

PERUCCA, Antonella  
Esch-sur-Alzette, Luxemburg

## Didaktik der Geometrie im 21. Jahrhundert

*Dieser Text ist ein Essay, der all jenen gewidmet ist, die Geometrie lehren: Was gibt es Neues zu berichten im 21. Jahrhundert? Wie können wir den Geometrieunterricht moderner gestalten? Können wir gemeinsam innovative Lernmaterialien produzieren, die allen frei zur Verfügung stehen?*

### 1. Werbung für die Geometrie (inklusiv Diversität)

Um Ihre SuS für die Geometrie zu motivieren, hier einige Werbeworte: *Geometrie ist zeitlos* (immun gegen Zeitgeist und modische Schwankungen); *Geometrie ist unsere Realität* (wir leben in einem scheinbar euklidischen dreidimensionalen Raum, wir bewohnen einen nahezu kugelförmigen Planeten); *Geometrie ist nützlich für das Individuum* (sich im Raum zu orientieren und bewegen und Formen zu unterscheiden ist eine Lebenskompetenz; das Lesen einer Landkarte bzw. einer technischen Zeichnung, oder das Verstehen einer Software für den 3D-Druck sind allgemeine Kompetenzen; weniger elementare Geometrie fördert Argumentations- sowie Problemlösungsfähigkeiten); *Geometrie ist nützlich für die Gesellschaft* (selbst ein modernes Fachgebiet wie die Weltraumrobotik stützt sich auf Geometrie als grundlegenden Werkzeugkasten); *Geometrie ist ästhetisch* (und diese Schönheit ist ein didaktischer Vorteil für Sie).

Und trotz alledem: *Geometrie mag jungen Menschen alt erscheinen und Geometern wenig vielfältig*. Pythagoras ist ein alter weißer Mann aus der Vergangenheit – und Gleicher gilt für Thales, Descartes, Hilbert... Hier bietet sich die Gelegenheit, die Vielfältigkeit der Mathematikerinnen und Mathematiker zu zeigen, die im 21. Jahrhundert weltweit an Geometrie arbeiten.

Die Fields-Medaille, die prestigeträchtigste Auszeichnung der Mathematik wurde 2014 an Prof. Mirzakhani verliehen, eine iranische Mathematikerin, für ihre Arbeiten zur Dynamik und Geometrie von Riemannschen Flächen und ihren Modulräumen. Voilà: eine Geometerin von Weltklasse (zur Anmerkung: weniger Bias würde vermutlich zu mehr Präsenz von Minderheiten führen). Bei aller Förderung von Geschlechtervielfalt sollte man jedoch auf den Fluch der „Superfrau“ achten, eine Metapher: Man kann seinen Lebensunterhalt auch mit Tennis bestreiten, ohne Serena Williams zu sein. Empfehlenswert sind daher auch erreichbarere Vorbilder, etwa eine Professorin

oder Akademische Rätin an einer nahegelegenen Universität, die eine erfüllte Forscherin ist.

Es gibt Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus allen Ländern und ethnischen Hintergründen. Fragen Sie einfach die KI (selbstverständlich die Ergebnisse überprüfend) – und wählen Sie die Beispiele aus, die Sie am meisten ansprechen: zeigen sie ihre Webseiten inkl. Fotos.

## 2. Zeitgenössische und zukünftige Geometrie

*SuS könnten meinen, da der Satz des Pythagoras bereits entdeckt sei, gebe es in der Geometrie nichts mehr zu tun.*

Man kann sich vorstellen, dass neue Geometrien den Weg für Revolutionen in der Physik ebnen und letztlich den wissenschaftlichen Fortschritt vorantreiben. Sie haben vermutlich schon vom gekrümmten Raum-Zeit-Kontinuum gehört, dem mathematischen Modell, das der Relativitätstheorie zugrunde liegt: Kurz gesagt, ohne Geometrie hätte Einstein nichts ausrichten können.

Und wenn man die fundamentalen Bausteine unseres Universums eher als flüchtige Teilchen betrachtet – ist ihre Bewegung dann nicht per se geometrisch? Selbst wenn man Strings gegenüber Teilchen bevorzugt: Auch sie breiten sich im Raum aus, und Schwingung ist eine oszillierende Bewegung. Die Suche nach dem Verständnis unseres Universums ist daher untrennbar mit dem Fortschritt der Geometrie verbunden. Vor langer Zeit entdeckte Kepler, dass sich die Planeten auf Ellipsen (mit der Sonne in einem Brennpunkt) und nicht auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen. Die nächste geometrische Entdeckung über unser Universum wird sich vielleicht schwerer Nicht-Expertinnen und -Experten erklären lassen – aber sie wird mit Sicherheit ebenso verblüffend sein.

Um SuS davon zu überzeugen, dass längst nicht alle geometrischen Fragen gelöst sind, kann man ein modernes oder sogar offenes Problem der Geometrie vorstellen. Man kann ein sehr berühmtes Problem (auf eher oberflächlichem Niveau) präsentieren. So loben die Clay-Millennium-Probleme jeweils eine Million Dollar für ihre Lösung aus. Eines davon ist die Poincaré-Vermutung. Die Logik dieses Problems ist klar: man betrachtet eine Eigenschaft und möchte alle Objekte klassifizieren, die sie besitzen.

Alternativ kann man ein geometrisches Problem wählen, dessen Fragestellung verständlicher ist. Da jede Lehrperson eigene Vorlieben hat, lautet

meine Empfehlung: Fragen Sie die KI nach einer Liste solcher Probleme und wählen Sie dann dasjenige aus, dass Sie selbst am meisten anspricht, z.B. das Problem des einbeschriebenen Quadrats.

### **3. Wie viel Geometrie brauchen wir eigentlich?**

Im Zeitalter der KI könnte es fast so wirken, als ließe sich das Denken delegieren. Sich ausschließlich auf Technologie zu verlassen, sollte jedoch keine Option sein. So verfügen Schiffe und Flugzeuge nach wie vor über reale Karten: Für den Fall technischer Ausfälle ist dies der unverzichtbare Plan B. Apropos Karten: angesichts der bequemen Werkzeuge, die uns heutzutage zur Verfügung stehen, könnte man einmal die altmodische Variante als schwere Übung präsentieren.

Was verloren gegangen ist, ist die Fähigkeit zum technischen Zeichnen. Ich würde mir wünschen, dass es immer noch gelehrt würde: etwa ein regelmäßiges Sechseck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren und die Konstruktion mit einem nicht radierbaren Stift nachzuzeichnen (einen Fehler erzwingt einen kompletten Neubeginn), was unter anderem konzentrierte Arbeit und Durchhaltevermögen erfordert.

Niemand kann *alle* existierenden Aspekte der Geometrie lernen, sondern nur ein Bruchteil davon. Um dies den SuS zu verdeutlichen, genügt ein Blick in die *Encyclopedia of Triangle Centers*: wer glaubt, über Dreiecke bereits alles zu wissen, wird seine Meinung rasch revidieren. Gleichzeitig wurde oder wird die klassische Geometrie in den Lehrplänen zunehmend gekürzt, um Platz für andere mathematische Bereiche wie Stochastik oder Graphentheorie zu schaffen. Hier plädiere ich ausdrücklich für Differenzierung: bei manchen Lernenden mag es genügen, wenn sie den Satz des Pythagoras in einer einfachen geometrischen Aufgabe korrekt anwenden können. Bei anderen sollten wir uns damit nicht zufriedengeben und die Messlatte höher legen. Sagen wir ruhig die Wahrheit: Ihre Altersgenossen früherer Generationen haben mehr gelernt. Ein guter Ausgangspunkt ist die Geometrie, wie sie etwa auf nationalem mathematischen Wettbewerbsniveau verlangt wird. Dort finden sich zusätzliche grundlegende Resultate jenseits des Schulstoffs – und leistungsstarke Lernende können (und sollen) sie beherrschen.

#### **4. Lernressourcen erstellen und allen zur Verfügung stellen**

Lehrerinnen und Lehrer können auf explorative Aufgaben (*Entdeckungsaufgaben*) in der Geometrie zurückgreifen, um wissenschaftliches Denken im mathematischen Tun zu fördern. Wir können auf spielerische geometrische Aufgaben setzen, etwa auf *Sangaku* (mit einer ansprechenden visuellen Formulierung). Wir können die Geometrie künstlerischer Objekte erkunden, etwa die ebenen Figuren in römischen Mosaiken. Als alternative Aufgaben lassen sich geometrische „Quests“ erfinden: zum Beispiel, wie kann man einen Kuchen mit trapezförmigem Querschnitt (hotel cake) horizontal in zwei gleichvolumige Teile schneiden? Wir können überlegen, was SuS anspricht, und die darin verborgene Geometrie nutzen (etwa die Linien, die verschiedene Bereiche eines Fußballfeldes markieren). Wir können knifflige Quizfragen stellen, etwa die überraschende Tatsache, dass die Kenntnis von zwei Seitenlängen eines Dreiecks und den Größen aller drei Winkel nicht ausreicht, um das Dreieck bis auf Kongruenz festzulegen (siehe „5-Con triangles“). Oder wir stellen grundlegende Fragen wie die Klassifikation aller Parabeln bis auf Ähnlichkeit (in der Schule lernt man von „schmalen“ und „weniger schmalen“ Parabeln, als gäbe es – wie bei Ellipsen – einen ganzen Zoo an Formen, aber es gibt nur *eine* Parabelform, so wie es nur eine Kreisform gibt).

Es wäre wünschenswert, dass die GDM Links zu Sammlungen sorgfältig aufbereiteter, werbe- und trackingfreier geometrischer Aufgaben und Ressourcen bereitstellt: frei zugängliches, anpassbares Material für Lehrkräfte. Denn Lehrpersonen – und letztlich ihre SuS – profitieren von solchen Materialien, haben aber oft nicht die Zeit, sie selbst zu erstellen.

Mit Unterstützung von Studierenden im Rahmen ihrer Abschlussarbeiten produziere ich solches Material (zum Download auf meiner Webseite), wie 3D-Modelle von Würfelschnitten, die sich mithilfe von Magneten öffnen und schließen lassen (technisch simpel: man pausiert den Druck, um Kopfmagnete einzulegen) oder einen leicht zugänglichen Beweis (eher analytische Geometrie über Geraden in der Ebene), der zeigt, welche Formen als Würfelschnitte überhaupt möglich sind.

Meine abschließende Botschaft lautet: **Lassen Sie uns gemeinsam die Schulgeometrie weiterentwickeln.**