n(\cdot,t))$ veut dire qu'on considère l'intégrale d'Itô de dimension $n-1$ par rapport aux $n-1$ premières variables $t_1,\dots,t_{n-1}$ de $f(t_1,\dots,t_{n-1},t)$.

Preuve : Considérons d'abord le cas particulier où $f_n = f^{\otimes n}$ pour une fonction $f \in L^2([0,T])$ i.e où

$$f_n(t_1,\dots,t_n) = f(t_1)\cdots f(t_n) \text{ pour } (t_1,\dots,t_n)\in[0,T]^n.$$

Alors,

$$I_n(f_n) = \|f\|^n h_n\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right), \tag{3.19}$$

où $\theta = \int_0^T f(s)\,dW_s$ et h_n est le polynôme de Hermite d'ordre *n*. Par conséquent,

$$D_t I_n(f_n) = \|f\|^n h_n'\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right)\cdot\frac{f(t)}{\|f\|}.$$

Rappelons qu'une propriété de base des polynômes de Hermite est que

$$h_n'(x) = n\,h_{n-1}(x). \tag{3.20}$$

Cela implique que

$$D_t I_n(f) = n\|f\|^{n-1} h_{n-1}\left(\frac{\theta}{\|f\|}\right) f(t) = n\,I_{n-1}(f^{\otimes(n-1)})\,f(t) = n\,I_{n-1}(f_n(\cdot,t)).$$

Puis, supposons que f_n est de la forme

$$f_n = \eta_1^{\hat{\otimes}n_1}\,\hat{\otimes}\,\eta_2^{\hat{\otimes}n_2}\,\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\,\eta_k^{\hat{\otimes}n_k} \text{ avec } n_1+\cdots n_k = n \tag{3.21}$$

où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tenseur symétrisé et $\{\eta_j\}$ une base orthonormale de $L^2([0,T])$. Alors,

$$I_n(f_n) = h_{n_1}(\theta_1)\cdots h_{n_k}(\theta_k), \tag{3.22}$$

où

$$\theta_j = \int_0^T \eta_j(s)\,dW_s\,.$$

Cela implique à nouveau (3.18). Le résultat général suit alors du fait que chaque $f_n\in\hat{L}^2([0,T]^n)$ peut être approchée dans $L^2([0,T]^n)$ par des combinaisons linéaires de fonction du type (3.21).

□

Lemme 3.14 *Notons* $\mathcal{P}_0$ *l'ensemble des polynômes de Wiener de la forme*

$$p_k\left(\int_0^T e_1(s)\,dW_s,\dots,\int_0^T e_k(s)\,dW_s\right),$$

où $p_k(x_1,\dots,x_k)$ *est un polynôme à k variables et* $\{e_1,\dots,e_n\}$ *une base orthonormale donnée de* $L^2([0,T])$. *Alors,* $\mathcal{P}_0$ *est dense dans* $\mathcal{P}$ *pour la norme* $\|\cdot\|_{1,2}$.

Preuve : Si $q := p(\int_0^T f_1(s)\,dW_s, \ldots, \int_0^T f_k(s)\,dW_s) \in \mathrm{P}$, on peut approcher q par la suite

$$q^{(m)} := p(\int_0^T \sum_{j=0}^{m} (f_1, e_j) e_j\, dW, \ldots, \int_0^T \sum_{j=0}^{m} (f_k, e_j) e_j\, dW).$$

En effet, $q^{(m)} \to q$ dans $L^2(\Omega)$ et

$$D_t q^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \sum_{j=1}^{m} (f_i, e_j) e_j(t) \to \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot f_i(t)$$

dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ quand $m \to +\infty$.

□

Théorème 3.15 *Soit* $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \in L^2(\Omega)$. *Alors,* $F \in \mathrm{D}_{1,2}$ *si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, n! \| f_n \|^2_{L^2([0,T]^n)} < +\infty. \tag{3.23}$$

Dans ce cas,

$$D_t F = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot, t)). \tag{3.24}$$

Preuve : Soit la suite $(F_m)_{n\geq 0}$ définie par $F_m = \sum_{n=0}^{m} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t))$. Alors, $F_m \in \mathrm{D}_{1,2}$ et $F_m \to F$ dans $L^2(\Omega)$. De plus, si $m > k$, le lemme 3.13 implique que

$$\begin{aligned}
\| D_t F_m - D_t F_k \|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} &= \left\| \sum_{n=k+1}^{m} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t)) \right\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} \\
&= \int_0^T E[\{ \sum_{n=k+1}^{m} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t)) \}^2] dt \\
&= \int_0^T \sum_{n=k+1}^{m} n^2 (n-1)! \| f_n(\cdot,t) \|^2_{L^2([0,T]^{n-1})} dt \\
&= \sum_{n=k+1}^{m} n\, n! \| f_n \|^2_{L^2([0,T]^n)}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Donc, sous l'hypothèse (3.23), $(D_t F_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ et par conséquence, $F \in \mathrm{D}_{1,2}$ et

$$D_t F = \lim_{n\to+\infty} D_t F_m = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, I_{n-1}(f_n(\cdot,t)).$$

Réciproquement, si $F \in D_{1,2}$, alors il existe des polynômes $p_k(x_1,\dots,x_{n_k})$ de degré k et des $\eta_1,\dots,\eta_{n_k} \ge 0$ comme dans (3.21) tel que si on pose $F_k = p_k(\theta_1,\dots,\theta_{n_k}) = \sum_{m_i;\sum_i m_i \le k} a_{m_1,\dots,m_k} \prod_{i=1}^{n_k} h_{m_i}(\theta_i)$ (pour quelque $a_{m_1,\dots,m_k} \in R$), alors $F_k \in P$, $F_k \to F$ dans $L^2(\Omega)$ et $D_t F_k \to D_t F$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ quand $k \to +\infty$. En appliquant la relation (3.22), on obtient l'existence de fonctions $f_j^{(k)} \in \hat{L}^2([0,T]^j); 1 \le j \le k$ telles que

$$F_k = \sum_{j=0}^{k} I_j(f_j^{(k)}).$$

Comme $F_k \to F$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\sum_{j=0}^{k} j!\left\| f_j^{(k)} - f_j \right\|^2_{L^2([0,T]^j)} \le \left\| F_k - F \right\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quand k} \to +\infty.$$

Ainsi, pour tout *j*, $\left\| f_j^{(k)} - f_j \right\|_{L^2([0,T]^j)} \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Cela implique que pour tout *j*,

$$\left\| f_j^{(k)} \right\|_{L^2([0,T]^j)} \to \left\| f_j \right\|_{L^2([0,T]^j)} \quad \text{quand k} \to +\infty. \tag{3.26}$$

De même, puisque $D_t F_k \to D_t F$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$, un calcul similaire qu'en (3.25) et le lemme de Fatou impliquent que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} j\cdot j!\left\| f_j \right\|^2_{L^2([0,T]^j)} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty}\left(j\cdot j!\left\| f_j^{(k)} \right\|^2_{L^2([0,T]^j)} \right) \\
&\le \underline{\lim}_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} j\cdot j!\left\| f_j^{(k)} \right\|^2_{L^2([0,T]^j)} \\
&= \underline{\lim}_{k\to+\infty} \left\| D_t F_k \right\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} \\
&= \left\| D_t F \right\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} < +\infty,
\end{aligned}$$

où on a posé $f_j^{(k)} = 0$ pour $j > k$. Donc, la relation (3.23) est vérifiée, ce qui termine la preuve.

□

Définition 3.16 *Une fonction $F : \Omega \to R$ est dite réguliére si elle est de la forme*

$$F(\omega) = f(\theta_1,\dots,\theta_n),$$

pour un certain entier n, où $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *est une fonction à croissance sous-polynômiale et* $\theta_i = \int_0^T f_i(t)\,dW_t$ *pour une fonction déterministe* $f_i \in L^2([0,T])$. *On note* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des fonctions régulières.*

Définition 3.17 *Pour* $F \in \mathcal{S}$ *, on note* $T_t F(\omega)$ *le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck défini par*

$$T_t F(\omega) = \int_{\Omega} F(e^{-t}\omega + \sqrt{1-e^{-2t}}\,u)\mu(du). \tag{3.27}$$

Proposition 3.18

1) $F \in \mathcal{S} \Rightarrow T_t F \in \mathcal{S}$

2) $F \in \mathcal{P} \Rightarrow T_t F \in \mathcal{P}$

3) $F, G \in \mathcal{S} \Rightarrow \int_{\Omega} T_t F(\omega) G(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_{\Omega} F(\omega) T_t G(\omega)\,\mu(d\omega)$

4) $T_{t+s} F = T_t(T_s F)$

5) $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \Rightarrow T_t F = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} I_n(f_n)$

6) $\|T_t F\|_{L^p(\Omega)} \leq \|F\|_{L^p(\Omega)}$

Définition 3.19 *On appelle opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck le générateur L du semi-groupe* T_t *, défini par*

$$LF(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} T_t F(\omega)_{|t=0}. \tag{3.28}$$

Son domaine de définition est $\mathrm{Dom}(L) = \{F \in L^2(\Omega) / \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \|I_n(f_n)\|_{L^2([0,T]^n)} < +\infty\}$.

Proposition 3.20 $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \Rightarrow LF = \sum_{n=0}^{+\infty} -n\, I_n(f_n)$

L'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck nous permet de définir les espaces de Sobolev généralisés.

Défintion 3.21 *Soit F un polynôme de Wiener. Alors, pour tous p strictement supérieurs à 1 et tous s réels, on introduit la norme*

$$\|F\|_{s,p} = \left\|(I-L)^{s/2} F\right\|_p , \tag{3.29}$$

où pour tout $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$ *dans* $\mathcal{P}$,

$$(I-L)^{s/2} F = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n)^{s/2} I_n(f_n) \in \mathcal{P} .$$

On définit les espaces de Sobolev généralisés par

$$\mathcal{D}_{s,p} = \overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_{s,p}} . \tag{3.30}$$

Proposition 3.22

1) $\mathcal{D}_{0,p} = L^p(\Omega),\ \forall p > 1$

2) $\mathcal{D}_{s',p'} \subset \mathcal{D}_{s,p}$ si $p < p'$ et $s < s'$ (injection compacte)

3) $\mathcal{D}^*_{s,p} = \mathcal{D}_{-s,q}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 3.23 *Soit* $\mathcal{D}_\infty$ *l'espace défini par* $\mathcal{D}_\infty = \bigcap_{s,p} \mathcal{D}_{s,p}$.

$\mathcal{D}_\infty$ est alors un espace vectoriel normé complet. De plus, on a le résultat suivant :

Proposition 3.24 *Soient* $F \in \mathcal{D}_{k,p}$ *et* $G \in \mathcal{D}_{k,q}$ *. Alors,* $FG \in \mathcal{D}_{k,r}$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}}$.

En particulier, $\mathcal{D}_\infty$ *est une algèbre et l'application* $\begin{array}{c} \mathcal{D}_\infty \times \mathcal{D}_\infty \to \mathcal{D}_\infty \\ (F,G) \mapsto FG \end{array}$ *est continue.*