Calcul stochastique

1. Rappels

1.1 Espace probabilisé

Définition 1.1 : Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une mesure de probabilité P.

Définition 1.2 : On appelle filtration toute famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$ est appelé espace probabilisé filtré.

Définition 1.3 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$ un espace probabilisé filtré. Un processus stochastique $(x_t)_{t\in I}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ si pour tout t dans I, la variable aléatoire x_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.4 : Soit X une variable aléatoire de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On appelle espérance conditionnelle de X par rapport à une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ et on note $E[X/\mathcal{B}]$ la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Proposition 1.5 : *L'espérance conditionnelle vérifie les propriétés suivantes :*

1) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, $E\ E[X/\mathcal{B}]/\mathcal{C} = E[X/\mathcal{C}]$
2) $E\ E[X/\mathcal{B}] = E(X)$
3) *Si* $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, *alors* $E\ XY/\mathcal{B} = YE\ X/\mathcal{B}$

1.3 Processus de Wiener

Définition 1.6 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$ un espace probabilisé filtré. On appelle $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener (ou mouvement brownien) de matrice de covariance Q tout processus $(W_t)_{t\in I}$ $\mathcal{F}_t$-adapté qui vérifie

1) $W_0 = 0$
2) $\forall s,t \in I$ avec $s<t$, $W_t - W_s$ est un vecteur gaussien de loi normale $N\big(0,(t-s)Q\big)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$.
3) La fonction $t \mapsto W_t(\omega)$ est p.s. continue.

Lorsque $Q = I$, on parle d'un processus de Wiener standard.

Proposition 1.7 : *Soit* $(W_t)_{t\in I}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-processus de Wiener. Alors,*

1) $E(W_t) = 0, \ \forall t \in I$
2) $E(W_s W_t) = (s \wedge t)Q$
3) *Ses trajectoires sont localement hölderiennes d'ordre* $1/2-\varepsilon, \forall \varepsilon \in]0,1/2[$

Théorème 1.8 : *Soit* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ *une subdivision de* $[0,T]$, *avec* $\Delta_n = \max_k (t_{k+1} - t_k)$ *et soit* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-processus de Wiener standard de dimension 1. Si* Δ_n *tend vers 0, alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \to t \textit{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

2. Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un espace probabilisé filtré et $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener. On construit l'intégrale stochastique d'Itô dans le cas scalaire, le cas vectoriel s'en déduit de façon évidente.

2.1 Classe d'intégrands

Définition 2.1 : On désigne par $L^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ l'espace des processus stochastiques $\{\varphi_t, t \in [0,T]\}$ tels que

1) $(t,\omega) \to \varphi_t(\omega)$ est mesurable de $[0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$
2) $\forall t \in [0,T],\ \varphi_t$ est $\mathcal{F}_t$ - mesurable
3) $\int_0^T \varphi_t^2\, dt < +\infty$ p.s.

On désigne par $M^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ le sous-espace de $L^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ des processus $\{\varphi_t, t \in [0,T]\}$ tels que $E\left[\int_0^T \varphi_t^2\, dt\right] < +\infty.$

$M^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ est alors un espace de Hilbert complet pour le produit scalaire

$$< \varphi, \psi >= E\left[\int_0^T \varphi_t \psi_t\, dt\right].$$

Définition 2.2 : On désigne par $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ l'espace des processus en escalier de la forme

$$\varphi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k\, \chi_{[t_k, t_{k+1}[}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et où pour tout k, φ_k est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_k}$ - mesurable bornée.

Théorème 2.3 : *L'espace* $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ *est dense dans* $M^2_{\mathcal{F}}([0,T])$.

2.2 Intégrale des processus élémentaires

Définition 2.4 : On appelle processus élémentaire tout processus $(\rho_t)_{t\in[0,T]}$ de la forme

$$\rho_t(\omega) = \rho(\omega)\, \chi_{[\theta,T]}(t),$$

où ρ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\theta$ - mesurable bornée.

L'intégrale stochastique d'Itô d'un processus élémentaire est alors le processus stochastique défini pour tout *t* dans $[0,T]$ par

$$\int_0^t \rho_s\, dW_s = \rho(W_{t\vee\theta} - W_\theta).$$

Proposition 2.5 : *Soient* $\rho_t = \rho\, \chi_{[\theta,T]}(t)$ *et* $\rho'_t = \rho'\, \chi_{[\theta',T]}(t)$ *deux processus élémentaires. Si* $0 \le s < t \le T,$ *on a*

1)
$$E\left[\int_s^t \rho_u \, dW_u \,/\, \mathsf{F}_s\right] = 0$$

2)
$$E\left[\int_s^t \rho_u \, dW_u \int_s^t \rho'_u \, dW_u \,/\, \mathsf{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \rho_u\, \rho'_u \, du \,/\, \mathsf{F}_s\right].$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
E^{\mathsf{F}_s}\left[\int_s^t \rho_u \, dW_u\right] &= E^{\mathsf{F}_s}\ \rho\left(W_{t\vee\theta} - W_{s\vee\theta}\right) = E^{\mathsf{F}_s}\left(E^{\mathsf{F}_{s\vee\theta}}\ \rho\left(W_{t\vee\theta} - W_{s\vee\theta}\right)\right), \text{ car } \mathsf{F}_s \subset \mathsf{F}_{s\vee\theta} \\
&= E^{\mathsf{F}_s}\left(\rho\, E^{\mathsf{F}_{s\vee\theta}}\ W_{t\vee\theta} - W_{s\vee\theta}\right) \\
&= E^{\mathsf{F}_s}\left(\rho\, E\ W_{t\vee\theta} - W_{s\vee\theta}\right), \text{ car } W_{t\vee\theta} - W_{s\vee\theta} \text{ est indépendant de } \mathsf{F}_{s\vee\theta} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour montrer la deuxième relation, on suppose que $\theta \le \theta' \le t.$ Alors,

$$\begin{aligned}
\int_s^t \rho_u \, dW_u \int_s^t \rho'_u \, dW_u &= \rho\rho'\left(W_t - W_{s\vee\theta}\right)\left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right) \\
&= \rho\rho'\left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right)\left(W_t - W_{s\vee\theta'} + W_{s\vee\theta'} - W_{s\vee\theta}\right) \\
&= \rho\rho'\ \left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right)^2 + \left(W_{s\vee\theta'} - W_{s\vee\theta}\right)\left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right) .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
E\left[\int_s^t \rho_u \, dW_u \int_s^t \rho'_u \, dW_u \,/\, \mathsf{F}_s\right] &= E^{\mathsf{F}_s}\left(E^{\mathsf{F}_{s\vee\theta'}}\ \rho\rho'\ \left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right)^2 + \left(W_{s\vee\theta'} - W_{s\vee\theta}\right)\left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right)\ \right) \\
&= E^{\mathsf{F}_s}\left(\rho\rho'\left(E^{\mathsf{F}_{s\vee\theta'}}\ \left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right)^2\ + \left(W_{s\vee\theta'} - W_{s\vee\theta}\right) E^{\mathsf{F}_{s\vee\theta'}}\ W_t - W_{s\vee\theta'}\ \right)\right) \\
&= E^{\mathsf{F}_s}\left(\rho\rho'\left(E\ \left(W_t - W_{s\vee\theta'}\right)^2\ \right)\right) \\
&= E^{\mathsf{F}_s}\left(\rho\rho'\left(t - s\vee\theta'\right)\right) \\
&= E^{\mathsf{F}_s}\left[\int_s^t \rho_u \rho'_u \, du\right].
\end{aligned}$$

Si par contre $t \le \theta',$ alors $\int_s^t \rho'_u \, dW_u = \int_s^t \rho'_u \rho_u du = 0$ et l'égalité est satisfaite.

2.3 Intégrale des fonctions en escalier

Cela nous permet de définir l'intégrale stochastique pour les fonctions de E_{R}.

Définition 2.6 : Soit $\varphi \in \mathsf{E}_{\mathsf{R}}$ un processus en escalier de la forme $\varphi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \, \chi_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$. On pose alors,

$$\int_0^t \varphi_u \, dW_u = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \left(W_{t_{k+1} \vee t} - W_{t_k \vee t} \right).$$

2.4 Intégrale des processus de $M^2_{\mathsf{F}}([0,T])$

Comme, l'espace E_{R} est dense dans $M^2_{\mathsf{F}}([0,T])$, on peut approcher chaque processus dans $M^2_{\mathsf{F}}([0,T])$ par une suite de fonctions en escalier. On définit alors l'intégrale stochastique d'un processus de $M^2_{\mathsf{F}}([0,T])$ par la limite de la suite des intégrales stochastiques des fonctions en escalier correspondantes.

2.5 Intégrale des processus de $L^2_{\mathsf{F}}([0,T])$

Définition 2.7 : On appelle F_t-temps d'arrêt toute variable aléatoire τ à valeurs dans $\overline{\mathsf{R}}_+$ telle que pour tout réel *t* positif,

$$(\tau \le t) \in \mathsf{F}_t.$$

Soit un processus $\varphi \in L^2_{\mathsf{F}}([0,T])$. On définit pour tout entier *n* le temps d'arrêt τ_n par

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \le T / \int_0^t \varphi_u^2(\omega)\, du \ge n\} & \text{si } \int_0^t \varphi_u^2(\omega)\, du \ge n \\ T & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(\tau_n)_{n \ge 0}$ est une suite croissante de temps d'arrêt et pour tout n, $\varphi_n = \varphi \, \chi_{[0,\tau_n]} \in M^2_{\mathsf{F}}([0,T])$.

Définition 2.8 : Soit un processus $\varphi \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T])$. On définit son intégrale stochastique par

$$\int_0^t \varphi_s \, dW_s = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{t\wedge\tau_n} \varphi_s^n \, dW_s.$$

Proposition 2.9 : *Soient deux processus* $\varphi, \psi \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T])$. *Si* $0 \le s < t \le T$, *on a*

1) $$E\left[\int_s^t \varphi_u \, dW_u / \mathcal{F}_s\right] = 0$$

2) $$E\left[\int_s^t \varphi_u \, dW_u \int_s^t \psi_u \, dW_u / \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \varphi_u \psi_u \, du / \mathcal{F}_s\right].$$

En particulier, on a l'isométrie d'Itô :

$$E\left[\left(\int_s^t \varphi_u \, dW_u\right)^2\right] = E\left[\int_s^t \varphi_u^2 \, du\right].$$

3. Formule d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et W_t un $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener.

Définition 3.1 : On appelle processus d'Itô ou intégrale stochastique un processus stochastique x_t de la forme

$$x_t = x_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s,$$

où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable et K_t respectivement H_t sont des processus $\mathcal{F}_t$-adaptés tels que $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ et $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$.

Théorème 3.2 : *La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Si l'on a*

$$x_t = x_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s = x_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' \, dW_s,$$

alors $x_0 = x_0'$ *p.s.*, $K_s = K_s'$ *p.s. et* $H_s = H_s'$ *p.s.*

Théorème 3.3 (formule d'Itô) : *Soit* x_t *un processus d'Itô réel, défini par*

$$x_t = x_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$$

et soit g une fonction de $C^2([0,T]\times \mathbb{R})$. *Alors le processus* $y_t = g(t, x_t)$ *est également un processus d'Itô et*

$$dy_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,x_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,x_t)\,dx_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x_t)\,d\langle x,x\rangle_t,$$

où $\langle x,x\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$

Preuve : Remarquons qu'il s'agit de montrer que

$$g(t,x_t) = g(0,x_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s,x_s) + K_s \frac{\partial g}{\partial x}(s,x_s) + \frac{1}{2} H_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,x_s) \right) ds$$
$$+ \int_0^t H_s \frac{\partial g(s,x_s)}{\partial x}\, dW_s.$$

On peut supposer que les fonctions $g, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ sont bornées, puisque dans le cas contraire on peut obtenir le cas général en approchant *g* par une suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout *n* les fonctions $g_n, \frac{\partial g_n}{\partial t}, \frac{\partial g_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$ sont bornées et convergent uniformément sur tout sous-ensemble compact de $[0,T]\times \mathbb{R}$ respectivement vers $g, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$. De plus, on peut supposer que les processus H_t et K_t sont des processus élémentaires.

En utilisant la formule de Taylor, on obtient alors que

$$g(t,x_t) = g(0,x_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, x_{t_j})\,\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, x_{t_j})\,\Delta x_j + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t_j, x_{t_j})\,(\Delta t_j)^2$$
$$+ \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, x_{t_j})\,(\Delta t_j)(\Delta x_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, x_{t_j})\,(\Delta x_j)^2 + \sum_j R_j,$$

où $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, \Delta x_j = x_{t_{j+1}} - x_{t_j}$ et $R_j = o\left(\left|\Delta t_j\right|^2 + \left|\Delta x_j\right|^2\right)$ pour tout *j*.

Si Δt_j tend vers 0, alors

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, x_{t_j})\,\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s,x_s)\,ds \quad \text{et} \quad \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, x_{t_j})\,\Delta x_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,x_s)\,dx_s.$$

De plus, comme H_t et K_t sont des processus élémentaires, on a

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta x_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} K_{t_j}^2 (\Delta t_j)^2 + 2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} K_{t_j} H_{t_j} (\Delta t_j)(\Delta W_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} H_{t_j}^2 (\Delta W_j)^2 .$$

Or, les deux premiers termes de cette somme tendent vers 0. Par exemple,

$$E\left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} K_{t_j} H_{t_j} (\Delta t_j)(\Delta W_j)\right)^2\right] = \sum_j E\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} K_{t_j} H_{t_j}\right)^2\right](\Delta t_j)^3 \to 0 \text{ quand } (\Delta t_j) \to 0.$$

La formule d'Itô suit alors du fait que $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} H_{t_j}^2 (\Delta W_j)^2$ tend vers $\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, x_s) H_s^2 \, ds$ dans $L^2(P)$ quand Δt_j tend vers 0.

Pour le prouver, posons $a_j = a(t_j)$ avec $a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x_t) H_t^2(\omega)$ et considérons l'expression

$$E\left[\left(\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j\right)^2\right] = \sum_{i,j} E\ a_i a_j \left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right)\left((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right).$$

Si $i < j$ ou $i > j$, alors les quantités $a_i\, a_j \left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right)$ et $\left((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right)$ sont indépendantes, ainsi les termes correspondants s'annulent, puisque $E\ (\Delta W_j)^2 \ = \Delta t_j$.

Donc,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j\right)^2\right] &= \sum_j E\ a_j^2 \left((\Delta W_j)^2 - \Delta t_j\right)^2 \\
&= \sum_j E\ a_j^2\ \ E\ (\Delta W_j)^4 - 2(\Delta W_j)^2 \Delta t_j + (\Delta t_j)^2 \\
&= \sum_j E\ a_j^2\ \left(3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2\right) \\
&= 2\sum_j E\ a_j^2\ (\Delta t_j)^2 \to 0 \text{ quand } \Delta t_j \to 0.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\sum_j a_j (\Delta W_j)^2 \to \int_0^t a(s)\, ds$ dans $L^2(P)$ quand $\Delta t_j \to 0$. Comme le calcul ci-dessus implique également que $\sum R_j \to 0$ quand $\Delta t_j \to 0$, cela finit la preuve du théorème.

Exemple 3.4 : $W_t^2 = f(W_t)$ avec $f(x) = x^2$. Donc,

$$W_t^2 = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)d\langle W,W\rangle_s$$
$$= 0 + 2\int_0^t W_s\,dW_s + \int_0^t ds$$
$$\Rightarrow \int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Proposition 3.5 (formule d'intégration par parties) : *Soient* x_t *et* y_t *des processus d'Itô réels, définis par*

$$x_t = x_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s \ \ et \ \ y_t = y_0 + \int_0^t K'_s\,ds + \int_0^t H'_s\,dW_s.$$

Alors,

$$x_t y_t = x_0 y_0 + \int_0^t x_s\,dy_s + \int_0^t y_s\,dx_s + \langle x,y\rangle_t, \ \ avec \ \ \langle x,y\rangle_t = \int_0^t H_s\,H'_s\,ds.$$

De la même manière que pour le cas en dimension 1, on peut démontrer la formule d'Itô pour des processus stochastiques de dimension *n*.

Théorème 3.6 : *Soit* x_t *un processus d'Itô à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, *défini par* $x_t = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^n)$ *avec*

$$x_t^i = x_0^i + \int_0^t K_s^i\,ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t H_s^{ij}\,dW_s^j,$$

où x_0 *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_t$*-mesurable de dimension n et* K_t *respectivement* H_t *sont des processus* $\mathcal{F}_t$*-adaptés à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *respectivement* $\mathbb{R}^{n\times m}$ *tels que* $\int_0^T |K_s|\,ds < +\infty$ *et* $\int_0^T |H_s|^2\,ds < +\infty$.

Soit g une fonction de $C^2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. *Alors, le processus* $y_t = g(t,x_t)$ *est également un processus d'Itô et*

$$dy_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,x_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial x_i}(t,x_t)\,dx_t^i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t,x_t)\,d\langle x^i,x^j\rangle_t,$$

où $\langle x^i,x^j\rangle_t = \sum_{k=1}^m \int_0^t H_s^{ik} H_s^{jk}\,ds.$

4. Equations différentielles stochastiques

Soient les fonctions $b:[0,T]\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma:[0,T]\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dx_t}{dt} = b(t, x_t) + \sigma(t, x_t)\,\eta_t,$$

où η désigne un bruit blanc de dimension *n*.

Cette équation peut être modélisée en utilisant l'intégrale d'Itô par

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)\,dW_s,$$

où *W* désigne un processus de Wiener de dimension *n* et x_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable et $\mathcal{F}_0$ − mesurable.

On a alors le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 4.1 : *Supposons qu'il existe une constante K strictement positive telle que pour tout t dans* $[0,T]$ *et tous* x, y *dans* $\mathbb{R}^d$ *on a*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le K(1+|x|)$$

et

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K|x-y|.$$

Alors, il existe un unique processus $x_t(\omega)$ *à trajectoire continue appartenant à l'espace* $M^2_{\mathcal{F}}([0,T],\mathbb{R}^d)$ *qui est solution de l'équation différentielle stochastique ci-dessus pour tout t dans* $[0,T]$.

Preuve :

a) unicité

Soient $x_t(\omega)$ et $y_t(\omega)$ deux processus continus qui sont solution de l'équation différentielle stochastique. Alors,

$$\begin{aligned} E\left(|x_t - y_t|^2\right) &\le 2E\left(\int_0^t (b(s,x_s) - b(s,y_s))\,ds\right)^2 + 2E\left(\int_0^t (\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s))\,dW_s\right)^2 \\ &\le 2t\int_0^t E(b(s,x_s) - b(s,y_s))^2\,ds + 2\int_0^t E(\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s))^2\,ds \\ &\le 2(1+T)K^2 \int_0^t E\left(|x_s - y_s|^2\right)ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique alors que $E\left(\left|x_t - y_t\right|^2\right) = 0$ donc $x_t = y_t$ t p.p. pour tout t dans $[0,T]$.

b) existence

On introduit la suite de processus stochastiques $(x_t^n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} x_t^0 = x_0 \\ x_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t b(s, x_s^n)\, ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^n)\, dW_s. \end{cases}$$

Par des calculs similaires à celui ci-dessus on montre que pour tout entier n, $x_t^n \in M_{\mathsf{F}}^2\,([0,T], \mathsf{R}^d)$ et que $E\left(\left|x_t^{k+1} - x_t^k\right|^2\right) \leq 2(1+T)K^2 \int_0^t E\left(\left|x_s^k - x_s^{k-1}\right|^2\right) ds,$ pour $k > 0$ respectivement $E\left(\left|x_t^1 - x_t^0\right|^2\right) \leq 2TK^2\left(1 + E\left|x_0\right|^2\right).$

Cela implique par récurrence que $E\left(\left|x_t^{k+1} - x_t^k\right|^2\right) \leq \dfrac{\left(2(1+T)K^2\right)^{k+1} T^{k+1}}{(k+1)!}\left(1 + E\left|x_0\right|^2\right),$

Donc, que la suite $(x_t^n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $M_{\mathsf{F}}^2\,([0,T], \mathsf{R}^d)$. En effet,

$$\left\|x^{k+1} - x^k\right\|_{M^2} = \left(E\int_0^T \left|x_s^{k+1} - x_s^k\right|^2 ds\right)^{1/2} \leq \frac{\left(2(1+T)K^2\right)^{\frac{k+1}{2}} T^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{(k+1)!}}\left(1 + E\left|x_0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent la suite $(x_t^n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite x qui est solution de l'équation différentielle stochastique.

Les solutions de telles équations stochastiques sont appelées diffusions. Une des propriétés fondamentales des diffusions est qu'on peut leur associer naturellement un opérateur différentiel de second ordre.

Définition 4.2 : Le générateur infinitésimal L de la diffusion $x_t(\omega)$, solution de l'équation différentielle stochastique $dx_t = b(x_t)\,dt + \sigma(x_t)\,dW_t$ initialisé par $x_0(\omega) = x \in \mathsf{R}^d$ est l'opérateur différentiel de second ordre défini pour toute fonction f à valeurs dans R^d par

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E^x[f(x_t)] - f(x)}{t},$$

où E^x désigne l'espérance par rapport à la loi de probabilité de la diffusion.

Théorème 4.3 ***:*** *Le générateur infinitésimal L est défini pour toute fonction f dans* $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ *par*

$$Lf(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Preuve : En appliquant la formule d'Itô, on trouve

$$\begin{aligned} f(x_t) &= f(x_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_s) dx_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma \sigma^T)(x_s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_s)\, ds \\ &= f(x) + \int_0^t \left(b^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)(x_s)\, ds + \int_0^t \sigma_j^i(x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_s)\, dW^j. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E^x \; f(x_t) \; = f(x) + E^x \left[\int_0^t \left(b^i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)(x_s)\, ds \right].$$

Le résultat suit alors de la définition de l'opérateur *L*.

Corollaire 4.4 (Formule de Dynkin) : *Soit f une fonction de* $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ *et* τ *un temps d'arrêt tel que* $E^x(\tau) < +\infty$. *Alors,*

$$E^x[f(x_\tau)] = f(x) + E^x \left[\int_0^\tau Lf(x_s)\, ds \right].$$

Exemple 4.5 : Le générateur infinitésimal associé à un processus de Wiener de dimension *n* est

$$Lf = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \Delta.$$

5. Théorème de Girsanov

Soit W_t un processus de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit une fonction $\varphi \in L^2_{\mathcal{F}_t}([0,T], \mathbb{R}^d)$.

On pose

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \varphi_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_s|^2 \, ds\right).$$

Par application de la formule d'Itô, on a alors

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \, \varphi_s \, dW_s.$$

Lemme 5.1 : *Sous l'hypothèse*

(H) $\qquad \exists c \; t.q. \; |\varphi_t| \leq C \;\; p.s., \; t \;\; p.p.,$

$(Z_t)_{t\geq 0}$ *est une* $(\mathcal{F}_t, P)-$*martingale et pour tout t dans* $[0,T], \;\; E(Z_t^p) < +\infty.$

Preuve : On applique la formule d'Itô. Pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} dZ_t^p &= p\, Z_t^{p-1} \, dZ_t + \frac{1}{2} p\,(p-1)\, Z_t^{p-2} \, d\langle Z, Z\rangle_t \\ &= p\, Z_t^p \, \varphi_t \, dW_t + \frac{1}{2} p\,(p-1)\, Z_t^p \, |\varphi_t|^2 \, dt \\ &\Rightarrow Z_t^p = 1 + \frac{1}{2} p\,(p-1) \int_0^t Z_s^p \, |\varphi_s|^2 \, ds + p \int_0^t Z_s^p \, \varphi_s \, dW_s. \end{aligned}$$

Soit le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \leq T \,/\, Z_t(\omega) \geq n\}$. On pose $Z_{n,t} = Z_{t \wedge \tau_n}$. Alors,

$$Z_{n,t}^p = 1 + \frac{1}{2} p\,(p-1) \int_0^t Z_{n,s}^p \, \chi_{[0,\tau_n]}(s) |\varphi_s|^2 \, ds + p \int_0^t Z_{n,s}^p \, \chi_{[0,\tau_n]}(s) \, \varphi_s \, dW_s.$$

Or, $\chi_{[0,\tau_n]}(t) \, Z_{n,t}^p \, \varphi_t \in M^2_{\mathcal{F}_t}$, par conséquent

$$\begin{aligned} E(Z_{n,t}^p) &= 1 + \frac{1}{2} p\,(p-1) \int_0^t E\left(\chi_{[0,\tau_n]}(s) \, Z_{n,s}^p \, |\varphi_s|^2\right) ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} p\,(p-1) c^2 \int_0^t E(Z_{n,s}^p) \, ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique alors que $E(Z_{n,t}^p) \leq e^{\frac{1}{2} p\,(p-1) c^2 t}$.

De plus, $Z_{n,t}^p \xrightarrow{p.s} Z_t^p$, donc le lemme de Fatou implique que $E(Z_t^p) \leq e^{\frac{1}{2} p\,(p-1) c^2 t}$.

Rappel 5.2 (Théorème de Radon-Nikodyn) : Soient μ et $\tilde{\mu}$ deux mesures. Alors, la mesure $\tilde{\mu}$ est absolument continue par rapport à la mesure μ s'il existe une fonction f vérifiant

1) $f \geq 0$
2) f est intégrable par rapport à μ
3) $\int f \, d\mu = 1$

telle que, pour toute fonction φ, $\int \varphi d\tilde{\mu} = \int \varphi \, f \, d\mu$. *On note* $\dfrac{d\tilde{\mu}}{d\mu} = f$.

On définit sur (Ω, P) une mesure de probabilité $\overline{P}$ par la dérivée de Radon-Nikodyn

$$\frac{d\overline{P}}{dP} = Z_t.$$

Théorème de Girsanov 5.3 : *Sous l'hypothèse (H), le processus* $\overline{W}_t = W_t - \int_0^t \varphi_s \, ds$ *est un* $(\mathcal{F}_t, \overline{P}) -$ *processus de Wiener.*

Lemme 5.4 (formule de Bayes) : *Soit* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}_t$ *et* y *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_t$ *-mesurable telle que* $y\,Z_T$ *est P-intégrable. Alors,*

$$\overline{E}[y / \mathcal{G}] = \frac{E[y\,Z_T / \mathcal{G}]}{E[Z_T / \mathcal{G}]}.$$

Preuve : Soit X une variable aléatoire $\mathcal{G}$ -mesurable et bornée. Alors,

$$\begin{aligned}
E(y\,Z_T\,X) &= \overline{E}(y\,X) \\
&= \overline{E}\big(X\,\overline{E}[y / \mathcal{G}]\big), \text{ comme } X \text{ est } \mathcal{G} - \text{mesurable} \\
&= E\big(x\,\overline{E}[y / \mathcal{G}]\,Z_T\big) \\
&= E\big(X\,\overline{E}[y / \mathcal{G}]\,E[Z_T / \mathcal{G}]\big), \text{ comme } X \text{ et } \overline{E}[y / \mathcal{G}] \text{ sont } \mathcal{G}\text{ - mesurables} \\
&\Rightarrow E[y\,Z_T / \mathcal{G}] = \overline{E}[y / \mathcal{G}]\,E[Z_T / \mathcal{G}].
\end{aligned}$$