Yves KREIS, Gilbert BUSANA, Christian MEYERS
Universität Luxemburg, Fakultät LSHASE, Forschungsgruppe EMACS

Negative Zahlen in der Grundschule

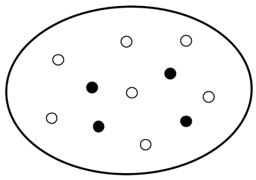
Für Grundschüler gehören negative Zahlen intuitiv zum Allgemeinwissen: im Winter bringt der Wetterbericht Angaben über negative Temperaturen, Stockwerke in Tiefgaragen werden mit negativen Zahlen gekennzeichnet.

In unseren Ausführungen berufen wir uns auf die Forschungsergebnisse von Robert Dieschbourg und vom CSMP-Programm und benutzen die in luxemburgischen Schulen üblichen Illustrationsmedien Zehnerabakus und Stellentafel, die zur Zeit anstelle vom Zwanzigerfeld oder dem (leeren) Zahlenstrahl benutzt werden.

Rote und blaue Zahlen

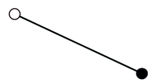
Den Ausgangspunkt, am Ende der ersten oder am Anfang der zweiten Klasse, bilden konkrete Situationen mit „farbigen" Zahlen.[1] In dieser Einführung stehen „rote" und „blaue"[2] auf derselben Stufe, wir sprechen also noch nicht von positiven bzw. negativen Zahlen.

Versetzen wir uns in folgende konkrete Situation:
Zwei Freunde spielen mehrere Gesellschaftsspiele. Gewinnt Lea, zeichnet sie einen roten Punkt; jedes Mal wenn Leo gewinnt, zeichnet er einen blauen Punkt.

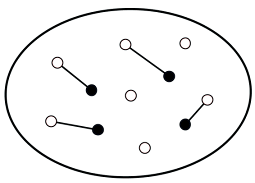


Wie viele Spiele haben die zwei Freunde gespielt? Wer hat am meisten gewonnen? Wie viele Spiele? Und die/der andere?

Anschließend zeigen wir ein *elementares Gleichspiel*, indem wir einen roten Punkt mit einem blauen Punkt verbinden und wenden dieses Konzept auf unsere konkrete Situation an.



Wir können das Resultat auch mit roten und blauen Zahlen anschreiben: $7\,(\text{rot}) + 4\,(\text{blau}) = 3\,(\text{rot})$. Also hat Lea gewonnen.



Andere mögliche Resultate[3]:

- Leo gewinnt z. B. $6\,(\text{blau}) + 4\,(\text{rot}) = 2\,(\text{blau})$
- ein totales Gleichspiel z. B. $6\,(\text{rot}) + 6\,(\text{blau}) = 0$

---

[1] Anwendung der Pädagogik der Situationen von Caleb Gattegno

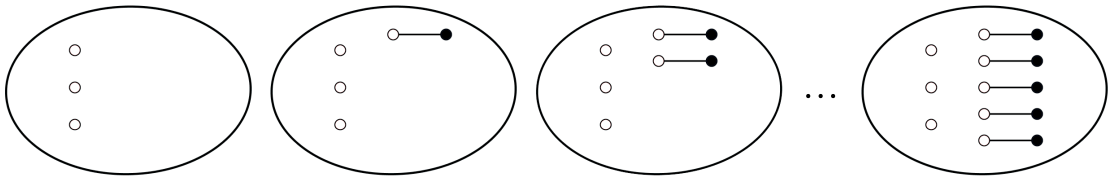
[2] Natürlich hätten wir auch andere Farben wählen können.

Für den Druck wird rot als weiß und blau als schwarz dargestellt, vgl. Original: http://dl.emacs.uni.lu/publications/projects/DIDMATH/GDM2008-YK-GB-CM.pdf

[3] Die Anzahl der Spiele ist im Moment unwesentlich.

Bei den ersten Spielen mit den roten und den blauen Zahlen zeichnen wir jedes Mal die roten und die blauen Punkte, suchen elementare Gleichspiele und zählen die Punkte, die übrig bleiben. In der Weiterführung kann dann ein erstes fundamentales Resultat erarbeitet werden.

Illustrieren wir wieder mit Hilfe einer konkreten Situation:
Eines Abends gewinnt Lea mit dem Schlussresultat 3. Überlegen wir, wie die Spiele an diesem Abend verlaufen sein können.



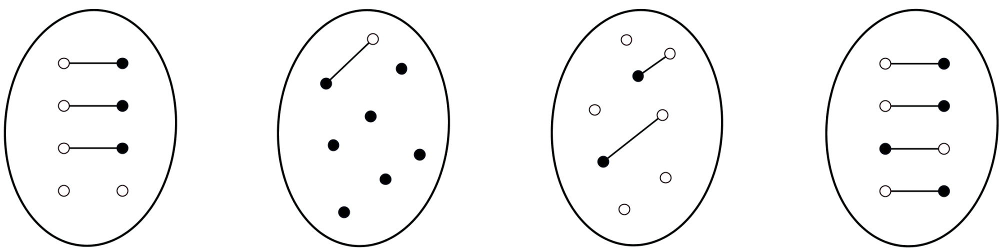
Wir können schlussfolgern:
Wir ändern nichts am Schlussresultat, wenn wir Gleichspiele hinzufügen.

Positive und negative Zahlen

Wir möchten Ende der zweiten bzw. Anfang der dritten Klasse eine Ordnungsrelation einführen, welche die Menge der blauen und roten Zahlen strukturiert.[4]

Als konkrete Situation nutzen wir die folgende:
Lex spielt allein mit zwei Würfeln. Jedes Mal, wenn er 7 Punkte oder mehr erreicht, zeichnet er einen roten Punkt und hat „gewonnen"; sonst zeichnet er einen blauen Punkt und hat „verloren". Bei jedem Spiel wirft er 8 Mal.

Illustrieren wir mögliche Resultate:



Ordnen wir die Resultate, indem wir zum Beispiel mit dem schlechtesten Ergebnis beginnen. Wir finden $6\,(\text{blau}) < 0 < 2\,(\text{rot}) < 4\,(\text{rot})$.

Wir haben positive („rote") Zahlen und negative („blaue") Zahlen; 0 ist weder positiv noch negativ. Wir schreiben alle Zahlen schwarz, die „blauen" kennzeichnen wir durch einen Strich[5] über den Zahlen.

---

[4] Nun ist die Anzahl der Spiele wesentlich und muss bei allen Beispielen gleich bleiben.

[5] Ähnlich der Schreibweise in den U.S.A., wo zum Teil ein Zirkumflex benutzt wird. Diese Notation erlaubt uns, im Gegensatz zur traditionellen Schreibweise, mögliche Verwechslungen des Operationszeichens und des Positionszeichens auszuschließen.

Beziehung zwischen der Subtraktion in $\mathbb{N}$ und der Addition in $\mathbb{Z}$

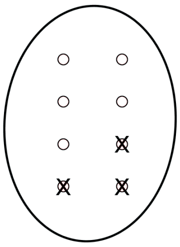


Abb. 1: $8-3$

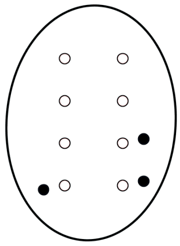
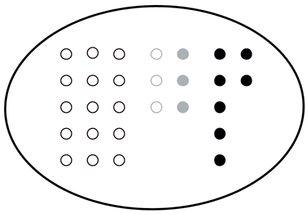


Abb. 2: $8+\overline{3}$[6]

Die Abbildung 1 veranschaulicht die Subtraktion in $\mathbb{N}$: Wir nehmen 3 rote Punkte weg. Die Abbildung 2 veranschaulicht die Addition (derselben negativen Zahl) in $\mathbb{Z}$: Wir fügen 3 blaue Punkte hinzu. Wir können also schlussfolgern, dass $8-3=8+\overline{3}$ ist.

Somit kommen wir zur Regel:
Anstatt rote Punkte wegzunehmen, fügen wir dieselbe Anzahl blauer Punkte hinzu; also: $a-b=a+\overline{b}$.

Unterschreitung und negative Zahlen



Wir wollen $15+\overline{7}$ rechnen. Wir stellen die Rechnung dar und wenden das fundamentale Resultat „Wir ändern nichts am Schlussresultat, wenn wir Gleichspiele hinzufügen“ auf die Rechnung an.[7]

Wir finden $15+\overline{7}=16+\overline{8}=17+\overline{9}=18+\overline{10}$ und können später direkt die Frage $15+\overline{7}=\boxed{}+\overline{10}$ stellen.

Vorteile bei der Anwendung der positiven und negativen Zahlen

1. Bei einer Subtraktion wie z. B. $138-82$ haben die zwei Zahlen in der traditionellen Schreibweise nicht denselben Status. Ausgehend von dem Minuenden müssen wir den Subtrahenden hervorheben.

   Bei der Aufgabe $138+\overline{82}$ haben die zwei Operanden denselben Status. Sie können gleichzeitig dargestellt werden nämlich 138 (rot) und 82 (blau).

2. Es ist unwichtig an welcher Stelle wir mit dem Ausrechnen beginnen. Betrachten wir zur Illustration die Rechnung $7253+\overline{3628}$.

---

[6] $8+\overline{3}$ wird gelesen als “8 plus 3 Strich”.

[7] Diese Vorgehensweise eignet sich besonders, wenn die letzte Ziffer eine 9, eine 8 oder eine 7 ist und kann somit auch angewandt werden bei $24+\overline{19}$ oder $75+\overline{28}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 2 & 5 & 3 \\
+ & \overline{3} & \overline{6} & \overline{2} & \overline{8} \\
\hline
 & 4 & & &
\end{array}
$$

Abb. 3

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 2 & 5 & 3 \\
+ & \overline{3} & \overline{6} & \overline{2} & \overline{8} \\
\hline
 & 4 & \underset{\overline{10}}{\overset{10}{\overline{4}}} & 3 & \underset{\overline{10}}{\overset{10}{\overline{5}}}
\end{array}
$$

Abb. 4

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 2 & 5 & 3 \\
+ & \overline{3} & \overline{6} & \overline{2} & \overline{8} \\
\hline
 & \underset{\overline{1}}{4} & \overset{10}{\overline{4}} & \underset{\overline{1}}{3} & \overset{10}{\overline{5}}
\end{array}
$$

Abb. 5

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & 2 & 5 & 3 \\
+ & \overline{3} & \overline{6} & \overline{2} & \overline{8} \\
\hline
 & \underset{\overline{1}}{4} & \overset{10}{\overline{4}} & \underset{\overline{1}}{3} & \overset{10}{\overline{5}} \\
\hline
 & 3 & 6 & 2 & 5
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccc}
 & 7 & \overset{10}{2} & 5 & \overset{10}{3} \\
+ & \underset{\overline{1}}{\overline{3}} & \overline{6} & \underset{\overline{1}}{\overline{2}} & \overline{8} \\
\hline
 & 3 & 6 & 2 & 5
\end{array}
$$

Abb. 6 Abb. 7

Wir können z. B. mit den Tausendern beginnen (vgl. Abb. 3).

Das Resultat ändert nicht, wenn wir Gleichspiele hinzufügen. An jeder Stelle an der negative Ziffern bleiben, fügen wir eine positive 10 und eine negative 10 hinzu (vgl. Abb. 4).

Dann wenden wir für die negative 10 die „Hopp-Regel“ – wie beim Zehnerabakus oder in der Stellentafel üblich – an: 10 Steine werden durch einen 1 Stein links daneben ersetzt (vgl. Abb. 5). Letztlich rechnen wir aus und finden das gesuchte Resultat (vgl. Abb. 6).

Wir können natürlich auch ausrechnen, ohne die Zwischenresultate anzuschreiben. Was wir an Schnelligkeit gewinnen, verlieren wir an „Freiheit“! Wir müssen auf der Einerplatte beginnen (vgl. Abb. 7).[8]

3. Wir können ein negatives Resultat erhalten.
4. Wir können mehrere positive und negative Zahlen addieren.
5. Wir haben das Recht uns zu irren und müssen trotzdem nicht neu beginnen, z. B. wenn wir irrtümlich angenommen haben das Resultat sei positiv/negativ indem wir nur die Stelle mit dem höchsten Stellenwert betrachtet haben.

Literatur

COMPREHENSIVE SCHOOL MATHEMATICS PROGRAM (1995): Mathematics for the First Grade/Upper Primary Grades (Part I–IV)/Intermediate Grades (Part I–VI). Teacher's Guide. USA: McRel.

DIESCHBOURG, Robert (1971/1973/1974/1975): Un enseignement de la mathématique moderne pour des enfants mentalement handicapés. In: Nico 10/13/16/19. Bruxelles: Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, S. 34 bis 62/S. 53 bis 97/S. 129 bis 152/S. 39 bis 57.

DIESCHBOURG, Robert (1972): Une méthode de soustraction en 1ère année primaire. In: Nico 11. Bruxelles: Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique, S.65 bis S.69.

PAPY, Frédérique (1970/1971/1972/1976): Les enfants et la mathématique 1/2/3/4. Bruxelles: Didier.

[8] Die Hunderterstelle können wir als $\left(10+\overline{6}\right)+2$ rechnen, wobei wir die „Freunde der 10“ nutzen. Die Zehnerunterschreitung wird somit erneut vermieden.