

Stabilisation des systèmes bilinéaires fractionnaires

Ibrahima N'DOYE^{1,2}, Michel ZASADZINSKI¹, Nour-Eddine RADHY², Mohamed DAROUACH¹

¹Centre de Recherche en Automatique de Nancy,
UMR 7039 – Nancy-Université, CNRS

IUT de Longwy, 186 rue de Lorraine 54400 Cosnes et Romain, France.
ibrahima.ndoye@iut-longwy.uhp-nancy.fr, Michel.Zasadzinski@uhp-nancy.fr

²Laboratoire Physique et Matériaux Microélectronique Automatique et Thermique
Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain-Chock
BP : 5366 Maarif, Casablanca 20100, Maroc.

Résumé— Cet article traite de la stabilisation des systèmes bilinéaires fractionnaires par l'approche de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. L'utilisation de cette nouvelle approche permet de montrer sous certaines hypothèses adéquates, qu'on peut garantir une stabilisation asymptotique par retour d'état statique et par retour de sortie statique des systèmes bilinéaires fractionnaires. La méthodologie est illustrée par l'intermédiaire d'un exemple numérique.

Mots-clés— Systèmes bilinéaires fractionnaires, nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman, retour d'état statique, retour de sortie statique, stabilisation asymptotique.

I. INTRODUCTION

Beaucoup de vrais systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre non entier, basé en générale sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non entier.

Les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier sont aussi stables que leurs homologues, les systèmes d'ordre entier. En effet, du fait que les systèmes fractionnaires sont d'une part, pour la plupart considérés comme des systèmes à mémoire qui sont généralement plus stables comparés aux systèmes d'ordre entier et d'autre part, du fait qu'ils affichent une dynamique beaucoup plus sophistiquée, ce qui présente une grande importance par exemple dans le domaine de la communication sécurisée. Récemment, le problème de la synchronisation chaotique a été naturellement étendue aux systèmes fractionnaires en raison des applications nombreuses et potentielles en physique des lasers, des réacteurs chimiques, de la communication sécurisée et de la biomédecine.

Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier. Le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la nature autour de nous. La raison principale de l'usage fréquent des modèles d'ordre entier était l'absence des méthodes de solution pour des équations fractionnaires ou d'ordre non entier. Actuellement, un bon nombre de méthodes pour l'approximation de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire peut être facilement employé dans diverses applications notamment en théorie du contrôle (nouveaux contrôleurs et modèles de systèmes fractionnaires) en théorie de circuits électriques (fractances), en théorie de condensateur etc...

D'ailleurs, quelques études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques [1], ther-

miques [2] et viscoélastiques [3] sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non entières ont, à cet effet, été développés [4]. Par ailleurs, la question de la stabilité est très importante surtout en théorie du contrôle. Dans le cas de la commande des systèmes d'ordre fractionnaire, il y'a beaucoup de défis et des problèmes non résolus liés à la théorie de la stabilité tels que la stabilité robuste, la stabilité interne, la stabilité à entrée bornée et à sortie bornée etc...

L'objectif de ce papier est d'étudier la stabilisation par retour d'état statique et par retour de sortie statique des systèmes bilinéaires fractionnaires non homogènes. L'approche naturelle pour cela, est l'utilisation de la partie linéaire du système, pour montrer que sous certaines hypothèses adéquates, il est possible de contrôler le système global par retour d'état statique et par retour de sortie statique, en utilisant la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. La preuve du lemme de Gronwall-Bellman standard ou classique et son utilisation dans la théorie des systèmes non linéaires peuvent être trouvés dans [5], [6], [7] et quelques généralisations de ce lemme dans [8], [9].

Des définitions de base du calcul fractionnaire, en particulier, la fonction de Mittag-Leffler, sont présentées d'abord dans la section II.

Puis, dans la section III, on présente la définition de la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire commensurable en mettant en exergue les différentes régions de stabilité.

Dans la section IV, on propose d'étudier la stabilisation asymptotique des systèmes bilinéaires fractionnaires ou d'ordre non entier par retour d'état statique et par retour de sortie statique en utilisant une nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman. Un exemple numérique est utilisée dans la section V pour illustrer nos résultats. La nouvelle généralisation du lemme est prouvée également dans l'annexe.

Notations. $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ et $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ sont, respectivement la norme euclidienne de vecteur et la norme spectrale de matrice où $\lambda_{\max}(A^T A)$ est la valeur propre maximale de la matrice symétrique $A^T A$. $(f(\cdot))_i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $f(\cdot)$.

II. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

A. Définition de la dérivée fractionnaire

Dans ce papier, les symboles de la dérivation fractionnaire ont été normalisés comme suit [10], [11]

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t d\tau^{(-\alpha)}, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1)$$

où ${}_a D_t^\alpha$ représente l'opérateur de dérivation d'ordre α , a est la limite inférieure et t la limite supérieure de cet opérateur de dérivation fractionnaire. Dans ce qui suit, on pose $a = 0$, alors l'opérateur ${}_a D_t^\alpha$ est remplacé par D^α .

La formulation suivante des dérivées fractionnaires dite dérivée au sens de Caputo est souvent utilisée puisque sa transformée de Laplace conduit à des conditions initiales qui prennent la même forme que pour les systèmes à dérivée d'ordre entier avec des interprétations physiques claires.

La dérivée au sens de Caputo est définie par [11], [12] :

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{d^n f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n \quad (2)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma Euler. L'interprétation physique et la résolution des équations différentielles fractionnaires ont été largement traitées dans [11], [12].

Dans la résolution des équations différentielles et analytiques, l'utilisation de la technique de transformation de Laplace est souvent nécessaire et joue un rôle important dans la résolution des équations à dérivée fractionnaire.

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de l'équation (2) est donnée par :

$$\int_0^t D^\alpha f(t) e^{-st} dt = s^\alpha \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t)_{t=0} \quad (3)$$

où $s \in \mathbb{C}$ est l'opérateur de Laplace. En considérant que toutes les conditions initiales sont nulles l'équation (3) peut être réduite à

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right) = s^\alpha \mathcal{L}(f(t)). \quad (4)$$

L'initialisation appropriée est également cruciale dans la résolution et la compréhension des équations ou systèmes fractionnaires.

Ainsi, on adopte généralement la notation pour la causalité "arrogante" de la fonction ou du système (pour tout $0 \leq \alpha < 1$)

$${}_c D_t^\alpha f(t) = {}_a d_t^\alpha f(t) + {}_a d_0^\alpha f(t), \quad \text{avec } a \leq (c=0) < t \quad (5)$$

où ${}_a d_t^\alpha f(t)$ est la dérivée d'ordre α qui peut s'écrire sous la forme suivante

$${}_a d_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right) \quad (6)$$

et où ${}_a d_0^\alpha f(t) = \Psi(\alpha, f, a, 0, t)$ est une fonction initiale définie par

$${}_a d_0^\alpha f(t) = \Psi(\alpha, f, a, 0, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^0 \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right) \quad (7)$$

B. Définition de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle, elle est souvent utilisée dans la résolution des problèmes physiques décrits par des équations à dérivée ou intégrale fractionnaire. Elle est également connue pour avoir un nombre fini de zéros réels, ce qui est applicable à de nombreux problèmes physiques.

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par la relation suivante [11], [13] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (8)$$

où

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_\alpha(z)$$

est la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres peut s'écrire :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) dt = \frac{s^{-\alpha-\beta} k!}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad (9)$$

où

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \frac{d(k)}{dt^k} E_{\alpha,\beta}.$$

Lemme 1 : [14] Si $\alpha < 2$, β un nombre réel choisi arbitrairement, γ est tel que $0.5\alpha\pi < \gamma < \min[\pi, \pi\alpha]$ et $C_0 > 0$ est un réel constant, alors

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C_0}{1+z}, \quad \gamma \leq |\arg(z)| \leq \pi, \quad z \neq 0.$$

Pour une matrice de n -dimension, nous obtenons le corollaire suivant

Corollaire 1 : [15] Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\alpha < 2$, β est un nombre réel choisi arbitrairement, γ est tel que $\frac{\alpha\pi}{2} < \gamma < \min[\pi, \pi\alpha]$ et $\theta > 0$ est un réel constant, alors

$$\|E_{\alpha,\beta}(A)\| \leq \frac{\theta}{1+\|A\|}, \quad \gamma \leq |\arg(\lambda_i(A))| \leq \pi, \quad i = 1 \dots n \quad (10)$$

où $\theta = \max(C, \|P\| \|P^{-1}\| C)$, $\lambda_i(A)$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice A , P est une matrice de transformation non singulière donnée par la forme canonique de Jordan de la matrice A , $\frac{C}{1+\|A\|} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{C_{0i}}{1+\lambda_i} \right|$, où C et C_{0i} sont des constantes positives.

III. STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES FRACTIONNAIRES

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont négatives ou à parties réelles négatives si elles sont complexes conjugués donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier. En effet, la notion intéressante est que les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe.

La stabilité des systèmes fractionnaires a été étudiée dans [16], [17], où des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues donnant lieu au théorème suivant :

Théorème 1 : [16], [17] Considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable suivant :

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (11)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Soit $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Le système (11) est stable si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1 \dots n \quad (12)$$

D'après, ce théorème de la stabilité, il en découle les différentes régions ou zones stables et instables, (voir figure 1).

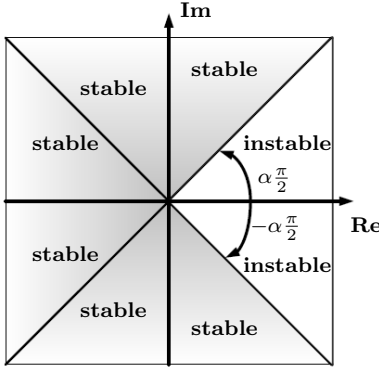


Fig. 1. Régions de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires avec $0 < \alpha < 1$

IV. STABILISATION DES SYSTÈMES BILINÉAIRES FRACTIONNAIRES

Considérons le système bilinéaire fractionnaire décrit par le modèle suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (13)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie, $u_i(t)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(t)$, A_i est la matrice associée à la coordonnée $u_i(t)$, A_0 , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

A. Stabilisation par retour d'état statique

Le but de cette section est d'étudier le problème de la stabilisation asymptotique par retour d'état statique du système bilinéaire fractionnaire (13) avec $C = I_n$.

Hypothèse 1 : Supposons qu'il existe une matrice gain L telle que la relation (10) du corollaire 1 soit satisfaite, c'est à dire, la matrice A est remplacée par la matrice $\tilde{A} = (A_0 + BL)$ avec $\beta = 1$, et que

$$\left| \arg(\lambda_i(\tilde{A})) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. \square

La stabilisation asymptotique du système bilinéaire fractionnaire (13) avec $C = I_n$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2 : Sous l'hypothèse 1, le système (13) avec $C = I_n$ contrôlé par le retour d'état suivant

$$u(t) = Lx(t) \quad (14)$$

est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $\tilde{A} = (A_0 + BL)$ sont à partie réelles négatives et si l'état initial $\|x_0\|$ satisfait la relation suivante

$$\|x_0\| < \left(\frac{\alpha \|\tilde{A}\|}{2\theta^2 \|L\| \sum_{i=1}^m \|A_i\|} \right). \quad (15)$$

De plus, l'état du système $x(t)$ est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha}}{\left(1 - \frac{2\theta^2 \|L\| \|x_0\| \sum_{i=1}^m \|A_i\|}{\alpha \|\tilde{A}\|} \left(1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)} \right) \right)}. \quad (16)$$

Preuve 1 : En utilisant la transformée de Laplace du système (13) et la relation (14) avec $C = I_n$, nous obtenons l'équation suivante

$$X(s) = (I_n s^\alpha - \tilde{A})^{-1} \left(s^{\alpha-1} x_0 + \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^m A_i x(t) (Lx(t))_i \right) \right) \quad (17)$$

où $\tilde{A} = (A_0 + BL)$.

Puis, en appliquant la transformée inverse de Laplace de l'équation (17), obtenue d'une part grâce à la transformée inverse de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres, et d'autre part, en utilisant l'intégrale de convolution, on obtient l'égalité suivante

$$x(t) = E_{\alpha,1}(\tilde{A}t^\alpha) x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\tilde{A}(t-\tau)^\alpha) \left(\sum_{i=1}^m A_i x(\tau) (Lx(\tau))_i \right) d\tau \quad (18)$$

en appliquant ensuite la norme des deux côtés de l'équation (18) et en utilisant le corollaire 1, on obtient l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha} + \int_0^t \frac{\theta \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|L\| \|t-\tau\|^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^2 d\tau \quad (19)$$

ou d'une manière équivalente

$$\|x(t)\| \leq \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha} + \int_0^t \frac{\theta \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} \|x(\tau)\|^2 d\tau. \quad (20)$$

En utilisant ainsi le lemme 3 de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman et en considérant

$$r(t) = \frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha}, \quad f(\tau) = \frac{\theta \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha}. \quad (21)$$

On peut vérifier que l'inégalité (42) du lemme 3 est bien vérifiée, c'est à dire

$$1 - (\ell - 1) \int_a^b (r(s))^{\ell-1} f(s) ds > 0 \quad (22)$$

l'inégalité (22) peut s'écrire sous la forme

$$1 - \int_0^t \frac{\theta \|x_0\|}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{\theta \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|L\| (t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} d\tau > 0, \forall t > 0 \quad (23)$$

où d'une manière équivalente

$$1 - \theta^2 \|L\| \|x_0\| \sum_{i=1}^m \|A_i\| \int_0^t \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha} d\tau > 0, \forall t > 0, \quad (24)$$

vérifions maintenant que l'inégalité suivante est bien satisfaite

$$1 - \theta^2 \|L\| \|x_0\| \sum_{i=1}^m \|A_i\| \Phi(t) > 0, \forall t > 0 \quad (25)$$

où

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau. \quad (26)$$

L'intégrale dans (26) peut être décomposer en une somme de deux intégrales

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau \\ &+ \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau \end{aligned} \quad (27)$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $(t-\tau) \geq \tau$ pour tout $\tau \in [0, \frac{t}{2}]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau \\ &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

de même, $0 < \alpha < 1$ et $(t-\tau) \leq \tau$ pour tout $\tau \in [\frac{t}{2}, t]$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau \\ &\leq \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| (\eta)^\alpha)} \frac{\eta^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| \eta^\alpha)} d\eta, \end{aligned} \quad (29)$$

en substituant $(t-\tau)$ par η . En utilisant les deux relations (28) et (29), la relation (26) peut être réécrite comme suit

$$\Phi(t) = 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)} d\tau$$

$$= 2 \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\tau^{\alpha-1}}{(1 + \|\tilde{A}\| \tau^\alpha)^2} d\tau \quad (30)$$

cette dernière est équivalente à

$$\Phi(t) = \frac{2}{\alpha \|\tilde{A}\|} \left(1 - \frac{1}{1 + \|\tilde{A}\| \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha} \right). \quad (31)$$

À partir de l'équation (31), on montre que $\Phi(t) > 0$ si $t > 0$ et la relation suivante

$$1 - \theta^2 \|L\| \|x_0\| \sum_{i=1}^m \|A_i\| \Phi(t)$$

dans l'inégalité (25) est minimale quand t tend vers l'infini. Par ailleurs, l'inégalité (25) est satisfaite si l'état initial x_0 vérifie la condition (15).

À partir de l'équation (20), on applique le lemme 3 de la nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman et on obtient l'inégalité suivante

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\tilde{A}\| t^\alpha}}{1 - \theta^2 \|L\| \|x_0\| \sum_{i=1}^m \|A_i\| \Phi(t)} \quad (32)$$

qui vérifie bien l'inégalité (16) énoncée dans le théorème 2.

Enfin, on vérifie bien que si le temps t tend vers l'infini, $\|x(t)\|$ converge vers zéro, ce qui implique que la solution du système fractionnaire est asymptotiquement stable.

B. Stabilisation par retour de sortie statique

Dans cette section, on cherchera également à étudier le problème de la stabilisation asymptotique par retour de sortie statique du système bilinéaire d'ordre fractionnaire (13).

Pour cela, nous supposons que l'état du système bilinéaire d'ordre fractionnaire est partiellement mesurable et nous considérons toujours le système bilinéaire fractionnaire défini dans (13).

Hypothèse 2 : Supposons qu'il existe une matrice gain K telle que la relation (10) du corollaire 1 soit satisfaite c'est à dire la matrice A est remplacée par la matrice $\bar{A} = A_0 + BKC$ avec $\beta = 1$, et que

$$|\arg(\lambda_i(\bar{A}))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. \square

Remarque 1 : Il n'est pas évident de déterminer le gain K de l'hypothèse 2 dans le cas d'un retour de sortie statique, ceci mène très souvent aux problèmes d'optimisation non convexes cités dans [18] : il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes sur les matrices données A , B et C telles que le gain K satisfait le corollaire 1. Dans la littérature, beaucoup d'auteurs ont contribué et proposé des lois de commande par retour de sortie statique sur les systèmes linéaires (voir [19], [20] et références incluses). \bullet

La stabilisation asymptotique du système bilinéaire fractionnaire (13) contrôlé par un retour de sortie statique est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3 : Sous l'hypothèse 2, le système (13) contrôlé par le retour de sortie statique suivant

$$u(t) = Ky(t) \quad (33)$$

est asymptotiquement stable si est seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $\bar{A} = A_0 + BKC$ sont à partie réelles négatives et si l'état initial $\|x_0\|$ vérifie la relation suivante

$$\|x_0\| < \left(\frac{\alpha \|\bar{A}\|}{2\theta^2 \|KC\| \sum_{i=1}^m \|A_i\|} \right). \quad (34)$$

De plus, l'état du système $x(t)$ est borné en norme comme suit

$$\|x(t)\| \leq \frac{\frac{\theta \|x_0\|}{1 + \|\bar{A}\|} t^\alpha}{\left(1 - \frac{2\theta^2 \|KC\| \|x_0\| \sum_{i=1}^m \|A_i\|}{\alpha \|\bar{A}\|} \left(1 - \frac{1}{1 + \|\bar{A}\|} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right)}. \quad (35)$$

Preuve 2 : La preuve du théorème 3 est donnée par la preuve du théorème 2 en remplaçant, respectivement, $\tilde{A} = A_0 + BL$ et L par $\bar{A} = A_0 + BKC$ et KC .

V. EXEMPLE NUMÉRIQUE

Prenons le système bilinéaire fractionnaire instable suivant

$$\begin{cases} D_t^\alpha x = A_0 x + A_1 u x + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (36)$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour simplifier, nous construisons le contrôleur d'état linéaire ou gain $L = [-1 \quad -1]$ tel que

$$\left| \arg(\lambda_i(\tilde{A})) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

et que les valeurs propres de la matrice $\tilde{A} = A_0 + BL$ soient égales à $(-1, -2)$. Ainsi, la condition du théorème 2 étant satisfaite. On conclut donc que la solution du système bilinéaire fractionnaire contrôlé par un retour d'état statique est asymptotiquement stable. Les résultats de la simulation sont donnés par la figure 2 avec $\theta = 0.05$; $x_0 = [1 \ 0]^T$ et $0 < \alpha < 1$.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, on a montré que sous certaines conditions adéquates, on pouvait stabiliser asymptotiquement par retour d'état statique et par retour de sortie statique le système bilinéaire fractionnaire en utilisant l'approche d'une nouvelle généralisation du lemme de Gronwall-Bellman, cette dernière a été prouvée dans l'annexe. Les résultats de simulation ont illustré l'efficacité de cette approche et de la méthode de contrôle proposée.

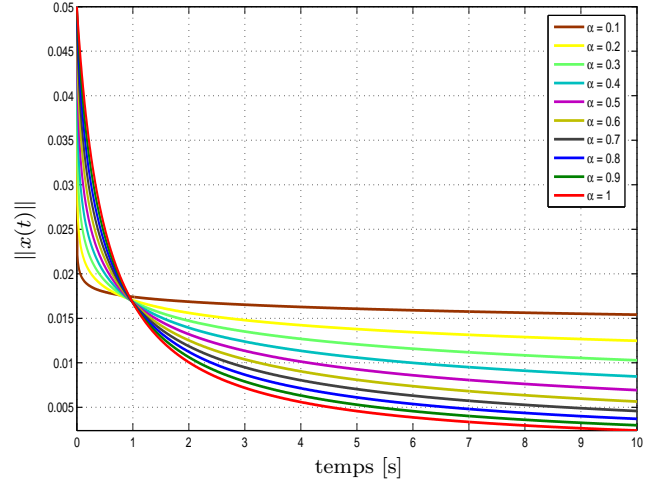


Fig. 2. Stabilisation par retour d'état statique du système bilinéaire fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$

ANNEXE : NOUVELLE GÉNÉRALISATION DU LEMME DE GRONWALL-BELLMAN

Lemme 2 (Lemme de Gronwall-Bellman) [7] (p 292) [5] (p 252) Soit

- f, g et k , fonctions intégrables et définies de $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$,
- $g \geq 0, k \geq 0$,
- $g \in \mathcal{L}_\infty$,
- gk est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Si $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ satisfait

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (37)$$

alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t k(\tau) f(\tau) \exp\left(\int_\tau^t k(s) g(s) ds\right) d\tau, \quad \forall t \geq 0. \quad (38)$$

Corollaire 2 : [8] Soit $k : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, intégrable sur \mathbb{R}^+ et $k \geq 0$ et $c(t)$ fonction positive monotone et décroissante.

Si $u : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ satisfait

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t k(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (39)$$

alors

$$u(t) \leq c(t) \exp\left(\int_0^t k(\tau) d\tau\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (40)$$

Lemme 3 (Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman) Soit

- $a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a < b, r(t) > 0$ une fonction positive décroissante, $\ell > 1$ un entier,
- $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable telle que, $\forall \alpha, \beta \in [a, b], (0 \leq \alpha < \beta)$, on ait

$$\int_\alpha^\beta f(s) ds > 0$$

- $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction bornée telle qu'on ait

$$x(t) \leq r(t) + \int_a^t f(s) (x(s))^\ell ds. \quad (41)$$

alors, sous l'hypothèse suivante

$$1 - (\ell - 1) \int_a^t (r(s))^{\ell-1} f(s) ds > 0 \quad (42)$$

on a

$$x(t) \leq \frac{r(t)}{\left(1 - (\ell - 1) \int_a^t (r(s))^{\ell-1} f(s) ds\right)^{\frac{1}{\ell-1}}}. \quad (43)$$

Preuve 3 : L'inégalité (41) s'écrit

$$x(t) \leq r(t) + \int_a^t (f(s)(x(s))^{\ell-1}) x(s) ds$$

en appliquant le lemme de Gronwall-Bellman classique, [6], [7], on obtient l'inégalité suivante

$$x(t) \leq r(t) \exp\left(\int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \quad (44)$$

ou d'une manière équivalente

$$(x(t))^{\ell-1} \leq (r(t))^{\ell-1} \exp\left((\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right). \quad (45)$$

Multiplions l'inégalité précédente par $-(\ell - 1)f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -(\ell - 1)f(t)(x(t))^{\ell-1} \\ & \geq -(\ell - 1)(r(t))^{\ell-1} f(t) \exp\left((\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \end{aligned} \quad (46)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & -(\ell - 1)f(t)(x(t))^{\ell-1} \exp\left(-(\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \\ & \geq -(\ell - 1)(r(t))^{\ell-1} f(t) \end{aligned} \quad (47)$$

en utilisant la primitive de la fonction exponentielle, l'inégalité (47) devient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\exp\left(-(\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \right) \\ & \geq -(\ell - 1)(r(t))^{\ell-1} f(t) \end{aligned} \quad (48)$$

en intégrant de a à t , on trouve

$$\begin{aligned} & \exp\left(-(\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \\ & \geq 1 - (\ell - 1) \int_a^t (r(s))^{\ell-1} f(s) ds. \end{aligned} \quad (49)$$

Notons que la constante d'intégration est égale à 1 (lorsqu'on choisit $t = a$).

si l'inégalité (42) est vérifiée, on a

$$\begin{aligned} & \exp\left((\ell - 1) \int_a^t f(s)(x(s))^{\ell-1} ds\right) \\ & \leq \frac{1}{1 - (\ell - 1) \int_a^t (r(s))^{\ell-1} f(s) ds}. \end{aligned} \quad (50)$$

Les inégalités (45) et (50) impliquent

$$(x(t))^{\ell-1} (r(t))^{-(\ell-1)} \leq \frac{1}{1 - (\ell - 1) \int_a^t (r(s))^{\ell-1} f(s) ds}$$

d'où

$$x(t) \leq \frac{r(t)}{\left(1 - (\ell - 1) \int_a^t (r(s))^{\ell-1} f(s) ds\right)^{\frac{1}{\ell-1}}}. \quad (51)$$

RÉFÉRENCES

- [1] R. Darling and J. Newman, "On the short behaviour of porous interaction electrodes," *J. of the Electrochemical Society*, vol. 144, pp. 3057–3063, 1997.
- [2] J. Battaglia, L. L. Lay, A. O. J.C. Batsale, and O. Cois, "Heat flux stimulation through inverted non integer identification models," vol. 39, pp. 374–389, 2000.
- [3] C. R. Serment, *Synthèse d'un isolateur d'ordre non entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, France, 2001.
- [4] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, and J. L. Battaglia, "Non integer model from modal decomposition for time domain system identification," in *Proc. IFAC Symposium on System Identification*, (Santa Barbara, USA), 2000.
- [5] C. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems Input-Output Properties*. New York : Electrical Sciences. Academic Press, 1975.
- [6] B. Pachpatte, "A note on Gronwall-Bellman inequality," *J. of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 44, pp. 758–762, 1973.
- [7] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 2nd ed., 1993.
- [8] B. Pachpatte, "On some generalizations of Bellman's lemma," *J. of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 51, pp. 141–150, 1975.
- [9] N. El Alami, *Analyse et Commande Optimale des Systèmes Bilinéaires Distribués. Applications aux Procédés Energétiques*. PhD thesis, Université de Perpignan, France, 1986. Doctorat d'Etat.
- [10] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. New York : Academic Press, 1974.
- [11] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Heidelberg : Springer, 2008.
- [12] I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation," *Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 5, pp. 367–386, 2002.
- [13] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of *North-Holland Mathematics Studies*. Amsterdam : Elsevier, 2006.
- [14] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*. New York : Academic, 1999.
- [15] X. Wen, Z. Wu, and J. Lu, "Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems," *IEEE Trans. Circ. Syst. II : Express Briefs*, vol. 55, pp. 1178–1182, 2008.
- [16] D. Matignon, "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing," in *Proc. IEEE-IMACS Syst. Man Cyber. Conf.*, (Lille, France), 1996.
- [17] D. Matignon, "Recent results in fractional differential systems theory," Tech. Rep. 96C004, École Nationale Supérieure des Télécommunications, France, 1996.
- [18] M. Fu, "Pole placement via static output feedback is NP-hard," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 49, pp. 855–857, 2004.
- [19] V. Sirmos, C. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis, "Static output feedback : a survey," *Automatica*, vol. 33, pp. 125–137, 1997.
- [20] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aït Rami, "A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems," *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 42, pp. 1171–1176, 1997.