

Онлайн-приложение к статье  
«А был ли сдвиг: эмпирический анализ тестов  
на структурные сдвиги в волатильности доходностей»

Андрей Викторович Костырка      Дмитрий Игоревич Малахов

9 октября 2020 г.

$$\text{AIT} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_k \sqrt{C_T \hat{\sigma}^2 / \hat{S}} \cdot |D_k|, \quad (1)$$

где  $D_k \stackrel{\text{def}}{=} C_k / C_T - k / T$ ,  $C_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=1}^k \tilde{r}_t^2$ ,  $C_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=1}^T \tilde{r}_t^2$ ,  $\tilde{r}_t$  — центрированные доходности,  $\hat{\sigma}^2 \stackrel{\text{def}}{=} C_T / T$  и  $\hat{S}$  — HAC-оценка безусловной дисперсии *квадратов* доходностей, т. е.  $\hat{S} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=-m}^m w(j, m) \hat{\Omega}_j$ , где  $\hat{\Omega}_j = \widehat{\text{Cov}}(\tilde{r}_t^2, \tilde{r}_{t-j}^2) \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1} \sum_{t=j+1}^T (\tilde{r}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\tilde{r}_{t-j}^2 - \hat{\sigma}^2)$ ,  $w(j, m)$  — ядерные веса выборочных автоковариаций,  $m$  — ширина окна.

Упрощённая версия данной статистики для IID-рядов:

$$\text{IT} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_k \sqrt{T/2} \cdot |D_k|. \quad (2)$$

## 1 ICSS-алгоритм для выявления структурных сдвигов

В данном разделе под нулевой гипотезой будет подразумеваться гипотеза  $\mathcal{H}_0$ : отсутствует структурный сдвиг. Порядок проведения данного теста приводится по Inclán, Tiao (1994):

1. Получить эмпирические критические значения AIT-статистики из уравнения (1) для ряда с похожей динамикой и похожей длиной (с помощью Монте-Карло-симуляций) или взять асимптотические критические значения Inclán, Tiao: 1,224, 1,358, 1,628 для квантилей уровня 90 %, 95 % и 99 % соответственно.
2. Посчитать AIT-статистику для исследуемого ряда.
  - (a) Если расчётное значение не превышает критического, то остановить тест и сделать заключение об однородности дисперсии ряда.
  - (b) Если расчётное значение превышает критическое, то заикнуть проверку от конца к началу: определить  $k, \stackrel{\text{def}}{=} \text{argmax} |\{D_k\}_{k=1}^T|$  (момент потенциального структурного сдвига), обрезать выборку **с конца** (т.е. оста-

вить наблюдения  $\{r_t\}_{t=1}^{k'}$ , рассчитать АИТ-статистику для  $\{r_t\}_{t=1}^{k'}$ , сравнить с критическим значением, при превышении одного определить  $k'' \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_k |\{D_k\}_{k=1}^{k'}|$  и повторять проверку на укорачиваемой с конца выборке до тех пор, пока не перестанет отвергаться  $\mathcal{H}_0$ . Определить  $k_1^*$  — момент первого потенциального сдвига — как точку конца минимальной выборки, на которой не отвергается  $\mathcal{H}_0$ , т. е.  $k_1^* \stackrel{\text{def}}{=} k'' \dots$  (последний из найденных  $k', k'', k''', \dots$ ).

3. Рассмотреть вторую часть выборки,  $\{r_t\}_{t=k_1^*+1}^T$ , рассчитать на ней АИТ-статистику.
  - (a) Если расчётное значение не превышает критического, то заключить, что в ряде больше сдвигов нет.
  - (b) Если расчётное значение превышает критическое, то заикнуть проверку от начала обрезанной выборки к концу: определить  $k' \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max |\{D_k\}_{k=k_1^*+1}^T|$  (момент потенциального структурного сдвига), обрезать выборку **с начала** (оставить наблюдения  $\{r_t\}_{t=k'+1}^T$ ), рассчитать АИТ-статистику для  $\{r_t\}_{t=k'+1}^T$ , сравнить с критическим значением, при превышении одного определить  $k'' \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_k |\{D_k\}_{k=k'+1}^T|$  и повторять проверку на укорачиваемой с начала выборке до тех пор, пока не перестанет отвергаться  $\mathcal{H}_0$ . Определить  $k_2^*$  — момент второго потенциального сдвига — как точку, предшествующую точке начала последней укороченной выборки без сдвигов, т. е.  $k_2^* \stackrel{\text{def}}{=} k'' \dots$  (последний из найденных  $k', k'', k''', \dots$ ).
4. Если на шагах 2b и 3b были обнаружены моменты сдвигов, то заикнуть шаги 2 и 3; рассмотреть укороченную с обоих концов выборку, т. е. середину ряда,  $\{r_t\}_{t=k_1^*+1}^{k_2^*}$ . Повторять шаги 2–3 для этой средней части выборки, находя поочерёдно первый потенциальный сдвиг в начале и последний потенциальный сдвиг на оставшейся части и укорачивая выборку с обоих концов, пока не перестанет отвергаться нулевая гипотеза о том, что на оставшейся средней части структурный сдвиг отсутствует, и сделать вывод о наличии потенциальных (но ещё не подтверждённых окончательно) упорядоченных по возрастанию моментов сдвига  $k_{(1)}^*, \dots, k_{(B)}^*$  в динамике параметров, где  $B$  — общее число выявленных сдвигов.
5. Уточнить найденные точки потенциальных сдвигов по количеству и по позиции (так как обычно на предыдущих шагах находится больше точек сдвига, чем есть на самом деле). Определить  $k_{(0)}^* \stackrel{\text{def}}{=} 0$  и  $k_{(B+1)}^* \stackrel{\text{def}}{=} T$ . Заикнуть следующую процедуру уточнения результатов.
  - (a) Проверить наличие сдвига на каждом интервале от предшествующего до следующего момента, т. е. рассчитать АИТ-статистики для  $\{r_t\}_{t=k_{(i-1)}^*+1}^{k_{(i)}^*}$ ,  $i = 1, \dots, B$ .

- (b) Если АИТ-статистики на некоторых интервалах не превышают критического значения и всего обнаружилось  $B' < B$  статистик выше порога, то это значит, что некоторые найденные до этого точки не являются моментами структурного сдвига и что необходимо исключить их из ранжировки: после всех  $B$  проверок исключить из набора  $k_{(1)}^* < \dots < k_{(B)}^*$  точки, для которых не отвергается гипотеза об отсутствии структурного сдвига на интервале от предыдущей до следующей точки, и переопределить набор потенциальных сдвигов  $k_{(1)}^* < \dots < k_{(B')}^*$ .
- (c) Если все  $B$  АИТ-статистик превышают критическое значение, то переопределить  $k_{(i)}^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{argmax}_k |\{D_k\}_{k=k_{(i-1)}^*+1}^{k_{(i+1)}^*}|$ , т. е. уточнить положение каждого потенциального сдвига на интервале. Отсортировать  $k_{(i)}^*$  по возрастанию.
- (d) Возвращаться на шаг 5а, пока количество потенциальных точек сдвига не перестанет уменьшаться на шаге 5б, а все значения  $k_{(i)}^*$  при отсутствии изменения количества точек не перестанут изменяться с каждой следующей итерацией более чем на некоторое пороговое значение на шаге 5с (рекомендуется значение порога в 2 точки).

На усмотрение исследователя на шаге 5 можно проверять дополнительное ограничение: если в результате очередного изменения некоторое  $k_{(i)}^*$  оказалось слишком близко к  $k_{(i-1)}^*$  и из содержательных соображений нельзя заключить, что структурные сдвиги происходят так часто, то  $k_{(i)}^*$  удаляется из набора. Это же ограничение можно применять, если максимальное изменение положения точки шаге 5 перестаёт уменьшаться и остаётся на уровне, выше порогового. В данной работе используется менее строгое ограничение: минимально допустимое расстояние между  $k_{(i)}^*$  и  $k_{(i-2)}^*$  должно быть 20 точек, иначе  $k_{(i-1)}^*$  удаляется из набора, а при наличии зацикливания ограничивается количество итераций (не более 100).

В данной работе мы предлагаем ещё одну проверку, не описанную в других работах: существует вероятность того, что на шагах 2–3 были выявлены два или более потенциальных сдвигов, однако на шаге 5а ни на одном интервале не обнаруживается значимых сдвигов (этот феномен изредка наблюдался в симуляциях примерно в 0,1 % случаев). Алгоритм предписывает исключить все потенциальные точки сдвига одновременно, что приведёт к тому, что гипотеза о наличии в ряде сдвига отвергается (так как на всём ряде расчётное значение АИТ-статистики превышает критическое), однако достоверно установить присутствие хотя бы одного сдвига не удаётся. В таком случае мы не исключаем сразу все точки из рассмотрения, а рассчитываем середины интервалов, определяемых этими точками, и проводим проверку ещё раз. Например, если  $B' = 2$  и  $B'' = 0$ , то не исключаются одновременно  $k_{(1)}^*$  и  $k_{(2)}^*$ , а задаётся  $\tilde{B}'' = B' - 1 = 1$ , рассчитывается  $k_{(\tilde{B}'')}^* = (k_{(1)}^* + k_{(2)}^*)/2$ , и проверка возобновляется с шага 5б. Данное решение обусловлено тем фактом, что если на некотором участке ряда на самом деле присутствует один сдвиг, расположенный близко к краю, то ICSS-метод, скорее всего, его не обнаружит, и в случае, когда вместо истинного момента сдвига обнаруживается два близких ложных, расположенных по разные

стороны от истинного, скорее всего, на подвыборках, содержащих момент истинного сдвига близко к краю, никаких сдвигов обнаружено не будет, поэтому при отсутствии добавленной нами проверки оба потенциальных момента сдвига будут ошибочно исключены одновременно.

## Список литературы

*Inclan C., Tiao G. C.* Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance // *Journal of the American Statistical Association.* — 1994. — т. 89, № 427. — с. 913–923.