INDICES DE POUVOIR ET D'INTERACTION EN THÉORIE DES JEUX COOPÉRATIFS : UNE APPROCHE PAR MOINDRES CARRÉS

JEAN-LUC MARICHAL AND PIERRE MATHONET

De nombreux indices de pouvoir ont été introduits en théorie des jeux afin de mesurer l'influence qu'un joueur a sur le jeu, ou de partager équitablement les bénéfices entre les joueurs. Les indices les plus connus sont dus à L. Shapley et J. Banzhaf.

Cependant, ces indices sont insuffisants pour décrire de manière fine le comportement des joueurs au sein d'un jeu. Par exemple, ils ne peuvent rendre compte des interactions entre les joueurs dans les coalitions. Pour mesurer de tels phénomènes, on peut définir des indices d'influence de coalitions ou mesurer directement l'interaction des joueurs par des indices d'interaction. L'introduction de ces derniers remonte aux travaux d'Owen (pour une paire de joueurs) mais le concept d'indice d'interaction a été développé de manière systématique dans les années '90 par M. Grabisch et ses collaborateurs, donnant lieu aux indices d'interaction de type Banzhaf, ou Shapley et bien d'autres.

Les indices de pouvoir et d'interaction ont été souvent définis à l'aide de caractérisations axiomatiques. L'indice de Banzhaf apparaît cependant naturellement comme coefficient du terme de plus haut degré dans l'approximation du jeu considéré par un jeu plus simple, au sens des moindres carrés. Nous rappelerons cette façon d'obtenir l'indice d'interaction de Banzhaf. Nous considérerons ensuite une extension du problème des moindres carrés à des distances pondérées. Nous montrerons que les solutions de ces problèmes des moindres carrés permettent de définir une classe d'indices d'interaction pondérés. Nous analyserons les propriétés de ces indices et montrerons que les indices d'interaction de Banzhaf et Shapley sont des centres de masse de certaines sous-familles de ces indices d'interaction pondérés.

Nous montrerons également que cette méthode de construction par moindres carrés permet des définir des indices d'interaction pour des fonctions définies sur le cube unité $[0,1]^n$ mais également de retrouver des indices d'influence apparaissant dans l'étude des fonctions Booléennes et en théorie des jeux.