C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 1191-1196, 1997
Probabilités/*Probability Theory*

Filtrage de diffusions faiblement bruitées dans le cas corrélé

Jang SCHILTZ

Université de Metz, Département de Mathématiques, B.P. 80794, 57012 Metz cedex, France.

Résumé. Dans cette Note, on donne une estimation d'un processus d'état bruité par un bruit blanc d'ordre ε. On calcule un filtre, donné comme solution d'une équation différentielle stochastique, qui est asymptotiquement optimal quand ε tend vers 0.

Filtering of diffusions driven by a small noise in the correlated case

Abstract. *This paper deals with the problem of estimating a state process, the measurements of which are corrupted by a correlated white noise of order ε. We derive a filter, obtained as the solution of a stochastic differential equation which is asymptotically optimal as ε tends to 0.*

Abridged English Version

The necessity to estimate a state process which is only partially observed occures in many applied problems and has been widely studied for many years. Adequate mathematical structures have been established and we dispose today of plenty of theoretical results about this subject.

In this Note we assume that the process we want to estimate (signal) is a Markovian diffusion process and that it is observed through a function of this process perturbated by a white noise. In fact, we try to find the best possible estimation of the signal at a time t, knowing the observation up to time t. It is however by now well known that, except in some particular cases, the differential equations which permit to solve this problem, for instance the Zakai equation (*see* [8]), are infinite-dimensional, which renders interesting every procedure that brings out suboptimal filters of finite dimension.

We assume here that the perturbating white noise is of order ε and that for $\varepsilon = 0$, the signal is exactly observed. More precisely, let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a complete probability space and $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ a right-continuous increasing family of sub-σ-algebras of $\mathcal{F}$. Let w and v be two independent $\mathcal{F}_t$-Brownian motions with values in $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{R}^m$. Let us consider the nonlinear filtering problem associated with the

Note présentée par Paul MALLIAVIN.

system signal/observation pair $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^2$, solution of the following stochastic differential system:

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s)\,ds + \int_0^t \sigma(x_s)dw_s + \int_0^t g(x_s)dy_s, \\ y_t = \int_0^t h(x_s)\,ds + \varepsilon\, v_t, \end{cases}$$

verifying the hypotheses (H_1) to (H_7).

We then define the filter by (2), as usually in nonlinear filtering theory and consider the class of suboptimal filters given by (3).

In proposition 1.2, we prove, by means of direct computations, that the error commited by replacing the process x_t by the suboptimal filter m_t is of order $\sqrt{\varepsilon}$.

In the main theorem of this paper we deduce from the latter proposition that, for a well chosen suboptimal filter, this error is in fact only of order ε. The proof is based on a change of probability and requires some Malliavin Calculus (*see* [3] and the references therein). Indeed, as the observation coefficients are affine, we can apply Girsanov's theorem and define, as usually in nonlinear filtering theory, some reference probability measure. We then get the desirated estimate by computing the stochastic gradient of the Girsanov exponential in an appropriate direction.

This is a generalization of the papers of J. Picard (*see* [5], [6] and [7]) and A. Bensoussan (*see* [1]), who work with an uncorrelated filtering system and bounded observation coefficients.

1. Positionnement du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une famille croissante, continue à droite de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$. Soient w et v deux $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener indépendants de dimensions respectives d et m.

Considérons le problème de filtrage non linéaire associé au système état/observation $(x_t, y_t) \in (\mathbb{R}^m)^2$, solution du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s)\,ds + \int_0^t \sigma(x_s)\,dw_s + \int_0^t g(x_s)\,dy_s \\ y_t = \int_0^t h(x_s)\,ds + \varepsilon\, v_t, \end{cases} \tag{1}$$

vérifiant les hypothèses suivantes:

(H_1) x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ dont les moments de tous ordres sont bornés.

(H_2) b est une fonction de classe $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ à dérivées premières et secondes bornées.

(H_3) σ et g sont des fonctions bornées de classe $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d)$, respectivement $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)$, à dérivées premières et secondes bornées.

(H_4) h est une fonction affine, i.e. il existe δ dans $\mathbb{R}^*$ et α dans $\mathbb{R}^m$ tel que $h(x) = \delta x + \alpha$.

(H_5) La fonction $a = \sigma\sigma^\tau$ est uniformément elliptique.

(H_6) Les fonctions $h'b$ et $\left(h'\sigma\sigma^\tau(h')^\tau\right)^{-\frac{1}{2}}h'b$ sont lipschitziennes.

(H_7) La fonction $h'g$ est bornée.

On peut alors définir le filtre associé au système (1) comme d'habitude dans les problèmes de filtrage non linéaires.

Définition 1.1. – Pour tout t dans $[0,T]$, notons π_t le filtre associé au système (1) qui est défini pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ par :

$$\pi_t\psi = E\big[\psi(x_t)/\mathcal{Y}_t\big], \tag{2}$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s\,/\,0 \leq s \leq t)$.

On considère de plus la classe de filtres sous-optimaux suivante :

$$m_t = m_0 + \int_0^t (b+gh)(m_s)\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h'^{-1}(m_s)\,K_s\,\big(dy_s - h(m_s)\,ds\big), \tag{3}$$

où $m_0 \in \mathbb{R}^m$ est arbitraire et $\{K_t,\ t0\}$ est un processus $\mathcal{Y}_t$-progressivement mesurable, borné tel que pour tout (t,w) dans $[0,T]\times\Omega$, $K_t(w)$ est une fonction bornée uniformément elliptique.

Pour ces filtres, on peut alors montrer comme en [4], qu'on a la première estimation d'erreur suivante:

Proposition 1.2. – *Pour tous* $t_0 > 0$ *et* $p1$, *on a :*

$$\sup_{tt_0}\|x_t - m_t\|_p = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Dans la suite de cette Note, on choisit un filtre de la classe définie précédemment pour lequel l'erreur sera d'ordre ε. En effet, soit γ la fonction définie par $\gamma = \big(h'\sigma\sigma^\tau(h')^\tau\big)^{\frac{1}{2}}$ et pour tout t dans $[0,T]$, posons $K_t = \gamma(m_t)$.

On peut alors énoncer le résultat principal de cette Note :

Théorème 1.3. – *Pour tous* $t_0 > 0$ *et* $p \geq 1$, *on a :*

$$\sup_{tt_0}\|\pi_t 1 - m_t\|_p = O(\varepsilon).$$

2. Démonstration du théorème principal

On définit tout d'abord quelques processus stochastiques qui vont être utiles par la suite.

Soit le processus $\overline{w}_t = \displaystyle\int_0^t \gamma^{-1}(m_s)\,(h'\sigma)(x_s)\,dw_s$. Considérons alors, pour tout t dans $[0,T]$,

$$Z_t = \exp\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h^\tau(x_s)\,dy_s - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t |h(x_s)|^2\,ds\Big) \tag{4}$$

et

$$\Lambda_t = \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau\,d\overline{w}_s + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t \big|h(x_s)-h(m_s)\big|^2\,ds\Big). \tag{5}$$

Comme la fonction h est affine, les processus Z_t^{-1} et Λ_t^{-1} sont des martingales exponentielles. On peut alors appliquer le théorème de Girsanov et définir une probabilité de référence à l'aide desquelles on va montrer les estimations voulues.

Définissons donc la probabilité $\tilde{P}$ par la dérivée de Radon-Nicodym

$$\left.\frac{d\widetilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = (\Lambda_t Z_t)^{-1}. \tag{6}$$

Alors, d'après le théorème de Girsanov, sous $\widetilde{P}$, $\widetilde{w}_t = \overline{w}_t - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)\,ds$ et $y_{\frac{t}{\varepsilon}}$ sont des processus de Wiener standards indépendants.

Soit pour tous x, m appartenant à $\mathbb{R}^m$ la fonction F définie par:

$$F(x,m) = \big(h(x) - h(m)\big)^{\tau}\gamma^{-1}(m)\big(h(x) - h(m)\big). \tag{7}$$

Il résulte alors de la formule d'It(?) que

$$\begin{aligned}
F(x_t, m_t) =& F(x_0, m_0) - 2\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\big(\gamma^{-1}(x_s) - \gamma^{-1}(m_s)\big)h'(x_s)\,dx_s \\
&+ 2\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\,d\overline{w}_s - \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\big[dy_s - h(m_s)\,ds\big] \\
&+ 2\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\Big((\gamma^{-1}h')\big[(b+gh)(x_s)\big] - (\gamma^{-1}h')\big[(b+gh)(m_s)\big]\Big)\,ds \\
&+ 2\varepsilon\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\gamma^{-1}(m_s)h'(x_s)g(x_s)\,dv_s + \int_0^t (A_x F + A_m F)(x_s, m_s)\,ds \\
&+ \int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial m_i}(m_s)\big(h(x_s) - h(m_s)\big)\,dm_s^i,
\end{aligned}$$

où A_x et A_m sont les opérateurs différentiels du second ordre, définis pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^2\big((\mathbb{R}^m)^2\big)$ par

$$A_x f(x,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\big(\sigma(x)\big)_k^i\big(\sigma(x)\big)_k^j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,m) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=1}^{m}\big(g(x)\big)_k^i\big(g(x)\big)_k^j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,m)$$

et

$$A_m f(x,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\big(\sigma(x)\big)_k^i\big(\sigma(x)\big)_k^j\frac{\partial^2 f}{\partial m_i \partial m_j}(x,m).$$

Par conséquent, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
Z_t\Lambda_t =& \exp\Big(-\frac{1}{2\varepsilon}\big(F(x_t,m_t) - F(x_0,m_0)\big) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_1(x_s,m_s)\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_2^{\tau}(x_s,m_s)\,dm_s \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_3^{\tau}(x_s,m_s)\,dx_s + \int_0^t \chi_4^{\tau}(x_s,m_s)\,dv_s + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h^{\tau}(m_s)\,dy_s - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t |h(m_s)|^2\,ds\Big),
\end{aligned}$$

où les fonctions χ_i, ainsi que leurs dérivées par rapport à x sont bornées indépendemment de ε.

Dans la suite, si f est une fonction de (x,m), on notera f' pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

D'après les règles du calcul de Malliavin (cf.[3]) , si $\overline{D}$ (respectivement $\widetilde{D}$) désigne l'opérateur de dérivation dans la direction de $\overline{w}$ (respectivement $\widetilde{w}$), on a pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\widetilde{D}_s x_t = \zeta_{st}(h'^{-1}\gamma)(x_s),$$

où $\{\zeta_{st},\ t \geq s\}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}\zeta_{st} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \zeta_{sr}\,(h'^{-1}\gamma h')(x_r)\,dr + \int_s^t \zeta_{sr}\,(b' + g'h)(x_r)\,dr \\ + \sum_{i=1}^{m}\int_s^t \zeta_{sr}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)\,d\overline{w}_r^i + \varepsilon\int_s^t \zeta_{sr}\,g'(x_r)\,dv_r.\end{aligned} \tag{8}$$

En calculant alors la dérivée de Malliavin de $\log(Z_t\Lambda_t)$ dans la direction de $\tilde{w}_t$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}F'(x_t, m_t) = &-\frac{\varepsilon}{t}\int_0^t \widetilde{D}_s\ \log(Z_t\Lambda_t)(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\ &+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t \chi_1'(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds \\ &+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t dm_r^\tau\ \chi_2'(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\ &+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t dx_r^\tau\ \chi_3'(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\ &+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t \chi_3(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds \\ &+\frac{\varepsilon}{t}\int_0^t\int_s^t dv_r^\tau\ \chi_4'(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}ds \\ &+\frac{\varepsilon}{t}\int_0^t\int_s^t \chi_4(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds.\end{aligned} \tag{9}$$

D'autre part, d'après la définition de la fonction F, $\frac{1}{2}F'(x_t, m_t) = \big(h(x_t) - h(m_t)\big)^\tau\,\gamma^{-1}(m_t)h'(x_t)$, donc

$$\begin{aligned}E\Big[\frac{1}{2}F'(x_t, m_t)/\mathcal{Y}_t\Big] =& E\big[\big(h(x_t) - h(m_t)\big)^\tau/\mathcal{Y}_t\big]\,(\gamma^{-1}h')(m_t) \\ &+ E\big[\big(h(x_t) - h(m_t)\big)^\tau\,\gamma^{-1}(m_t)\,\big(h'(x_t) - h'(m_t)\big)/\mathcal{Y}_t\big].\end{aligned}$$

La proposition 1.2. et les hypothèses (H_4) et (H_5) impliquent donc que le théorème sera établi si on montre que pour tous $t_0 > 0$, $p \geq 1$,

$$\sup_{t\geq t_0}\Big\|E\big[\frac{1}{2}F'(x_t, m_t)/\mathcal{Y}_t\big]\Big\|_p = O(\varepsilon).$$

Comme la fonction $h'^{-1}\gamma h'$ est hypoelliptique, on peut montrer le lemme suivant.

LEMME 2.1. – *Pour tous $\varepsilon_0 > 0$ et $p \geq 1$, il existe des constantes strictement positives $a(p)$, $\tilde{a}(p)$ et $c(p)$ telles que*

$$\|\zeta_{ts}\|_p \leq a(p) \exp\Big[-\frac{\tilde{a}(p)}{\varepsilon}(t-s)\Big], \quad 0 \leq s \leq t,$$

$$\|\overline{D}_s\zeta_{t0}\|_p + \|\tilde{D}_s\zeta_{t0}\|_p \leq c(p).$$

De plus, des calculs analogues à ceux de la page 153 de [4] donnent

$$\frac{1}{t}E\Big[\int_0^t \widetilde{D}_s \log(Z_t\Lambda_t)(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\, ds/\mathcal{Y}_t\Big] = \frac{1}{t}E\Big[\int_0^t \gamma^{-1}h'(x_s)\zeta_{0s}\big(D_s\zeta_{t0} - \widetilde{D}_s\zeta_{t0}\big)\, ds/\mathcal{Y}_t\Big] - \frac{1}{\varepsilon t}E\Big[\int_0^t \big[h(x_s) - h(m_s)\big]\zeta_{ts}\gamma^{-1}h'(x_s)\, ds/\mathcal{Y}_t\Big].$$

D'autre part, comme $\|\chi_1'\|_p$, est borné indépandemment de ε, on obtient

$$\int_0^t\int_s^t \chi_1'(x_r, m_r)\widetilde{D}_s x_r(\widetilde{D}_s x_t)^{-1}\, dr\, ds \leq c\int_0^t\int_s^t \zeta_{sr}\zeta_{ts}\, dr\, ds,$$

et des expressions similaires pour les autres termes (Remarquons que dans le troisième terme figure une intégrale par rapport à m_t. Or comme dm_t est d'ordre $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, et $\|\chi_2'\|_p$ d'ordre $O(\sqrt{\varepsilon})$, on ne rencontre pas de problème).

La conclusion suit alors du lemme 2.1

Note remise le 12 septembre 1997, acceptée le 14 octobre 1997.

Références bibliographiques

[1] **Bensoussan A., 1986.** On some approximation techniques in nonlinear filtering, *Stochastic Differential Systems, Stochastic Control and Applications*, (Minneapolis 1986), IMA vol. 10, Springer.

[2] **Florchinger P., 1989.** Continuité par rapport à la trajectoire de l'observation du filtre associé à des systèmes corrélés à coefficients de l'observation non bornés, *Stochastics and Stochastics Report*, vol 28, p.21-64.

[3] **Nualart D., 1995.** The Malliavin Calculus and Related Topics, Applications of Mathematics, Springer.

[4] **Pardoux E., 1989.** Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées, in: *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour*, Lect. Notes Math. vol 1464 p.69-163, Berlin Heidelberg New York: Springer.

[5] **Picard J., 1986.** Non linear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal to noise ratio, SIAM *J. Appl. Math.*, 46, p.1098-1125.

[6] **Picard J., 1986.** Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées, in: *Analysis and Optimization of Systems*, Lect. Notes Control and Info. Scie. 83, Springer.

[7] **Picard J., 1986.** Nonlinear filtering and smoothing with high signal-to-noise ratio, in: *Stochastic Processes in Physics and Engineering*, Reidel D..

[8] **Zakai M., 1969.** On the optimal filtering of diffusion processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 11, p. 230-243.