UNIVERSITE PARIS IX DAUPHINE

U. E. R. - Sciences des Organisations

THÈSE

pour l'obtention du titre de Docteur en Mèthodologie
et Modèles du Management Scientifique

Doctorat de 3ème cycle

EVALUATIONS DISTRIBUTIONNELLES
sur une
ECHELLE DE PREFERENCE QUALITATIVE

Raymond Bisdorff

Jury:

Président:	Bernard Roy
Rapporteur:	Philippe Vincke
Suffragants:	Jean-Yves Jaffray
	Philippe Vincke
Invité:	Eric Jacquet-Lagrèze

Année de soutenance 1981

UNIVERSITE PARIS IX DAUPHINE

A

U.E.R. Sciences des Organisations

Thèse pour l'obtention du titre de Docteur en Méthodologie et Modèles de Management Scientifique

- Doctorat de 3ème Cycle -

EVALUATIONS DISTRIBUTIONNELLES SUR UNE ECHELLE DE PREFERENCE QUALITATIVE

Raymond Bisdorff

Année de la soutenance
1981

Jury
Président: Bernard ROY
Rapporteur: Philippe VINCKE
Suffragants: Jean Yves JAFFRAY
Philippe VINCKE
Invité: Eric JACQUET-LAGREZE

Remerciements

Avant de confier au lecteur les pages qui suivent, nous voudrions remercier toutes les personnes qui nous ont aidé à réaliser le présent ouvrage.

En premier lieu, nous remercions M. le professeur Bernard ROY pour son enseignement, mais aussi pour ses remarques et conseils sans lesquels ce travail n'aurait pu être mené à bien.

Nous tenons à remercier également M. Philippe VINCKE qui a eu la gentillesse de nous aider tout au long du dur travail qu'a représenté pour nous la rédaction du texte.

Nos remerciements s'adressent également à toutes les personnes qui par leurs suggestions, leurs conseils et leurs remarques nous ont aidé dans la réalisation de la thèse, et en particulier MM. Yves-André BERNABEU, Vidal COHEN, Eric JACQUET-LAGREZE et Jean-Yves JAFFRAY.

D'autre part, nous tenons à remercier M. Jean DE JONG qui assura avec compétence et grand soin la dactylographie du manuscript.

Enfin, cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la patience et les encouragements constants des personnes qui nous entourent: qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

INTRODUCTION

"Mais dirigé ou non, et surtout dans le second cas, l'espace lisse est occupé par des événements ou heccéités, beaucoup plus que par des choses formées et perçues. C'est un espace d'affects, plus que de propriétés. C'est une perception haptique, plutôt qu'optique. Alors que dans le strié les formes organisent une matière, dans le lisse des matériaux signalent des forces ou leur servent de symptômes. C'est un espace intensif, plutôt qu'extensif, de distances et non pas de mesures. Spatium intense au lieu d'Extensio. Corps sans organes, au lieu d'organisme et d'organisation. La perception y est faite de symptômes et d'évaluations, plutôt que de mesures et de propriétés. C'est pourquoi ce qui occupe l'espace lisse, ce sont les intensités, les vents et les bruits, les forces et les qualités tactiles et sonores, comme dans le désert, la steppe ou les glaces. Craquement de la glace et chant des sables. Ce qui couvre au contraire l'espace strié c'est le ciel comme mesure et les qualités visuelles mesurables qui en découlent."

G. Deleuze & F. Guattari[1)]

---

1) MILLE PLATEAUX, MINUIT, PARIS

Le développement et la généralisation des techniques de modélisation de préférences, dans le cadre de la recherche opérationnelle, ont été accompagnés d'une extension de leur domaine d'application. Aux aspects techniques et financiers (monétaires) à caractère numérique, d'abord pris en compte, sont venus s'ajouter nombre d'aspects qualitatifs, libérés plus ou moins d'un support numérique. La volonté d'accroître la réalité de l'aide à la décision, apportée par les modèles de préférences, conduit en effet les praticiens de la recherche opérationnelle à intégrer dans leurs modélisations des aspects qualitatifs et subjectifs, plus difficilement "chiffrables", mais souvent plus adaptés à la réalité des situations décisionnelles rencontrées.

Cependant, le côté opérationnel, que comporte nécessairement le travail d'aide à la décision, n'est pas facilement conciliable avec l'absence de support numérique qui caractérise cette information qualitative; l'arbitraire attaché au choix de la représentation numérique associée à l'information qualitative entraîne une imprécision, un flou, un arbitraire des résultats de l'étude, évidemment dépendants de ces choix.

La plupart des travaux théoriques consacrés à ce problème nous ont semblé avoir pour objet de vouloir réduire, par une méthode ou une autre (comme l'aide à la construction de fonction d'utilité), cet arbitraire, alors que nous pensons que celui-ci est obligatoirement lié à la nature qualitative de l'information prise en compte. Ne pas accepter, sous la pression d'un souci d'opérationnalité, l'indétermination de la représentation numérique de l'information qualitative, nous semble conduire à rejeter implicitement la nature précisément qualitative de cette information.

Il fallait donc aborder le problème sous une autre optique: repenser le problème de la modélisation des préférences dans un cadre spécifiquement qualitatif, en se libérant des habitudes, convictions et certitudes qu'apporte la prise en compte d'une information dès le départ quantitative.

Comme il était impossible d'aborder ce problème dans sa généralité dans le cadre d'un travail de thèse de 3e cycle, nous avons limité notre réflexion à un cas très particulier et restreint, en espérant que d'un puits de dimensions modestes, mais suffisamment profond puisse jaillir une eau aussi, sinon plus fraîche que d'une citerne spacieuse, mais peu profonde. Encore fallait-il creuser au bon endroit. Or, rendons ici hommage à la clairvoyance et la pertinence de la réflexion de B. ROY. Sans le point de départ et les multiples indications et remarques qu'il nous a directement et indirectement fournies, il nous eût été difficile de choisir avec une précision suffisante le point d'appui de notre réflexion. En effet, il nous semble indispensable, pour aborder la discussion, de se placer dans le cadre d'une théorie générale, afin de repérer et de "mesurer" les réductions et les particularités introduites. Nous avons trouvé ce cadre dans la théorie de l'aide à la décision introduite par B. ROY. La plupart des termes que nous utiliserons pour désigner le problème choisi et ses rapports avec un contexte général seront empruntés à cette théorie.

En particulier, nous appellerons <u>acteur</u> la personne confrontée à un problème de choix, qui demande à une personne, l'<u>homme d'étude</u>, de l'aider à résoudre son problème, c'est-à-dire de l'aider dans son effort de comparer les différentes solutions du problème, appelées <u>actions potentielles à la décision</u>.

Ces actions potentielles sont caractérisées, on dira <u>évaluées</u>, par un <u>nuage de conséquences</u>, qui seront le support des préférences de l'acteur, traduisant les résultats de sa comparaison de ces actions. Nous supposons, en effet, que l'acteur conçoit ses préférences d'une manière essentiellement pragmatique. Pour comparer deux actions potentielles, il ne se base que sur les conséquences pratiques de ces actions.

Nous appelons <u>domaine décisionnel</u> la réalité concrète par rapport à laquelle les conséquences prennent une signification aux yeux de l'acteur. Le domaine décisionnel auquel nous nous intéressons est celui des conséquences qualitatives, qui se matérialisent dans des qualités sensibles perçues ou perceptibles par l'acteur organisées sous la forme d'une échelle de préférence qualitative.

Les conséquences qualitatives ont toutes pour caractéristique le fait que l'acteur intervient personnellement comme "juge" de l'évaluation des actions sur la conséquence, en ce sens qu'il évalue lui-même d'une manière qualitative les actions sur ces conséquences.

Pour illustrer ce que nous entendons par conséquences qualitatives, empruntons à B. ROY[1)] quelques exemples de conséquences qui touchent personnellement l'acteur:

- l'importance d'un gain, d'une perte;
- la durée vécue d'un laps de temps (temps d'attente, durée d'un trajet, intervalle séparant deux événements,...);
- la pénibilité d'une activité (accomplissement d'un trajet, exécution d'une tâche, ...);
- la satisfaction éprouvée dans certaines conditions (esthétique d'un objet, prestige d'une situation, ...);
- l'intensité d'un dommage (bruit vécu, ...);
- la probabilité ou la vraisemblance d'un événement (succès, accident, ...).

Pour simplifier le problème, nous supposerons que les actions potentielles envisagées ne sont évaluées que sur une seule conséquence qualitative. Par contre, l'évaluation des actions conduira non pas à une qualité unique, mais plus généralement à plusieurs qualités différentes d'importance variable. Nous dirons que chaque action potentielle est caractérisée par une évaluation distributionnelle qualitative.

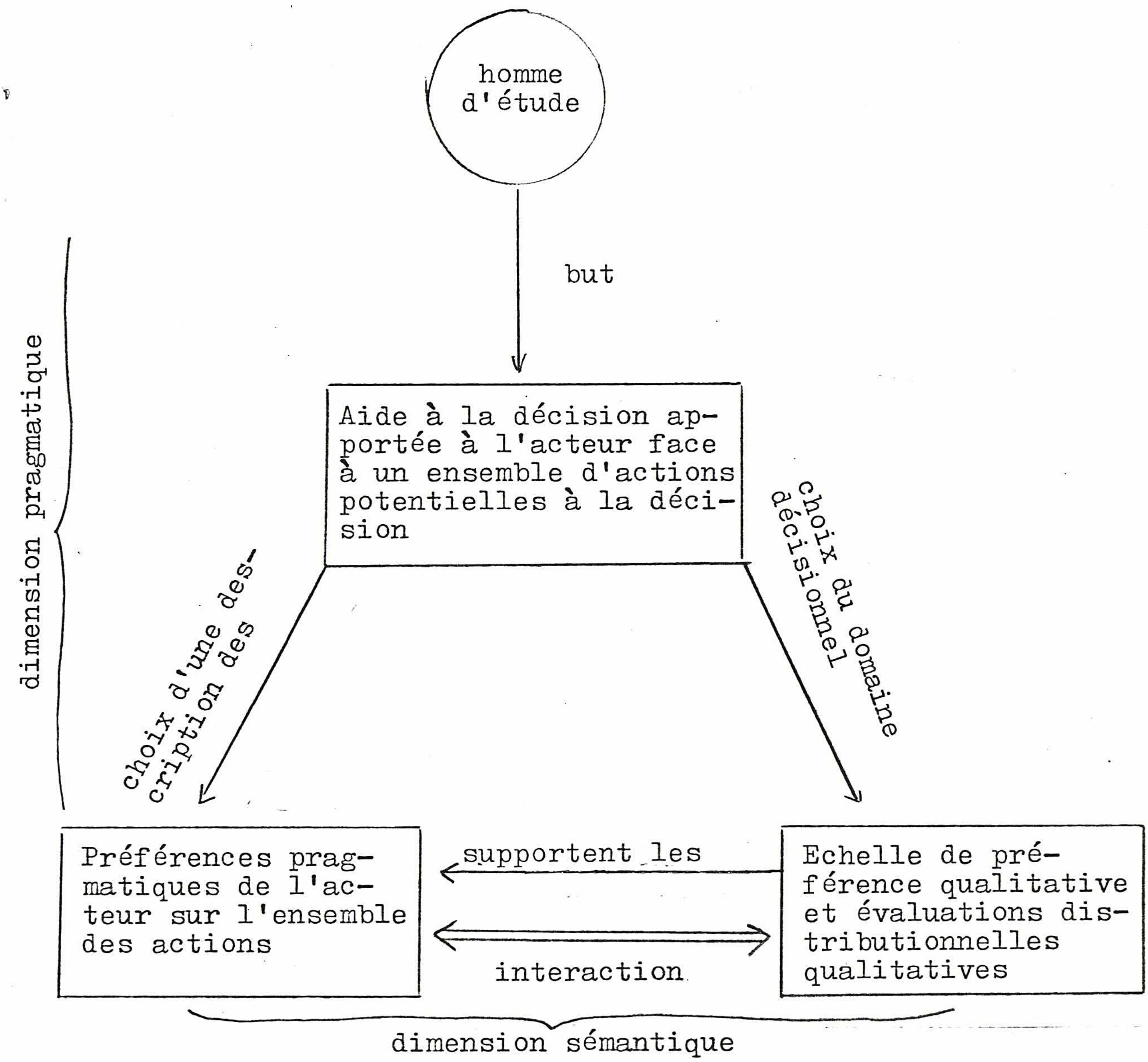
Schématiquement le problème retenu s'énonce de la manière suivante:

---

1) B. ROY, L'Aide à la Décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger, Livre en préparation, chap. 8.

Comment un homme d'étude, voulant apporter une aide à la décision à l'acteur, peut-il modéliser les préférences pragmatiques de celui-ci relatives à un ensemble d'actions potentielles à la décision, caractérisées par des évaluations distributionnelles sur une échelle de préférence qualitative?

Fig. 1. <u>Modélisation des préférences pragmatiques d'un acteur</u>



Sous cette formulation, la résolution du problème de la modélisation s'oriente suivant deux dimensions: une dimension pragmatique qui renvoie au but poursuivi par la modélisation et qui se concrétise dans deux choix: le choix du domaine décisionnel (prise en compte d'une conséquence qualitative) et le choix d'une description des préférences (opérationnalité de l'aide à la décision); une dimension sémantique qui renvoie aux liens instaurés par la modélisation entre les préférences pragmatiques de l'acteur et les évaluations distributionnelles qualitatives.

Si du point de vue de la dimension pragmatique cette modélisation des préférences ne pose guère des problèmes nouveaux, par contre, du fait du caractère qualitatif de la conséquence prise en compte, une difficulté théorique apparaît au niveau de la dimension sémantique. En effet, on observe une interaction entre les préférences pragmatiques et les évaluations attachées aux actions potentielles, en ce sens que la reconnaissance des premières dépend de la reconnaissance des secondes, (ce qui paraît normal) et inversément. Il n'y a pas indépendance "objective" entre d'une part les évaluations et de l'autre les préférences pragmatiques.

Pour apprécier l'impact de cette difficulté théorique sur le problème de la modélisation des préférences, nous nous intéressons à un modèle bien connu et abondamment utilisé en pratique: le modèle de la moyenne pondérée. Dans ce modèle, on associe à chaque évaluation distributionnelle une valeur numérique moyenne, calculée à l'aide d'une représentation numérique de l'échelle de préférence qualitative en tenant compte, par l'intermédiaire d'une pondération, de l'importance relative des éléments intervenant dans l'évaluation. La comparaison des actions potentielles se base ensuite sur la comparaison de ces valeurs moyennes.

Le modèle de la moyenne pondérée, du fait de sa simplicité opérationnelle, constitue relativement à la dimension pragmatique une réponse plus que satisfaisante au problème de la modélisation. Malheureusement, il n'en est pas de même en ce qui concerne la dimension sémantique. La grande opérationnalité du modèle n'est qu'un corollaire de la quantité d'informations préférentielles qu'il manipule, en ce sens qu'il présuppose une échelle de préférence dont la représentation numérique est déterminée au choix de l'origine et de l'unité près. Cependant, l'interaction observée entre les préférences pragmatiques et les évaluations distributionnelles se traduit par une indétermination plus grande pesant sur le choix de la représentation numérique de l'échelle de préférence qualitative. Nous voilà confronté, comme tant d'hommes d'étude avant nous, à ce problème apparemment irréductible : le modèle de la moyenne pondérée requiert une échelle d'un type "<u>cardinal</u>", alors que l'information qualitative disponible ne donne lieu qu'à une échelle du type "<u>ordinal</u>".

Il nous semblait cependant que cette opposition entre échelle ordinale et échelle cardinale était trop absolue, qu'elle ne traduisait pas adéquatement l'absence ou la présence d'une indépendance objective entre évaluations et préférences. Pour appuyer cette thèse, nous avons inclus dans la modélisation, l'acteur en tant que sujet qui perçoit l'échelle de préférence qualitative et les évaluations distributionnelles.

Il nous fallait par conséquent étudier le caractère subjectif spécifique associé à la perception d'une conséquence qualitative, et ceci nous l'avons entrepris en nous inspirant des travaux de J. PIAGET au sujet des <u>mécanismes perceptifs</u>.

Or, quiconque connaît les travaux de J. PIAGET se doutera de la surprise que fut pour nous la découverte de sa théorie de la connaissance et particulièrement de ses travaux sur la genèse du nombre et de la mesure. Voilà que nous trouvions développée, dans tous les détails, l'étude du passage progressif de la perception d'un ordre à la perception d'une mesure. C'est dans ces travaux que nous avons puisé les idées qui nous ont permis d'élaborer une typologie des échelles de préférence qualitatives.

Bien plus, cette méthodologie, qui fait intervenir l'acteur activement comme sujet dans la reconnaissance de l'échelle, nous l'avons également appliquée à la perception des évaluations distributionnelles. Ceci nous a permis d'apprécier les difficultés auxquelles se heurte l'application du modèle de la moyenne pondérée dans notre cas. Son inadaptation au problème se révèle toute relative; elle ne se manifeste que par un excès de comparabilité, sans déformer pour autant les préférences pragmatiques associées à l'information qualitative réellement prise en compte. Nous retrouvons ainsi un résultat semblable à ceux que l'on trouve dans les travaux sur la dominance stochastique.

Mais avant d'aller plus loin, laissons le lecteur aborder lui-même le texte. Auparavant, nous voudrions pourtant l'avertir de la "nature" du texte qu'il va découvrir. Après les réactions que nous ont communiquées les personnes auxquelles nous avions montré le manuscript, cette intervention nous semble utile pour éviter un malentendu au sujet des références que nous faisons à telle ou telle discipline.

D'abord, ce texte n'est pas et ne veut pas être un texte de mathématiques appliquées. D'aucun diront qu'il est rempli de formules et donc que c'est des mathématiques. Il n'en est rien et cela principalement parce que l'auteur n'a pas une formation de mathématicien. Le lecteur mathématicien n'aura pas long à s'en convaincre. Ce texte n'est pas non plus un texte de psychologie cognitive et le lecteur spécialiste des travaux de PIAGET ne tardera pas à le remarquer. Enfin, ce texte n'est apparemment pas un texte de gestion, puisqu'il y manque toute référence à la pratique gestionnaire. C'est néanmoins au lecteur intéressé par des problèmes de gestion et par la pratique de l'aide à la décision, que nous voudrions nous adresser de préférence.

L'absence de références à la pratique de l'aide à la décision s'explique par notre situation matérielle qui nous empêcha de pratiquer conjointement une recherche théorique et une recherche tournée vers des applications d'aide à la décision. Ainsi, ce texte constitue-t-il le résultat d'efforts volontairement concentrés sur des aspects théoriques. Or, libérés des contraintes matérielles qu'impose la réalisation concrète d'une aide à la décision, nous avions le loisir, avant de progresser dans notre recherche, de nous initier, chaque fois que c'était nécessaire, aux domaines auxquels nous renvoyait notre questionnement théorique. C'est pourquoi le texte a finalement pris la forme d'un travail multidisciplinaire et interdisciplinaire, qui risque de décevoir les spécialistes des différents domaines auxquels nous nous référons. Cependant, la multidisciplinarité n'a pas entraîné un éparpillement du savoir, car la diversité des domaines abordés est née de notre souci de ne négliger aucune connaissance ou théorie pouvant apporter quelque réponse au problème fondamental qui nous a intéressé en premier lieu et qui reste l'aide à la décision.

CHAPITRE I

EVALUATIONS DISTRIBUTIONNELLES QUALITATIVES ET OPERATION DE MOYENNE PONDEREE

"Il nous faut peu de mots pour exprimer l'essentiel, il nous faut tous les mots pour le rendre réel."

P. Eluard

"NOMBRE. - L'ombre niée."

M. Leiris

Ce premier chapitre comporte trois sections. La première nous servira d'introduction formelle au problème de modélisation de préférences auquel nous nous intéressons. La seconde sera consacrée à l'étude d'une première solution qui s'avérera cependant difficile à mettre en oeuvre. Enfin, la troisième section, consacrée à l'approfondissement des difficultés auxquelles se heurte cette première réponse, ouvrira le sujet vers le deuxième et troisième chapitre.

I.A. MODELE DE PREFERENCE SUR UN ENSEMBLE D'EVALUATIONS DISTRIBUTIONNELLES QUALITATIVES

Nous nous proposons de réfléchir, dans un but d'aide à la décision, à la modélisation des préférences pragmatiques[1] d'un acteur relativement à un ensemble A d'actions potentielles à la décision évaluées par des conséquences de nature qualitative, donc souvent complexes et subjectives.

Afin de circonscrire le domaine de réflexion nous délimiterons dans un premier temps le domaine décisionnel sur lequel nous porterons notre attention. Ensuite nous introduirons un langage préférentiel qui devra nous permettre de décrire les préférences de l'acteur demandeur de l'aide à la décision.

I.A.1. Le domaine décisionnel

Nous considérons un ensemble d'actions potentielles à la décision évaluées par un ensemble de conséquences qualitatives. Ces conséquences renvoient à l'existence sous-jacente d'une dimension de préférence subjective. De plus cet ensemble de conséquences sera suivi, pour toute action potentielle, d'une modulation de l'importance relative de chaque conséquence.

I.A.1.a. Echelle de préférence qualitative

Parmi la multitude de formes que peuvent revêtir les conséquences des actions potentielles dans un problème de décision donné, nous nous intéressons à une catégorie

---

1) Nous employons ce terme pour désigner que les préférences visées ne sont basées que sur des conséquences pratiques auxquelles conduisent les actions potentielles à la décision.

bien particulière, qui est celle des conséquences dites qualitatives.

Une conséquence qualitative se présente sous l'aspect d'une <u>qualité</u> qui, en suivant B. ROY[1], est suffisamment bien identifiée dans son contenu pour que l'acteur en comprenne la signification et qui fasse l'objet d'une description assez précise de ce par quoi elle se manifeste concrètement lorsque les actions potentielles sont mises en exécution. Pour une action donnée, cette description est appelée <u>état</u> de la conséquence qualitative.

Une conséquence qualitative est une <u>échelle de préférence qualitative</u>, si les états de cette conséquence font apparaître l'existence d'<u>une</u> dimension sousjacente, révélatrice d'une préférence pragmatique de l'acteur.

Formellement, nous représentons l'échelle qualitative de la manière suivante:

$$E = \{ e_o, e_1, \ldots, e_n \} .$$

Les états qualitatifs e_o, e_1, ..., e_n, aussi appelés échelons, peuvent être rangés selon un ordre complet, noté $<$, jouissant de la propriété suivante:

- étant données deux actions potentielles a et a', dont la comparaison équivaut à celle des états e et e' de E, l'acteur admet que a est équivalente à a' lorsque e et e' désignent le même état, et que a est préférée à a' lorsque e vient après e' dans l'ordre $<$ sur E.

En guise d'exemple concret, citons une échelle qualitative qui, dans un contexte pédagogique[2] permet d'apprécier la qualité de l'interaction verbale enseignant/élève par rapport à l'acceptation des interactions verbales des élèves par l'enseignant dans une classe traditionnelle.

---

1) B. ROY: L'aide à la décision - Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger, Livre en préparation, chapitre 8.

2) D'après les catégories de FLANDERS pour l'analyse des interactions verbales en milieu scolaires: Doc. trav. U.E.R. Sces de l'Educat. Paris V, FW-Jc/78.1.

E.I.1. Qualité des interactions verbales enseignant/élèves dans une situation pédagogique traditionnelle

e_0 : pas d'interaction verbale (exposé de ses propres idées ou opinions ou celles d'une autorité, mais non celles d'un élève, cours ex cathedra);

e_1 : donne des directives (commandements et ordres que les élèves doivent exécuter);

e_2 : questionne (question sur le fond ou la méthode à partir de ses idées dans l'intention d'obtenir des réponses des élèves);

e_3 : loue ou encourage (fait l'éloge de l'élève ou l'encourage pour sa conduite);

e_4 : accepte et utilise les idées de l'élève (clarifie, utilise ou développe l'idée de l'élève).

I.A.1.b. Evaluation distributionnelle

"Quelle que soit la démarche suivie pour définir une dimension, celle-ci ne sera réellement opérationnelle que si l'impact des diverses actions potentielles sur cette dimension peut être localisé par un état ou un groupe d'états permettant de comparer ces actions potentielles." 1)

Pour ce faire l'homme d'étude dispose d'une règle, technique ou d'un procédé, appelé indicateur d'état γ . Si l'évaluation à laquelle conduit cet indicateur pour toute action potentielle donnée est ponctuelle, c'est-à-dire se réduit à un échelon unique de E, l'indicateur est dit ponctuel. Dans le cas contraire l'évaluation et l'indicateur seront appelés non ponctuels.

Tout au long de ce travail nous supposerons un indicateur d'état non ponctuel, l'indicateur ponctuel étant considéré comme un cas particulier. En effet, il existe nombre de contextes où l'indicateur ponctuel ne paraît

---

1) B. ROY, op.cit. p.12., chapitre 8.

pas adéquat. Citons rapidement quelques-uns de ces contextes:- 1) La définition de l'échelle qualitative n'est pas assez précise pour donner un contenu net et précis aux échelons - il y a trop d'échelons par exemple - et de ce fait ils se chevauchent plus ou moins. Associer une qualité unique à une action paraît dans ce cas arbitraire. - 2) Il se peut d'autre part que l'évaluation fluctue ou soit dispersée dans l'espace ou dans le temps. C'est le cas dans l'exemple cité plus haut. Pour apprécier une heure de classe sur l'échelle proposée, on doit noter toutes les 3 secondes l'interaction verbale qui se passe dans la classe et l'évaluation globale de l'heure est dispersée sur approximativement 1200 observations. - 3) Il arrive aussi que l'évaluation soit liée à un contexte probabiliste: soit qu'un indicateur "stochastique" conduise à des résultats plus ou moins probables, soit qu'un indicateur ponctuel soit lié à différents événements eux-mêmes plus ou moins probables. - 4) Finalement, il peut exister une divergence quant aux résultats à retenir, comme dans le cas où plusieurs experts sont appelés à noter des actions potentielles.

Formellement l'indicateur d'état γ associe à toute action a de A un sous-ensemble de E :

$$\forall a \in A \ : \ \gamma(a) \subseteq E \ .$$

Mais les échelons appartenant à $\gamma(a)$ ne se révèlent pas les uns aussi importants que les autres dans la comparaison avec une autre évaluation. Ainsi des probabilités plus ou moins élevées sont-elles associées aux différents $e \in \gamma(a)$ dans un contexte probabiliste. De même dans le cas de la disperson dans le temps de l'évaluation, un échelon peut apparaître plus souvent qu'un autre.

Pour modéliser cette information, c'est-à-dire l'importance relative de chaque e de $\gamma(a)$, nous utiliserons un <u>indicateur de modulation</u>.

D.I.1.

Cet indicateur est une règle, un procédé ou une technique qui permet d'associer à chaque échelon de $\gamma(a)$ und poids $\delta_a(e) \in \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes:

1) étant données deux actions potentielles a et $a' \in A$, telles qu'un même échelon e apparaît dans $\gamma(a)$ et $\gamma(a')$, l'acteur admet, eu égard à cet échelon seulement, que a est au moins aussi préférée que a' lorsque $\delta_a(e) \geqslant \delta_{a'}(e)$;
2) étant données deux actions a et a', telles que $\gamma(a) \ni e$ et $\gamma(a') \ni e'$ et $e > e'$, l'acteur admet, eu égard à ces échelons seulement, que a est préférée à a' lorsque $\delta_a(e) \geqslant \delta_{a'}(e')$.

L'évaluation non ponctuelle peut se résumer sous la forme du couple indicateur d'état-indicateur de modulation $[\gamma(a), \delta_a(\gamma(a))]$

D.I.2.

Nous appelons évaluation distributionnelle de l'action a la fonction $d_a : E \to [0, 1]$ définie à partir du couple $[\gamma(a), \delta(\gamma(a))]$ de la manière suivante:

$\forall a \in A$:

$$d_a(e) = \frac{\delta_a(e)}{\sum_{e' \in \gamma(a)} \delta_a(e')} \qquad \text{si} \quad e \in \gamma(a) ;$$

$$d_a(e) = 0 \qquad \text{si} \quad e \notin \gamma(a) .$$

On remarquera que :

$$\forall a \in A \ : \ \sum_{e \in E} d_a(e) = 1 .$$

Pour toute action potentielle, la somme des poides $d_a(e)$ associés à l'évaluation $\gamma(a)$ est égale à l'unité.

Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les évaluations distributionnelles distinctes, envisageables sur E:

$$\mathcal{P} = \left\{ d \;/\; d = (d(e_0), d(e_1), \ldots, d(e_r)), \right.$$
$$\left. 0 \leq d(e_i) \leq 1 \;\forall i = 0, 1, \ldots, r, \; \sum_{e \in E} d(e) = 1 \right\}.$$

Le domaine décisionnel que nous considérons dans ce travail sera cet ensemble $\mathcal{P}$. Avant de passer au problème du choix d'un langage préférentiel, arrêtons-nous un instant à l'ensemble $\mathcal{P}$.

I.A.1.c. Structure de l'ensemble des évaluations distributionnelles qualitatives

Dans les développements présentés dans cet ouvrage nous supposerons que $\mathcal{P}$ comporte une structure d'ensemble de mélanges, c'est-à-dire vérifie les quatre propriétés structurelles suivantes:[1)]

$\forall\, d, d' \in \mathcal{P}$:

M.1. $[\alpha d + (1-\alpha) d'] \in \mathcal{P}$ pour tout $\alpha \in (0,1)$;
Tout mélange de deux évaluations distributionnelles avec les proportions α et $(1 - \alpha)$ est encore une évaluation distributionnelle.

M. 2. $[\alpha d + (1-\alpha) d'] \equiv [(1-\alpha) d' + \alpha d]$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$; L'ordre dans lequel un mélange est envisagé n'intervient pas dans l'identification des mélanges.

M.3. $[\alpha [\beta d + (1-\beta) d'] + (1-\alpha) d'] \equiv [\alpha\beta d + (1-\alpha\beta) d']$ pour tout $\alpha, \beta \in (0, 1)$;
Le mélange de deux évaluations distributionnelles réalisé en deux étapes successives, revient à un mélange réalisé en une seule étape avec les proportions appropriées.

---

1) Cette formalisation de la structure de mélange s'inspire de GOTTINGER, H.-W.: (1974), Grundlagen der Entscheidungstheorie, Ansätze und Kritik (Fondements de la théorie de décision), Fischer Verlag, Stuttgart. On trouvera une formalisation légèrement différente dans FISHBURN (1970), Utility theory for decision making, Wiley.

M. 4. $[\alpha d + (1-\alpha) d'] \equiv d'$ pour $\alpha = 0$

$[\alpha d + (1-\alpha) d'] \equiv d$ pour $\alpha = 1$;

Le mélange de deux évaluations distributionnelles avec les proportions 1 et 0 revient à envisager l'une ou l'autre des évaluations distributionnelles intervenant dans le mélange.

Ces quatres propriétés conditionnent la structure d'ensemble de mélanges de $\mathcal{P}$. Il en découle une propriété remarquable:

M. 5. $\forall\ d \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in (0,1)$; $[\alpha d + (1-\alpha) d] \equiv d$; [1]

Le mélange d'une évaluation distributionnelle avec elle-même selon les proportions α et $(1 - \alpha)$ revient à considérer encore cette même évaluation distributionnelle.

On remarquera que la structure d'ensemble de mélanges est "naturelle" dans un contexte probabiliste. En effet si $\mathcal{P}$ est l'ensemble de toutes les distributions de probabilités possibles sur E, alors $\mathcal{P}$ vérifie les propriétés structurelles ci-dessus.

Par contre dans un contexte non probabiliste cette "hypothèse" peut ne pas être toujours vérifiée.[2] Nous négligerons dans le cadre de ce travail ce problème et nous nous référerons à l'ensemble $\mathcal{P}$ tout en le supposant muni de la structure d'ensemble de mélanges.

Un échelle de préférence qualitative et l'ensemble $\mathcal{P}$ des évaluations distributionnelles définies sur cette échelle seront le domaine décisionnel que nous considérerons tout au long de ce travail.

---

1) Pour démontrer la propriété M.5. il suffit de prendre $\beta = 0$ et $d \equiv d'$ dans M.3. On obtient $0d + 1d$ qui est identique à d d'après M.4.

2) Dans ce cas, il serait intéressant de définir $\mathcal{P}$ comme ensemble de mélange non pas à partir de ses propriétés structurelles, mais à partir des opérations (de mélange) que l'on peut réaliser sur cet ensemble. Ainsi pourrait-on introduire des liens plus ou moins étendus entre les évaluations distributionnelles, depuis le cas où toutes les évaluations distributionnelles sont indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire l'acteur ne perçoit aucun lien entre les différentes évaluations de $\mathcal{P}$, jusqu'au cas où toute évaluation apparaît comme un mélange (résultat d'une opération) particulier des évaluations ponctuelles (voir chapitre II).

I.A.2. Le langage préférentiel

Comme notre objectif est de modéliser les préférences pragmatiques d'un acteur sur un ensemble $\mathcal{P}$ d'évaluations distributionnelles qualitatives, nous devons choisir un langage particulier que nous appellerons "préférentiel" afin de formaliser ces préférences. Les éléments de ce langage sont des signes auxquels nous donnons le nom de situations préférentielles[1].

I.A.2.a. Fonction modélisatrice du langage préférentiel

Le choix du langage préférentiel s'oriente suivant trois dimensions (voir schéma p. 19) intervenant dans l'acte de modélisation: une dimension syntaxique qui renvoie aux règles permettant de combiner entre elles les situations préférentielles pour donner un système relationnel de préférences[2] une dimension sémantique qui prend en compte les liens entre les situations préférentielles et les préférences pragmatiques de l'acteur, et enfin, une dimension pragmatique qui renvoie au but de la modélisation, c'est-à-dire à l'homme d'étude qui désire apporter une aide à la décision à l'acteur.

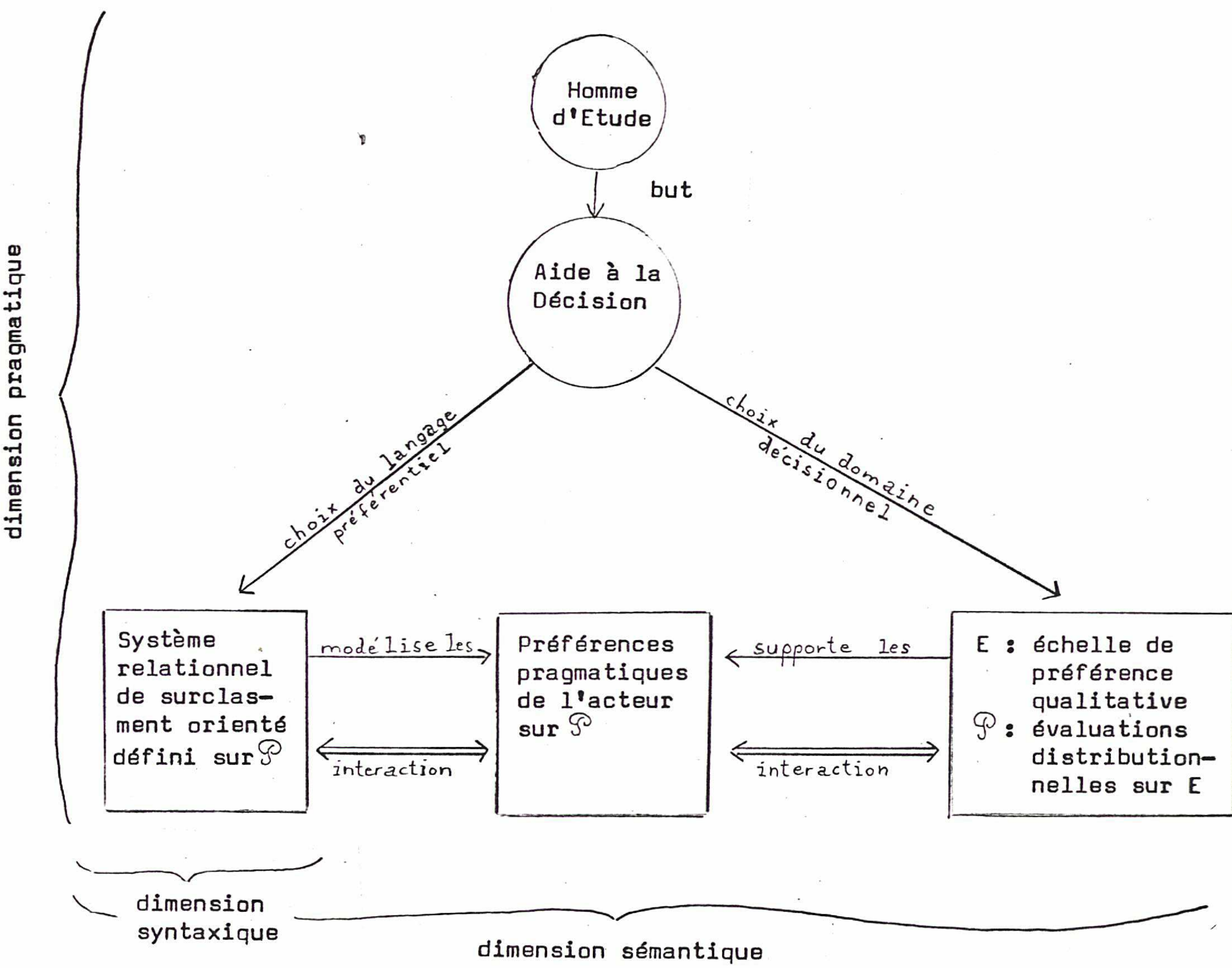
Ainsi, modéliser les préférences d'un acteur peut encore s'énoncer de la manière suivante: interpréter sémantiquement sous un aspect pragmatique (aide à la décision) une structure syntaxique (préférentielle).

Malgré la simplicité formelle de ce propos, le choix du langage préférentiel n'est pas aussi immédiat qu'il paraît à première vue[3]. En effet, il y a interaction

---

1) Terminologie empruntée à B. ROY,(op. cit., p.12), chap.7.
2) Voir E. JACQUET-LAGREZE & B. ROY, "Aide à la décision multi-critère et systèmes relationnels de préférences", Cah. du LAMSADE, n° 34 (1980).
3) Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la multitude de systèmes relationnels de préférence qui ont été imaginés à ce jour. Voir notamment HUBER, O. (1977), Zur Logik multidimensionaler Präferenzen in der Entscheidungstheorie, DUNCKER & HUMBLOT, BERLIN, chap. 2. p.48-89.

Fig. I.1. <u>Fonction modélisatrice du langage préférentiel</u>[1)]



1) L'organisation de la fig. I.1. s'inspire des travaux récents de GIGERENZER qui s'intéresse aux problèmes de mesurage et de modélisation en psychologie; voir GIGERENZER, Messung und Modellbildung in der Psychologie, U.T.B. Reinhardt (1981) N° 1047.

entre d'une part les situations préférentielles utilisées pour appréhender les préférences pragmatiques et de l'autre ces préférences pragmatiques, c'est-à-dire que les préférences pragmatiques révélées durant le processus d'aide à la décision permettront en retour à l'acteur de prendre connaissance de ses préférences pragmatiques. Autrement dit, si le langage est choisi pour modéliser les préférences pragmatiques préexistantes de l'acteur, celles-ci seront influencées en retour par le langage préférentiel particulier utilisé.

Dans la modélisation, le langage n'assure pas seulement une fonction <u>instrumentale</u> - permettre la description des préférences pragmatiques de l'acteur, mais aussi une fonction <u>constitutive</u>[1)] - il fait prendre connaissance à l'acteur de ses préférences pragmatiques.

C'est pourquoi, des considérations empiriques au sujet des préférences pragmatiques de l'acteur ne suffisent à elles seules pour fournir une justification théorique du choix d'un langage particulier. Il faut y inclure le but de la modélisation qui est l'aide à la décision[2)]. La modélisation des préférences de l'acteur doit par conséquent s'inscrire dans le cadre d'une théorie prescriptive de l'aide à la décision. Dans ce cadre, la richesse formelle d'un langage préférentiel constitue par rapport à son choix un argument de première importance, en ce sens que du côté de l'homme d'étude elle se traduit par une plus grande opérationnalité et du côté de l'acteur, par une plus grande richesse dans l'expression de ses préférences pragmatiques concrètes.

---

1) Voir GIGERENZER, (op. cit., p.19) p. 24-28 et WHORF B.L., Sprache, Denken, Wirklichkeit, Reinbeck, Rowohlt (1963).
2) Voir HÖRMANN, H. (1978), Meinen und Verstehen (Fondements d'une sémantique psychologique), SUHRKAMP STWR 30.

Par conséquent, nous nous placerons[1] dans le cadre de la théorie prescriptive de l'aide à la décision introduite par B. ROY et nous utiliserons en partie son langage préférentiel[2].

I.A.2.b. <u>Situations préférentielles élémentaires</u>

Celui-ci propose quatre situations préférentielles fondamentales incompatibles, à savoir l'indifférence, la préférence faible[3], la préférence stricte et l'incomparabilité[4], dont les définitions figurent au tableau T.I.1. (p. 22).

Nous n'aborderons pas dans ce travail, faute de temps et de place, une discussion qui nécessiterait la distinction entre les situations de préférence faible et stricte; c'est pourquoi nous ne considérerons dans ce travail qu'une seule situation de préférence ($\succ$) qui sera le regroupement de la préférence faible et de la préférence stricte.

D'autre part afin d'adapter ce langage à notre domaine décisionnel qui est uni-dimensionnel, nous allons en modifier la "base" en distinguant deux formes distinctes de la situation d'indifférence: une situation d'indifférence "orientée"[5] (I_+) et une situation d'indifférence "stricte" ($I_=$).

D.I.3. Nous appelons <u>indifférence orientée</u> la situation préférentielle dérivée de l'indifférence de la manière suivante:

---

1) Une discussion approfondie nous semble indispensable, mais nous éloignerait trop de notre sujet.
2) Voir B. ROY, (op.cit., p.12) chap. 7.
3) Pour une discussion approfondie voir B. ROY (op.cit.).
4) C'est surtout la prise en compte de l'incomparabilité comme situation préférentielle à part entière qui nous semble la force de ce langage.
5) Nous employons cette expression en apparence paradoxale pour distinguer par rapport à une évaluation distributionnelle les évaluations indifférentes à la première, qui occupent la même "place" sur la dimension préférentielle de ces autres évaluations, toujours indifférentes à la première qui s'éloignent dans une direction soit "positive" soit "négative".

T. I.1. Situations préférentielles fondamentales[1)]

Situation	Définition	Relation binaire
Indifférence	Elle correspond à l'existence de raisons pragmatiques claires qui justifient une équivalence entre deux évaluations distributionnelles qualitatives	I: relation symétrique, réflexive
Préférence stricte	Elle correspond à l'existence de raisons pragmatiques claires qui justifient une préférence significative en faveur de l'une (identifiée) des deux évaluations distributionnelles qualitatives	P: relation asymétrique (irréflexive)
Préféence faible	Elle correspond à l'existence de raisons pragmatiques claires qui infirment une préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux évaluations distributionnelles qualitatives,mais ces raisons sont insuffisantes pour en déduire soit une préférence stricte en faveur de l'autre, soit une indifférence entre ces évaluations	Q: relation asymétrique (irréflexive)
Incompatibilité	Elle correspond à l'absence de raison pragmatiques claires justifiant l'une des trois situations précédentes	R: relation symétrique, irréflexive

1) Nous reprenons ce tableau,avec de légères adaptations à notre domaine décisionnel de B. ROY (op.cit. p.), chap.7.

$$\begin{cases} \forall\ d_a, d_b \in \mathcal{P} : \\ (d_a\ I_+\ d_b) \Leftrightarrow (d_a\ I\ d_b) \text{ et } (\exists\ d_a' \in \mathcal{P} \succ \\ d_a'\ I\ d_a \text{ et } d_a' > d_b \text{ ou } \exists\ d_b' \in \mathcal{P} \succ d_a > d_b' \\ \text{et } d_b\ I\ d_b') \text{ et } (\nexists\ d_a'' \in \mathcal{P} \succ d_b > d_a'' \text{ et } d_a\ I\ d_a'') \\ \text{et } (\nexists\ d_a'' \in \mathcal{P} \succ d_b'' > d_a \text{ et } d_b''\ I\ d_b). \end{cases}$$

L'évaluation d_a est en situation d'indifférence orientée avec l'évaluation d_b si et seulement si d_a est indifférente à d_b et s'il existe une évaluation d_a' indifférente à d_a qui est préférée à d_b ou s'il existe une évaluation d_b' indifférente à d_b telle que d_a lui soit préférée. D'autre part, il n'existe pas d'évaluation d_a'' , indifférente à d_a telle que d_b lui soit préférée et il n'existe pas d'évaluation d_b'' indifférente à d_b et préférée à d_a .

D.I.4. Nous appelons <u>indifférence stricte</u> la situation préférentielle dérivée de l'indifférence de la manière suivante:

$$\begin{cases} \forall\ d_a, d_b \in \mathcal{P} : \\ (d_a\ I_=\ d_b) \Leftrightarrow (d_a\ I\ d_b) \text{ et } [\ (d_a\ I\ d_c) \Rightarrow \\ (d_b\ I\ d_c) \text{ ou } (d_b\ R\ d_c),\ \forall\ d_c \in \mathcal{P}] \text{ et } \\ [(d_b\ I\ d_c') \Rightarrow (d_a\ I\ d_c') \text{ ou } (d_a\ R\ d_c'), \forall\ d_c' \in \mathcal{P}]. \end{cases}$$

L'évaluation d_a est "strictement indifférente" à l'évaluation d_b si et seulement si d_a est indifférente à d_b et, si d_a est indifférente à une évaluation d_c alors d_b est ou bien indifférente ou bien incomparable à d_c , et si d_b est indifférente à une évaluation d'_k, alors d_a est ou bien indifférente, ou bien incomparable à d'_k , quelles que soient d_k et $d'_k \in \mathcal{P}$.

Nous supposerons que les autre situations d'indifférence stricte, d'indifférence orientée, de préférence et d'incomparabilité suffisent pour exprimer toutes les formes possibles des préférences pragmatiques d'un acteur sur $\mathcal{P}$ que nous voulons modéliser dans ce travail.

H.I.1.[1] Tout jugement préférentiel pragmatique d'un acteur relativement à un ensemble $\mathcal{P}$ d'évaluations distributionnelles qualitatives est modélisable soit par une seule, soit par un regroupement de deux ou trois des situations préférentielles incompatibles d'indifférence stricte, d'indifférence orientée, de préférence et d'incomparabilité.

Autrement dit, ces situation préférentielles qui sont les signes "élémentaires" du langage préférentiel sont en nombre suffisant pour d'un côté nous permettre de modéliser les préférences pragmatiques de l'acteur, et de l'autre donner à ce dernier la possibilité de s'exprimer "correctement" au sujet de ses préférences subjectives pragmatiques.

On remarquera que nous avons ainsi scindé la situation d'indifférence fondamentale en une partie <u>symétrique</u> - l'indifférence stricte, et une partie <u>antisymétrique</u> - l'indifférence orientée.

P.I.1.

$$\forall\ d_a, d_b \in \mathcal{P}:$$

$$1)\ (d_a\ I\ d_b) \Leftrightarrow [(d_a\ I_+\ d_b)\ \text{ou}\ (d_a\ I_=\ d_b)\ \text{ou}\ (d_b\ I_+\ d_a)];$$

---

1) B. ROY introduit une hypothèse analogue sous la forme d'un axiome auquel il donne le nom d'<u>axiome de comparabilité limitée</u> afin de marquer qu'il intègre dans son langage l'incomparabilité comme situation préférentielle fondamentale intrinsèque. Voir B.ROY (op.cit. p.12) chap. 7. et E. JACQUET-LAGRÈZE % B. ROY (op.cit. p.18). Notre hypothèse est plus restrictive que celle de B. ROY, puisque nous avons exclu les situations d'indifférence qui ne sont pas sous la forme de I_+ ou $I_=$ et que nous ne distinguons pas entre les préférences strictes et faibles.

$$
\begin{cases}
2) \ (d_a \; I_+ \; d_b) \Rightarrow (d_b \; \not I_+ \; d_a) \; ; \\
3) \ (d_a \; \not I_+ \; d_a) \; ; \\
4) \ (d_a \; I_= \; d_b) \Rightarrow (d_b \; I_= \; d_a) \; ; \\
5) \ (d_a \; I_= \; d_a) \; .
\end{cases}
$$

Démonstration:

1) L'implication $\Leftarrow$ de (1) est immédiate. Pour démontrer l'implication inverse $\Rightarrow$, montrons que la négation de la partie droite implique la négation de l'indifférence: $(d_a \not I_= d_b) \Rightarrow (d_a \not I d_b)$ ou $[\, (d_a \, I \, d_b)$ et $\exists \; d_k \in \mathcal{P} \succ - (d_a I d_k) \Rightarrow$ (H.I.1) $(d_b \succ d_k)$ ou $(d_k \succ d_b)\,]$ ou $[\, (d_a \, I \, d_b)$ et $\exists \; d'_k \in \mathcal{P} \succ - \; (d_b \, I \, d'_k) \Rightarrow$ (H.I.1.) $(d_a \succ d'_k)$ ou $(d'_k \succ d_a)$. Or si $(d_a \not I_+ d_b)$ et $(d_b \not I_+ d_a)$ et H.I.1., alors $d_a \not I d_b$.

2) L'antisymétrie de I_+ découle de D.I.3.;

3) L'irréflexivité découle de l'incompatibilité des situation $\succ$ et I, conséquence de H.I.1. et du point (1) ci-dessus.

4) et 5) La symétrie et la réflexivité de $I_=$ découlent de D.I.4. ◆ [1]

Les situations préférentielles "élémentaires" de notre langage sont donc au nombre de quatre: - l'indifférence stricte ($I_=$), relation binaire réflexive et symétrique; - l'indifférence orientée (I_+), relation binaire irréflexive et antisymétrique; - la préférence ($\succ$), relation binaire irréflexive et antisymétrique; - l'incomparabilité (R), relation binaire irréflexive et symétrique.

I.A.2.c. Système relationnel de surclassement orienté

Nous ne nous intéressons pas directement aux situations élémentaires. Nous considérerons plutôt deux regroupements

---

1) Le losange indique la fin d'une démonstration.

particuliers que nous appelons "surclassement orienté"[1] et "surclassement orienté strict".

Le surclassement orienté ($S_{\pm}$) regroupera sans distinction la préférence, l'indifférence orientée et l'indifférence stricte.

D.I.5.

$$\begin{cases} \forall\ d_a, d_b \in \mathcal{P} : \\ (d_a\ S_{\pm}\ d_b) \Leftrightarrow [(d_a \succ d_b) \text{ ou } (d_a\ I_+\ d_b) \text{ ou } (d_a\ I_=\ d_b)]. \end{cases}$$

La situation de surclassement orienté correspond ainsi à l'existence de raisons pragmatiques claires qui justifient soit une préférence, soit une indifférence orientée en faveur de l'une (identifiée) des deux évaluations, soit une indifférence stricte entre elles, sans qu'une séparation significative soit établie entre ces situations.

Le surclassement orienté strict (S_+), par contre, ne regroupe que la préférence et l'indifférence orientée:

D.I.6.

$$\begin{cases} \forall\ d_a, d_b \in \mathcal{P} : \\ (d_a\ S_+\ d_b) \Leftrightarrow [(d_a \succ d_b) \text{ ou } (d_a\ I_+\ d_b)]. \end{cases}$$

La situation de surclassement orienté strict correspond à l'existence de raisons pragmatiques claires qui justifient sans distinction soit une préférence, soit une indifférence orientée en faveur de l'une (identifiée) des deux évaluations.

On remarquera que l'indifférence stricte et le surclassement orienté strict sont respectivement la partie symétrique et la partie antisymétrique du surclassement orienté.

---

1) Nous empruntons le terme de surclassement à B. ROY. Cependant, pour marquer la différence entre notre langage préférentiel et celui de B. ROY, nous ajoutons l'adjectif orienté.

P.I.2.

$$\forall \; d_a, d_b \in \mathcal{P}: \begin{cases} 1) \; (d_a \, I_= \, d_b) \Leftrightarrow [(d_a \, S_\pm \, d_b) \text{ et } (d_b \, S_\pm \, d_a)]; \\ 2) \; (d_a \, S_+ \, d_b) \Leftrightarrow [(d_a \, \not S_\pm \, d_b) \text{ et } (d_b \, \not S_\pm \, d_a)]. \end{cases}$$

Démonstration:
Cette proposition découle directement des définitions D.I.5. et D.I.6. ◆

La connaissance du surclassement orienté détermine donc entièrement la connaissance du surclassement orienté strict et de l'indifférence stricte et inversément.

Ces trois situations plus l'incomparabilité seront les éléments privilégiés du langage préférentiel à l'aide duquel nous modéliserons les préférences pragmatiques d'un acteur relativement à un ensemble $\mathcal{P}$. (voir tableau T.I.2. p.29)

Cette modélisation se concrétise dans ce que nous appellerons une "structure relationnelle de surclassement orienté"[1].

D.I.7. Etant données quatre relations binaires, $S_\pm$, S_+, $I_=$ et R définies sur un ensemble $\mathcal{P}$ d'évaluations distributionnelles qualitatives, nous dirons que ces relations donnent une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$, que nous noterons indifféremment ($S_\pm$, R/$\mathcal{P}$) ou (S_+, $I_=$, R/$\mathcal{P}$), si

1) les relations $S_\pm$, S_+, $I_=$, R représentent les préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}$ en accord avec les définitions de ces situations préférentielles;
2) elles sont exhaustives: pour une paire quelconque (d_a, d_b) d'évaluations de $\mathcal{P}$, une au moins est vérifiée;

---

1) B. ROY emploie à la place de structure le terme système. Nous préférons employer le terme structure pour garder le terme de système pour un emploi plus général.

3) les relations S_+, $I_=$, R sont mutuellement exclusives; pour une paire (d_a, d_b) d'évaluations de $\mathcal{P}$ une au plus est vérifiée;

4) la situation $S\underline{+}$ est non vide sur $\mathcal{P}$.

Nous désignerons par <u>système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$</u>, l'ensemble des structures $(S_{\pm}, R/\mathcal{P})$ auxquelles peut aboutir la modélisation des préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}$. Ainsi une structure $(S\underline{+}, R/\mathcal{P})$ correspond à une réalisation particulière du système relationnel de surclassement orienté.

A présent le propos de notre travail peut s'énoncer de la manière suivante: nous cherchons à caractériser par une interprétation sémantique la structure $(S\underline{+}, R/\mathcal{P})$ particulière réalisée par le système relationnel de surclassement orienté défini sur un ensemble $\mathcal{P}$ d'évaluations distributionnelles qualitatives.

T. I. 2. Situations préférentielles modélisées par un système relationnel de surclassement orienté

Situation	Définition	Relation binaire
Surclassement orienté strict	Elle correspond à l'existence de raisons pragmatiques claires qui justifient soit une préférence, soit une indifférence orientée en faveur de l'une (identifiée) des deux évaluations	S_+ : $(d_a \; S_+ \; d_b) \Leftrightarrow$ $(d_a \succ d_b)$ ou $(d_a \; I_+ \; d_b)$.
Indifférence stricte	Elle correspond à l'existence de raisons claires qui justifient une indifférence stricte entre deux évaluations distributionnelles qualitatives	$I_=$: relation symétrique, réflexive
Surclassement orienté	Elle correspond à l'existence de raisons pragmatiques claires qui justifient soit un surclassement orienté strict en faveur de l'une (identifiée), soit une indifférence stricte entre deux évaluations distributionnelles qualitatives	$S_\pm$: $(d_a \; S_\pm \; d') \Leftrightarrow$ $(d_a S_+ d_b)$ ou $(d_a I_= d_b)$.
Incomparabilité	Elle correspond à l'absence de raisons pragmatiques claires qui justifient un surclassement orienté en faveur de l'une (identifiée) ou/et un surclassement orienté en faveur de l'autre (identifiée) de deux évaluations distributionnelles qualitatives	R : $(d_a \; R \; d_b) \Leftrightarrow$ $(d_a \not S_\pm d_b)$ et $(d_b \not S_\pm d_b)$.

I. B. MODELISATION DES PREFERENCES PAR MOYENNE PONDEREE

L'aide à la décision ne s'arrête pas à la définition du domaine décisionnel et au choix d'un langage préférentiel. Encore devons-nous indiquer concrètement les situations préférentielles particulières qui relient les évaluations distributionnelles qualitatives, c'est-à-dire rendre opérationnelle l'aide à la décision.

Ce pas est généralement réalisé à l'aide d'un modèle numérique[1] - un critère[2], qui assure la correspondance entre les préférences pragmatiques de l'acteur et le système relationnel de surclassement orienté.

Or, nous nous intéresserons à un modèle numérique particulier,bien connu et abondamment utilisé: le modèle de la moyenne pondérée. Ce modèle associe, à partir d'une représentation numérique de l'échelle de préférence et au moyen d'une opération de moyenne, une valeur numérique à chaque évaluation sur laquelle s'appuiera le jugement préférentiel.

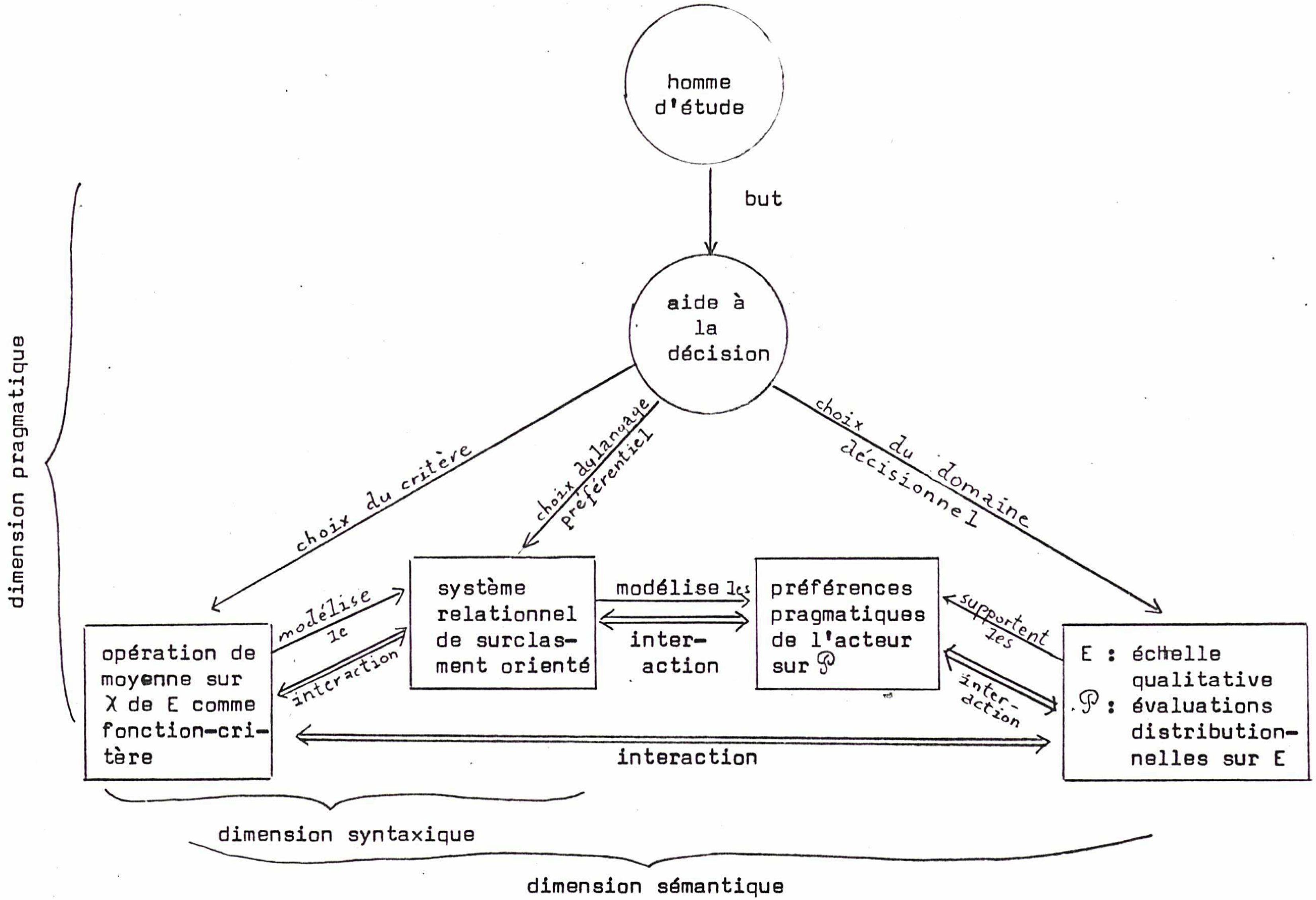
Cette modélisation s'accompagne de deux interactions qui prennent la forme de conditionnements réciproques entre d'une part le modèle de la moyenne pondérée et de l'autre le système relationnel de surclassement orienté et le domaine décisionnel (voir fig.I.2. p. 31).

---

1) J. PIAGET a bien formulé cette qualité instrumentale du modèle numérique: "Si l'on recourt au nombre, ce n'est pas en raison de quelque préjugé accordant un primat à la quantité, car celle-ci n'est qu'un rapport entre les qualitatifs et quantiatifs de n'importe quelle structure même purement logique. La valeur instrumentale du nombre provient du fait qu'il constitue une structure beaucoup plus riche que celles des propriétés logiques dont il est composé: l'inclusion des classes, d'une part, qui domine les systèmes de classification et de l'ordre, d'autre part, qui caractérise les sériations. En tant que synthèse de l'inclusion et de l'ordre, le nombre présente donc une richesse et une mobilité qui rendent ses structures particulièrement utiles en toutes questions de comparaisons, c'est-à-dire de correspondances et d'isomorphismes: d'où la nécessité de la mesure." Epistémologie des Sciences de l'homme (1970) Idées Gallimard, p.68.

2) Voir B. ROY, (op.cit. p.12), chap. 9.

Fig. I.2. Fonction modélisatrice de l'opération de moyenne pondérée



Nous étudierons en premier lieu l'interaction entre le modèle de la somme pondérée et le système relationnel de surclassement orienté. Ceci nous permettra de motiver en partie le choix de notre langage préférentiel. Mais nous pourrons également puiser dans la théorie de l'utilité espérée les conditions que doivent vérifier les préférences pragmatiques, modélisées par le système relationnel de surclassement orienté, pour que l'emploi de l'opération de moyenne pondérée soit justifié.

Ensuite, nous aborderons l'interaction entre le modèle de la moyenne pondérée et le domaine décisionnel; ceci nous permettra de motiver le choix de la structure de l'ensemble $\mathcal{P}$ et de souligner le conditionnement du choix du modèle par la représentation numérique de l'échelle de préférence.

I.B.1. Le modèle de la moyenne pondérée

En basant la comparaison entre évaluations distributionnelles qualitatives sur les valeurs prises par une fonction numérique, nous faisons usage de ce que B. Roy appelle une fonction-critère[1]. Celle-ci est une fonction $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ qui appréhende une structure relationnelle de surclassement orienté à travers la propriété suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'acteur ou l'homme d'étude, jugeant pour lui, reconnaît} \\ \text{l'existence d'un axe de signification sur lequel deux} \\ \text{évaluations distributionnelles } d,\ d' \in \mathcal{P} \text{ peuvent être} \\ \text{comparées et il accepte de modéliser cette comparaison} \\ \text{conformément à} \\ (*) \qquad g(d) \geqslant g(d') \Leftrightarrow (d\ S_{\underline{+}}\ d') \end{array} \right.$$

Autrement dit, dès que la valeur $g(d)$ attribuée par la fonction-critère g à l'évaluation d est supérieure ou

---

1) Voir B. ROY (op.cit. p.12), chap. 9.

égale à la valeur g(d') attribuée à l'évaluation d', on en conclut que d est en situation de surclassement orienté avec d'.

Il s'ensuit que:

$$\forall \; d, d' \in \mathcal{P} :$$
$$(d \; I_= \; d') \iff g(d) = g(d') \; ;$$
$$(d \; S_+ \; d') \iff g(d) > g(d') \; .$$

Le choix d'une telle fonction-critère g va de pair avec une représentation numérique de l'échelle de préférence sousjacente à $\mathcal{P}$. Cette représentation numérique - ou <u>codage</u>[1] de l'échelle - est réalisée à l'aide d'une fonction $\chi : E \to \mathbb{R}$ possédant la propriété suivante:

$$\forall \; e, e' \in E : (e > e') \iff \chi(e) > \chi(e') .$$

La fonction-critère à laquelle nous nous intéressons prend dès lors la forme d'une moyenne pondérée de l'évaluation distributionnelle sur l'échelle codée:

$$\forall \; d \in \mathcal{P} : \quad g(d) = (d \circ \chi) = \sum_{e \in E} \left[d(e) \cdot \chi(e) \right] .$$

Si l'on interprète χ comme une fonction d'utilité et d comme une distribution de probabilité sur E, alors g(d) apparaît comme une "utilité espérée". C'est en ce sens que cette modélisation des préférences s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée (Expected Utility Theory) initiée par VON NEUMANN et MORGENSTERN[2].

L'opération de moyenne appliquée à $\mathcal{P}$ en utilisant le codage χ de E conduit à un ensemble de valeurs réelles que nous noterons $g(\mathcal{P}, \chi)$. Ces valeurs sont évidemment ordonnées par la relation $\geqslant$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, noterons-nous $(\geqslant / g(\mathcal{P}, \chi))$ la restriction de la structure ordinale $(\geqslant / \mathbb{R})$ à $g(\mathcal{P}, \chi)$.

---

1) Voir B. ROY (id.)
2) VON NEUMANN et MORGENSTERN, (1947) Theory of Games and Economie Behaviour Princ. Univ.Press, 2nd Ed.

$(\geqslant / g(\mathcal{P}, X))$ modélise à travers la propriété de la fonction-critère g une structure relationnelle de surclassement orienté ($S\pm$, $R/\mathcal{P}$) qui, à son tour, modélise les préférences pragmatiques des acteurs (voir fig. I.2. p. 31).

La fonction modélisatrice de la moyenne pondérée s'accompagne de deux interactions qui viennent s'ajouter à celle constatée entre le système relationnel de surclassement orienté et les préférences pragmatiques de l'acteur: une première interaction de nature "syntaxique" entre le modèle de la moyenne pondérée et le système relationnel de surclassement orienté, et une deuxième de nature "sémantique" reliant le modèle de la moyenne pondérée au domaine décisionnel, support des préférences pragmatiques.

Etudions d'abord la première de ces interactions.

I.B.2. Interaction entre le modèle de la moyenne pondérée et le système relationnel de surclassement orienté

Cette interaction se réalise dans deux conditionnements réciproques.

I.B.2.a. Choix du langage préférentiel conditionné par le modèle de la moyenne pondérée

Nous avons remarqué plus haut que le choix du langage préférentiel s'oriente en grande partie suivant la dimension pragmatique de la modélisation, c'est-à-dire d'après l'opérationnalité de l'aide à la décision. Il n'est donc pas étonnant que le choix du critère, aspect essentiel de cette opérationnalité, ait conditionné en partie le langage préférentiel que nous avons choisi.

En effet, puisque nous avons choisi dans ce travail de discuter du modèle de la moyenne pondérée - une fonction-critère uni-dimensionnelle -, ce choix a conditionné notre langage à travers l'hypothèse implicite d'uni-dimensionalité des préférences pragmatiques que nous voudrions modéliser sur $\mathcal{P}$. En scindant l'indifférence en une situation d'indifférence stricte et une situation d'indifférence orientée et en formalisant le système relationnel particulier de surclassement orienté, nous avons implicitement supposé que les préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}$ soient modélisables par une fonction-critère et s'organisent donc suivant <u>un</u> axe de signification[1].

I.B.2.b. <u>Validité du modèle de la moyenne pondérée conditionnée par le système relationnel de surclassement orienté</u>

La validité du modèle de la moyenne pondérée dans la modélisation des préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}$ repose sur la correspondance entre le système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$ et la structure ordinale ($\geqslant / g(\mathcal{P}, \chi)$); c'est-à-dire que la fonction-critère g doit être un homo-morphisme de $\mathcal{P}$ vers $g(\mathcal{P}, \chi)$[2].

Or, les conditions assurant cette correspondance, bien connues en théorie de l'utilité espérée[3], sont au nombre de trois:

1) <u>Complète comparabilité transitive</u>

La situation de surclassement orienté doit être un préordre total sur $\mathcal{P}$: toutes les évaluations distributionnelles sont comparables entre elles.

2) <u>Condition d'indépendance</u>

$$\forall \; d, d' \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \alpha \in (0,1) :$$

$$(d \; S_{\pm}' \; d') \iff [\alpha d + (1-\alpha) d'] \; S_{\pm} \; [\alpha d' + (1-\alpha) d''] ,$$

$$\forall \; d'' \in \mathcal{P} .$$

---

1) Voir la définition de la fonction-critère, p. 32

2) Voir la relation (*) p.32

3) Voir FISHBURN (op.cit.,p.16) p. 108 et GOTTINGER (op.cit., p.16) p.32.

Si l'évaluation distributionnelle d se trouve en situation de surclassement orienté avec l'évaluation d', leurs mélanges respectifs avec une troisième évaluation d" avec les proportions α et $(1-\alpha)$ n'altèrent pas cette situation préférentielle et réciproquement.

3) <u>Condition archimédienne</u>[1)]

$$\forall\ d, d', d'' \in \mathcal{P} :$$

$$[(d\ S_+\ d')\ \text{et}\ (d'\ S_+\ d'')] \Rightarrow \exists\ \alpha, \beta \in (0,1) \succ$$

$$[\alpha d + (1-\alpha)d'']\ S_+\ d'\ \text{et}\ d'\ S_+ [\beta d + (1-\beta)d''] .$$

Si l'évaluation d est en situation de surclassement orienté strict avec l'évaluation d' et celle-ci de même avec l'évaluation d", alors il existe des proportions α et $(1-\alpha)$ et des proportions β et $(1-\beta)$ telles que le mélange $\alpha d + (1-\alpha)d''$ soit en situation de surclassement orienté strict avec d' et d' soit en situation de surclassement orienté avec le mélange $\beta d + (1-\beta)d''$. Il ne doit donc exister dans $\mathcal{P}$ aucune évaluation rejetée ou préférée à l'infini[1)].

Si $\mathcal{P}$ admet une structure d'ensemble de mélanges et que le système relationnel de surclassement orienté vérifie ces conditions sur $\mathcal{P}$, deux conséquences importantes en découlent:

1) <u>Unicité de l'équivalent ponctuel</u>

$$\forall\ d, d', d'' \in \mathcal{P} :$$

$$[(d\ S_\pm\ d'), (d'\ S_\pm\ d'')\ \text{et}\ (d\ S_+\ d'')] \Rightarrow d'\ I_=$$

$$[\alpha d + (1-\alpha)d'']\ \text{pour un et un seul}\ \alpha \in [0,1] .$$

1) "It is called Archimedian because it corresponds to the archimedian property of real numbers: for any positive number x, no matter how small, and for any number y, no matter how large, there exists an integer n such that nx y. This simply means that any two positive numbers are comparable, i.e. their ratio is not infinite. Another way to say this, one which generalizes more readily to qualitative structures, is that the set of integers n for which y nx is a finite set." in Krantz, Luce, Suppes, Tversky: Foundations of measurement (1971) Academic Press, p.25.

Si une évaluation d' est en termes préférentiels comprise entre deux évaluations d et d", alors il existe un et un seul mélange, selon les proportions α et $(1-\alpha)$, de d et d" qui soit strictement indifférent à celle-ci[1].

L'importance de cette propriété apparaît pleinement lorsque l'on considère les évaluations d, d' et d" associant un poids de valeur unitaire respectivement aux échelons e, e' et e" de E, tels que $e > e' > e''$. Dans ce cas il existera un mélange unique de d et de d" avec les proportions α et $(1-\alpha)$ qui sera strictement indifférent à d'. On remarquera que cette propriété a dès lors d'importantes conséquences sur les choix possibles de codage de E [2].

2) Loi de substitution

$$\forall \; d, d' \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \alpha \in (0,1) :$$
$$(d \; I_= \; d') \Rightarrow [\alpha d + (1-\alpha) d''] \; I_= \; [\alpha d' + (1-\alpha) d''] ,$$
$$\forall \; d'' \in \mathcal{P} .$$

Si deux évaluations d et d' sont strictement indifférentes l'une à l'autre, leurs mélanges respectifs avec une troisième évaluation d" quelconque selon les proportions α et $(1-\alpha)$, sont également strictement indifférents entre eux[3].

En d'autres termes, si d est strictement indifférente à d', on peut arbitrairement remplacer d par d' dans un même mélange avec une troisième évaluation d", sans pour autant altérer une quelconque situation préférentielle.

Ainsi, l'emploi du modèle de la moyenne pondérée se justifie-t-il, si les préférences pragmatiques décrites à l'aide du système relationnel de surclassement orienté réalisent une structure $(S\underline{+}, R/\mathcal{P})$ qui vérifie les conditions et propriétés ci-dessus.

---

1) La démonstration de cette propriété peut être lue dans FISHBURN (op.cit., p.16), p.112 ou GOTTINGER (op.cit., p.16), p.40.
2) Voir I.B.3.b. p.39
3) Voir FISHBURN (op.cit., p.16), p.112.

Formellement, ce résultat fondamental de la théorie de l'utilité espérée s'énonce ainsi:[1]

Soit ($S\underline{+}$, $R/\mathcal{P}$) une structure relationnelle de surclassement orienté définie sur $\mathcal{P}$, un ensemble d'évaluations distributionnelles qualitatives muni de la structure d'ensemble de mélanges; soit ($\geqslant / g(\mathcal{P}, \chi)$) la structure ordinale que réalise le modèle de la moyenne pondérée sur $\mathcal{P}$ à partir du codage χ de E. La structure ($S\underline{+}$, $R/\mathcal{P}$) est homomorphe à la structure ($\geqslant / g(\mathcal{P}, \chi)$), si et seulement si ($S\underline{+}$, $R/\mathcal{P}$) vérifie les conditions de complète comparabilité transitive, d'indépendance et archimédienne.

L'interaction entre le modèle de la moyenne pondérée et le système relationnel de surclassement orienté se concrétise donc d'un côté par le choix du langage préférentiel particulier qui aboutit au système relationnel "unidimensionnel" et de l'autre par les conditions imposées à la structure relationnelle que réalise ce système.

Venons-en maintenant à l'interaction entre le modèle de la moyenne pondérée et le domaine décisionnel.

I.B.3. Interaction entre le modèle de la moyenne pondérée et le domaine décisionnel

Cette interaction apparaît également sous la forme de deux conditionnements réciproques:

I.B.3.a. Choix du domaine décisionnel conditionné par le modèle de la moyenne pondérée

Nous avons plus haut caractérisé le domaine décisionnel par l'ensemble $\mathcal{P}$ des évaluations distributionnelles envisageables sur une échelle de préférence qualitative.

1) Voir FISHBURN (op.cit., p.16), p. 112-113.

Or, en général, lorsque l'acteur prend en compte des conséquences qualitatives, le nombre des actions potentielles à la décision est relativement limité; seul un sousensemble de $\mathcal{P}$ acquiert une signification concrète réelle. Le choix d'étendre néanmoins le domaine décisionnel à tout l'ensemble $\mathcal{P}$ est conditionné par notre volonté d'utiliser l'opération de moyenne pondérée comme fonction-critère.

C'est dans le même but que nous avons muni l'ensemble $\mathcal{P}$ d'une structure d'ensemble de mélanges. Ce choix ne va pas sans poser des problèmes, car il se traduit par des propriétés très restrictives que doit vérifier l'indicateur de modulation. En fait, celui-ci doit donner une „mesure" de l'importance relative de chaque échelon intervenant dans l'évaluation non ponctuelle. Il serait utile d'entreprendre une étude analogue à celle que nous proposons à propos de l'échelle qualitative au sujet de cette hypothèse d'ensemble de mélanges, mais le temps pour ce faire nous a manqué dans le cadre de ce travail[1].

I.B.3.b. Choix de la fonction-critère conditionné par le domaine décisionnel

Les conditions de complète comparabilité transitive, d'indépendance et archimédienne entrainent par l'intermédiaire de la propriété de l'unicité de l'équivalent ponctuel un conditionnement du choix de la fonction-critère, en ce sens que le codage χ de E est déterminé à l'unité et à l'origine près.

En effet, comme corollaire au résultat fondamental de la théorie de l'utilité espérée, nous obtenons le résultat suivant[2]:

---

1) Voir notre remarque au sujet de l'opération de mélange, p.17

2) Voir FISHBURN (op.cit., p.16), p.107 (th. 8.2.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \chi^1 \text{ et } \chi^2 \text{ sont deux codages distincts de E tels} \\ \text{que } (S_{\pm}, R/\mathcal{P}) \text{ est homomorphe à } (\geqslant / g(\mathcal{P}, \chi^1)) \text{ et à} \\ (\geqslant / g(\mathcal{P}, \chi^2)), \text{ alors il } \exists \text{ a et b tels que } a \in \mathbb{R}^+ \text{ et} \\ b \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, e \in E : \quad \chi^1(e) = a \cdot \chi^2(e) + b \ . \end{array} \right.$$

Les codages χ que l'on peut associer à E sont donc déterminés à une transformation linéaire positive près.

Pour illustrer ce résultat, remarquons que $\mathcal{P}$ contient par définition les évaluations distributionnelles qui associent un poids de valeur unitaire aux échelons de E. Notons ces évaluations particulières du_e, $\forall\, e \in E$.

Toute évaluation distributionnelle peut, en vertu des propriétés d'ensemble de mélanges de $\mathcal{P}$, être exprimée de la manière suivante:

$$\forall\, d \in \mathcal{P} : \qquad d \equiv \sum_{e \in E} d(e) \cdot du_e \quad .$$

Le théorème fondamental de la théorie de l'utilité espérée nous assure qu'il existe, dès lors que les trois conditions requises sont vérifiées par $(S_{\pm}, R/\mathcal{P})$, une fonction u à valeurs réelles sur $\mathcal{P}$, telle que :

$$\forall\, d, d' \in \mathcal{P} :$$

$$(1) \qquad (d \; S_{\pm} \; d') \iff u(d) \geqslant u(d') \ .$$

et cette fonction u est linéaire[1]. Donc, $\forall\, d \in \mathcal{P}$:

$$u(d) = u\left[\sum_{e \in E} [d(e) \cdot du_e] \right] = \sum_{e \in E} \left[d(e) \cdot u(du_e) \right] .$$

(du_e) est la valeur réelle attribuée par la fonction u à l'évaluation qui associe un poids de valeur unitaire à l'échelon e. Or d'après la définition de E[2] :

$$\forall\, e, e' \in E : \quad e > e' \iff du_e \; S_{+} \; du_{e'} \ ;$$

u doit donc vérifier la structure $(</E)$, c'est-à-dire donne un codage de E.

Or, à cause de l'unicité de l'équivalent ponctuel, u est déterminée à une transformation linéaire positive

---

1) Voir FISHBURN (op.cit., p.16), p.112-113.
2) Voir I.A.1.a. p.11

près[1], donc tout codage χ de E utilisé dans l'opération de moyenne pondérée doit l'être également.

I.B.4. Critique du modèle de la moyenne pondérée

Nous voilà arrivés au point faible du modèle de la moyenne pondérée. La puissance opérationnelle de ce modèle n'est qu'un corollaire de la richesse des informations préférentielles supportées par le domaine décisionnel.

En effet, la propriété de l'unicité de l'équivalent ponctuel, à la base de la détermination du codage et de ce fait à la base du modèle de la moyenne pondérée suppose de prime abord une complète comparabilité des évaluations distributionnelles qualitatives; tout mélange des évaluations "ponctuelles" du$_e$ doit se charger assez de signification concrète réelle aux yeux de l'acteur pour qu'il puisse étendre ses jugements préférentiels à ces mélanges et déterminer ainsi le codage de l'échelle qualitative[2].

Cependant, la pratique nous enseigne que dans le cas des conséquences qualitatives[3], cette richesse n'est généralement pas acquise, ce qui n'est qu'une autre manière de dire que le codage χ que l'on doit associer à E ne peut être connu avec assez de précision pour déterminer convenablement la fonction-critère g; ou encore

1) Voir FISHBURN (op.cit., p.16), p.112-113.
2) Remarquons que la plupart des procédures de construction d'une fonction d'utilité dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée sont basées sur cette propriété et donc sur cette hypothèse de complète comparabilité des évaluations distributionnelles.
3) Ni d'ailleurs dans les cas de conséquences apparemment quantitatives, comme le montre les multiples critiques adressées à la théorie de l'utilité espérée. Voir notamment KAHNEMAN & TVERSKY, Prospect theory: an analysis of decision under risk, Econometrica, V. 47 (1979) N° 2, p. 263-291.

que la structure relationnelle de surclassement orienté $(S_{\pm}, R/\wp)$ ne vérifie pas la condition de complète comparabilité, c'est-à-dire que les jugements préférentiels de l'acteur ne couvrent pas tout l'ensemble $\wp$ [1].

La modélisation par moyenne pondérée risque ainsi de conduire à un <u>artefact</u>[2] du domaine décisionnel, en ce sens que ce modèle, par l'intermédiaire du système relationnel de surclassement orienté et des préférences pragmatiques modélisées conduit à définir sémantiquement un domaine décisionnel différent de celui pragmatiquement pris en compte au départ (voir fig. I.3. p.43)

Autrement dit, pour utiliser le modèle de la moyenne pondérée, nous devons supposer l'échelle de préférence connue avec une précision en fait incompatible avec son caractère qualitatif.

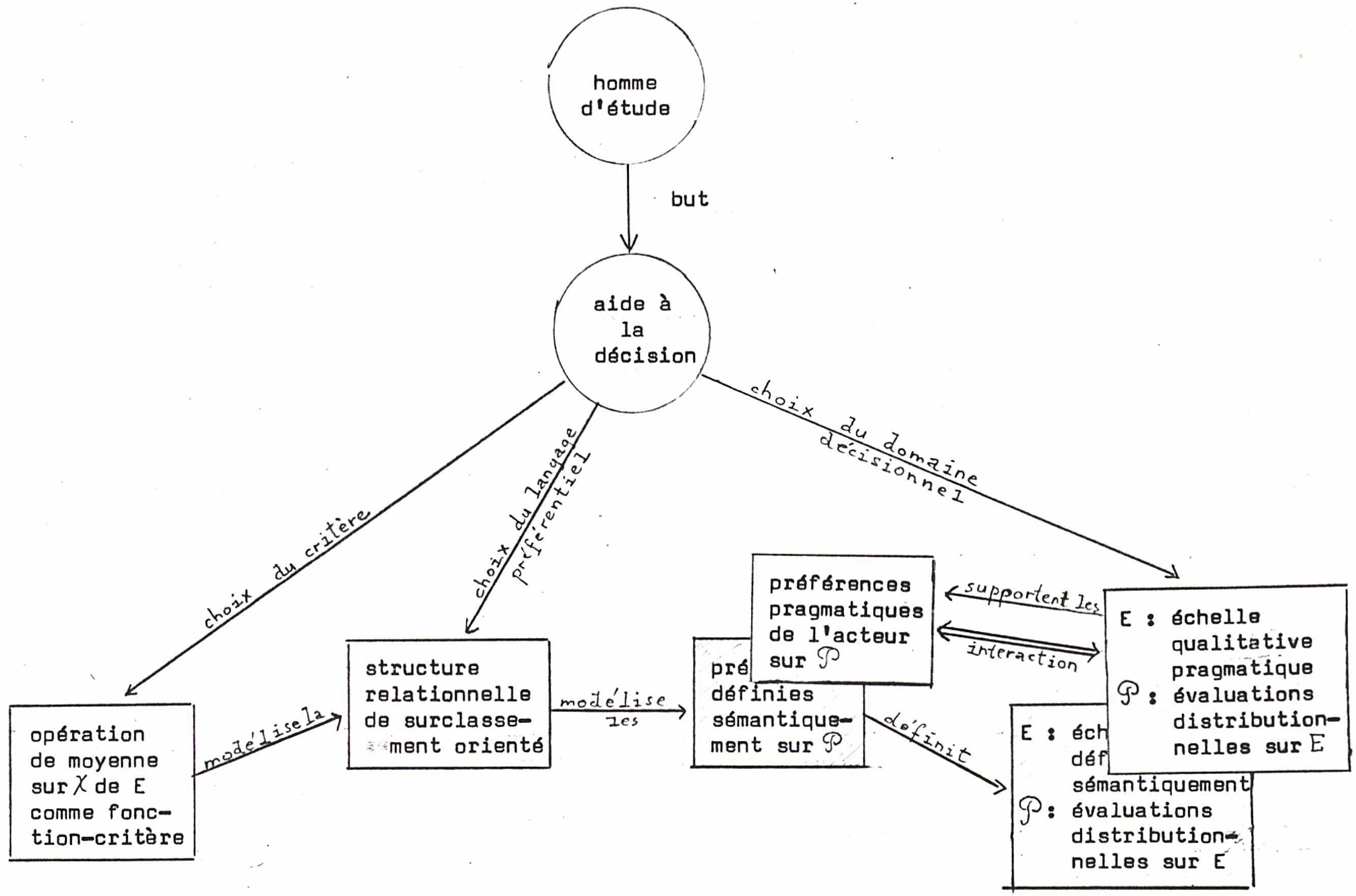
Pour approfondir cette thèse, nous proposons de prendre en compte dans la modélisation des préférences la précision avec laquelle l'acteur perçoit les conséquences qualitatives.

---

1) Nous nous écartons ainsi de la critique classique qui porte plutôt sur la condition d'indépendance. (Voir M. ALLAIS & HAGEN, O (eds) Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox, Reidel, Theory and Decision 21, 1978, et KAHNEMANN & TVERSKY, Prospect Theory: An Analysis of decision under Risk, Econometrica. V. 47, 1979, N° 2, p.263-291). Nous voyons dans ces "incohérences" des jugements préférentiels émis par un acteur face à des évaluations distributionnelles un indice certain du fait que l'acteur ne connaît avec assez de précision les évaluations en question pour reconnaître des préférences stables et cohérentes avec le but de la modélisation.

2) Ce terme, utilisé dans le domaine de la biologie, désigne l'altération des structures biologiques par suite de la mise en oeuvre des techniques de préparation et d'expérimentation. Voir GIGERENZER, (op.cit., p. 19), p.102.

Fig. I.3. Artefact du domaine décisionnel introduit par le modèle de la moyenne pondérée



I.C. DANS L'OMBRE DU MODELE DE LA MOYENNE PONDEREE

La mise en évidence de l'artefact du domaine décisionnel introduit par le modèle de la moyenne pondérée, a nécessité le recours à la capacité cognitive de l'acteur relativement à la conséquence qualitative.

Pour intégrer cet aspect dans la modélisation, nous en élargirons le cadre par l'introduction explicite de l'acteur comme sujet qui perçoit la conséquence qualitative.

L'étude de l'interaction ainsi introduite, entre d'une part le domaine décisionnel et de l'autre les préférences pragmatiques, nous permettra d'élucider les causes de l'artefact.

I.C.1. La perception de la conséquence qualitative dans la modélisation des préférences

Rappelons la définition générale que propose B. ROY du concept de conséquence élémentaire[1] des actions potentielles à la décision:

"Une conséquence élémentaire est un effet, un aspect, ou un attribut reconnu comme étant une conséquence jouissant des deux propriétés suivantes:
1) elle est suffisamment bien identifiée dans son contenu pour que (l'acteur en comprenne) la signification;
2) elle est suffisamment bien perçue pour permettre une description précise de ce par quoi elle se manifeste une fois l'action potentielle 'a' mise à exécution; cette description est appelée état de (la conséquence) pour a."

---

1) B. ROY (op.cit., p.12), chap. 8.

Deux propriétés caractérisent une conséquence élémentaire, dont l'une se rapporte à la signification de la conséquence et à l'identification de son contenu par rapport aux préférences pragmatiques de l'acteur, tandis que l'autre se rapporte à la perception et à la description des états que peut prendre cette conséquence pour les actions potentielles envisageables.

Cette définition de la conséquence fait donc explicitement référence à la perception que doit avoir l'acteur des états de celle-ci.

Or, lorsque nous choisissons de prendre en compte une conséquence de caractère qualitatif, sous la forme d'une échelle de préférence qualitative, nous introduisons implicitement une hypothèse quant à la perception qu'a l'acteur des états de cette conséquence, puisque le caractère qualitatif de la conséquence ne découle précisément que de la nature de la perception des états correspondants.

Le choix du domaine décisionnel implique donc nécessairement le choix d'une hypothèse quant à la perception des états de la conséquence qualitative et nous devons en tenir compte dans la modélisation des préférences. L'introduction de cet élément dans le cadre de la modélisation se matérialise par son interaction avec d'une part le domaine décisionnel et de l'autre les préférences pragmatiques de l'acteur (Voir fig. I.4. p. 46).

Pour étudier ces interactions nous nous appuierons sur les travaux de J. PIAGET dans le domaine de la psychologie de la perception[1].

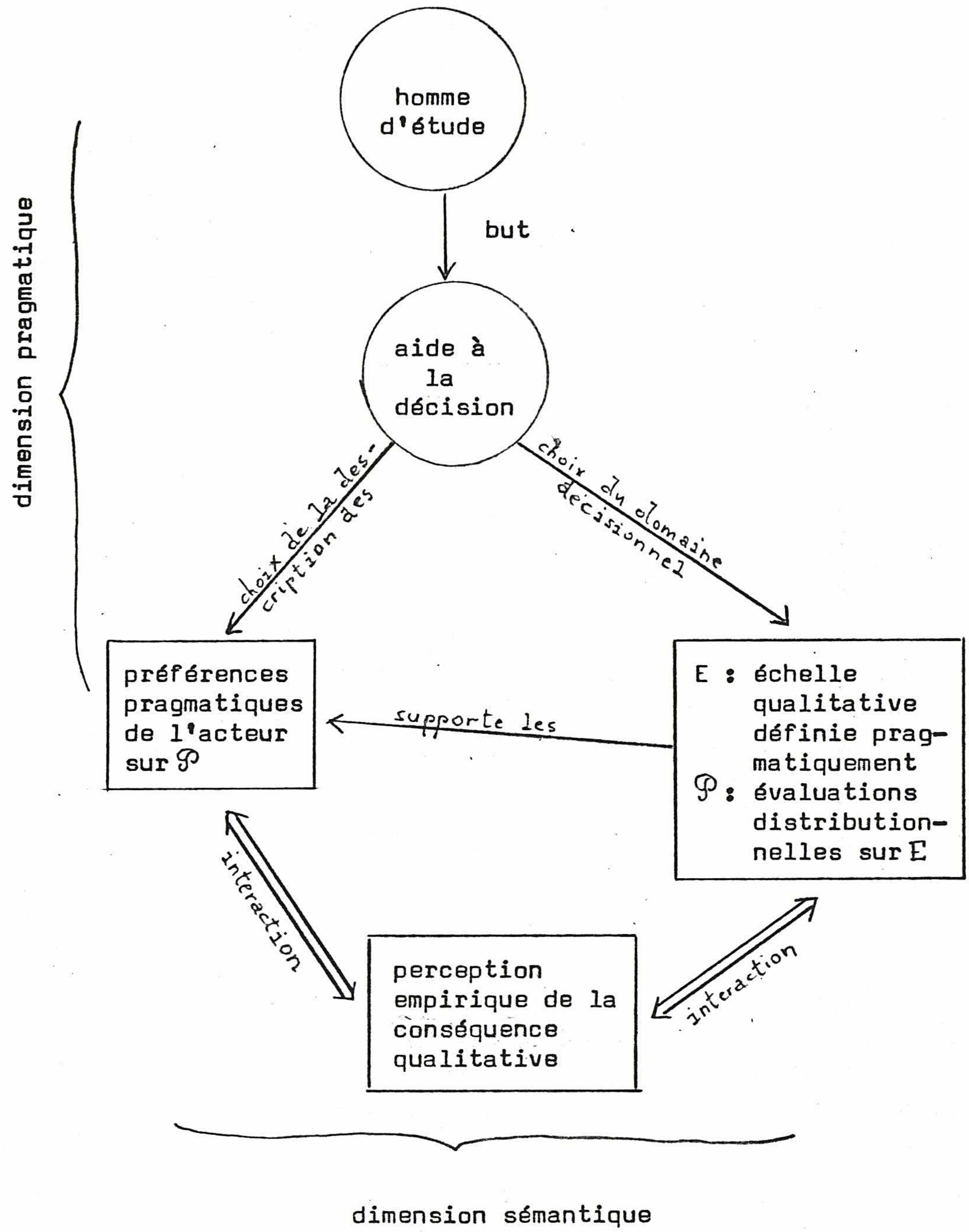
I.C.2. <u>Interaction entre la perception de la conséquence et le domaine décisionnel</u>

Comme nous venons de le remarquer ci-dessus en choisis-

---

1) J. PIAGET, Les Mécanismes perceptifs, P.U.F. 2e ed.1975.

Fig. I.4. <u>Introduction de l'acteur comme sujet qui perçoit la conséquence qualitative dans la modélisation des préférences</u>



sant de modéliser les préférences pragmatiques de l'acteur sur un ensemble d'évaluations distributionnelles qualitatives, nous conditionnons la perception de l'acteur dans le fait qu'elle doit s'appliquer à une conséquence de caractère qualitatif. Mais cette perception "qualitative", en retour, conditionne la connaissance qu'a l'acteur et partant l'homme d'étude, de l'échelle de préférence sousjacente aux évaluations distributionnelles.

L'étude de cette interaction s'organise autour de deux relations: une relation sujet-objet (acteur-conséquence) qui caractérise la perception des états de la conséquence qualitative, et une relation forme-contenu (conséquence qualitative-états qualitatifs) qui caractérise la liaison entre la signification de la conséquence et la description précise, concrète des états de celles-ci. Ces deux relations ne sont pas indépendantes l'une de l'autre; au contraire, la relation acteur-conséquence conditionne en partie la relation conséquence-états et cela particulièrement à cause du caractère qualitatif de la conséquence.

I.C.2.a. Relation acteur-conséquence qualitative

La relation acteur-conséquence caractérise la perception qu'a l'acteur de la conséquence qu'il attache aux actions potentielles, lorsque celles-ci sont mises à exécution. Envisageons quelques propriétés remarquables de cette relation dans le cas où la conséquence prend un caractère qualitatif:

1) La perception d'une conséquence qualitative est largement basée sur l'imagination de ce par quoi cette conséquence se manifeste concrètement. Elle est ainsi directement dépendante de l'expérience subjective de l'acteur. Il y a dans la perception de la conséquence (objet) une

plus ou moins large présence de l'acteur (sujet);
2) Cette présence du sujet dans la perception de la conséquence limite l'identification de celle-ci au champ perceptif de l'acteur. En d'autres termes, la perception s'inscrit dans un champ limité par les conditions de proximité et d'espace dans lesquelles se trouve l'acteur[1];
3) En outre, cette présence du sujet dans la perception entraîne l'individualité et donc l'"incommunicabilité" fondamentale de celle-ci (sauf en langage ou en image). L'homme d'étude ne peut se substituer à l'acteur; il ne peut à lui seul inférer les jugements préférentiels de celui-ci, puisqu'il n'a pas accès aux expériences personnelles de l'acteur;
4) Finalement, la perception d'une conséquence qualitative est "phénoméniste" en ce sens qu'elle tient à l'apparence (phénoménale) de la conséquence. La perception porte sur des états globaux, complexes et irréductibles à des composantes plus simples et plus objectives.

Ces propriétés de la relation acteur-conséquence qualitative se répercutent sur la relation forme-objet. Les particularités de la perception, dues au caractère qualitatif de la conséquence, trouvent leur reflet dans des particularités spécifiques au niveau de la relation: identité de la conséquence-description des états.

I.C.2.b. Relation identité de la conséquence-description des états

Ces particularités peuvent être saisies à travers les propriétés suivantes:
1) La conséquence qualitative est une totalité d'un seul tenant. Tout en recouvrant une réalité souvent complexe,

---

1) Ces conditions trouvent leur origine dans les positions respectives qu'occupe l'acteur dans un processus de décision donné; ils peuvent de ce fait varier au cours du processus, notamment quand une étude plus détaillée de la conséquence est demandée.

elle ne peut ni être décomposée en conséquences plus simples, ni être recomposée à partir de conséquences plus "élémentaires" et plus objectives[1];

2) La conséquence qualitative est indissociable de ses états et il n'y a pas d'abord identification de la conséquence et ensuite perception des états. Au contraire, la conséquence et les états n'existent que l'une par les autres. C'est pourquoi la définition précise et concrète des états d'une telle conséquence revêt une importance particulière; l'identification et partant la signification de la conséquence qualitative passent par cette description précise et concrète des états;

3) Les états d'une conséquence qualitative ne s'imposent pas comme des "conséquences" nécessaires (physiques ou logiques) des actions potentielles mises à exécution. Ils ne revêtent aux yeux de l'acteur qu'un caractère "prégnant"[2]. Cette prégnance de la conséquence qualitative relève d'une causalité reçue subjectivement par l'acteur.

Ces quelques propriétés, qui caractérisent la relation sujet-objet et la relation forme-objet, c'est-à-dire l'interaction entre la perception de la conséquence qualitative et son identification, montrent la nature "subjective" de la perception d'une telle conséquence. Or, on doit s'attendre à ce que ces propriétés aient des retombées sur l'interaction entre la perception de la conséquence et les préférence pragmatiques de l'acteur.

I.C.3. Interaction entre la perception de la conséquence et les préférences de l'acteur

En effet, le contexte préférentiel sousjacent à la conséquence qualitative, au moment où celle-ci acquiert le

---

1) Du moins dans la phase considérée de l'aide à la décision.
2) Prégnance: "force et par suite stabilité et fréquence d'une organisation psychologique privilégiée, parmi toutes celles qui sont possibles." Guillaume in Voc. psych. PIERON.

caractère de dimension du problème de décision, déforme la perception des états de celles-ci et inversément, le caractère subjectif de la perception déforme les préférences pragmatiques de l'acteur.

En règle générale, la perception des états très favorables ou très défavorables subissent des déformations systématiques. Prenons trois actions potentielles à la décision a, a' et a" évaluées ponctuellement sur une échelle qualitative par les états e, e' et e". Si a est "nettement" préférée à a' et celle-ci, de même, est "nettement" préférée à a", alors l'état e' sera sousestimé perceptivement s'il est mis en relation avec l'état e, par contre il sera surestimé perceptivement s'il est mis en relation avec l'état e". Il en résulte donc, en retour, un renforcement subjectif des préférences correspondantes perçues entre a et a' et entre a' et a".

D'autre part, dans la mesure où la dimension renvoie à la présence d'un axe de signification sur lequel on peut "aligner" mentalement les différents états d'une conséquence qualitative, la perception de l'échelle de préférence s'accompagne d'une perception de "contrastes"[1)] entre les échelons de celle-ci.

Or, en raison de cette déformation de la perception des états qualitatifs, les contrastes entre ces états ne peuvent être perçus d'une manière "additive". Les contrastes importants au sens des préférences sont perceptivement surestimés et les contrastes peu importants au sens des préférences sont perceptivement sousestimés. Ce biais dans la perception des contrastes renforce en retour les préférences perçues.

---

1) "Dès qu'on pose deux termes dans l'espace, on pose leur intervalle, puisqu'il n'y aurait pas dualité s'il n'y avait pas intervalle. De même dès qu'on pose deux éléments qualitatifs on pose leur contraste." Essai sur la connaissance approchée", G. BACHELARD (p.39) Vrin (4e éd. 1973).

Nous touchons donc ici aux raisons profondes qui font qu'en pratique l'acteur et l'homme d'étude ne peuvent connaître avec une précision suffisante l'échelle de préférence sousjacente aux évaluations distributionnelles qualitatives pour utiliser le modèle de la moyenne pondérée.

I.C.4. Dépassement du modèle de la moyenne pondérée

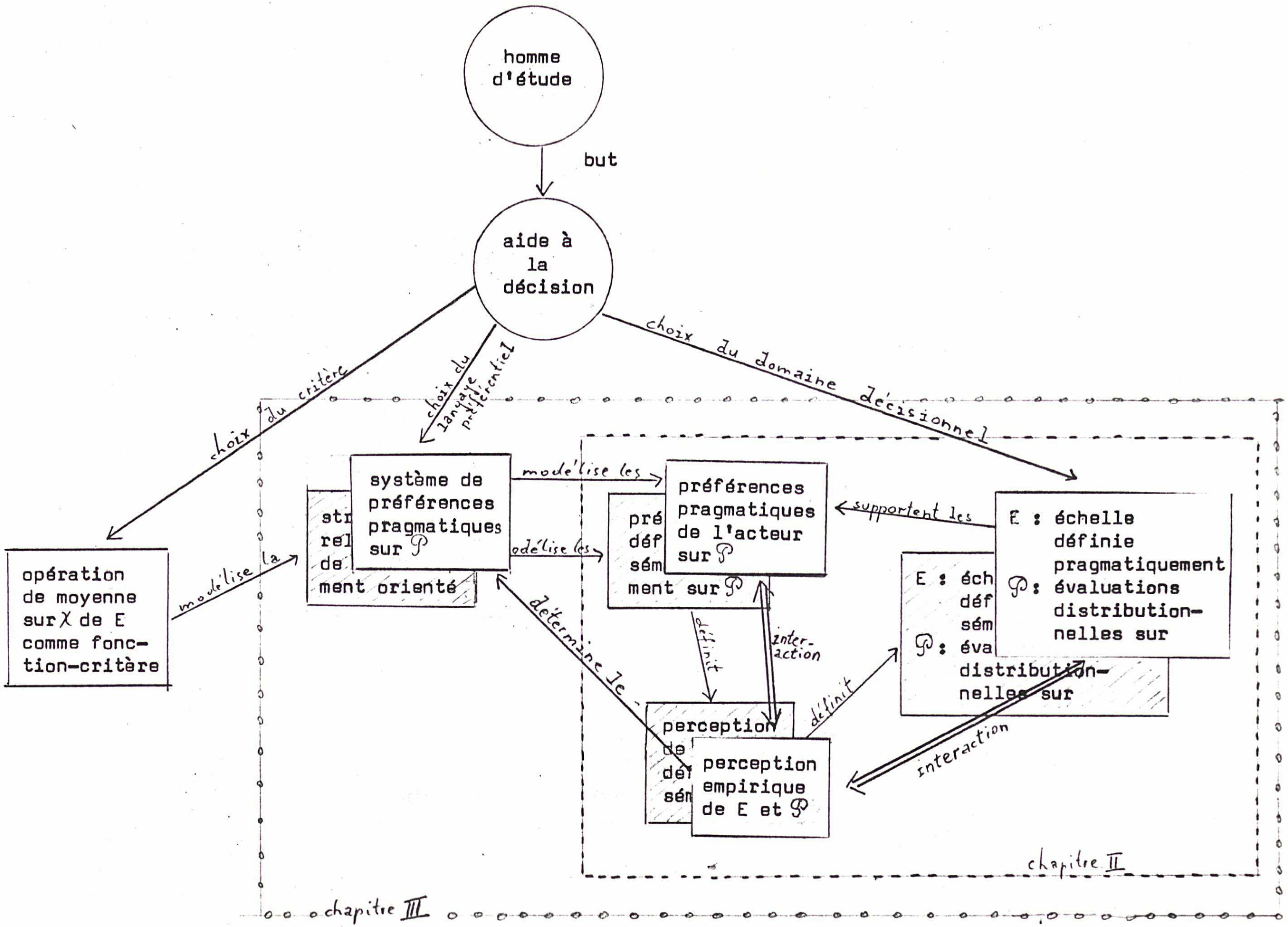
L'artefact du domaine décisionnel introduit par le modèle de moyenne pondérée se trouve ainsi élucidé par les caractéristiques de la perception de la conséquence qualitative (voir fig. I.5.p.52).

Il semble à première vue que ce modèle soit inadapté au problème de la comparaison d'un ensemble d'évaluations distributionnelles. En tout cas, l'indétermination du codage d'une échelle qualitative paraît inévitablement lié à la nature qualitative de la conséquence. Ne pas accepter cette indétermination reviendrait par conséquent à refuser le caractère précisément qualitatif aux conséquences prises en compte, donc à accepter l'artefact du domaine décisionnel.

Cependant, l'attrait que semble exercer en général la valeur moyenne sur les acteurs et les hommes d'études nous semble provenir d'une adéquation relative ou partielle du modèle de la moyenne pondérée au problème que nous nous posons.

En effet, l'étude plus approfondie de la perception d'une conséquence qualitative nous conduira dans un deuxième chapitre vers l'élaboration d'une typologie des échelles qualitatives. Par là, on montrera que cette perception, sans atteindre en général la précision requise pour l'emploi de l'opérateur de moyenne, pourra être

Fig. I.5. Artefact des préférences introduit par le modèle de la moyenne pondérée



plus ou moins approximative. Entre la perception la plus approximative ou subjective et la plus précise ou objective s'ouvre ainsi une suite de niveaux de précision intermédiaires. Nous pouvons donc apprécier, grâce à cette typologie, l'importance de l'artefact introduit par le modèle de la moyenne pondérée au niveau du domaine décisionnel.

Mais cette étude nous permettra en outre, dans un troisième chapitre, d'appréhender l'artefact introduit par cette méthode au niveau du système relationnel de surclassement orienté. En effet, on pourra montrer que chaque niveau particulier de perception de la conséquence qualitative, loin de changer entièrement les préférences pragmatiques, réintégrera les niveaux de précision antérieurs. La perception, en devenant de plus en plus précise, ne fait que confirmer, à chaque niveau de précision, les situations préférentielles reconnues aux niveaux précédents.

Or, à travers la condition de complète comparabilité, le modèle de la somme pondérée spécifie une structure relationnelle de surclassement orienté qui donne un classement complet des évaluations distributionnelles. Ce classement correspond précisément au cas où la perception de la conséquence atteint une précision extrême. Cependant, une partie de ce classement correspondra au niveau de précision "réel" de la perception[1].

L'inadaptation du modèle de la moyenne pondérée trouve son origine dans l'excès de comparabilité qui découle

---

1) L'opération de moyenne ne fait que confirmer en règle générale les situations préférentielles que les acteurs perçoivent intuitivement comme évidentes. C'est pourquoi l'attrait qu'exerce l'opération de moyenne nous semble entre autre provenir de cette validation de la méthode par les cas évidents. Le modèle confirme les préférences évidentes, donc il doit aussi indiquer correctement les situations préférentielles plus difficiles à appréhender. Il acquiert ainsi une propriété "divinatoire" qui expliquerait en partie la difficulté à laquelle se heurte un homme d'étude qui veut remplacer ce modèle par une méthode pragmatiquement mieux adaptée au problème posé.

de la "fausse" précision des résultats. On ne peut dissocier ceux qui découlent réellement des données qualitatives de ceux qui découlent du codage trop précis des données.

Autrement dit, le modèle de la moyenne pondérée se révèle comme un instrument de mesure (une fonction-critère) trop précis pour traiter du problème posé. L'artefact, introduit par son utilisation, se concrétise non pas dans une déformation des résultats (une partie du classement spécifié par la structure relationnelle de surclassement modélisée correspond réellement au domaine décisionnel pris en compte), mais par l'arbitraire d'une partie des résultats (la partie de la structure $(S_{\pm}, R/\mathcal{P})$ qui dépend uniquement du choix du codage particulier de l'échelle de préférence). A chaque niveau de l'indétermination du codage de l'échelle, dépendant de la précision de la perception de la conséquence qualitative, correspond ainsi une partie de la structure relationnelle de surclassement orienté modélisée par l'opération de moyenne.

La recherche de ces parties <u>stables</u> du système relationnel de surclassement orienté par rapport à l'indétermination du codage de l'échelle, lorsque cette indétermination renvoie à certaines hypothèses concernant la perception d'une conséquence qualitative, sera l'objectif visé dans ce travail.

Chapitre II

ELABORATION D'UNE TYPOLOGIE DES ECHELLES QUALITATIVES

> "Si (...) l'ordre apparaît quelque part dans la qualité, pourquoi chercherions-nous à passer par l'intermédiaire du nombre?"
> G. Bachelard[1)]

> "(...) connaître consiste à construire ou à reconstruire l'objet de la conséquence, de façon à saisir le mécanisme de cette construction."
> J. Piaget[2)]

La critique du modèle de la moyenne pondérée a mis en évidence un artefact au niveau de l'échelle qualitative sous-jacente aux évaluations distributionnelles.

En effet, maintenir l'hypothèse que le codage de l'échelle qualitative est défini à l'unité et à l'origine près, revient à supposer l'acteur doté d'une perception des conséquences qualitatives très performante, et cela en plus ou moins grande contradiction avec le caractère précisément qualitatif de l'échelle.[3)]

Contrairement au modèle de la somme pondérée, nous ne poserons pas au départ l'hypothèse que l'acteur peut reconnaître tous les états d'une conséquence qualitative avec une telle précision. Plutôt allons-nous envisager quelques niveaux de précision de l'activité perceptive qui nous semblent plus "réalistes" face à des conséquences qualitatives.

---

1) G. BACHELARD, Essais sur la connaissance approchée, (4e éd. 1973). VRIN, p. 31.
2) (op.cit.) p.441.
3) La multitude de procédures d'aide à la construction de fonctions d'utilité "rationnelles" et précises, qui ont été élaborées dans le cadre de la théorie classique de décision, afin d'augmenter la performance de l'activité perceptive des acteurs, montre bien qu'il y a un certain "divorce" entre une échelle essentiellement qualitative et une activité perceptive très performante. V.p.ex.: KEENEY & RAIFFA, Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, chapitre 4. p.188-218.

Ainsi l'échelle qualitative présupposée par le modèle de la moyenne pondérée apparaîtra-t-elle comme le terme final d'une suite d'échelles qualitatives de plus en plus élaborées et précises, et la détermination du codage consacrera l'aboutissement d'une activité perceptive toujours plus performante.

II. A. Matérialisation de la Conséquence Qualitative à partir de la Reconnaissance des Préférences Pragmatiques

"Le développement des perceptions témoigne de l'existence d'une activité perceptive, source de décentrations [1), de transports (spatiaux et temporels), de comparaisons, de transpositions, d'anticipations et d'une manière générale, d'analye de plus en plus mobile..." [2)

L'analyse piagétienne du développement des perceptions s'applique très exactement à l'élaboration d'une typologie des échelles qualitatives. Dans un processus de décision donné, l'acteur élabore sa structure préférentielle sur l'ensemble des actions potentielles à la décision à l'aide d'un activité perceptive portée sur les conséquences de ces actions. La perception des conséquences est donc directement liée à la reconnaissances des préférences pragmatiques, l'une déterminant l'autre et inversément (voir fig. I.4.) C'est pourquoi nous pouvons dégager, des jugements préférentiels exprimés par l'acteur, la perception qu'il se fait des conséquences des actions.

Ces jugements préférentiels s'avéreront plus ou moins élaborés, c'est-à-dire plus ou moins complets et rationnels[3), car l'activité perceptive peut être source d'une analyse plus ou moins performante des conséquences des actions.

---

1) "...l'activité perceptive se marque d'abord par l'intervention de la décentration qui corrige les effets de la centration et constitue ainsi une régulation des déformations perceptives. Or, si élémentaires et dépendantes des fonctions sensori-motrices que demeurent ces décentrations et régulations, il est clair qu'elles constituent toute une activité de comparaison et de coordination s'apparentant à celle de l'intelligence: regarder un objet est déjà un acte, et selon qu'un jeune enfant laisse son regard fixé sur le premier venu ou le dirige de manière à embrasser l'ensemble des rapports, on peut presque juger de son niveau mental." J.PIAGET (1967), La Psychologie de l'Intelligence, A. Colin, p. 88.
2) J.PIAGET, id. p.92.
3) Comme la transitivité ou l'intransitivité de l'indifférence par exemple.

II.A.1. Assimilation et accomodation de l'action perceptive

Chaque reconnaissance d'une situation préférentielle requiert de l'acteur ou de l'homme d'étude, jugeant pour lui, l'exécution d'une action perceptive portée par les conséquences des actions potentielles à la décision. Cette action n'est pas unique. Elle est "toujours solidaire d'actions antérieures et cela de proche en proche jusqu'aux réflexes de départ et aux montages héréditaires. Toute action revient d'abord à assimiler l'objet, sur lequel elle porte, à un schème d'assimilation constitué par les actions antérieures dans leur continuité avec l'acte actuel.[1] Il existe ainsi un schème de réunir, de séparer, etc., et l'action est d'abord assimilation de l'objet à ces schèmes."[2] Si l'action perceptive aboutit à la reconnaissance d'une situation préférentielle, comme la préférence stricte, il y a assimilation de cette action à l'ensemble des actions similaires précédemment exécutées et qui avaient aussi conduit à la reconnaissance d'une situation de préférence stricte.

"L'action est donc nécessairement relative à un sujet agissant, comme la pensée à un sujet pensant. Mais d'autre part, l'action est aussi relative à son objet, c'est-à-dire qu'en chaque situation nouvelle, le schème de l'action est différencié par l'objet auquel il s'applique, cette modification pouvant être momentanée et occasionnelle ou durable. Nous disons ainsi que l'action est en second lieu, accomodation à l'objet, c'est-à-dire relative à son objet et non seulement au sujet." [3]

Reprenons l'exemple de la reconnaissance d'une préférence stricte. Un acteur ne perçoit cette situation préférentielle que s'il assimile l'action exécutée à l'ensemble des actions précédentes qui l' ont conduit à reconnaître cette situation. Mais réciproquement, cette nouvelle action vient s'ajouter à l'ensemble des actions ayant conduit à la reconnaissance d'une préférence stricte. Cette préférence stricte, présentement perçue, influence l'"idée" que se fait l'acteur de cette situation préférentielle. Il accomode son schème, qui consiste à:

---

1) Voir J. PIAGET: La Naissance de l'Intelligence chez l'Enfant, Delachaux & Niestlé, (1936).
2) J. PIAGET (2e éd. 1970): Introduction à l'épistémologie génétique, 1/ la pensée mathématique, P.U.F.p. 68-69.
3) J. PIAGET (id.)

comparer les conséquences de deux actions potentielles à la décision et reconnaître une préférence stricte entre elles, à cette dernière action perceptive, qui par assimilation l'a conduit à reconnaître cette préférence stricte.

"Cette assimilation et cette accomodation sont indissociables l'une de l'autre; et l'on ne saurait concevoir une action sans chacun de ces deux pôles; mais il peut exister entre ces deux tendances ainsi polarisées diverses formes d'équilibre." 1)

II. A.2. Quatre niveaux de précision de l'action perceptive

Ces différentes formes d'équilibre entre l'assimilation de l'action perceptive au schème et l'accomodation du schème à l'action, conduisent à différencier plusieurs types de conséquence des actions potentielles; en effet, cet équilibre caractérise essentiellement la précision de l'activité perceptive que l'acteur met en oeuvre dans l'élaboration d'une structure préférentielle sur un ensemble d'actions potentielles données.

a) On peut ainsi distinguer au niveau le plus élémentaire les jugements préférentiels liés immédiatement à l'action perceptive. Chaque action conduit par assimilation à "conserver" la situation préférentielle reconnue, alors que l'accomodation à la situation présentement reconnue "change" le schème qui a conduit à la reconnaissance de cette situation préférentielle. L'équilibre apparaît fondamentalement instable et les situations préférentielles reconnues par l'acteur fluctuent étroitement avec les actions perceptives exécutées. La reconnaissance des situations préférentielles ne dépasse pas le niveau d'"impressions" de préférence; les conséquences des actions potentielles sont fluctuantes, imprécises et instables dans le temps.

b) En second lieu, on peut envisager des jugements préférentiels plus "intuitifs". "Grâce au jeu des significations évoquées mentalement, l'assimilation cesse d'être immé-

---

1) J. PIAGET (op.cit. p.58), p.69.

diate et dépasse l'action du moment en portant sur de plus grandes distances spatio-temporelles, c'est-à-dire qu'elle se prolonge en jugements." [1] De l'impression, liée directement à l'action perceptive exécutée, on passe au jugement intuitif, plus indépendant de cette action et donc plus stable dans le temps. "Quant à l'accomodation, elle s'intériorise également, mais sous forme de signifiants imaginés: l'image mentale, symbole de l'objet, résulte d'une sorte d'imitation intérieure, qui comme l'imitation elle-même, prolonge l'accomodation." [2] Dans son effort de reconnaître des situations préférentielles, l'acteur s'appuie de plus en plus sur des actions perceptives "imaginées", ce qui lui permet d'imiter, à tout moment, mentalement les actions perceptives ayant conduit à telle ou telle situation préférentielle.

"Cette double intériorisation rend donc possible un équilibre plus large et plus durable entre l'assimilation et l'accomodation, mais imparfait encore, puisque ces deux tendances demeurent orientées en deux directions divergentes, l'une de conservation et l'autre de changement." [3]

Dès ce niveau, l'acteur organise les conséquences des actions potentielles à la décision comme un ensemble d'états différents d'une même conséquence. Ces états lui permettent de spécifier symboliquement le contenu "matériel" qu'il attribue aux différentes situations préférentielles qu'il reconnaît et de répéter mentalement l'action perceptive qui le conduit à reconnaître une quelconque de ces situations préférentielles. Mais, un équilibre stable n'étant pas atteint entre l'assimilation et l'accomodation, le contenu "matériel" attribué aux différentes situations préférentielles et, partant, attribué aux différents états de la conséquence ne peut

---

1) J. PIAGET (op.cit. p.58), p. 69.
2) id. p. 69.
3) id. p. 69.

être fixé durablement[1] au fil des actions perceptives exécutées. Le contenu matériel de la conséquence et les jugements préférentiels resteront fondamentalement dépendants de l'action perceptive ou plutôt des actions perceptives réellement exécutées.

c) Avec l'augmentation de la précision de l'action perceptive on arrive, dans un troisième temps, à un type d'activité perceptive, très important, qui se distingue des précédents par deux caractéristiques. "En premier lieu, elle (l'action perceptive) est réversible, tandis que l'action initiale est irréversible; l'action inverse est perçue comme attachée nécessairement à l'action directe: inverser un ordre, séparer par opposition à réunir, etc. D'où le second caractère de l'opération [2]: il ne s'agit jamais d'une action unique, mais bien d'actions coordonnées à d'autres, cette composition entre actions successives étant rendue cohérente par leur réversibilité même." [3]

A ce niveau, l'activité qui conduit l'acteur à classer les actions potentielles à la décision par ordre de préférence croissante doit conduire au même résultat que l'activité qui le conduit à classer ces mêmes actions par ordre de préférence décroissante."En effet, cette réversibilité et cette coordination ne sont pas autre chose que l'expression de l'équilibre enfin atteint entre l'assimilation et l'accomodation: coordonner les actions de façon réversible, c'est pouvoir simultanément accomoder les schèmes à toutes les transformations et assimiler chaque transformation à chaque autre par l'intermédiaire du schème des actions qui les provoquent." [4]

---

1) Dans une procédure interactive d'investigation de l'ensemble des actions potentielles à la décision, le cheminement peut, lui aussi, influencer la perception des préférences. Dans ce cas, la comparaison d'une même paire d'actions potentielles peut conduire à la perception de situations préférentielles différentes suivant le cheminement envisagé.

2) Dans la terminologie de J. PIAGET, l'opération est encore et toujours une action (effective ou mentale), mais qui est réversible et coordonnée à d'autres actions elles mêmes réversibles.

3) J. PIAGET (op.cit. p.58), p.70.

4) id. p. 70.

Ce n'est qu'à partir de ce degré de précision des opérations perceptives que l'acteur peut reconnaître la conséquence sous la forme d'une échelle de préférence indépendante des opérations mises en oeuvre. Comparer l'état de la conséquence d'une première action portentielle à celui d'une seconde apparaît ainsi rigoureusement identique à la comparaison inverse. Cependant, à ce niveau, les opérations apparaissent toujours liées à des manipulations effectives ou mentales des actions potentielles, elles restent "concrètes".

d) C'est pourquoi, au terme de cette énumération, on trouvera les jugements préférentiels qui reposent non seulement sur des opérations perceptives concrètes, mais aussi sur des opérations formelles ou abstraites. Leur "caractère est de reposer sur de pures assomptions et non plus sur des réalités manipulables: ces nouvelles opérations portent, en effet, sur les propositions qui décrivent les opérations concrètes et non plus sur les objets de celles-ci." 1)

Ces opérations constituent encore, psychologiquement parlant, des actions coordonnables et réversibles, mais elles sont purement symboliques et hypothétiques. A ce niveau de précision de l'activité perceptive, la connaissance de la conséquence donne accès à des opérations abstraites et formelles (addition, multiplication par exemple). La reconnaissance des situations préférentielles découle d'un calcul abstrait et objectif, d'une "mesure" objective, complètement détachée de l'activité perceptive concrète de l'acteur.

II. A. 3. Des préférences intuitives aux préférences calculées

En fait, les quatre niveaux de précision de l'activité perceptive apparaissent comme des états remarquables dans une augmentation continuelle de cette précision.

---

1) J. PIAGET (op.cit. p.58), p. 70.

Aux deux niveaux inférieurs, l'activité perceptive aborde les actions potentielles à la décision davantage à travers leurs conséquences respectives qu'en fonction des variations de ces conséquences conduisant d'une action potentielle à une autre. Au contraire, les modifications que l'on doit apporter aux conséquences respectives pour passer de l'une à l'autre des actions potentielles, sont perçues comme dépendantes des actions perceptives propres à l'acteur. Ainsi, les actions potentielles et les variations des conséquences ne forment-elles pas un tout cohérent, en ce sens que les dernières sont assimiliées à l'action perceptive, tandis que les actions potentielles, elles, sont reconnues à travers la configuration intuitive de leur conséquence respective.

De l'impression à un jugement de moins en moins intuitif, la reconnaissance de situations préférentielles apparaît ainsi dépendante d'une cohérence de plus en plus parfaite entre la perception isolée de la conséquence relative à chaque action potentielle et la variation globale des conséquences qui engendre l'ensemble de ces actions. Cette cohérence de plus en plus parfaite entre ces deux perceptions n'est que le reflet d'un équilibre de plus en plus stable entre l'assimilation et l'accomodation, qui se caractérise par des contenus "matériels ou réels" toujours plus stables attribués par l'acteur aux diverses situations préférentielles reconnues. Les conséquences deviennent les états d'une "conséquence élémentaire" particulière.

Finalement, la reconnaissance des situations préférentielles est complètement subordonnée à la perception des modifications de la conséquence qu'il faut envisager pour passer d'une action à une autre. Il s'ensuit que chaque situation préférentielle reconnue entre deux actions potentielles repose entièrement sur la reconnaissance de la variation de la conséquence qui accompagne le passage de l'une des actions à l'autre, indépendamment des actions perceptives exécutées présentement. Il y a "conservation" de la perception, et donc de la situation préférentielle, à travers toutes les actions perceptives exécutées. La reconnaissance des situations préférentielles repose sur une échelle de préférence.

Cependant, ces opérations apparaissent comme plus ou moins élaborées et, au niveau le plus élémentaire, elles restent limitées à des manipulations effectives ou mentales; la perception des situations préférentielles ne dépasse pas le domaine du "concret". La précision de l'activité perceptive est limitée à l'ensemble restreint des opérations perceptives "matériellement possibles", c'est-à-dire les opérations ne portant que sur des actions potentielles envisageables et sur les variations de la conséquence qui conduisent de l'une à l'autre de ces actions. C'est pourquoi la précision est à ce niveau essentiellement dépendante du nombre d'échelons distincts que l'acteur peut associer à l'échelle de préférence, puisqu'il conditionne le nombre de variations de la conséquence envisageables.

Mais, la précision de l'activité perceptive augmentant toujours, les opérations perceptives s'éloigent du cadre restreint des manipulations concrètes. L'acteur combine entre elles des opérations concrètes et arrive ainsi à imaginer des opérations abstraites de plus en plus élaborées pour en tirer la connaissance des situations préférentielles.

"Avec la pensée formelle, enfin, une inversion de sens s'opère entre le réel et le possible. Au lieu que le possible se manifeste simplement sous la forme d'un prolongement du réel ou des actions exécutées sur la réalité, c'est au contraire le réel qui se subordonne au possible."[1] Pour reconnaître les situations préférentielles, l'acteur peut désormais recourir à des opérations formelles appliquées aux états de la conséquence; les situations préférentielles apparaissent à la

---

1) J. PIAGET (2e éd. 1970): De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, P.U.F. p. 220.

suite d'une série de "calculs". Ces opérations ne sont plus limitées au domaine du "concret", c'est-à-dire au domaine des opérations "matériellement possibles". Par contre, elles apparaissent limitées au domaine des opérations formelles qui engendrent "nécessairement" la réalité. En d'autres termes, le domaine des opérations formelles que l'acteur peut mettre en oeuvre n'est ainsi "nullement celui de l'arbitraire ou de l'imagination affranchie de toute règle", mais au contraire, ce domaine est caractérisé par la généralisation de l'équilibre entre l'assimilation et l'accomodation à des opérations abstraites dépassant de plus en plus les opérations concrètes.

Ainsi, les opérations formelles que l'acteur utilise dans la reconnaissance des situations préférentielles, sont-elles toutes caractérisées par l'intervention d'une combinatoire plus ou moins élaborée. En effet, la précision de l'activité perceptive permet à l'acteur de combiner de plus en plus entre elles des modifications de la conséquence au-delà de celles concrètement observables. Ainsi, suivant le cas, il peut trouver un sens dans l'addition ou la soustraction, dans la multiplication ou la division des états de la conséquence des actions potentielles.

En fin de compte, la précision de l'activité perceptive, conduisant soit au jugement intuitif, soit à une "réalité" calculée, conditionne directement la précision de l'échelle de préférence explicitée par l'acteur.

II. A. 4. Perception des contrastes dans une échelle de préférence qualitative

Comme nous venons de le constater, les situations préférentielles ne traduisent qu'une appréciation des "écarts" perçus par l'acteur entre les conséquences des actions potentielles à la décision. C'est pourquoi, la reconnaissance des situations préférentielles peut être abordée à travers une action perceptive portée sur les modifications des conséquences qui accompagnent le passage d'une action potentielle à une autre.

D.II.1. Nous appellerons mutation [1] l'action perceptive par laquelle l'acteur ou l'homme d'étude, jugeant pour lui, permute une action potentielle, envisagée comme candidate à la décision, avec une autre action potentielle envisagée comme candidate à la décision à la place de la première.

A travers cette action, il découvre les modifications des conséquences des actions potentielles qui accompagnent le remplacement de l'une par l'autre.

Soient a et a' deux actions potentielles. Si $\gamma(a) \in E$ et $\gamma(a') \in E$ sont leurs conséquences respectives, la mutation de a à la place de a' fait découvrir à l'acteur la "différence" entre $\gamma(a)$ et $\gamma(a')$, à laquelle nous donnons le nom d'éloignement entre a et a'. Dans le cas où E est une échelle de préférence qualitative et où les évaluations respectives sont ponctuelles ($\gamma(a) = e$) et $\gamma(a') = e'$ pour e, e' $\in$ E), l'éloignement auquel conduit la mutation de a à la place de a', portera le nom de contraste et nous le noterons (e - e').

Le contraste entre deux échelons qualitatifs est donc l'éloignement perçu entre les évaluations ponctuelles respectives de deux actions potentielles définies sur cette échelle qualitative.

Considérons maintenant un ensemble A de (r + 1) actions potentielles:

$$A_c = \{ a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_{r-1} , a_r \} \quad ;$$

évaluées sur une échelle qualitative E à r + 1 échelons:

---

1) Terminologie proposée par B. ROY. (op. cit. chap. I. p.12) 7.2.4.

$$E = \{ e_0 , e_1 , e_2 , \ldots , e_{r-1} , e_r \} ,$$

telles que $\gamma(a_i) = e_i$; pour $i = 0, 1, 2, \ldots, r-1, r$.
Les mutations distinctes que l'on peut envisager sur A_c sont données par l'ensemble A_c^* ci-dessous:

$$A_c^* = \{ (a_i , a_j) \ / \ a_i , a_j \in A_c \text{ et } i,j = 0,1,\ldots,r \}$$

Dans cet ensemble nous avons tenu compte des mutations particulières qui consistent à permuter toute action potentielle avec elle-même.

E^* désignera dès lors l'ensemble des contrastes que l'on peut découvrir à travers cet ensemble de mutations:

$$E^* = \{ (e_i - e_j) \ / \ e_i = \gamma(a_i) , e_j = \gamma(a_j) \text{ et } (a_i , a_j) \in A_c^* \}$$

Le tableau T.II.1 de la page suivante montre cet ensemble de contrastes entre deux quelconques échelons de E [1].

Un élément de ce tableau, par exemple $(e_1 - e_0)$ désigne le contraste que l'on perçoit à travers la mutation de l'action a_1, dont la conséquence est e_1, à la place de l'action a_0 ayant comme conséquence l'échelon e_0.

On s'aperçoit ainsi que les contrastes caractérisent les "écarts" entre actions potentielles lorsque celles-ci sont évaluées ponctuellement sur cette échelle. Ainsi la perception des situations préférentielles entre ces actions potentielles apparaît corrélative de celle des contrastes entre les évaluations de ces mêmes actions.

Bien plus, la précision de la perception des contrastes conditionne la précision de la perception des situations préférentielles.

---

1) Puisque par construction $E^* = \{ (e_i - e_j) \ / \ e_i , e_j \in E \}$.

T.II.1 Ensemble des contrastes perçus dans une échelle qualitative

(a, a')	$\gamma(a_0) = e_0$	$\gamma(a_1) = e_1$	$\gamma(a_2) = e_2$	$\ldots \gamma(a_j) = e_j$	$\ldots \gamma(a_r) = e_r$
$\gamma(a_0) = e_0$	$(e_0 - e_0)$	$(e_0 - e_1)$	$(e_0 - e_2)$	$\ldots (e_0 - e_j)$	$\ldots (e_0 - e_r)$
$\gamma(a_1) = e_1$	$(e_1 - e_0)$	$(e_1 - e_1)$	$(e_1 - e_2)$	$\ldots (e_1 - e_j)$	$\ldots (e_1 - e_r)$
$\gamma(a_2) = e_2$	$(e_2 - e_0)$	$(e_2 - e_1)$	$(e_2 - e_2)$	$\ldots (e_2 - e_j)$	$\ldots (e_2 - e_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma(a_i) = e_i$	$(e_i - e_0)$	$(e_i - e_1)$	$(e_i - e_2)$	$\ldots (e_i - e_j)$	$\ldots (e_i - e_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma(a_r) = e_r$	$(e_r - e_0)$	$(e_r - e_1)$	$(e_r - e_2)$	$\ldots (e_r - e_j)$	$\ldots (e_r - e_r)$

II. B. Sériation des Contrastes dans une Echelle Qualitative

Pour l'acteur, les contrastes du tableau T.II.1.n'ont pas tous la même signification, ni la même importance. Ainsi, il peut dans un premier temps reconnaître des contrastes favorables, défavorables ou nuls. Ensuite, la précision de sa perception augmentant, il pourra discerner avec une plus ou moins grande netteté certains contrastes, les contrastes emboîtés. Enfin, l'activité perceptive, en se précisant davantage, peut conduire à la complète comparabilité transitive des contrastes.

II. B. 1. Contrastes favorables, défavorables et nuls

Lors de la définition de l'échelle qualitative [1], on a supposé que la relation d'ordre $<$, reliant entre eux les échelons de l'échelle, induit sur A_c des situations préférentielles.[2] Ainsi, si a et a' sont deux actions de A_c telles que $\gamma(a)=e$, $\gamma(a')=e'$, $(e<e')$, a' sera préférée à a $(a < a')$.

Or, pour reconnaître que $a<a'$, l'acteur doit d'abord différencier les états de la conséquence des actions, c.-à.d. qu'il doit percevoir un contraste $(e - e')$ entre l'évaluation de a et l'évaluation de a' . Et pour conclure au fait que a' est préférée à a , il faut que la mutation de a à la place de a' lui paraisse défavorable. Pour simplifier, nous dirons dans la suite que le contraste $(e - e')$ doit lui paraître défavorable.

Autrement dit, l'acteur, se rendant compte qu'il perçoit entre l'évaluation de a et l'évaluation de a' un contraste <u>défavorable</u> $(e - e')$, concluera que e précède e' dans l'ordre $<$ sur E et il en dégagera une pré-

---

1) Voir I.A.1. p.11
2) En effet, les actions envisagées lors de la définition de l'échelle sont caractérisées par des évaluations ponctuelles et de ce fait elles appartiennent à A_c.

férence de a' sur a .

De même, l'acteur, percevant un contraste favorable entre e et e' , concluera que e précède e' dans l'ordre $>$ sur E et il préférera a à a' ($a \succ a'$) . Enfin, s'il perçoit une absence de contraste - nous disons contraste nul - entre e et e' , il concluera à l'identité entre eux et il jugera l'action a indifférente à a' ($a \, I \, a'$).

Il semble donc qu'une appréciation des contrastes entre échelons de l'échelle soit antérieure à la construction de la structure ordinale ($</E$). Et cette appréciation résulte de l'exécution d'un ensemble d'actions perceptives qui n'est autre qu'un sous-ensemble de A_c^*, l'ensemble des mutations envisageables sur A_c.

Ainsi, par la reconnaissance des contrastes favorables, l'acteur peut-il spécifier une structure ordinale ($>_f/E$) qui se traduit par la numérotation suivante des états:

$$e_r >_f e_{r-1} >_f \cdots >_f e_1 >_f e_0 \quad ; \quad \text{et}$$

où $>_f$ est une relation binaire, antisymétrique, transitive et complète sur E.

Mais il peut aussi, à travers la reconnaissance des contrastes cette fois défavorables, spécifier une structure ($<_d/E$) qui se traduit par la numérotation suivante:

$$e'_0 <_d e'_1 <_d \cdots <_d e'_{r-1} <_d e'_r \quad ; \quad \text{et}$$

où $<_d$ est également une relation binaire antisymétrique, transitive et complète sur E.

Or, pour que E puisse tenir lieu d'échelle de préférence dans un problème de décision, il faut que les deux structures ($>_f/E$) et ($<_d/E$) ainsi spécifiées coïncident, c'est-à-dire que les mutations soient des opérations perceptives réversibles.[1)] En d'autres termes, il faut qu'à tout con-

1) Si nous présupposons la réversibilité des mutations de A_c^*, il ne s'ensuit pas pour autant que pour un ensemble quelconque d'actions potentielles évaluées sur cette échelle, les mutations doivent être réversibles. C'est ici qu'apparaît pleinement l'utilité des concepts d'évaluation ponctuelle et non ponctuelle sur une échelle. En effet, A_c apparaît comme un ensemble d'actions de réfé-

traste favorable (resp. défavorable) - par exemple $(e_1 - e_0)$ - corresponde un contraste, appelé <u>inverse</u>, - $(e_0 - e_1)$ - qui soit défavorable (resp. favorable) et que la relation $<$ soit la relation <u>réciproque</u>[1] de $>$.

En effet, si $(e_i - e_j)$ est un contraste favorable, alors $e_i >_f e_j$. Il lui correspond dès lors un contraste inverse défavorable $(e_j - e_i)$ qui entraine par là même que $e_j <_d e_i$. Si maintenant nous supposons qu'au contraste inverse correspond la relation réciproque, il s'ensuit que $e_i >_f e_j$. La relation réciproque inversée, ou la relation <u>converse</u>, est donc identique à la relation initiale. Ainsi $\forall\ j = 0, 1, \dots, r : e_j = e'_j$ et $(>_f/E)$ identique à $(<_d/E)$.

D.II.2. Ainsi, nous appelons <u>échelle qualitative élémentaire</u> un ensemble de r+1 états d'une conséquence élémentaire qualitative que l'homme d'étude peut numéroter de 0 à r tel que tout acteur admette à propos du contraste $(e_i - e_j)$, $\forall i, j = 0, 1, 2, \dots r-1, r$, qu'il est:

- favorable si et seulement si $i > j$;
- défavorable si et seulement si $i < j$;
- nul si et seulement si $i = j$.

L'acteur peut donc classer les contrastes de E^* en ces trois catégories et ce classement partitionne E^* en un sous-ensemble de contrastes favorables (E^*_+), un sous-ensemble de contrastes défavorables (E^*_-) et un sous-ensemble de contrastes nuls $(E^*_=)$.

---

rence pour la définition de l'échelle. Il doit donc s'agir d'actions symboliques que l'on peut associer directement aux échelons de l'échelle. De ce fait, elles sont toujours évaluées ponctuellement sur l'échelle. Mais, la symbolisation implique toujours en revanche une simplification et une abstraction par rapport à une réalité dans laquelle s'inscrivent les actions intéressant réellement les acteurs intervenant dans un processus de décision. Cette "distance" entre les actions symboliques utilisées pour la définition de l'échelle et les actions plus "réalistes" influence indépendamment de la nature plus ou moins "mesurable" de l'échelle, l'opérationalité de celle-ci et cela à travers des évaluations non ponctuelles plus ou moins complexes des actions.

1) Bien que réciproque et inverse soient utilisés dans un même sens, nous réserverons le premier terme pour les situations relationnelles et les relations, et le second pour les contrastes et leurs attributs.

Cette classification se traduit dans le tableau T.II.1. de la manière suivante: - tous les contrastes de la partie triangulaire inférieure, sauf ceux situés sur la diagonale, sont des contrastes favorables ($(e_2 - e_0)$ par exemple); - tous les contrastes situés sur la diagonale sont des contrastes nuls ($(e_2 - e_2)$ par exemple); - tous les contrastes de la partie triangulaire supérieure, sauf ceux situés sur la diagonale, sont des contrastes défavorables ($(e_0 - e_2)$ par exemple).

Cette partition renvoie indirectement à une sériation dite élémentaire des contrastes. En effet on peu supposer que tout contraste favorable est plus favorable qu'un contraste nul, qui est toujours plus favorable qu'un contraste défavorable. Si nous notons $>^*_o$ cette relation binaire antisymétrique et transitive entre contrastes, nous avons:

$$\forall (e_i-e_j) \in E^*_+,\ \forall (e_k-e_l) \in E^*_=,\ \forall (e_m-e_n) \in E^*_- :$$

$$(e_i-e_j) >^*_o (e_k-e_l) >^*_o (e_m-e_n) .$$

D'autre part, si nous notons $=^*_o$ la relation d'"identité" entre deux contrastes, définie de la manière suivante:

$$\forall (e_i-e_j), (e_k-e_l) \in E^* :$$

$$(e_i-e_j) =^*_o (e_k-e_l) \Leftrightarrow (e_i=e_k) \text{ et } (e_j= e_l),$$

nous pouvons définir une relation $\geqslant^*_o$ sur E*, à partir de la relation >* et de la relation $=^*_o$, qui donne une structure $(\geqslant^*_o/E^*)$ de préordre partiel sur E*, représentative de la sériation élémentaire des contrastes.

On remarquera que les contrastes appartenant au même sous-ensemble sont incomparables entre eux au sens de cette sériation élémentaire. Cependant, si l'on regarde de près les contrastes du tableau T.1., on s'aperçoit que l'acteur percevra sans difficulté dans la plupart des échelles, certains contrastes comme plus "nets" que d'autres ((e_r-e_o)

paraît plus net que ($e_1 - e_0$) par exemple). L'étude de cette plus ou moins grande "netteté" fera l'objet de la sous-section suivante.

II. B. 2. Sériation intensive des contrastes

Dans le cas d'une échelle élémentaire, les opérations perceptives que sont les mutations exécutées par l'acteur sur A_c, ne conduisent qu'à la différenciation de trois types de contrastes, à savoir les contrastes favorables, défavorables et nuls.

Cependant, l'acteur ne pourrait-il pas reconnaître la mutation (a_r, a_0) par exemple comme une composition "additive" des mutations particulières qui le font progressivement avancer dans A_c de l'action a_0 vers l'action a_r ? Ainsi, cette mutation (a_r, a_0) serait équivalente 1) à la "somme" de la mutation de a_1 à la place de a_0 , de a_2 à la place de a_1 , et ainsi de suite, jusqu'à la mutation de a_r à la place de a_{r-1} .

Il s'ensuivrait qu'une mutation (a_1, a_0) par exemple fait en un certain sens "partie" de la mutation (a_r, a_0); l'acteur pourrait en déduire que le contraste $(e_1 - e_0)$, qu'il perçoit à travers la première mutation, est inclus dans le contraste $(e_r - e_0)$, qui, lui, est perçu en exécutant directement la mutation (a_r, a_0) . De ce fait, ce contraste devrait lui paraître plus "net" que le premier, et donc aussi plus "favorable" que celui-ci.

Pour étudier cette sériation intensive 2) qui découle

---

1) Cette équivalence traduit encore le fait qu'une mutation telle que (a_r, a_0) est décomposable en des mutations plus "élémentaires". En d'autres termes, l'acteur est capable de percevoir des liens entre les différentes mutation A_c^* . (voir II. A. 3. p.68)

2) Nous empruntons ce terme à J. PIAGET pour qui "... un rapport quantitatif est d'ordre intensif si l'on sait seulement que le tout est plus grand que la partie ... sans pouvoir déterminer si l'une des parties du tout est plus grande, plus petite ou égale par rapport à la partie complémentaire". (Epist.gén.. p. 81)

de l'inclusion des contrastes, nous nous intéresserons d'abord au nombre d'échelons que recouvre un contraste afin de pouvoir associer un ordre de grandeur aux contrastes.

Deux relations binaires, construites sur E à partir de la relation $<$, nous intéressent tout d'abord; ce sont les relations de <u>successeur</u> et de <u>prédécesseur immédiat</u> (SUI et PRE).

D.II.3.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \quad e, e' \in E : \\ \\ e \text{ SUI } e' \iff e' < e \quad \text{et } \nexists\, e'' \in E \succ e' < e'' < e \,; \\ \\ e \text{ PRE } e' \iff e < e' \quad \text{et } \nexists\, e'' \in E \succ e < e'' < e' . \end{array}\right.$$

Nous dirons que e "suit immédiatement" e', respectivement e "précède immédiatement" e', ou que e est le successeur (resp. prédécesseur) immédiat de e', ssi,en considérant l'ordre $<$ sur E, il n'y a aucun échelon e" intermédiaire entre eux.

Nous appelons <u>contraste élémentaire</u> favorable (resp. défavorable) le contraste $(e - e')$ perçu entre l'échelon e' et son successeur immédiat (resp. prédécesseur immédiat) e:

$$\forall\,(e_i - e_j) \in E_+^* \ : \ (e_i - e_j) \text{ est élémentaire} \iff e_i \text{ SUI } e_j \,;$$

$$\forall\,(e_i - e_j) \in E_-^* \ : \ (e_i - e_j) \text{ est élémentaire} \iff e_i \text{ PRE } e_j .$$

Les mutations qui conduisent à la reconnaissance d'un contraste élémentaire seront également appelées <u>mutations élémentaires.</u>

Sur une échelle élémentaire, la précision de l'activité perceptive ne permet d'envisager que d'une manière isolée les opérations perceptives que sont les mutations de A^*_c.

Supposons maintenant que l'acteur trouve un sens dans la composition "additive" des mutations élémentaires. Au lieu de considérer les mutations de A^*_c comme indépendantes entre elles, il pourra interpréter, au contraire, toute mutation de A^*_c comme une "somme" de mutations élémentaires. Et, puisqu'une telle mutation conduit à la reconnaissance d'une situation de successeur ou de prédécesseur immédiats, cette composition "additive" des mutations élémentaires conduit à la composition "additive" des situations de successeur ou de prédécesseur immédiats.

Pour traduire cette composition "additive", nous affectons un indice aux situations de successeur ou de prédécesseur par la prise en compte du nombre d'échelons intermédiaires entre deux quelconques échelons de E. Ainsi:

$$\forall \; e, e' \in E :$$

$$e \; SUI^{0} \; (\text{resp. } PRE^{0}) \; e' \iff e = e' \;;$$

$$e \; SUI^{1} \; (\text{resp. } PRE^{1}) \; e' \iff e \; SUI \; (\text{resp. } PRE) \; e'$$

$$e \; SUI^{n} \; (\text{resp. } PRE^{n}) \; e' \iff \exists e'' \in E \succ e \; SUI^{n-1} (\text{resp. } PRE^{n-1}) \; e'' \text{ et } e'' \; SUI \; (\text{resp. } PRE) \; e'$$

Nous dirons que e est un successeur (resp. prédécesseur) d'ordre 0 de e' ssi e est identique à e';
e est un successeur (resp. prédécesseur) d'ordre 1 de e' ssi e suit (resp. précède) immédiatement e';
e est un successeur (resp. prédécesseur) d'ordre n de e' ssi il y a un échelon e" dans E tel que e soit un

successeur (resp. prédécesseur) d'ordre n-1 de celui-ci et ce même échelon suit immédiatement (resp. précède immédiatement) e'.

Ainsi, $e\ SUI^2$ (resp. PRE^2) e' ssi il y a un et un seul échelon intermédiaire entre e et e', et en général $e\ SUI^n$ (resp. PRE^n) e' ssi il y a n-1 échelons intermédiaires entre e et e' au sens de la relation $>$ sur E. Le nombre maximum d'échelons intermédiaires que l'on peut trouver entre deux échelons de E est égal à r-1; l'indice n est donc toujours compris entre 0 et r ($0 \leqslant n \leqslant r$).

Par l'intermédiaire de cette composition "additive" des situations de successeur et de prédécesseur immédiats, on peut associer un ordre de grandeur, une <u>amplitude</u> (notée amp) aux contrastes perçus dans une échelle qualitative.

a) Considérons d'abord l'ensemble des contrastes favorables et nuls. Nous poserons l'amplitude d'un tel contraste égale à l'ordre de la situation de successeur entre les échelons considérés

D.II.4. $\forall (e_i - e_j) \in E^*_+ \cup E^*_= : \ amp(e_i - e_j) = n \Leftrightarrow e_i\ SUI^n e_j$.

Autrement dit, l'amplitude d'un contraste favorable ou nul est égale au nombre de mutations élémentaires favorables que l'acteur doit exécuter pour aller de a_j vers a_i . L'amplitude d'un tel contraste est encore égale au nombre de contrastes élémentaires qu'il recouvre.

Les contrastes nuls ont une amplitude 0. Les contrastes favorables d'amplitude minimale (amp = 1) sont les contrastes élémentaires et le contraste favorable d'amplitude maximale (amp = r) est le contraste ($e_r - e_o$) . Toute échelle comporte ainsi r+1 contrastes d'amplitude 0, r contrastes favorables d'amplitude 1, r-1 contrastes favorables d'amplitude 2, et en général, r-n contrastes favorables d'amplitude n+1 avec $o \leqslant n \leqslant r-1$.

Si l'acteur peut différencier à travers leurs amplitudes respectives r classes de contrastes favorables, il ne peut pas pour autant juger qu'un contraste, ayant une amplitudes supérieure à celle d'un autre, soit aussi plus favorable que celui-ci. Il faut encore que les deux contrastes soient "emboîtés" ou "encastrés" l'un dans l'autre.

Définissons d'abord une situation d'"<u>encastrement</u>", notée ENC:

D.II.5:

$$\begin{cases} \forall (e-e'), (e''-e''') \in E^*_+ \cup E^*_= \\ (e-e') \text{ ENC } (e''-e''') \Leftrightarrow (e=e'') \text{ ou } (e'=e''') \text{ et} \\ \text{amp}(e-e') \leqslant \text{amp}(e''-e''') . \end{cases}$$

Le contraste (e-e') est encastré dans le contraste (e"-e"') ssi e est identique à e" ou e' est identique à e"' et l'amplitude de (e-e') est inférieure ou égale à l'amplitude de (e"-e"').

De cette définition découle que $\forall (e-e') \in E^*_+ \cup E_=$: (e-e') ENC (e"-e"') pour tout $e''' \in E$ tel que $e' \geqslant e'''$ et (e-e') ENC (e"-e') pour tout $e'' \in E$ tel que $e'' \geqslant e$; dans ce cas $e\text{SUI}^n e'$ et, ou bien $e\text{SUI}^k e'''$ avec $k \geqslant n$, ou bien $e''\text{SUI}^{k'} e'$ avec $k' \geqslant n$.

On remarquera en particulier que tout contraste (e-e') favorable ou nul, est "encastré" dans lui-même et que les contrastes nuls (e-e) et (e'-e') sont encastrés dans lui:

$\forall (e-e') \in E^*_+ \cup E^*_=$: (e-e) ENC (e-e') et (e'-e') ENC (e-e').

La situation ENC définit une relation binaire antisymétrique et réflexive sur $E^*_+ \cup E^*_=$; en effet,

$$\forall (e-e'), (e''-e''') \in E^*_+ \cup E^*_= :$$

$$\left[(e-e') \text{ ENC } (e''-e''') \text{ et } (e''-e''') \text{ ENC } (e-e')\right] \Leftrightarrow \left[(e=e'') \text{ et } (e'-e''')\right].$$

L'encastrement conduit tout naturellement à la définition d'une situation d'<u>emboîtement</u>, notée EMB:

D.II.6.

$$\forall (e-e'), (e''-e''') \in E^*_+ \cup E^*_= :$$

$$\big\{ \ (e-e')\ \mathrm{EMB}\ (e''-e''') \Leftrightarrow (e \leq e'')\ \text{et}\ (e' \geq e''').$$

Le contraste (e-e') est emboîté dans le contraste (e"-e"') ssi e" est supérieur ou identique à e et e' est supérieur ou identique à e"' au sens de la relation < sur E.

On remarquera que l'emboîtement correspond à la fermeture transitive de la situation d'encastrement sur $E^*_+ \cup E^*_=$:

$$\forall (e-e'),\ (e''-e''') \in E^*_+ \cup E^*_= :$$

$$(e-e')\ \mathrm{EMB}\ (e''-e''') \Leftrightarrow (e-e')\ \mathrm{ENC}\ (e^*-e''')\ \text{et}$$

$$(e'-e''')\ \mathrm{ENC}\ (e''-e''') \ .$$

La situation d'emboîtement peut servir de base à une comparaison des contrastes favorables ou nuls. En effet, nous pouvons en déduire une relation "au moins aussi favorable que", notée $\geqslant^*_f$

D.II.7.

$$\begin{cases} \forall (e-e'),\ (e''-e''') \in E^*_+ \cup E^*_= : \\ (e-e') \geqslant^*_f (e''-e''') \Leftrightarrow (e-e')\ \mathrm{EMB}\ (e''-e''') \end{cases} .$$

La relation $\geqslant^*_f$ modélise une relation antisymétrique, réflexive et transitive sur $E^*_+ \cup E^*_=$; on peut scinder cette relation en une relation "plus favorable que" ($>^*_f$), irréflexive et une relation "aussi favorable que" ($=^*_f$), réflexive, puisque deux contrastes favorables ou nuls ne sont l'un aussi favorables que l'autre que dans le cas où ils sont identiques.

Il est utile de remarquer que la situation d'encastrement donne le "squelette" de la relation $\geqslant^*_f$ sur $E^*_+ \cup E^*_=$, comme on peut le voir sur le tableau T.II.2., où nous avons caractérisé les contrastes par leur situation de sucesseur.

Abordons à présent la comparaison des contrastes défavorables.

b) Considérons l'ensemble des contrastes défavorables et nuls. On peut poser l'amplitude d'un tel contraste égale à l'ordre de la situation de prédécesseur entre les éche-

T.II.2. Sériation intensive des contrastes favorables [1]

$$
\begin{tikzcd}
e_0\,SUI^0\,e_0 & & & \\
e_1\,SUI^1\,e_0 \arrow[u] \arrow[r] & e_1\,SUI^0\,e_1 \arrow[d, dash] & & \\
e_2\,SUI^2\,e_0 \arrow[u] \arrow[r] & e_2\,SUI^1\,e_1 \arrow[r] & e_2\,SUI^0\,e_2 & \\
e_r\,SUI^r\,e_0 \arrow[u, dashed] \arrow[r] & e_{r-1}\,SUI^{r-1}\,e_1 \arrow[u, dashed] \arrow[r] & e_{r-2}\,SUI^{r-2}\,e_2 \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & e_r\,SUI^0\,e_r
\end{tikzcd}
$$

lons considérés.

$$\forall (e_i - e_j) \in E^*_- \cup E^*_= \ : \ amp(e_i - e_j) = n \Leftrightarrow e_i PRE^n e_j \quad .$$

L'amplitude d'un contraste défavorable est encore égale au nombre de situations de prédécesseur immédiat qu'il recouvre.

Comme dans le cas des contrastes favorables, l'acteur peut différencier r classes de contrastes[2] et il ne pourra comparer deux contrastes ainsi différenciés que s'ils sont emboîtés ou encastrés l'un dans l'autre.

En effet, nous pouvons redéfinir une situation d'encastrement entre contrastes défavorables et nuls:

D.II.5'.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \ (e-e'), (e''-e''') \in E^*_- \cup E^*_= \ : \\ (e-e') \ ENC \ (e''-e''') \Longleftrightarrow (e=e'') \text{ ou } (e'=e''') \text{ et} \\ \qquad amp(e-e') \leqslant amp(e''-e''') \ . \end{array} \right.$$

Il en découle que $\forall (e''-e''') \in E^*_- \cup E^*_=$: $(e-e')$ ENC $(e-e''')$ pour tout $e' \in E$ tel que $e' \leqslant e'''$ et $(e-e')$ ENC $(e''-e')$ pour

1) Pour simplifier nous avons omis les flèches traduisant les relations entraînées par la transitivité de la relation $\succ_f^*$.

2) Voir p.76-77

tout $e \in E$ tel que $e \geqslant e''$. Dans ces cas, si $e\mathrm{PRE}^n e'$, alors ou bien $e\mathrm{PRE}^k e'''$ avec $k \geqslant n$, ou bien $e''\mathrm{PRE}^{k'} e$ avec $k' \geqslant n$.

On retrouve les mêmes propriétés que plus haut:

- tout contraste défavorable ou nul est encastré dans lui-même;
- dans tout contraste défavorable sont encastrés deux contrastes nuls;
- la relation binaire modelisée par ENC sur $E^*_- \cup E^*_=$ est antisymétrique et réflexive.

De l'encastrement on passe de nouveau à l'emboîtement:

D.II.6'.

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, (e-e'),\ (e''-e''') \in E^*_- \cup E^*_= \ : \\ (e-e')\ \mathrm{EMB}\ (E''-e''') \Leftrightarrow (e \geqslant e'')\ \text{et}\ (e' \leqslant e''') \ . \end{array} \right.$$

Cette situation correspond également à la fermeture transitive de l'encastrement et nous pouvons définir une relation "au plus aussi défavorable que" sur $E^*_- \cup E^*_=$, notée $\geqslant^*_d$:

D.II.7'.

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, (e-e'),\ (e''-e''') \in E^*_- \cup E^*_= \ : \\ (e-e')\ \geqslant^*_d\ (e''-e''') \Leftrightarrow (e-e')\ \mathrm{EMB}\ (e''-e'''); \end{array} \right.$$

qui modélise une relation antisymétrique, réflexive et transitive sur $E^*_- \cup E^*_=$:

De même que pour les contrastes favorables, on peut scinder la relation $\geqslant^*_d$ en une relation irréflexive ($>^*_d$) et une relation réflexive ($=^*_d$) (symétrique), dont les sens respectifs sont "moins défavorable que" et "aussi favorable que".

Ceci nous permet de dresser le tableau T.II.3., dans lequel les contrastes défavorables et nuls sont caractérisés par les situations de prédécesseur; les flêches ($\longrightarrow$) reproduisent le squelette de la relation "moins défavorable que" ($>^*_d$): (voir tableau de la page suivante).

c) Après avoir considéré les contrastes favorables et les contrastes défavorables, nous nous intéresserons main-

T. II.3. Sériation intensive des contrastes défavorables [1)]

$$
\begin{tikzcd}
e_0\,PRE^0\,e_0 \arrow[r] & e_0\,PRE^1\,e_1 \arrow[r] & e_0\,PRE^2\,e_2 \arrow[r, dashed] & e_0\,PRE^r\,e_r \\
 & e_1\,PRE^0\,e_1 \arrow[r] \arrow[u] & e_1\,PRE^1\,e_2 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & e_1\,PRE^{r-1}\,e_r \arrow[u] \\
 & & e_2\,PRE^0\,e_2 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & e_2\,PRE^{r-2}\,e_r \arrow[u] \\
 & & & e_r\,PRE^0\,e_r \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

tenant uniquement aux contrastes nuls. Lors de la définition de l'amplitude des contrastes, nous avons supposé que les contrastes nuls sont ceux qui ne recouvrent aucun contraste élémentaire, soit favorable, soit défavorable.

Tous les contrastes nuls se caractérisent en effet par la même situation d'absence de contraste et on peut raisonnablement supposer que l'acteur perçoit toutes ces absences de contraste comme équivalentes.

Donc nous posons que:

S.I.1.

$$\forall (e-e),\ (e-e') \in E^*_= : (e-e) =^* (e'-e').$$

Nous avons ainsi établi une sériation des contrastes favorables, défavorables et nuls et nous pouvons caractériser le type d'échelle qualitative auquel correspond cette sériation de l'ensemble des contrastes.

En définissant l'échelle élémentaire nous avons imposé un premier équilibre à l'activité perceptive de

---

1) Pour simplifier le tableau nous omettons les flêches induites par la transitivité de $>^*_d$.

l'acteur. Cet équilibre est caractérisé par la réversibilité des mutations. Pour le type d'échelle visé ici, nous poserons un second équilibre de l'activité perceptive qui sera caractérisé par la réversibilité de la composition "additive" des situations de successeur et de prédécesseur immédiat.

En effet, quel que soit le contraste favorable (e-e') tel que $e\ SUI^n e'$, nous poserons que les acteurs peuvent associer à ce contraste un contraste inverse (e'-e) tel que $e'\ PRE^n e$. En d'autres termes, les acteurs, reconnaissant le contraste favorable (e-e') comme composition "additive" de n situations de successeur immédiat, assimileront le contraste inverse défavorable (e'-e) à l'"addition" de n situations de prédécesseur immédiat.

Il s'ensuit que la situation de prédécesseur immédiat sera la situation <u>réciproque</u> de la situation de successeur immédiat et inversément. Ainsi, la composition de la situation directe et de la situation réciproque appliquée aux contrastes inversés donnera aux yeux des acteurs un résultat équivalent:

$$\forall\ (e - e') \in E^* : \quad e\ SUI^n(PRE^n)\, e' \Leftrightarrow e'\ PRE^n(SUI^n)\, e\ .$$

De cet équilibre dans la perception des situations de successeur et de prédécesseur découle l'équivalence entre la relation "au moins aussi favorable que" et la relation "au plus aussi défavorable que". En effet, des définitions D.II.6 et D.II.6' découle à présent que:
$\forall (e-e'), (e''-e''') \in E^* : (e-e')\ EMB\ (e''-e''') \Leftrightarrow (e'-e) EMB (e'''-e'')$, et donc: $(e-e') \geqslant^*_f (\geqslant^*_d)(e''-e''') \Leftrightarrow (e'-e) \geqslant^*_d (\geqslant^*_f)(e'''-e'')$. Si nous notons $\leqslant^*_f$ et $\leqslant^*_d$ les relations réciproques de $\geqslant^*_f$ et $\geqslant^*_d$, aux contenus sémantiques "au plus aussi favorables que" et "au moins aussi défavorables que", la relation "au plus aussi défavorable que" est la relation converse de la relation "au moins aussi favorable que", et la distinction entre $\geqslant^*_f$ et $\geqslant^*_d$ n'a plus de raisons d'être.

La relation $\geqslant_i^*$ unique, définie indifféremment par $\geqslant_f^*$ où par $\geqslant_d^*$ sur E*, modélise donc la sériation intensive des contrastes.

Si $\leqslant_i^*$ est la relation réciproque de $\leqslant_i^*$, l'équivalence entre la relation directe et la relation converse s'énonce ainsi:

S.I.2. $\forall$ (e-e'), (e"-e"') $\in$ E*

$$(e-e') \geqslant_i^* (e''-e''') \iff (e'-e) \leqslant_i^* (e'''-e'') .$$

Démonstration:

$(e-e') \geqslant_i^* (e''-e''') \iff e\,SUI^n(PRE^n)e'$ et ($e\,SUI^k(PRE^k)\,e'''$ avec $k \leqslant n$ ou $e''SUI^{k'}(PRE^{k'})e'$ avec $k' \leqslant n) \iff e'PRE^n(SUI^n)e$ et $(e'''PRE^k(SUI^k)e$ avec $k \leqslant n$ ou $e'PRE^{k'}(SUI^{k'})$ avec $k' \leqslant n)$ $(e'-e) \leqslant_i^* (e'''-e'')$. ♦

D'autre part, nous avons remarqué que l'encastrement donne le squelette des relations $\geqslant_f^*$ et $\geqslant_d^*$. On retrouve une propriété analogue pour la relation $\geqslant_i^*$.

S.I.3.

$$\forall\ e, e' \in E:$$

$$\left[(e-e') \in E_+^* \cup E_=^*\right] \iff \left[(e-e'') \geqslant_i^* (e'-e''),\ \forall e'' \in E\right] .$$

Demonstration:

En effet: soit $e \geqslant e' \geqslant e''$ et la partie gauche s'ensuit de la définition de $\geqslant_i^*$ sur $E_+^* \cup E_=^*$, soit $e' \geqslant e'' \geqslant e$ et la partie gauche s'ensuit de la définition de $\geqslant_i^*$ sur $E_-^* \cup E_=^*$, dans le cas où $e' \geqslant e \geqslant e''$ les deux définitions s'appliquent conjointement et la partie gauche découle de la transitivité de la relation $\geqslant_i^*$.

Inversément: e, $e' \geqslant e''$ et $(e-e'') \geqslant_i^* (e'-e'') \Rightarrow$ (D.II.7.) $e \geqslant e'$; $e'' \leqslant e, e'$ et $(e-e'') \geqslant_i^* (e'-e'') \Rightarrow$ (D.II.7.) $e \geqslant e'$; $(e \leqslant e'' \leqslant e')$ ou $(e' \leqslant e'' \leqslant e)$ et $(e-e'') \geqslant_i^* (e'-e'') \Rightarrow (e' \leqslant e'' \leqslant e)$. ♦

A l'aide de ces deux propriétés de la relation $\geqslant_i^*$ sur E* et de S.I.1., nous pouvons définir une échelle qualitative qui est caractérisée par la sériation intensive des contrastes.

D.II.8.

{ Nous appelons <u>échelle qualitative intensive</u> un ensemble E de r+1 états d'une conséquence élémentaire qualitative que l'homme d'étude peut numéroter de 0 à r de manière à ce que l'acteur reconnaisse sur l'ensemble des contrastes E^* une relation binaire transitive $\succcurlyeq_i^*$ au contenu sémantique "au moins aussi favorable que" qui vérifie les propriétés suivantes:

1) $\forall\ h, j = 0, 1, \ldots, r$:

$$\left[(e_h - e_k) \succcurlyeq_i^* (e_j - e_k) \text{ pour tout } k = 0, 1, \ldots, r \right] \Leftrightarrow h \geq j \ ;$$

2) $\forall\ h, j = 0, 1, \ldots, r : (e_h - e_h) =_i^* (e_j - e_j)$;

3) $\forall\ (e_h - e_j), (e_k - e_l) \in E^*$:

$$(e_h - e_j) \succcurlyeq_i^* (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_j - e_h) \preccurlyeq_i^* (e_l - e_k).$$

On peut montrer le squelette de la sériation intensive des contrastes perçus dans une échelle qualitative intensive au moyen du tableau suivant dans lequel les flêches ($\longrightarrow$) traduisent la relation "plus favorable que" ($\succ_i^*$) et les double-flêches ($\longleftrightarrow$) la relation "aussi favorable que" ($=_i^*$).

T.II.4. Sériation intensive des contrastes dans une échelle qualitative [1)]

$$\begin{tikzcd}
(e_0 - e_0) \arrow[r] & (e_0 - e_1) \arrow[r] & (e_0 - e_2) \arrow[r, dashed] & (e_0 - e_r) \\
(e_1 - e_0) \arrow[r] \arrow[u] & (e_1 - e_1) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ul, leftrightarrow] & (e_1 - e_2) \arrow[r, dashed] \arrow[u] & (e_1 - e_r) \arrow[u] \\
(e_2 - e_0) \arrow[r, dash] \arrow[u] & (e_2 - e_1) \arrow[r, dash] \arrow[u] & (e_2 - e_2) \arrow[r, dashed] \arrow[u] \arrow[ul, leftrightarrow] & (e_2 - e_r) \arrow[u] \\
(e_r - e_0) \arrow[r] \arrow[u, dashed] & (e_r - e_1) \arrow[r] \arrow[u, dashed] & (e_r - e_2) \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & (e_r - e_r) \arrow[u, dashed] \arrow[ul, leftrightarrow, dashed]
\end{tikzcd}$$

1) Pour simplifier le tableau, nous omettons les flêches induites sur E^* par la transitivité de $\succ_i^*$ et de $=_i^*$.

Tout contraste favorable étant "plus favorable que" tout contraste nul et celui-ci également "plus favorable que" tout contraste défavorable, nous retrouvons dans la sériation intensive la sériation des contrastes qui correspond à l'échelle élémentaire.[1)]

Finalement, si la sériation intensive apparaît beaucoup plus riche que la sériation élémentaire, elle n'atteint pas pour autant la complète comparabilité des contrastes. La précision de l'activité perceptive ne permet que la comparaison des contrastes emboîtés ou encastrés -p.ex. (e_1-e_0) encastré dans (e_2-e_0). Cependant, (e_1-e_0) et (e_2-e_1), qui peuvent être perçus l'un comme partie complémentaire de l'autre dans (e_2-e_0), ne sont pas comparables.

C'est pourquoi nous aborderons maintenant l'étude de la comparaison de ces parties complémentaires dans un tout.

II. B. 3. Sériation extensive des contrastes

Dans une échelle qualitative la sériation intensive des contrastes repose sur la reconnaissance de l'inclusion ou de l'encastrement des contrastes les uns dans les autres. Ce renvoi à l'encastrement fait implicitement référence à une opération de partition des contrastes. En effet, prenons les contrastes $(e_2- e_1)$et (e_1-e_0) encastrés dans le contraste (e_2-e_0). Ces contrastes caractérisent une certaine partition de la situation de successeur $e_2\ SUI^2\ e_0$. C'est cette partition des situations de successeur et de prédécesseur que nous allons étudier à présent.

Soient (e-e') et (e"-e"') deux contrastes favorables ou nuls tels que (e"-e"') soit encastré dans (e-e'). D'après la définition de l'encastrement[2)], $e\ SUI^n e'$ et

1) C'est la relation $\overset{*}{\underset{1}{=}}$ entre contrastes nuls qui permet de relier tout contraste favorable à tout contraste défavorable.

2) Voir D.II.5.p.77

$e'' \, SUI^k e'''$ avec $k \leq n$. Si $e = e''$, $e''' \, SUI^{n-k} e'$ et $(e'''-e')$ représente la partie complémentaire du contraste $(e-e''')$ dans le contraste $(e-e')$. De même, si $e'=e'''$, $e \, SUI^{n-k} e''$ et $(e-e'')$ représente la partie complémentaire du contraste $(e''-e')$ dans le même contraste $(e-e')$. Formellement nous pouvons définir la <u>complémentarité</u> entre deux contrastes favorables et nuls de la manière suivante:

D II.9.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \, e, e', e'', e''' \in E \succ\!\!- \; e \, SUI^k e' \text{ et } e'' \, SUI^{k'} e''' : \\ (e - e') \text{ est le contraste complémentaire du contraste} \\ (e'' - e''') \text{ ssi } e \, SUI^n e''' \text{ ou } e'' \, SUI^n e' \text{ avec } n = k + k'. \end{array} \right.$$ [1]

La complémentarité des contrastes favorables et nuls définit ainsi une relation binaire symétrique [2] sur $E^*_+ \cup E^*_=$: Puisque seul un contraste nul est complémentaire de lui-même, la complémentarité est une relation irréflexive sur E^*_+ [3]. On peut encore montrer que tout contraste favorable est complémentaire des contrastes nuls qui sont encastrés dans lui.[4]

Définissons maintenant la complémentarité entre contrastes défavorables ou nuls:

D.II.9'.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \, e, e', e'', e''' \in E \succ\!\!- \; e \, PRE^k e' \text{ et } e'' \, PRE^{k'} e''' : \\ (e - e') \text{ est le contraste complémentaire de } (e'' - e''') \\ \text{ssi } e \, PRE^n e' \text{ ou } e'' \, PRE^n e' \text{ avec } n = k + k'. \end{array} \right.$$

---

1) On peut également définir la complémentarité à l'aide de l'amplitude des contrastes: Soient $(e - e'), (e'' - e''') \in E^*_+ \cup E^*_=$ tels que $amp(e-e')=k$ et $amp(e''-e''')=k'$: $(e-e')$ est complémentaire de $(e''-e''')$ ssi $amp(e-e''')=n$ ou $amp(e''-e')=n$ avec $n=k+k'$.
2) En effet $(e-e')$ complémentaire de $(e''-e''') \Leftrightarrow e \, SUI^n e'$ ou $e'' \, SUI^n e'$ avec $n=k+k' \Leftrightarrow (e''-e''')$ complémentaire de $(e-e')$.
3) $k=k+k'=k' \Leftrightarrow k=k'=0 \Leftrightarrow e=e'=e''=e'''$.
4) $e''=e''' \Rightarrow k'=0 \Rightarrow k=n \Rightarrow e''e$ ou $e''-e'$.

Sur $E_{\underline{*}} \cup E_{\underline{\underline{*}}}$ la complémentarité est également une relation binaire symétrique; de même elle est irréflexive sur $E_{\underline{*}}$ et tout contraste défavorable est complémentaire aux contrastes nuls qui sont emboîtés dans lui.

Après les contrastes favorables et les contrastes défavorables, qu'en est-il maintenant de la complémentarité entre un contraste favorable et un contraste défavorable? Pour étudier cette situation particulière, introduisons des situations de successeur et de prédécesseur "<u>inversées</u>" ou "<u>négatives</u>". En effet, toute situation de successeur (resp. de prédécesseur) peut être interprétée comme une situation de prédécesseur (resp. de successeur) inversée. Ainsi nous posons que:

$$\forall\ e, e' \in E \ : \quad e\ PRE^n (SUI^n)\ e' \Leftrightarrow e\ SUI^{-n} (PRE^{-n})\ e' .$$

Suite à cette extension des situations de successeur et de prédécesseur, l'indice n de ces situations peut varier entre -r et +r. [1] Considérons ensuite les contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_j - e_l)$ tels que $e_i\ SUI^n\ e_j$ et $e_j\ SUI^{-k}\ e_l$. Comme $e_i\ SUI^{n'}\ e_l$ avec n' = n + (-k), nous pouvons en accord avec les définitions de la complémentarité ci-dessus conclure que $(e_i - e_j)$ est complémentaire de $(e_j - e_l)$ dans $(e_i - e_l)$. La généralisation des situations de successeur et de prédécesseur permet donc l'extension de la définition de la complémentarité à tout l'ensemble E* des contrastes.

La réversibilité de l'opération d'addition des situations de successeur et de prédécesseur [2] entraîne aussi la réversibilité de l'opération de partition à la base de la complémentarité. Si (e-e') et (e"-e"') sont deux contrastes quelconques complémentaires, les contrastes inverses (e'-e) et (e"'-e") le sont aussi et vice-versa:

---

1) Puisque la valeur maximum de l'indice est de r si le nombre d'échelons de l'échelle est de r+1.
2) Voir II. B.2. p.82 ; $\forall (e - e') \in E^* : e\ SUI^n (PRE^n) e' \Leftrightarrow e'\ PRE^n (SUI^n)\ e$.

$$\forall\ (e-e'),\ (e''-e''') \in E^* :$$

$$(e-e')\ \text{complémentaire de}\ (e''-e''') \Leftrightarrow$$

$$(e'-e)\ \text{complémentaire de}\ (e'''-e'').$$

Démonstration:

$\forall (e-e'), (e''-e''') \in E^*$: $(e-e')$ complémentaire de $(e''-e''') \Leftrightarrow$ $e SUI^k(PRE^k)e'$ et $e'' SUI^{k'}(PRE^{k'})e'''$ et $(e SUI^n(PRE^n)e'''$ ou $e'' SUI^n(PRE^n)e'$ avec $n = k + k') \Leftrightarrow$ $e' PRE^k(SUI^k)e$ et $e''' PRE^{k'}(SUI^{k'})e''$ et $(e''' PRE^n(SUI^n)e$ ou $e' PRE^n(SUI^n)e''$ avec $n = k+k') \Leftrightarrow (e'-e)$ complémentaire de $(e'''-e'')$. ♠

On remarquera ainsi que la comparaison qui conduit à la sériation intensive des contrastes prend appui sur l'opération de partition des situations de successeur et de prédécesseur. Tout d'abord la partition conduit à la reconnaissance de l'encastrement des parties dans un même tout. Mais elle ouvre aussi la voie à une nouvelle opération perceptive qui sera à l'origine de la sériation extensive [1] des contrastes.

Cette opération perceptive consistera en un "déplacement" des contrastes les uns sur les autres.[2] Ce déplacement permet la spécification d'une relation "au moins aussi favorable que" ($\geqslant^*_e$) sur E* qui vient s'ajouter à la sériation intensive des contrastes. En effet, tous les contrastes complémentaires, qui ne sont pas comparables sur la base de la sériation intensive, peuvent à présent être comparés par "déplacement" de l'un sur l'autre.

Pour que cette action perceptive acquière un caractère opératoire, nous lui imposerons une condition de réversibilité analogue à celle imposée à l'opération d'addition des situations de successeur et de prédécesseur.[3]

1) Nous empruntons ce terme à J. PIAGET, pour qui une quantité est extensive dès lors qu'il est possible de spécifier les rapports d'extension entre les parties d'un même tout.
2) Déplacement: opération qui consiste à déplacer mentalement deux contrastes complémentaires, résultat d'une partition, l'un sur l'autre afin de les comparer au sens de la relation "au moins aussi favorable (défavorable) que" . Voir PIAGET, (Epistémologie génétique, T.1.), (op.cit.), p. 214.
3) Voir II.B.2. p.75

S.E.1.

$$\forall\ (e - e'), (e'' - e''') \in E^* :$$
$$(e - e') \geqslant^*_e (e'' - e''') \Leftrightarrow (e' - e) \leqslant^*_e (e''' - e'') ;$$

si le "déplacement" d'un contraste favorable (défavorable) (e-e') sur un contraste favorable (défavorable) (e"-e"') conduit à la reconnaissance de la relation $\geqslant^*_e$, alors le "déplacement" du contraste inverse défavorable (favorable) (e'-e) sur le contraste inverse défavorable (favorable) (e"'-e") conduit à la reconnaissance de la relation réciproque $\leqslant^*_e$. Il y a équivalence logique entre la relation directe et la relation converse.

L'opération de déplacement ne se limite pas aux seuls contrastes complémentaires, mais s'étend à tout l'ensemble des contrastes. Ainsi, l'activité perceptive se compose de deux opérations distinctes, la partition et le déplacement des contrastes. Cependant lorsque cette activité conduit à la sériation extensive des contrastes, ces deux opérations ne seront pas indépendantes l'une de l'autre. Au contraire, la sériation extensive résulte d'un équilibre de l'activité perceptive liant l'opération de partition et l'opération de déplacement au sein d'une condition générale de réversibilité.

Pour étudier cette liaison entre partition et déplacement des contrastes, nous allons introduire une nouvelle situation relationnelle entre contrastes que nous appellerons "<u>commune appartenance</u>" (notée APC).

Prenons deux contrastes favorables ou nuls: $(e_i - e_j)$, $(e_k - e_l) \in E^*_+ \cup E^*_=$ tels que $e_i \geqslant e_j$ et $e_k \geqslant e_l$. On remarquera que les contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ "appartiennent" tous les deux au "même" contraste $(e_i - e_l)$. Formellement nous définissons cette situation relationnelle de la manière suivante:

D. II. 10.

$$\begin{cases} \forall\ (e_i - e_j),\ (e_k - e_l) \in E^*_+ \cup E^*_= : \\ \left.\begin{array}{l}(e_i - e_j)\ APC_{il}\ (e_k - e_l) \\ (e_k - e_l)\ APC_{il}\ (e_i - e_j)\end{array}\right\} \Leftrightarrow (e_i\ SUI^m\ e_k \text{ et } e_j\ SUI^{m'} e_l \\ \qquad \text{et } e_i\ SUI^n\ e_l \text{ avec } 0 \leq m, m' \leq n). \end{cases}$$

La situation de commune appartenance est une relation binaire symétrique et réflexive sur $E^*_+ \cup E^*_=$ [1]:

$$(e_i - e_j)\ APC_{il}\ (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_k - e_l)\ APC_{il}\ (e_i - e_j).$$

La définition de la commune appartenance renvoie directement à l'encastrement des contrastes. Si $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ appartiennent tous les deux à $(e_i - e_l)$, alors ils sont également encastrés dans $(e_i - e_l)$.[2] Le fait remarquable qu'il faut souligner ici à propos de la situation APC, est le suivant: si $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ appartiennent tous les deux au même contraste $(e_i - e_l)$, alors $(e_j - e_l)$ est le contraste complémentaire de $(e_i - e_j)$ dans le contraste $(e_i - e_l)$, et $(e_i - e_k)$ est le contraste complémentaire de $(e_k - e_l)$ dans le même contraste $(e_i - e_l)$; $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ caractérisent donc deux partitions distinctes ou non de $(e_i - e_l)$.

On peut de même définir la situation de commune appartenance sur l'ensemble des contrastes défavorables et nuls:

D. II. 10'.

$$\begin{cases} \forall\ (e_i - e_j),\ (e_k - e_l) \in E^*_- \cup E^*_= : \\ \left.\begin{array}{l}(e_i - e_j)\ APC_{il}\ (e_k - e_l) \\ (e_k - e_l)\ APC_{il}\ (e_i - e_j)\end{array}\right\} \Leftrightarrow (e_i\ PRE^m\ e_k \text{ et } e_j\ PRE^{m'} e_l \text{ et} \\ \qquad e_i\ PRE^n\ e_l \text{ avec } n \geq m, m' \geq 0) \end{cases}$$

A nouveau, la situation de commune appartenance définit une relation binaire symétrique et réflexive sur $E^*_- \cup E_{\pm}$.

---

1) La symétrie découle immédiatement de la définition, tandis que la réflexivité est entraînée par l'annulation de m et m'.
2) En effet, $e_i\ SUI^{n'}\ e_j$ avec $0 \leq n' = n - m' \leq n$ et $e_k\ SUI^{n''} e_l$ avec $0 \leq n'' = n - m \leq n$.

$(e_i - e_k)$ est le contraste complémentaire de $(e_k - e_l)$ et $(e_j - e_l)$ est le contraste complémentaire de $(e_i - e_j)$ dans $(e_i - e_l)$. Les contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ caractérisent donc deux partitions distinctes ou non du contraste $(e_i - e_l)$.

La condition de réversibilité des situations de successeur et de prédécesseur [1)] entraîne la réversibilité de la situation de commune appartenance:

$$\forall (e_i - e_j), (e_k - e_l) \in E^* :$$

$$\begin{array}{ccc} (e_i - e_j)\ APC_{il}\ (e_k - e_l) & \Leftrightarrow & (e_j - e_i)\ APC_{li}\ (e_l - e_k) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ (e_k - e_l)\ APC_{il}\ (e_i - e_j) & \Leftrightarrow & (e_l - e_k)\ APC_{li}\ (e_j - e_i) \end{array}$$

Démonstration:

$(e_i - e_j)APC_{il}(e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_i SUI^m(PRE)^M e_k$ et $e_j SUI^{m'}(PRE^{m'})e_j$ et $e_j SUI^n(PRE^n)e_l$ avec $n \geqslant m,\ m' \geqslant 0) \Leftrightarrow (e_k PRE^m(SUI^m)e_i$ et $e_l PRE^{m'}(SUI^{m'})e_j$ et $e_l PRE^n(SUI^n)e_i$ avec $n \geqslant m,\ m' \geqslant 0) \Leftrightarrow (e_l - e_k)APC_{li}(e_j - e_i)$. ♦

Si le contraste favorable (défavorable) $(e_i - e_j)$ appartient au même contraste favorable (défavorable) $(e_i - e_l)$ que le contraste favorable (défavorable) $(e_k - e_l)$, alors le contraste inverse défavorable (favorable) $(e_j - e_i)$ appartient également au même contraste inverse défavorable (favorable) $(e_l - e_i)$ que le contraste défavorable (favorable) $(e_l - e_k)$.

Revenons maintenant à la comparaison des contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ par déplacement de l'un sur l'autre et supposons que ce déplacement fasse apparaître la relation suivante: $(e_i - e_j) \succcurlyeq_e^* (e_k - e_l)$. Si $(e_i - e_j)\ APC_{il}(e_k - e_l)$, il est clair que la comparaison de $(e_i - e_j)$ avec $(e_k - e_l)$ conditionne les partitions de $(e_i - e_l)$ caractérisées par ces contrastes. Or les contrastes complémentaires $(e_j - e_l)$ et $(e_i - e_k)$ caractérisent les mêmes partitions de $(e_i - e_l)$. La comparaison de ces contrastes complémentaires doit donc

1) Voir II. B. 2. p. 82

confirmer la comparaison des premiers, en ce sens que si e_j est plus "loin" de e_i que e_k est „loin" de e_l, alors e_j est plus "près" de e_l que e_k est "près" de e_i.[1] Donc $(e_j - e_l) \leqslant_e^* (e_i - e_k)$. Cette propriété conduit à la condition de réversibilité suivante:

$$(*) \quad \forall (e_i - e_j), (e_k - e_l) \in E^* \succ (e_i - e_j) \; APC_{il} \, (e_k - e_l)$$
$$(e_i - e_j) \geqslant_e^* (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_j - e_l) \leqslant_e^* (e_i - e_k).$$

Le déplacement l'un sur l'autre de deux contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ appartenant au même contraste $(e_i - e_l)$ conduit au même résultat que le déplacement l'un sur l'autre des contrastes complémentaires $(e_j - e_l)$ et $(e_i - e_k)$ dans le même contraste $(e_i - e_k)$. Il y a équivalence entre la relation directe et la relation réciproque "complémentée".

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que des situations de commune appartenance entre contrastes soit favorables, soit défavorables. Pour généraliser cette situation à l'ensemble des contrastes, nous devons réintroduire les situations de successeur et de prédécesseur "inversées". En effet, prenons les contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ tels que $e_i \; SUI^m(PRE^m) \; e_j$ et $e_k \; SUI^{m'}(PRE^{m'}) \; e_l$. La généralisation de la complémentarité permet de généraliser la situation de commune appartenance. En effet, les contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ appartiendront toujours au même contraste $(e_i - e_l)$, car $(e_i - e_k)$ est toujours complémentaire de $(e_k - e_l)$ dans $(e_i - e_l)$ et $(e_i - e_j)$ est toujours complémentaire de $(e_j - e_l)$ dans $(e_i - e_l)$.[2]

---

1) On peut illustrer cette propriété à l'aide d'un segment de droite dd' coupé à deux endroits a et b:

Si le segment da est plus grand que le segment bd', alors le segment "complémentaire" ad' de da dans dd' est plus petit que le segment "complémentaire" db de bd' dans dd'.

2) $\forall e_i, e_j, e_k, e_l \in E$; on a toujours $e_i \; SUI^m(PRE^m) \; e_j$ et $e_k \; SUI^{m'}(PRE^{m'}) \; e_l$ avec $-r \leq m, m' \leq r$. Si $e_i \; SUI^n(PRE^n) \; e_k$ et $e_j \; SUI^{n'}(PRE^{n'}) \; e_l$ avec $-r \leq n, n' \leq r$, alors $e_i \; SUI^{n''}(PRE^{n''}) \; e_l$ avec $-r \leq n'' \leq m+n' = m'+n \leq r$.

La condition ($\ast$) peut donc être généralisée de la manière suivante:

S.E.2.

$$\forall\, e_i , e_j , e_k , e_l \in E :$$

$$(e_i - e_j) \succcurlyeq_e^* (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_i - e_k) \succcurlyeq_e^* (e_j - e_l) .$$

Si deux contrastes $(e_i - e_j)$, et $(e_k - e_l)$ sont comparables au sens de la relation $\succcurlyeq_e^*$, l'échange des termes moyens e_j et e_k n'altère pas cette comparaison.

Deux systèmes de réversibilité caractérisent donc l'activité perceptive qui conduit à la sériation extensive des contrastes; un premier système qui lie la réciprocité de la relation "au moins aussi favorable que" à l'inversion des contrastes au sein de la condition de réversibilité S.E.1.[1] et un second système qui lie la réciprocité de cette même relation à la complémentarité des contrastes au sein de la condition de réversibilité S.E.2.

Ainsi pouvons-nous définir un troisième type d'échelle qualitative qui sera marqué par un équilibre de l'activité perceptive conduisant à la sériation extensive des contrastes.

D.II.11. Nous appelons <u>échelle qualitative extensive</u> un ensemble de r+1 états d'une conséquence élémentaire qualitative que l'homme d'étude peut numéroter de 0 à r de manière à ce que tout acteur reconnaisse sur l'ensemble des contrastes E* une relation binaire $\succcurlyeq_e^*$ au contenu sémantique "au moins aussi favorable que" qui vérifie les propriétés suivantes:

1) $(\succcurlyeq_e^* / E^*)$ est un préordre complet ;

2) $\forall\, i , j = 0, 1, \ldots, r$:

$$[(e_i - e_k) \succcurlyeq_e^* (e_j - e_k) \;\forall\, k = 0, 1, \ldots, r] \Leftrightarrow i \geqslant j ;$$

---

1) Voir p.89

$$\left\{\begin{array}{ll} 3) & \forall\ i,j,k,l = 0,1,\dots,r : \\ & (e_i - e_j) \geqslant^*_e (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_j - e_i) \leqslant^*_e (e_l - e_k); \\ 4) & \forall\ i,j,k,l = 0,1,\dots,r : \\ & (e_i - e_j) \geqslant^*_e (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_i - e_k) \geqslant^*_e (e_j - e_l); \end{array}\right.$$

On retrouve dans cette définition de l'échelle qualitative extensive la définition de l'échelle qualitative intensive.[1] En effet, la seconde propriété entraîne que $(e_i - e_k) =^*_e (e_i - e_k)$ pour tout i, k = 0, 1, ... r. La propriété 4) entraîne dès lors que $(e_i - e_i) =^*_e (e_k - e_k)$ pour tout i, k = 0, 1, ... r. Les trois échelles qualitatives envisagées jusqu'à présent s'emboîtent ainsi de la manière suivante:

échelle qualitative extensive	$\Rightarrow$	échelle qualitative intensive	$\Rightarrow$	échelle qualitative élémentaire

Au niveau de l'échelle qualitative élémentaire, l'activité perceptive ne conduit qu'à la reconnaissance des mutations favorables, défavorables et nulles. Pour arriver à une échelle qualitative intensive, l'activité perceptive doit se préciser afin de permettre la reconnaissance de l'encastrement et de l'emboîtement des contrastes, ce qui nécessite la reconnaissance des situations de successeur et de prédécesseur immédiats (les mutations élémentaires) et la composition additive de ces situations. Si à cela s'ajoute la reconnaissance de la complémentarité des contrastes, à travers la partition des situations de successeur et de prédécesseur, et l'opération de déplacement des contrastes, on se trouve en face d'une échelle qualitative extensive.

---

1) Voir D.II.8. p.83.

La plupart des échelles qualitatives utilisées en pratique nous semblent vérifier au moins les conditions d'une échelle intensive. Par contre, il n'est pas certain qu'elles soient toutes des échelles extensives. En fait dans la majorité des cas ces échelles se situeront entre ces deux types, comme cette échelle de risque sur laquelle l'acteur admet une aversion contre les risques de plus en plus importants. Sans disposer d'une sériation extensive, on connaît la sériation partielle des contrastes élémentaires.

A cette classe d'échelles qualitatives "intermédiaires" entre l'échelle intensive et l'échelle extensive, nous associerons les mêmes équilibres perceptifs qu'à cette dernière, puisque toute connaissance supplémentaire à l'échelle intensive repose sur l'opération de déplacement et présuppose ainsi la reconnaissance de la complémentarité des contrastes.

Nous désignerons les échelles appartenant à cette classe par le nom d'échelle qualitative commune. La sériation commune supportée par une telle échelle modélise une relation "au moins aussi favorable que" qui est un préordre sur E*, et qui vérifie en plus de l'encastrement et de l'emboîtement des contrastes, les deux équilibres perceptifs S.E.1. et S.E.2. de l'échelle qualitative extensive.

On remarquera que cette classe comprend l'échelle intensive et l'échelle extensive comme cas-limites en ce sens que la première est la plus "pauvre" et la deuxième la plus "riche" en informations préférentielles des échelles qualitatives communes.

Arrêtons-nous encore un instant à ces échelles communes pour considérer un cas particulier intéressant. En pratique, l'échelle qualitative est souvent construite "régulièrement" de manière à ce que l'acteur perçoive les contrastes élémentaires tous égaux entre eux. Nous appelons régulière une échelle qualitative intensive sur laquelle l'acteur reconnaît cette équivalence entre les contrastes élémentaires.

On voit aisément qu'une échelle régulière est en fait une échelle extensive particulière. En effet, la propriété S.E.2. entraîne que tous les contrastes de même amplitude soient égaux entre eux, et comme toute sériation des contrastes est une relation transitive, la sériation "régulière" est nécessairement complète sur E*.

L'importance de l'échelle régulière apparaîtra lorsque nous envisagerons d'augmenter davantage la précision de l'activité perceptive. Ceci nous mène vers l'addition directe des contrastes dans une échelle qualitative.

II. C. Additivité des contrastes dans une échelle qualitative

La précision de l'activité perceptive des acteurs peut dans certains cas aller bien au-delà de celle requise pour la sériation extensive des contrastes. En effet, la sériation des contrastes repose entièrement sur la reconnaissance et la partition des situations de successeur et de prédécesseur. Or, la perception des contrastes se précisant, cette opération de partition pourra s'appliquer directement aux contrastes eux-mêmes. Dans ce cas, la somme de deux contrastes adjacents, qui ne sont autre chose que deux contrastes complémentaires dans un même contraste, correspondra exactement à ce contraste. De plus, la précision de la perception augmentant encore, l'addition pourra s'étendre à l'ensemble des contrastes pour ouvrir la voie à une opération de concaténation nécessaire au mesurage exacte des contrastes.

II. C. 1. Addition partitive des contrastes

La sériation des contrastes repose primordialement sur la reconnaissance et l'addition des situations de successeur et de prédécesseur immédiat. A cela s'ajoutent deux opérations perceptives, la partition de ces situations et le déplacement des contrastes l'un sur l'autre. Nous allons à présent supposer que les acteurs perçoivent les contrastes d'une manière suffisamment précise pour pouvoir imaginer une opération de partition s'appliquant directement aux contrastes perçus. Pour étudier cette partition des contrastes nous introduisons une nouvelle situation relationnelle entre contrastes qui définit l'"adjacence" entre contrastes (notée ADJ).

Prenons deux contrastes, $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$, favorables ou nuls. Si $(e_j = e_k)$, ces contrastes représentent une partition du contraste $(e_i - e_l)$, et ils sont "adjacents" l'un à l'autre. Par contre, si $(e_i = e_l)$, ces contrastes, tout en étant encore "adjacents" l'un à l'autre, représentent une partition de $(e_k - e_j)$. On retrouve les mêmes situations lorsque l'on considère deux contrastes défavorables ou nuls. Envisageons à présent deux contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ où l'un est favorable et l'autre défavorable. Si $(e_i = e_l)$ ou $(e_j = e_k)$, ils seront toujours "adjacents" l'un à l'autre, malgré le fait que l'un soit dirigé favorablement alors que l'autre est dirigé défavorablement. Ces constatations nous inspirent la définition suivante:

D.II.12.
$$\forall \ (e_i - e_j), (e_k - e_l) \in E^* :$$
$$(e_i - e_j) \text{ ADJ } (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_i = e_l) \text{ ou } (e_k = e_j) .$$

Ainsi la situation d'"adjacence" est-elle une relation binaire symétrique sur E^*; elle est irréflexive sur $E^*_+ \cup E^*_-$, puisque seul un contraste nul pourra être adjacent à lui-même.[1] On remarquera que la situation d'adjacence traduit une situation analogue à la complémentarité entre contrastes.[2] En effet:

$$\forall \ (e_i - e_j), (e_k - e_l) \in E^* :$$
$$(e_i - e_j) \text{ ADJ } (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_i - e_j) \text{ complémentaire de } (e_k - e_l)^{3)};$$

---

1) $\forall \ (e_i - e_j) \in E^* : (e_i - e_j) \text{ ADJ } (e_i - e_j) \Rightarrow e_i = e_j$.

2) Voir II. B. 3. p.

3) $\forall \ e_i, e_j, e_k, e_l \in E : e_i \text{ SUI}^n e_j$ et $e_k \text{ SUI}^{n'} e_l$ avec $-r \leq n, n' \leq r$:
$(e_j = e_k) \Rightarrow e_i \text{ SUI}^{n+n'} e_l$ et $(e_i = e_l) \Rightarrow e_k \text{ SUI}^{n'+n} e_j$.

L'équilibre perceptif nécessaire à la reconnaissance des situations d'adjacence trouve son expression dans une condition de réversibilité qui découle immédiatement de la définition:

$$\forall \ (e_i - e_j),\ (e_k - e_l) \in E^* :$$
$$(e_i - e_j) \ \mathrm{ADJ}\ (e_k - e_l) \Leftrightarrow (e_j - e_i)\ \mathrm{ADJ}\ (e_l - e_k).$$

Si les contrastes $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ sont adjacents l'un à l'autre, alors leurs contrastes inverses respectifs $(e_j - e_i)$ et $(e_l - e_k)$ le sont également.

Supposons à présent que la précision de la perception soit suffisante pour reconnaître que deux contrastes adjacents représentent une partition d'un contraste. Cette constatation conduira un acteur à admettre que la "somme" de ces deux contrastes adjacents, qui sont donc complémentaire l'un de l'autre dans un même contraste, est précisément égale à ce contraste. Nous attribuerons cette propriété des contrastes adjacents à une opération perceptive que nous appellerons "<u>addition partitive</u>" (notée $\overset{p}{+}$).[1)]

Soit C_a^{**} l'ensemble des couples de contrastes adjacents:

$$C_a^{**} = \left\{ (e_i - e_j),(e_k - e_l) \in E^* / (e_i - e_j)\ \mathrm{ADJ}\ (e_k - e_l) \right\}.$$

L'addition partitive est définie comme une fonction de $C_a^{**} \subset E^* x E^*$ dans E^* qui vérifie la propriété suivante:

A.I. 1.
$$\forall \ [(e_i - e_j),(e_k - e_l)] \in C_a^{**} :$$
$$(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_k - e_l) = \begin{cases} (e_i - e_l) & \text{si} \quad e_k = e_j \ ; \\ (e_k - e_j) & \text{si} \quad e_i = e_l \ . \end{cases}$$

Puisque l'ordre dans lequel sont envisagés les contrastes adjacents n'intervient en aucune manière dans la perception de la "somme", on doit s'attendre à la commutativité de l'addition partitive. En effet:

---

1) Nous avons choisi d'appeler "partitive" l'addition définie entre contrastes adjacents parce qu'elle est de ce fait limitée à l'addition entre parties d'un même tout.

$$\forall\ (e_i - e_j),\ (e_k - e_l) \in E^* :$$

$$[(e_i - e_j),\ (e_k - e_l)] \in C_a^{**} \Rightarrow [(e_k - e_l),\ (e_i - e_j)] \in C_a^{**}$$

$$\text{et } (e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_k - e_l) =^* (e_k - e_l) \overset{p}{+} (e_i - e_j).$$ [1]

Par contre, l'addition partitive n'est pas associative. En effet, additionner les parties d'un même tout n'est possible que si les parties sont adjacentes les unes aux autres. L'associativité de l'addition partitive n'est acquise qu'à condition de réarranger préalablement les contrastes à l'aide de la commutativité afin de les rendre adjacents. Ainsi l'addition partitive vérifie-t-elle une condition d'associativité affaiblie:

$$\forall\ c,\ c',\ c'' \in E^* :$$ [2]

$$(c, c') \in C_a^{**} \text{ et } [(c \overset{p}{+} c'), c''] \in C_a^{**} \Rightarrow [\ (c', c'') \in C_a^{**} \text{ ou } (c'', c) \in C_a^{**}]$$

$$\text{et } [\ (c, (c' \overset{p}{+} c'')) \in C_a^{**} \text{ ou } ((c'' + c), c') \in C_a^{**}] \text{ et}$$

$$(c \overset{p}{+} c') \overset{p}{+} c'' =^* c \overset{p}{+} (c' + c'') \text{ ou } (c'' \overset{p}{+} c) \overset{p}{+} c'$$

$$=^* (c' \overset{p}{+} c'') \overset{p}{+} c \text{ ou } c'' \overset{p}{+} (c \overset{p}{+} c').$$ [3]

Les contrastes nuls apparaissent comme des éléments neutres pour l'addition partitive:

---

1) La commutativité découle de la symétrie de la situation d'adjacence (voir p. 98) et de la propriété A.I.1.
2) Pour simplifier l'écriture de cette condition nous notons c un contraste quelconque de E*. En général B. ROY utilise ce symbole pour désigner une dimension particulière d'un problème de décision. Mais puisque nous avons limité notre discussion à une seule dimension, nous n'emploierons pas ce symbole dans ce sens et il n'y aura pas d'ambiguités possibles à son égard.
3) $\forall\ e_i, e_j, e_k, e_l, e_m, e_n \in E$:
$[(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_k - e_l)] \overset{p}{+} (e_m - e_n) \Rightarrow (e_k = e_j) \text{ et } [(e_m = e_l) \text{ ou } (e_i = e_n)] \text{ ou}$
$(e_i = e_l) \text{ et } [(e_j = e_m) \text{ ou } (e_k = e_n)].$

$$\forall\ (e_i - e_j) \in E^* :$$

$$[(e_i - e_j), (e_j - e_j)] \in C_a^{**} \text{ et } [(e_i - e_i), (e_i - e_j)] \in C_a^{**}$$

$$\text{et } (e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_j - e_j) =^* (e_i - e_j) \text{ et } (e_i - e_i) \overset{p}{+} (e_i - e_j) =^* (e_i - e_j).$$

Enfin à chaque contraste est associé dans le cadre de l'addition partitive un contraste opposé qui sera son inverse.

Si nous appelons "soustraction partitive" $\overset{p}{-}$ l'addition d'un contraste inverse, l'opération de soustraction ainsi définie représente l'opération inverse de l'addition partitive.

$$\forall\ (e_i - e_j) \in E^* : \overset{p}{+}(e_i - e_j) =^* \overset{p}{-}(e_j - e_i).$$

Dès lors, l'équilibre perceptif de l'addition partitive découle de la condition de réversibilité liant l'addition et la soustraction partitive

$$\forall\ (e_i - e_j) \in E^* : [(e_i - e_j), (e_j - e_i)] \in C_a^{**} \text{ et } [(e_j - e_i), (e_i - e_j)] \in C_a^{**} :$$

$$(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_j - e_i) =^* (e_i - e_i) ;$$

$$(e_j - e_i) \overset{p}{+} (e_i - e_j) =^* (e_j - e_j) .$$

Additionner le contraste $(e_i - e_j)$ à sont contraste inverse $(e_i - e_j)$ revient à soustraire $(e_i - e_j)$ de lui-même et donne par conséquent un contraste nul.

Ainsi avons-nous défini sur E* une opération perceptive qui traduit la propriété additive des contrastes adjacents. Cette opération perceptive dépasse considérablement en précision l'activité perceptive nécessaire à la sériation des contrastes. L'addition partitive, qui prolonge en fait la sériation intensive, ne fait que confirmer les résultats de celle-ci.

En effet, on peut montrer la compatibilité de l'addition partitive avec la sériation intensive des contrastes. Pour cela, il suffit de poser que deux contrastes favorables ou nuls adjacents sont "au plus aussi favorables que" ($\leqslant_i^*$) leur somme : $\forall\ (e_i - e_j), (e_k - e_l) \in E_+^* \cup E_=^*$ tels que $[(e_i - e_j), (e_k - e_l)] \in C_a^{**}$: $(e_i - e_j), (e_k - e_l) \leqslant_i^* (e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_k - e_l)$. Dès lors, $(e_i - e_j), (e_j - e_l) \leqslant_i^* (e_i - e_l) \Leftrightarrow (e_i \geqslant e_j \geqslant e_l)$ ou $(e_i - e_j), (e_k - e_i) \leqslant_i^* (e_k - e_j) \Leftrightarrow (e_k \geqslant e_i \geqslant e_j)$; et on retrouve la définition de la sériation intensive des contrastes favorables ou nuls.[1] De même si nous posons que deux contrastes défavorables ou nuls adjacents sont "au plus aussi défavorables que" ($\geqslant_i^*$) leur somme, nous retrouvons la définition de la sériation intensive des contrastes défavorables ou nuls. La transitivité de la relation $\geqslant_i^*$ est assurée par la condition d'associativité affaiblie. La commutativité de l'addition partitive entraîne nécessairement l'identité ($=_i^*$) entre les contrastes nuls.[2] Enfin la condition de réversibilité qui lie l'addition partitive à l'inversion des contrastes implique la condition de réversibilité liant la réciprocité de la relation $\geqslant_i^*$ à l'inversion des contrastes.[3]

L'addition partitive caractérise un nouveau type d'échelle qualitative qui se situe, eu égard à la précision de la perception, à la suite de l'échelle qualitative intensive.

---

1) Voir D.II.8. p.83
2) La commutativité entraîne ainsi également l'unicité de l'opposé d'un contraste. (voir p.101)
3) Voir p.84

D.II.13.

Nous appelons <u>échelle qualitative métrique</u> [1] une échelle qualitative intensive sur laquelle l'acteur du processus de décision admet une opération d'addition partitive, c'est-à-dire une fonction $\overset{p}{+}$ de C_a^{**}(l'ensemble des couples de contrastes adjacents) dans E* qui vérifie la propriété suivante:

$$\forall\ i,j,k,l = 0,1,\ldots,r \ \text{ tels que } [(e_i - e_j),(e_k - e_l)] \in C_a^{**}:$$

$$(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_k - e_l) \overset{*}{=} \begin{cases} (e_i - e_l) \ si \ (e_j = e_k)\,; \\ (e_k - e_j) \ si \ (e_i = e_l)\,. \end{cases}$$

L'addition partitive, ne s'appuyant que sur la partition des contrastes, ne fait pas référence à l'opération de déplacement des contrastes. Ce déplacement peut s'ajouter à l'addition partitive.

En effet, il y a compatibilité entre l'addition partitive et la sériation extensive des contrastes. Prenons deux contrastes quelconques $(e_i - e_j)$ et $(e_k - e_l)$ que l'acteur peut comparer grâce au déplacement de $(e_i - e_j)$ sur $(e_k - e_l)$. Considérons maintenant un troisième contraste $(e_m - e_n)$ tel que $[(e_i - e_j),(e_m - e_n)] \in C_a^{**}$ et $[(e_k - e_l),(e_m - e_n)] \in C_a^{**}$. Puisqu'un même contraste est ajouté à $(e_i - e_j)$ et à $(e_k - e_l)$, le déplacement de $[(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_m - e_n)]$ sur $[(e_k - e_l) \overset{p}{+} (e_m - e_n)]$ doit révéler le même résultat, c'est-à-dire si $(e_i - e_j) \overset{*}{\geqslant} (e_k - e_l)$ alors $[(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_m - e_n)] \overset{*}{\geqslant} [(e_k - e_l) \overset{p}{+} (e_m - e_n)]$ et nous retrouvons la condition de réversibilité qui lie la réciprocité de la relation $\overset{*}{\geqslant}_i$ à la complémentarité des contrastes.[2] En effet, il s'ensuit

---

1) Nous avons choisi le terme "métrique" pour faire référence au fait que sur ce type d'échelle on peut définir une représentation numérique des contrastes, c'est-à-dire un codage de E*, à partir de la différence entre échelons codés (voir II. D. p.117)

2) Voir p.93 S.E.2.

que $[(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_m - e_n) \overset{p}{+} (e_k - e_l)] \in E^*$ ou $[(e_k - e_l) \overset{p}{+} (e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_m - e_n)] \in E^*$ et $(e_i - e_j)$ est le complémentaire de $[(e_m - e_n) \overset{p}{+} (e_k - e_l)$ et $(e_k - e_l)$ est le complémentaire de $[(e_i - e_j) \overset{p}{+} (e_m - e_n)]$ dans un même contraste.

Addition partitive et sériation extensive conduisent à un second type d'échelle qualitative métrique.

D.II.13'. Nous appelons <u>échelle qualitative métrique extensive</u> une échelle qualitative extensive sur laquelle tout acteur admet une opération d'addition partitive.

On peut encore définir l'échelle qualitative métrique extensive comme une échelle qualitative métrique sur laquelle tout acteur admet une sériation extensive des contrastes.

En augmentant ainsi de plus en plus la précision de la perception des contrastes, nous nous approchons de la "mesurabilité" de l'échelle qualitative. En effet, la seule opération perceptive qui manque désormais pour compléter la connaissance de la conséquence élémentaire qualitative est une opération de concaténation des contrastes nécessaire à toute mesure, et donc connaissance "exacte", des contrastes. Or cette opération nécessite la possibilité d'additionner des contrastes non adjacents, ce qui nous mène vers une autre opération d'addition des contrastes.

II. C. 2. <u>Addition extensive des contrastes</u>

Jusqu'à présent nous avons décrit une activité perceptive limitée à l'ensemble des contrastes observables à travers les mutations des actions potentielles à la décision. Cependant, si la précision de la perception des contrastes est suffisante, l'acteur peut s'éloigner des opérations perceptives que sont les mutations de A^*_c [1] pour identifier la "somme" de deux contrastes quelconques de E^* à un nouveau contraste. L'acteur accède ainsi à la possi-

---
1) Voir II. A. 4. p. 65.

bilité de combiner des modifications de la conséquence qualitative au-delà de celles concrètement observables, pour envisager de nouveaux contrastes qui ne sont plus nécessairement liés aux mutations des actions potentielles à la décision.

Pour traduire cette possibilité, construisons à partir de E^* un ensemble de contrastes, noté $\mathcal{E}^*$,

$$\mathcal{E}^* = E^* \cup E^* \times E^* \cup E^* \times E^* \times E^* \cup \ldots \cup E^* \times \ldots \times E^* \cup \ldots$$

$\mathcal{E}^*$ comprend toutes les combinaisons possibles de contrastes de E^*. Cependant, seul le sous-ensemble de contrastes qui n'excèdent pas $(e_r - e_o)$ ou $(e_o - e_r)$, c'est-à-dire les contrastes maximal et minimal de la sériation extensive et intensive [1], sont de quelque intérêt pour l'acteur. Soit $\mathscr{C}^*$ ce sous-ensemble de $\mathcal{E}^*$:

$$\mathscr{C}^* = \left\{ c \in \mathcal{E}^* \ / \ (e_r - e_o) \succcurlyeq^* c \succcurlyeq^* (e_o - e_r) \right\} .$$

Dans cette définition de $\mathscr{C}^*$ nous avons admis l'hypothèse selon laquelle l'acteur peut comparer tous les contrastes de $\mathcal{E}^*$ à $(e_r - e_o)$ et à $(e_o - e_r)$. Nous supposerons de plus que l'acteur peut spécifier à l'aide de l'opération de déplacement une structure relationnelle sur $\mathscr{C}^*$, notée $(\succcurlyeq^*/\mathscr{C}^*)$, où la relation "au moins aussi favorable que" $(\succcurlyeq^*)$ est un préordre total.

La construction de $\mathscr{C}^*$ fait référence à une nouvelle opération perceptive que nous appellerons <u>addition extensive</u>, notée $\dot{+}$, qui sera définie sur l'ensemble des couples de contrastes de $\mathscr{C}^*$ dont la "somme" n'excède pas $(e_r - e_o)$ ou $(e_o - e_r)$. Ainsi l'addition extensive apparaît-elle comme une fonction de $\mathscr{C}^{**} \subset \mathscr{C}^* \times \mathscr{C}^*$ dans $\mathscr{C}^*$, où

$$\mathscr{C}^{**} = \left\{ (c, c') \in \mathscr{C}^* \ / \ (e_r - e_o) \succcurlyeq^* c \dot{+} c' \succcurlyeq^* (e_o - e_r) \right\}$$

Quelles sont les conditions qui font de l'addition extensive une opération perceptive équilibrée?

1) De même que l'addition partitive [2], cette opération doit être commutative:

---

1) Voir tableau T.II.4. p.84

2) Voir II. C. 1. p.99

A.E.1. $\forall \quad c, c' \in \mathcal{C}^{*}$:

$$(c, c') \in \mathcal{C}^{**} \Rightarrow (c', c) \in \mathcal{C}^{**} \text{ et } \quad c \overset{e}{+} c' \stackrel{*}{=} c' \overset{e}{+} c \,.$$

2) Par contre, l'addition extensive sera associative, par opposition à l'addition partitive 1):

A.E.2. $\forall \quad c, c', c''' \in \mathcal{C}^{*}$:

$$(c, c') \in \mathcal{C}^{**} \text{ et } (c \overset{e}{+} c', c'') \in \mathcal{C}^{**} \Rightarrow (c', c'') \in \mathcal{C}^{**}$$

$$\text{et } (c, c' \overset{e}{+} c'') \in \mathcal{C}^{**} \text{ et } (c \overset{e}{+} c') \overset{e}{+} c' \stackrel{*}{=} c \overset{e}{+} (c' \overset{e}{+} c'').$$

3) Si nous notons $\dot{c}_o$ la classe d'équivalence des contrastes nuls, $\dot{c}_o$ **sera** l'élément neutre pour l'addition extensive 2):

A.E.3. $\forall \ c \in \mathcal{C}^{*} : (c, \dot{c}_o) \in \mathcal{C}^{**} \text{ et } \ c \overset{e}{+} \dot{c}_o = c$

4) Appelons <u>soustraction extensive</u> (notée $\overset{e}{-}$) l'addition d'un contraste de E* inversé:

$$\forall \quad (e - e') \in E^{*} : \quad \overset{e}{+} (e - e') \stackrel{*}{=} \overset{e}{-} (e' - e) \,.$$

L'équilibre perceptif de l'addition extensive prend la forme suivante:

A.E.4. $\forall (e - e') \in E^{*}$ 3) $: (e - e') \overset{e}{+} (e' - e) \stackrel{*}{=} (e - e') \overset{e}{-} (e - e') \stackrel{*}{=} \dot{c}_o$

En général on peut donc associer à tout contraste $c \in \mathcal{C}^{*}$ qui est une somme de contrastes de E*: $c = (e-e') \overset{e}{+} (e''-e''') \overset{e}{+} \dots$ un contraste opposé $c' \in \mathcal{C}^{*}$ qui est la somme des mêmes contrastes inversés: $c' = (e'-e) \overset{e}{+} (e'''-e'') \overset{e}{+} \dots$, tel que leur somme, $c \overset{e}{+} c'$ donne l'élément neutre $\dot{c}_o$. 4)

5) Il est naturel de supposer l'addition extensive compatible avec l'addition partitive puisqu'elle n'est qu'une généralisation de celle-ci. Elle vérifiera donc la même

---

1) Voir p.99
2) Dans l'addition partitive, seuls les contrastes nuls adjacents sont des éléments neutres.
3) En effet, $E^{*} \subset \mathcal{C}^{*}$.
4) $\forall (c, c') \in \mathcal{C}^{**}$: $(c \overset{e}{+} c') \stackrel{*}{=} [(e-e') \overset{e}{+} (e''-e''') \overset{e}{+} \dots] \overset{e}{+} [(e'-e) \overset{e}{+} (e'''-e'') \overset{e}{+} \dots]$

(en vertu de A.E.2) $\stackrel{*}{=} [(e-e') \overset{e}{+} (e'-e)] \overset{e}{+} [(e''-e''') \overset{e}{+} (e'''-e'')] + \dots$

(" A.E.3) $\stackrel{*}{=} \dot{c}_o$.

propriété: [1)]

A.E.5. $\quad \forall\ (e - e'), (e'' - e''') \in E^*$ tels que $[(e - e'), (e'' - e''')] \in \mathcal{C}^{**}$

$$[(e - e') \overset{e}{+} (e'' - e''')] \overset{*}{=} \begin{cases} (e - e''') & \text{si } (e' = e'')\,; \\ (e'' - e') & \text{si } (e = e''')\,. \end{cases}$$

6) Finalement, nous supposerons que l'addition extensive est compatible avec la structure relationnelle $(\geqslant^* / \mathcal{C}^*)$

A.E.6. $\quad \forall\ c, c' \in \mathcal{C}^*$:

$$c \geqslant^* c' \Rightarrow (c \overset{e}{+} c'') \geqslant^* (c' \overset{e}{+} c'') \quad \forall\ c'' \in \mathcal{C}^*$$
$$\succ (c, c'') \in \mathcal{C}^{**} \text{ et } (c', c'') \in \mathcal{C}^{**}.$$

La condition A. E. 6. entraîne sur $(\geqslant^* / \mathcal{C}^*)$ les conditions de réversibilité liant la réciprocité de la relation $\geqslant^*$ à l'inversion et à la complémentarité des contrastes de E* [2)]; la sériation $(\geqslant^* / \mathcal{C}^*)$ généralise la sériation extensive de E*. [3)]

L'addition extensive caractérise un niveau de précision de l'activité perceptive auquel nous pouvons associer un nouveau type d'échelle qualitative.

D.II.14. Nous appelons <u>échelle qualitative additive</u> une échelle qualitative extensive sur laquelle l'acteur admet:

a) une sériation $(\geqslant^* / \mathcal{C}^*)$, où $\geqslant^*$ est un préordre total sur $\mathcal{C}^*$ qui est l'ensemble des combinaisons possibles de contrastes de E* n'excédant pas $(e_r - e_o)$ ou $(e_o - e_r)$;

b) une opération d'addition extensive, c'est-à-dire

---

1) Voir II. C. 1. p. 99.

2) $\forall\ c, c' \in E^*$: $c \geqslant^* c' \overset{A.E.6.}{\Rightarrow} (c \overset{e}{-} c) \overset{e}{-} c' \geqslant^* (c' \overset{e}{-} c') \overset{e}{-} c$;
$\forall\ c, c', c'', c''' \in E^* \succ (c, c') \in \mathcal{C}^{**}, (c', c'') \in \mathcal{C}^{**}$ et $(c' \overset{e}{+} c'', c) \in \mathcal{C}^{**}$ et $(c \overset{e}{+} c'') \in E^*$, $(c' \overset{e}{+} c'') \in E^*$ et $(c' \overset{e}{+} c'' \overset{e}{+} c) \in E^*$, alors $(c \overset{e}{+} c'')$ est le complémentaire de c' dans $(c' \overset{e}{+} c'' \overset{e}{+} c)$ et $(c' \overset{e}{+} c'')$ est le complémentaire d c dans le même contraste de E*.

3) Voir D.II.11. p. 93.

une fonction de $\mathscr{C}^{**} \subset \mathscr{C}^* \times \mathscr{C}^*$ dans $\mathscr{C}^*$ qui vérifie les propriétés A.E.1. à A.E.6. et où $\mathscr{C}^{**}$ est l'ensemble des couples de contrastes de $\mathscr{C}^*$ dont la somme n'excède pas $(e_r - e_o)$ ou $(e_o - e_r)$.

Une partie de l'opération d'addition extensive caractérisant l'échelle qualitative additive nous intéresse particulièrement; ce sont les opérations consistant en une addition répétée d'un même contraste à lui-même, c'est-à-dire les opérations de "concaténation". 1)

II. C. 3. Concaténation des contrastes

Or, de même que l'addition extensive, cette opération de concaténation est limitée par le fait que le résultat de la concaténation doit être un contraste $c \in \mathscr{C}^*$. Pour chaque contraste $(e-e') \in E^*$ on trouve ainsi un plus grand nombre entier qui indique le nombre de fois que l'on peut ajouter $(e-e')$ à lui-même sans dépasser ni $(e_r - e_o)$ ni $(e_o - e_r)$

En effet, on peut associer à tout contraste non nul un ensemble $N^+_{(e-e')} \subset N^+$ (entiers positifs) pour lequel $\forall\, n \in N^+_{(e-e')}$ est défini inductivement de la manière suivante:

$$\forall\ (e - e') \in E^*_+ \cup E^*_- :$$

a) $1 \in N^+_{(e-e')}$ et $1(e - e') =^* (e - e')$;

b) si $(n - 1) \in N^+_{(e-e')}$ et $[(n-1)(e - e'), (e-e')] \in \mathscr{C}^{**}$ alors $n \in N^+_{(e-e')}$ et $n(e - e') =^* (n-1)(e - e') \stackrel{e}{+} (e-e')$;

c) si $(n - 1) \in N^+_{(e-e')}$ et $[(n-1)(e - e'), (e-e')] \notin \mathscr{C}^{**}$ alors $\forall\, m \geqslant n$, $m \notin N^+_{(e-e')}$.

La soustraction répétée d'un contraste non nul revenant à l'addition répétée du contraste inverse, on peut également définir une opération de concaténation à partir

---

1) La formalisation s'inspire de KRANTZ, LUCE, SUPPES et TVERSKY (op.cit., chap. I. p. 36), p. 44

de la soustraction extensive en associant à $\forall\,(e-e') \in E^*_+ \cup E^*_-$ un ensemble $N^-_{(e-e')} \subset N^-$ (entiers négatifs) pour lequel $\forall\, n \in N^-_{(e-e')}$ est défini inductivement de la manière suivante:

a) $-1 \in N^-_{(e-e')}$ et $(-1)(e-e') =^* \overset{e}{-}(e-e') =^* (e'-e)$

b) $-(n-1) \in N^-_{(e-e')}$ et $[(-n+1)(e-e'), (e'-e)] \in \mathcal{C}^{**}$
alors $-n \in N^-_{(e-e')}$ et $(-n)(e-e') =^* (-n+1)(e-e') \overset{e}{-} (e-e')$;

c) $-(n-1) \in N^-_{(e-e')}$ et $[(-n+1)(e-e'), (e'-e)] \notin \mathcal{C}^{**}$
alors $\forall -m \leqslant -n$, $-m \notin N^-_{(e-e')}$.

A tout contraste $(e-e') \in E^{*} \cup E^*$ est ainsi associé un ensemble $N_{(e-e')}$ qui est l'union de $N^+_{(e-e')}$ et de $N^-_{(e-e')}$. Or, de par l'équivalence entre l'addition extensive et la soustraction extensive "inverse" :

$$\forall\; e, e' \in E :$$

$$N^+_{(e-e')} = N^-_{(e'-e)}\;;\quad N^-_{(e-e')} = N^+_{(e'-e)}\;;\quad N_{(e-e')} = N_{(e'-e)}\,.$$

C'est pourquoi nous pouvons limiter l'étude de l'opération de concaténation à l'ensemble des contrastes favorables.

De plus $\quad \forall\, n \in N^+_{(e-e')} \Rightarrow -n \in N^-_{(e-e')}$

<u>Démonstration:</u>

Soit $m \in N^+_{(e-e')} \succ\!\!- -m \notin N^-_{(e-e')}$: $m(e-e') \leqslant^* (e_r-e_o)$ et $(-m)(e-e') <^* (e_o-e_r)$. Dès lors $\dot{c}_o =^* m(e-e') \overset{e}{+} (-m)(e-e') \leqslant^* (e_r-e_o) \overset{e}{+} (-m)(e-e')$ et $(e_r-e_o) \overset{e}{+} (-m)(e-e') <^* (e_o-e_r) \overset{e}{+} (m)(e-e') \overset{e}{+} (e_r-e_o) \overset{e}{+} (-m)(e-e') =^* \dot{c}_o$, ce qui est contradictoire. ◆

La connaissance de $N^+_{(e-e')}$ est ainsi suffisante pour décrire complètement l'opération de concaténation sur E^*.

Revenons maintenant au plus grand nombre entier de $N^+_{(e-e')}$. On entrevoit qu'il est important pour la connaissance des contrastes dans une échelle qualitative qu'il n'y en ait aucun qui soit infiniment favorable (resp. défavorable). Cette condition archimédienne [1] imposée aux contrastes peut s'énoncer ainsi:

A.E.7. $\forall\ (e - e'), (e'' - e''') \in E^*_+$:

$$(e - e') \leq^* (e'' - e''') \Rightarrow \{ n \in N^+_{(e-e')} \ / \ n(e - e') \leq^* (e'' - e''')\}$$
est un ensemble fini.

Une dernière condition manque encore pour que la connaissance de l'échelle qualitative atteigne son maximum: on doit trouver dans E un contraste particulier, appelé contraste-unité (noté cu) à l'aide duquel on peut "mesurer exactement" tous les autres contrastes non nuls de E^*.

Autrement dit, il faut qu'il existe dans E un contraste cu tel que l'équation suivante soit résoluble pour tout contraste non nul:

$$\forall\ (e - e') \in E^*_+ \cup E^*_- \ : \ (e - e') =^* n\,cu \quad \text{avec } n \in N_{cu}$$

Cette situation est vérifiée si en plus de A.E.7., l'échelle qualitative additive admet la propriété structurelle suivante:

A.E.8. $\forall\ c, c' \in E^*_+ \ : \quad c <^* c' \Rightarrow \exists\ c'' \in E^*_+ \succ$

$$(c, c'') \in \mathcal{C}^{**} \quad \text{et} \quad c \overset{e}{+} c'' \leq^* c'.$$

En effet, il existe ainsi dans E^*_+ un contraste minimal au sens de la relation $(< / E)$ à l'aide duquel on peut mesurer exactement tous les contrastes dans E.

Démonstration:

Si $c, cu \in E^*_+$: $c >^* cu$, alors il existe en vertu de A.E.7. un nombre entier positif maximum, noté $N^+(c, cu)$ tel que $(N^+(c,cu)-1) \in N^+_{cu}$ et $c >^* (N^+(c, cu)-1)cu$. Posons $N^+(cu, cu)=1$. Maintenant en vertu de A.E.8. il existe un c' dans E^*_+ tel que $[(N^+(c,cu)-1), c'] \in \mathcal{C}^{**}$ et $c >^* (N^+(c, cu)-1)cu \overset{e}{+} c'$. Si cu est minimum, $c \geq^* cu$. Or $N^+(c, cu) \in N^+_{cu}$ et $c \geq^* (N^+(c,cu)cu)$. Mais dès lors $c \not>^* (N^+(c, cu)cu)$ et $c =^* (N^+(c,cu)cu)$. On peut faire une démonstration analogue pour $c \in E^*_-$. ♦

---

1) Il est intéressant de rapprocher cette condition de celle nécessaire à l'emploi de l'opérateur de moyenne. Voir I.B.2.b p.36

Avec l'échelle qualitative additive vérifiant la propriété structurelle A.E.8 et l'opération de concaténation vérifiant la propriété A.E.7. nous arrivons au terme de l'élaboration d'une typologie des échelles qualitatives. Ce dernier type d'échelle qualitative admet une activité perceptive suffisamment précise pour accéder à une connaissance exacte et numériquement précise des contrastes.

D.II.15. Nous appelons <u>échelle qualitative métrée</u> [1] une échelle qualitative additive qui vérifie la propriété A.E.8 et sur laquelle l'acteur admet une opération de concaténation qui vérifie la propriété A.E.7.

L'échelle qualitative métrée conclut notre élaboration d'une typologie des échelles qualitatives. Le tableau ci-dessous permet de résumer les connexions entre les types d'échelles métriques et additives.

Echelle qualitative métrée	$\Rightarrow$	Echelle qualitative additive	$\Rightarrow$	Echelle qualitative métrique extensive

Reconsidérons à la vue des résultats précédents le problème du choix d'une représentation numérique que l'homme d'étude peut associer à une échelle qualitative donnée.

1) Du verbe métrer: mesurer au mètre.

II. D. Relation entre le Niveau de Précision de l'Activité Perceptive et l'Indétermination de la Représentation Numérique de l'Echelle Qualitative

L'élaboration d'une typologie des échelles qualitatives en partant de l'analyse de l'activité perceptive, montre que l'opposition classique entre échelle ordinale [1] et échelle cardinale [1] doit céder la place à tout une suite d'échelles plus ou moins cardinales ou, ce qui revient au même [2], plus ou moins ordinales. Une fois opéré ce dépassement dialectique de l'opposition classique, le problème du choix d'une représentation numérique opérationnelle ne se réduit plus au choix d'un codage particulier de l'échelle qualitative.

II.D.1. Représentation numérique de l'échelle

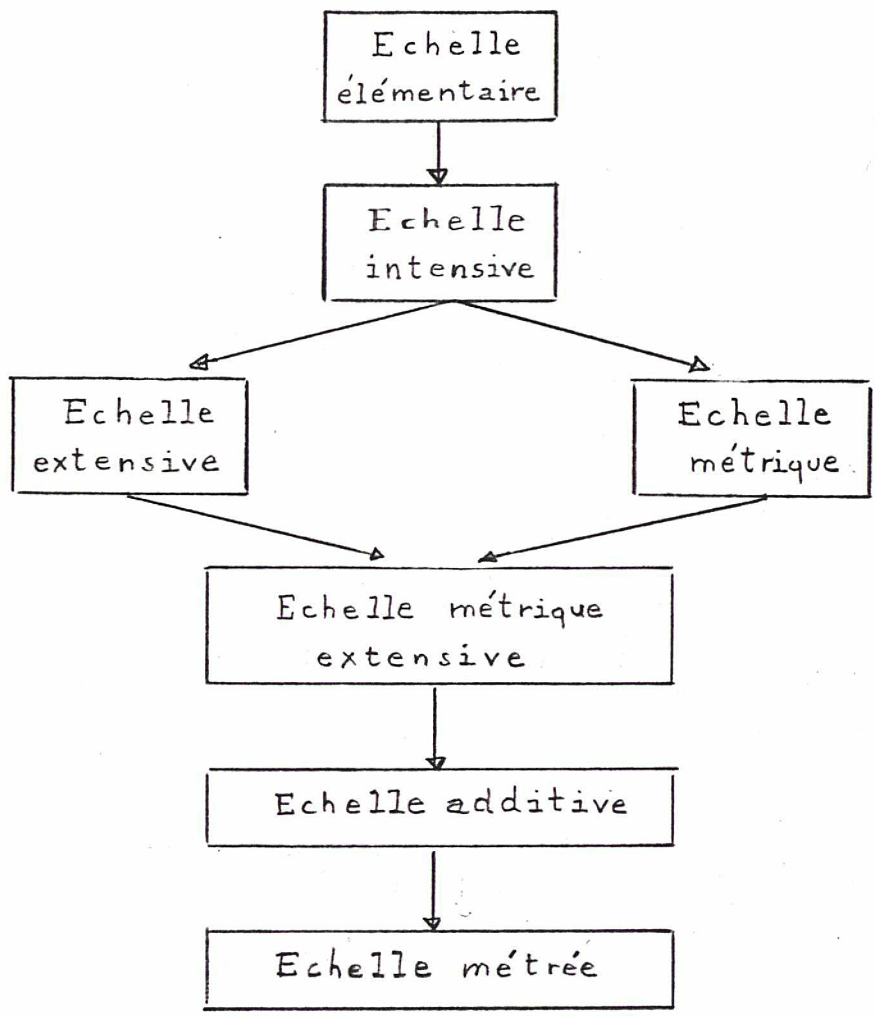
Représentons par une flèche l'augmentation de la précision de l'activité perceptive en passant d'un type d'échelle à un autre. Le tableau que l'on peut ainsi dresser montre l'enchaînement des échelles reposant sur une connaissance de plus en plus précise des contrastes dans l'échelle.

---

1) Dans la terminologie anglosaxonne: "ordinal scale" et "interval-, ratio-, or difference-scale". Voir PFANZAGL, J., Theory of Mesurement, Physica Verlag, Würzburg-Wien, p. 28.

2) "(...) la qualité et la quantité sont inséparables, et cela aussi bien génétiquement que du point de vue d'une analyse logique ou axiomatique (...) Mais dire que la qualité et la quantité sont indissociables ne signifie nullement qu'elles soient identiques; elles sont simplement aussi primitives l'une que l'autre, au point de vue génétique, et aboutissent, en leur état d'équilibre opératoire à une forme de solidarité telle que l'on ne saurait définir l'une sans faire appelle à l'autre." J. PIAGET, Epist. génétique, T. 1. p. 77-78.

T.II.4. Typologie des échelles qualitatives



Les définitions de ces types d'échelles qualitatives sont basées sur des hypothèses quant à la performance de l'activité perceptive de l'acteur relativement à une conséquence qualitative. Ces hypothèses trouvent leur reflet dans une indétermination spécifique, inhérente au codage de chaque type d'échelle envisagé.

Or, l'opposition classique entre échelle ordinale et échelle cardinale ne distingue qu'entre d'un côté un codage défini à une transformation monotone croissante près et de l'autre un codage défini à une transformation linéaire positive près; elle occulte ainsi le problème de la représentation numérique de l'ensemble des contrastes. Le codage de l'échelle qui ne doit traduire en fait que la structure ordinale $(</E)$ ne donne pas nécessairement la description numérique de la structure $(\leqslant^*/E^*)$. En effet, dans le cas d'une non-additivité des contrastes, comme elle existe dans les échelles non métriques, la représentation numérique des contrastes ne découle pas simplement des différences entre les valeurs codées des échelons. C'est pourquoi il importe de distinguer clairement entre le codage et la représentation numérique des contrastes; nous appellerons cette dernière: <u>codage-C</u> de l'échelle.

D.II.16.

Le codage-C d'une échelle qualitative est une fonction $\emptyset$ à valeurs réelles définies sur E^* (resp. $\mathcal{C}^*$) telle que:

1) $\forall c, c' \in E^* : (c \geqslant^* c') \Leftrightarrow \emptyset(c) \geqslant \emptyset(c')$;

2) $\forall c \in E^*_= : \emptyset(c) = 0$.

Ainsi supposerons-nous que le codage-C est une fonction numérique, définie sur E^* ou $\mathcal{C}^*$, qui vérifie la sériation de contrastes et qui, de plus, associe une valeur zéro aux contrastes nuls. Par conséquent, l'échelle qualitative supportant au moins une sériation élémentaire, tout codage-C $\emptyset$ associe des valeurs positives (resp. négatives) aux contrastes favorables (resp. défavorables).

Il est toujours possible d'associer un codage-C à valeurs finies à une échelle non-additive, car E^* est un ensemble fini. Par contre, $\mathcal{C}^*$ n'est pas nécessairement fini et il faut imposer une condition archimédienne à l'échelle additive pour qu'il puisse exister un codage-C $\emptyset$ ne prenant que des valeurs finies.

Codage-C et codage d'une échelle qualitative sont en général sémantiquement dépendants l'un de l'autre, puisque tout codage peut être interprété comme la représentation numérique d'un sous-ensemble particulier de contrastes: les contrastes entre tous les échelons de l'échelle et un échelon particulier figurant comme "origine" de cette échelle de préférence. Par conséquent, pour donner une représentation numérique "cohérente", que nous appellerons image numérique de l'échelle, codage-C et codage doivent être liés entre-eux.

D.II.17.

Nous appelons image numérique d'une échelle qualitative, le couple $[\emptyset, \chi]$ tel que, $e \in E$ étant pris comme origine de l'échelle,

$$\forall e' \in E : \quad \chi(e') = \emptyset(e'-e).$$

L'image numérique d'une échelle qualitative consiste donc en un codage-C $\emptyset$ et un codage χ, partie de $\emptyset$, dépendant du choix de l'origine de l'échelle. L'indétermination de la représentation numérique d'une échelle qualitative n'affecte ainsi pas primordialement le codage χ, mais plutôt le codage-C $\emptyset$.

Interprétons donc les différents types d'échelles qualitatives suivant l'indétermination de ce codage-C.

II.D.2. Typologie des échelles qualitatives suivant l'indétermination de la représentation numérique des contrastes

C'est ainsi que l'on remarquera que le passage de l'échelle élémentaire à l'échelle intensive se caractérise par le fait que tout codage-C défini sur le dernier type d'échelle donne une image numérique de l'échelle, alors que les codage-C admissibles sur le premier type ne donnent pas nécessairement une telle image. Limiter l'indétermination de l'image numérique à l'indétermination du codage-C présuppose donc une sériation intensive des contrastes:

D.II.18.

Nous appelons graduable[1] une échelle qualitative sur laquelle tout codage-C $\emptyset$ admissible donne une image numérique de celle-ci.

Par opposition à tous les autres types d'échelles qualitatives, l'échelle élémentaire n'est pas graduable.

---

1) Terminologie empruntée à B. ROY, "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", SEMA, rapport de synthèse, N° 87, 1978, 87.

D'autre part, le codage-C d'une échelle intensive ne prend appui que sur une structure ($\succcurlyeq_i^*/E^*$) partielle, alors que le codage-C d'une échelle extensive traduit une structure ($\succcurlyeq_e^*/E^*$) complète. Pour marquer cette différence nous appellerons <u>partiellement graduable</u> toute échelle graduable sur laquelle la sériation des contrastes est partielle. L'échelle intensive et l'échelle métrique sont des échelles partiellement graduables.

Par contre, l'échelle extensive, l'échelle métrique extensive, l'échelle additive et l'échelle métrée sont des échelles graduables.

Considérons maintenant les échelles métriques. L'addition partitive des contrastes entraîne une dépendance "fonctionnelle" entre le codage-C et le codage en ce sens que l'image numérique d'une telle échelle est entièrement déterminée par le codage.

Soit χ un codage d'une échelle métrique E telle que e_o soit pris comme origine:

Puisque E supporte l'addition partitive, nous avons:

$$\forall (e-e') \in E^* : (e-e') =^* (e-e_o) \overset{P}{-} (e'-e_o) .$$

Toute image numérique comprenant χ et vérifiant l'addition partitive sur E satisfait dès lors la relation suivante:

$$\forall (e-e') \in E^*: \emptyset(e-e') = [\chi(e) - \chi(e')] .$$

L'image est donc uniquement déterminée par le choix de χ . Montrons encore que $\emptyset$ est compatible avec l'addition partitive:

$$\forall \ (e-e'), (e''-e''') \in E^* :$$

$$\phi((e-e') \overset{P}{+} (e''-e''')) = \begin{cases} \phi(e-e''') = \chi(e) - \chi(e''') - \chi(e') + \chi(e'') ; \\ \text{ou} \\ \phi(e''-e') = \chi(e'') - \chi(e') - \chi(e''') + \chi(e''') ; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \phi(e-e'') + \phi(e''-e''') ; \\ \text{ou} \\ \phi(e'''-e') + \phi(e''-e''') . \end{cases}$$

$\varnothing$ traduira par conséquent la sériation intensive des contrastes:

$$\forall\ (e-e'),\ (e''-e''') \in E^* :$$

$$(e-e') \geqslant_i^* (e''-e''') \Rightarrow \varnothing(e-e') \geqslant \varnothing(e''-e''').$$

Démonstration:

$\forall\ (e-e'),\ (e''-e''') \in E_+^* : (e-e') \geqslant_i^* (e''-e''') \Rightarrow \exists\ (e^{IV}-e^{V}) \in E_+^* \in E_=^*$
$(e-e') \geqslant_i^* (e''-e''') \overset{P}{+} (e^{IV}-e^{V}) \Rightarrow \varnothing(e-e') \geqslant \varnothing((e''-e''') \overset{P}{+} (e^{IV}-e^{V}) =$
$\varnothing(e''-e''') + \varnothing(e^{IV}-e^{V})$, donc $\varnothing(e-e') \geqslant \varnothing(e''-e''')$ puisque $\varnothing(e^{IV}-e^{V}) \geqslant 0$.♦

Le choix du codage χ est donc suffisant pour associer leur ima image numérique à l'échelle métrique; l'indétermination de celle-ci se réduit à l'indétermination du codage χ.

D.II.19.

Nous appelons métrisables[1] les échelles qualitatives sur lesquelles toute image numérique $[\varnothing, \chi]$ est déterminée par le codage χ à travers la relation suivante:

$$\forall (e-e') \in E^* : \varnothing(e-e') = [\chi(e) - \chi(e')].$$

L'échelle métrique, l'échelle métrique extensive, l'échelle additive et l'échelle métrée sont des échelles métrisables. On remarquera que l'échelle métrique, tout en étant métrisable, n'est que partiellement graduable, et que l'échelle extensive, bien que graduable, n'est pas pour autant métrisable.

Dans le cas des échelles métriques, l'indétermination de l'image numérique se réduit donc à l'indétermination du codage χ. Si de plus on est en présence d'une échelle métrique extensive, cette indétermination est réduite davantage par les contraintes qu'impose la sériation extensive au codage-C déduit de χ.

$$\forall\ (e-e'),(e''-e''') \in E^* :$$
$$(e-e') \geqslant_e^* (e''-e''') \Leftrightarrow (\chi(e)-\chi(e')) \geqslant (\chi(e'')-\chi(e''')).$$

---

1) Nous avons choisi le terme "métrisable" pour renvoyer au fait que le codage-C des contrastes favorables et nuls dans une échelle métrique répond aux axiomes d'une distance.

Arrêtons-nous un instant aux échelles métriques extensives pour considérer le cas particulier de l'échelle régulière. Les contraintes exercées par la sériation "régulière" sur le choix de codage χ sont telles que celui-ci est déterminé à une transformation linéaire positive près, c'est-à-dire la détermination requise par le modèle de la somme pondérée.

En effet, soit $\emptyset$ le codage-C suivant défini sur une échelle régulière :

$$\forall\, c \in E^* : \emptyset(c) = \begin{cases} \mathrm{amp}(c) & \text{si } c \in E^*_+ \ ; \\ 0 & \text{si } c \in E^*_= \ ; \\ -\mathrm{amp}(c) & \text{si } c \in E^*_- \ . \end{cases}$$

On voit aisément que ce codage-C vérifie l'addition partitive ainsi que la sériation régulière et qu'il donne une image numérique de E avec e_o pris comme origine de l'échelle.

Considérons à présent une autre image $[\emptyset', \chi']$ quelconque de E, où $\emptyset'$ vérifie l'addition partitive et la sériation régulière. Si nous notons c_j pour $j = 1, 2, \dots, r$, les contrastes élémentaires $(e_j - e_{j-1})$ de E^* :

$$\forall c \in E^* \quad \text{et } j = 1, 2, \dots r \ :$$

$$c =^* \begin{cases} \underbrace{(c_j \overset{P}{+} c_{j+1} \overset{P}{+} \dots \overset{P}{+} c_{j+n})}_{n} & \text{si} \quad c \in E^*_+ \ ; \\ \underline{P}\underbrace{(c_j \overset{P}{+} c_{j+1} \overset{P}{+} \dots \overset{P}{+} c_{j+k})}_{n} & \text{si } c \in E^*_- \ , \end{cases}$$

$$\text{pour } j = 1, 2, \dots . r .$$

Dès lors: $\forall\ c \in E^*$:

$$\emptyset'(c) = \begin{cases} \emptyset'(\overbrace{c_j \overset{P}{+} c_{j+1} \overset{P}{+} \dots\dots \overset{P}{+} c_{j+n}}^{n}) & \text{si } c \in E^*_+ \ ; \\ = 0 \quad \text{si } c \in E^*_= \ ; \\ \emptyset'(\underline{P}\underbrace{(c_j \overset{P}{+} c_{j+1} \overset{P}{+} \dots \overset{P}{+} c_{j+k})}_{n} & \text{si } c \in E^*_- \ ; \end{cases}$$

$$\text{pour } j = 1, 2, \dots, r .$$

$$\phi''(c) = \begin{cases} n\phi'(c_j) \\ 0 \\ -n\phi'(c_j) \end{cases}$$ (ϕ vérifie l'addition partitive et la sériation régulière)

$$= \alpha\, \phi(c) \quad (n = \mathrm{amp}(c) = \phi(c),\ \alpha = \phi'(c_j))\ .$$

Le codage-C ϕ' d'une échelle métrique régulière est ainsi déterminé à un facteur multiplicatif positif près. D'autre part, comme ϕ' et χ', sont liés pour donner une image numérique de E, nous avons :

$$\forall\, e, e' \in E: \quad \chi'(e) - \chi'(e') = \phi'(e - e')$$
$$\chi'(e) = \alpha\, \phi(e - e') + \chi'(e').$$

Le codage χ' est donc déterminé à l'unité (choix de α) et à l'origine (choix de e') près.

L'échelle métrique régulière est donc du type requis par le modèle de la somme pondérée. Mais avant de revenir à notre propos du chapitre premier, abordons encore les échelles additives.

L'accès à l'addition extensive des contrastes permet de définir le codage-C comme une <u>mesure</u>, c'est-à-dire une fonction à valeurs réelles définies sur $\mathcal{C}^*$, qui est additive. Cependant, la cardinalité de $\mathcal{C}^*$ n'étant pas nécessairement finie, il faut imposer à l'échelle additive une condition archimédienne, telle que la condition A.E.7., pour qu'il existe un codage-C à valeurs toutes finies sur $\mathcal{C}^*$.

D.II.20.

Nous appelons <u>mesurable</u> l'échelle qualitative sur laquelle tout codage-C ϕ est une fonction additive sur $\mathcal{C}^*$ et qui admet une image numérique à valeurs toutes finies.

Seule l'échelle additive vérifiant une condition archimédienne et l'échelle métrée sont dans ce cas, car l'addition extensive vérifiant la propriété A.E.6., il est possible de choisir χ et partant $\emptyset$ compatibles avec une sériation $(\succcurlyeq^*/\mathcal{E}^*)$ donnée. Au niveau de l'échelle mesurable, l'indétermination de l'image numérique est également réduite à l'indétermination du codage χ, car l'addition extensive recouvre l'addition partitive. D'autre part, le choix de χ est contraint par la sériation $(\succcurlyeq^*/\mathcal{C}^*)$ et comme cette sériation englobe la sériation extensive, l'indétermination de l'image numérique des échelles additives est en général moindre que celle des échelles métriques.

Ainsi arrivons-nous finalement à l'échelle métrée. Face à une telle échelle, la construction d'une image numérique peut s'appuyer sur une procédure de "comptage" à l'aide d'un contraste-unité cu, qui sera par exemple le plus petit contraste favorable dans l'échelle.

En effet, tout contraste non nul dans une telle échelle peut être exprimé comme une somme "positive" ou "négative" de n contrastes-unité cu :

$$\forall (e-e') \in E^*_+ \cup E^!_- \ : (e-e') =^* n\,cu \quad \text{avec } n \in N_{cu} \ .$$

Posons la valeur codée $\emptyset$ de chaque contraste non-nul égale au nombre n de contrastes-unité cu qu'il recouvre:

$$\forall (e-e') \in E^*_+ \cup E^*_- \ : \emptyset(e-e') \doteq n \Leftrightarrow (e-e') =^* n\,cu \ ,$$

et associons au contrastes nuls la valeur zéro:

$$\forall (e-e) \in E^*_= : \emptyset(e-e) = 0.$$

Le codage-C $\emptyset$ ainsi construit vérifie l'addition extensive et la sériation $(\succcurlyeq^*/\mathcal{C}^*)$; en effet,

$$\forall c, c' \in E^*_+ \cup E^*_- : (c =^* n\,cu \text{ et } c' =^* n'cu) \Rightarrow c \overset{e}{+} c' =^* (n + n')cu \ ;$$

$$\forall c, c' \in \mathcal{C}^* \succ c, c' \succ^* \dot{c}_o : (c \succ^* c') \Rightarrow \exists c'' \in \mathcal{C}^* : c'' \succ^* \dot{c}_o \text{ et}$$

$$c \succcurlyeq^* c' \overset{e}{+} c'') \Rightarrow (n\,cu =^* c \succcurlyeq^* (n' + n'')cu =^* n'cu \overset{e}{+} n''cu =^*$$

$$c' \overset{e}{+} c'') \Rightarrow (n \geqslant n' + n'') \Rightarrow \emptyset(c) \geqslant \emptyset(c') \text{ puisque } \emptyset(c'') > 0.$$

Pour caractériser l'arbitraire qui entoure ce choix de $\emptyset$, considérons un codage-C $\emptyset'$ quelconque, qui vérifie l'addition extensive et la sériation $(\succcurlyeq^*/\mathcal{C}^*)$.

Dès lors :

$$\forall c \in \mathscr{C}^* :$$

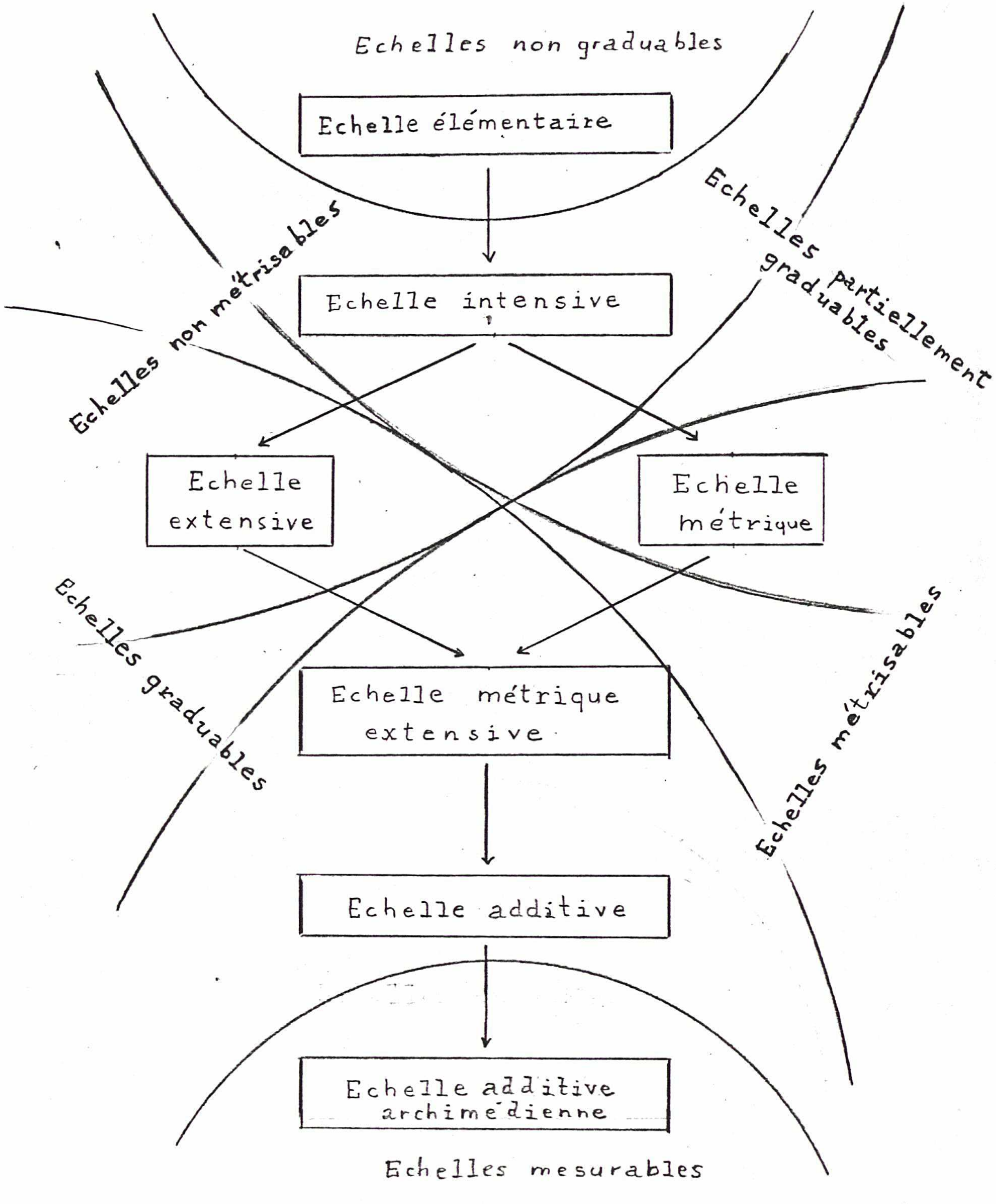
$$\begin{aligned} \emptyset'(c) &= \emptyset'(n c_u) \\ &= n\emptyset'(c_u) \text{ (en vertu de l'addition extensive)} \\ &= \alpha\emptyset(c) \quad \text{ou } \alpha = \emptyset'(c_u) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi le codage-C est-il défini à un facteur multiplicatif près. De ceci découle que le codage χ associé à $\emptyset$ au sein de l'image numérique est défini à l'origine (choix de e') et à l'unité (choix de α) près, c'est-à-dire à une transformation linéaire positive près. Avec l'échelle métrée nous retrouvons donc un autre type d'échelle compatible avec le modèle de la moyenne pondérée.

Pour conclure ce survol du problème du choix d'une représentation numérique à associer à l'échelle qualitative, on peut rassembler, dans un même tableau, les types d'échelles identifiés sur la base de la performance de l'activité perceptive et les types d'échelles identifiés sur la base de l'indétermination de l'image numérique. (Voir le tableau de la page suivante.)

L'opposition classique entre échelle ordinale et échelle cardinale, uniquement basée sur l'indétermination du codage de l'échelle, ne permet pas de mettre en évidence les deux passages importants qui se situent entre le caractère métrisable ou non et le caractère mesurable ou non de l'échelle. Or la première distinction fait entrevoir les hypothèses sousjacentes, nécessaires à la réduction du problème de la représentation numérique au seul choix d'un codage χ particulier. La seconde distinction permet de souligner le grand écart dans la performance de l'activité perceptive qui conditionne le passage de l'addition partitive, définie sur un ensemble de contrastes "concrets" (E*), à l'addition extensive qui, elle, est définie dans un ensemble de contrastes largement élargi à l'aide d'une combinatoire "additive" ($\mathscr{C}^*$).

T.II.5. Types d'échelles qualitatives suivant la performance de l'activité perceptive et l'indétermination de la représentation numérique



Nous voilà en mesure d'apprécier l'artefact du domaine décisionnel introduit par le modèle de la moyenne pondérée. En effet, comme nous l'avons remarqué plus haut, la plupart des échelles qualitatives utilisées en pratique appartiennent à la classe des échelles communes et se situent par conséquent entre une échelle intensive et une échelle extensive.

L'instabilité de la perception des échelons fait qu'en général ces échelles n'admettent ni une opération d'addition partitive, ni a fortiori une opération d'addition extensive.

Or les seules échelles qualitatives dont peut rendre compte le modèle de la moyenne pondérée sont les échelles déterminées numériquement à une transformation linéaire positive près, c'est-à-dire l'échelle métrique régulière et l'échelle métrée. Utiliser le modèle de la moyenne pondérée revient ainsi à imposer aux échelles qualitatives un caractère artificiel incompatible avec leur nature qualitative.

Cependant, cet artefact ne porte que sur une partie des caractéristiques des échelles qualitatives, puisque toute échelle métrée ou métrique régulière est également une échelle extensive et donc intensive. C'est pourquoi certains aspects de l'image numérique des échelles utilisées par le modèle de moyenne pondérée supportent un contenu pragmatique "réel".

Or, ce contenu réel, implicitement pris en compte, est-ce qu'on n'en retrouverait pas les traces dans la structure relationnelle de surclassement orienté, modélisé par l'opération de moyenne? Cette question nous préoccupera dans un troisième chapitre.

Chapitre III

COMPARAISON DES EVALUATIONS DISTRIBUTIONNELLES QUALITATIVES

"(...) pour découvrir les faits et les lois, le sujet a besoin d'opération en tant qu'instrument de lecture et de structuration (...)"

J. Piaget

"L'incertitude personnelle n'est pas un doute extérieur à ce qui se passe, mais une structure objective de l'événement en tant qu'il va toujours en deux sens à la fois et qu'il écartèle le sujet suivant cette double direction. Le paradoxe est d'abord ce qui détruit le bon sens comme sens unique, mais ensuite ce qui détruit le sens comme assignation d'identités fixes."

G. Deleuze[1)]

Dans ce troisième chapitre nous aborderons l'étude des conséquences de l'artefact du domaine décisionnel introduit par le modèle de la moyenne pondérée sur le système relationnel de surclassement orienté.

Pour cela, nous élargirons le cadre de la modélisation des préférences sur $\mathcal{P}$ par l'introduction d'une opération perceptive: la mutation des évaluations distributionnelles.

1) Logique du sens, Minuit, Paris.

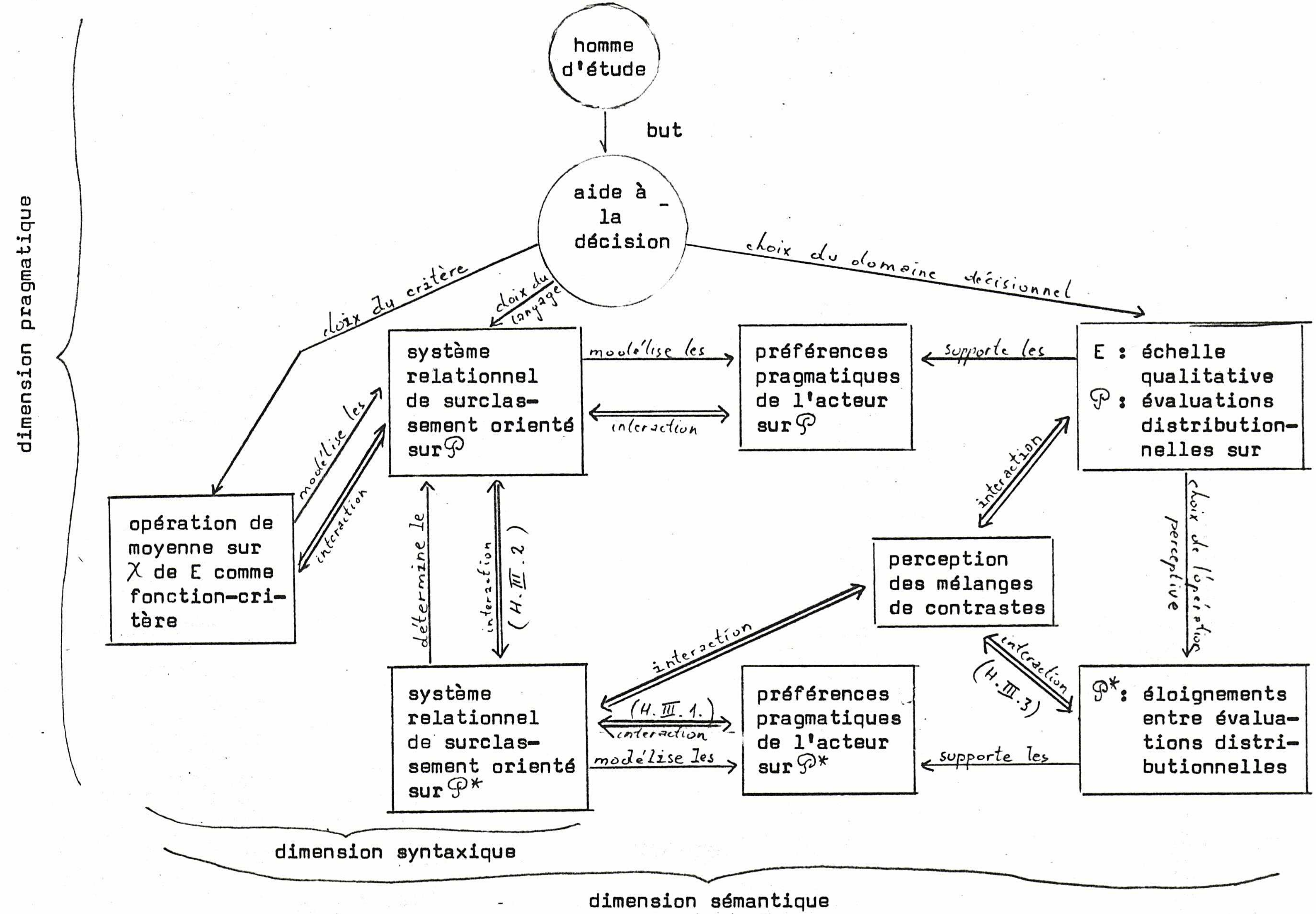
L'ensemble des éloignements auxquels conduit cette opération constituera le support de préférences pragmatiques analogues à celles supportées par l'ensemble $\mathcal{P}$ et, par conséquent, nous le modéliserons encore par un système relationnel de surclassement orienté. (Voir fig. III.1. page 126).

L'intérêt de cette extension réside dans l'interaction que l'on observe entre les deux systèmes relationnels de surclassement orienté, conjointement définis sur les évaluations distributionnelles et sur leurs éloignements. En effet, cette interaction traduira l'équilibre perceptif nécessaire à la reconnaissance objective des éloignements, et donc des préférences, entre évaluations distributionnelles.

Or, l'équilibre perceptif associé à la perception des éloignements est étroitement lié au type d'échelle qualitative sousjacent à l'ensemble $\mathcal{P}$. Fort de ce résultat, nous essayerons de caractériser sémantiquement, pour les échelles élémentaire, intensive et extensive, les structures relationnelles de surclassement orienté correspondantes.

A cette occasion nous verrons que l'emboîtement des types d'échelles aura pour conséquence l'"emboîtement" de ces structures de préférence, ce qui nous permettra d'élucider en partie la "structure globale" du système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$ et, partant, la nature de l'artefact introduit par le modèle de la moyenne pondérée au niveau des préférences pragmatiques de l'acteur.

Fig. III.1. Introduction des mutations des évaluations distributionnelles dans la modélisation des préférences de l'acteur



III.A. Mutation des évaluations distributionnelles et reconnaissance des situations préférentielles

La reconnaissance des situations préférentielles entre évaluations distributionnelles qualitatives repose sur la perception des éloignements entre elles. Nous étudierons cette perception à l'aide d'une opération de mutation. Ceci nous permettra d'introduire un modèle de préférence sur l'ensemble des éloignements. L'interaction entre ce modèle de préférence et le système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$ révèlera l'équilibre perceptif nécessaire à une reconnaissance objective des situations préférentielles. Mais l'intérêt de cette extension du cadre de la modélisation n'apparaîtra pleinement que lorsque nous caractériserons les éloignements entre évaluations distributionnelles par des mélanges de contrastes perçus dans l'échelle.

III.A.1. Modélisation des préférences sur l'ensemble des éloignements entre évaluations distributionnelles

Nous avons remarqué plus haut, en étudiant la relation entre la perception et la spécification d'une sériation des contrastes[1], que les situations préférentielles reconnues entre évaluations distributionnelles ne traduisent qu'une appréciation des "écarts" perçus entre les actions potentielles à la décision. Or, dans le problème qui nous préoccupe, ces "écarts" sont décrits par les éloignements entre les évaluations. La spécification des situations préférentielles prend donc nécessairement appui sur la perception de ces éloignements.

---

1) Voir chap. II. p.65

Nous étudierons cette perception à travers la même opération de mutation[1] que nous avons utilisée pour l'étude de la perception des contrastes dans l'échelle[2]. Soit A l'ensemble des actions potentielles à la décision représentées par l'ensemble $\mathcal{P}$ des évaluations distributionnelles qualitatives. D'autre part soit A* = A x A l'ensemble des mutations que l'on peut exécuter dans A. Nous notons $\mathcal{P}^*$ l'ensemble des éloignements que l'acteur perçoit en exécutant les mutations de A* :

$$\mathcal{P}^* = \left\{ (d_a - d_b) \; / \; d_a, d_b \in \mathcal{P} \text{ et } (a, b) \in A^* \right\} .$$

Comme les mutations sont de par leur nature encore des actions - les éloignements étant leur conséquence -, analogues aux actions potentielles à la décision, on peut appréhender le caractère plus ou moins favorable des mutations à travers un modèle de préférence analogue à celui défini sur $\mathcal{P}$. C'est pourquoi nous réutiliserons pour modéliser les préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}^*$ le même langage préférentiel qu'au chapitre I[3]. Cependant, pour différencier les situations préférentielles modélisées sur $\mathcal{P}^*$ de celles modélisées sur $\mathcal{P}$, nous marquerons les premiers d'un astérisque.

Ainsi I^*_+, $I^*_=$ seront-elles respectivement les situations d'indifférence stricte et orientée, telles que nous les avons définies au chapitre premier.[4] De même, $\succ^*$ et R* représenteront les situations de préférence et d'incomparabilité.

Nous supposons que ces quatre situations suffisent pour modéliser les préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}^*$.

H.III.1.

Tout jugement préférentiel de l'acteur relativement à un ensemble $\mathcal{P}^*$ d'éloignements entre évaluations distributionnelles qualitatives est modélisable par

---

1) Voir chap. II. p.66
2) Remarquons que, tel que nous avons défini $\mathcal{P}$, l'échelle de préférence est un sousensemble particulier de $\mathcal{P}$, à savoir l'ensemble des évaluations qui associent un poids de valeur unitaire aux différents échelons de E. Voir chap. I. p.16
3) Voir chap. I. p. 22
4) Voir chap. I. p. 23

soit une seule, soit un regroupement de deux ou trois des quatre situations d'indifférence stricte, d'indifférence orientée, de préférence ou d'incomparabilité.

Nous nous intéressons à nouveau aux deux regroupements qui donnent respectivement le surclassement orienté ($S^*_{\pm}$) et le surclassement orienté strict (S^*_{+})[1].

Nous dirons donc que ($S^*_{\pm}$, S^*_{+}, $I^*_{=}$, $R^*/\mathcal{P}^*$) est une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}^*$, si les relations $S^*_{\pm}$, S^*_{+}, $I^*_{=}$ et R^* représentent des préférences pragmatiques de l'acteur sur $\mathcal{P}^*$ en accord avec les définitions sémantiques de ces situations préférentielles et si elles sont exhaustives. Il faudra de plus que les relations S^*_{+}, $I^*_{=}$ et R^* soient mutuellement exclusives et que la relation $S^*_{\pm}$ soit non vide sur $\mathcal{P}^*$.

Nous appelons système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}^*$, l'ensemble de ces structures ($S^*_{\pm}$, $R^*/\mathcal{P}^*$) que l'on peut envisager sur $\mathcal{P}^*$.

Puisque la reconnaissance des situations préférentielles entre évaluations distributionnelles repose maintenant sur la perception des éloignements, la spécification d'une structure relationnelle de surclassement sur $\mathcal{P}$ présuppose du même coup la spécification d'une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}^*$, et il faut s'attendre à ce qu'il existe des liens étroits entre les deux systèmes relationnels de préférence conjointement définis sur $\mathcal{P}^*$ et sur $\mathcal{P}$.

III.A.2. <u>Interaction entre les systèmes relationnels de surclassement orienté définis conjointement sur les évaluations distributionnelles et sur leurs éloignements</u>

Pour étudier cette interaction, envisageons d'abord deux évaluations distributionnelles particulières, du_e et $du_{e'}$, qui

---

1) Voir chap. I. p. 26

associent un poids de valeur unitaire respectivement à e et $e' \in E$ tels que $e > e'$. Suite à notre définition de l'indicateur de modulation[1], nous devons conclure que si $du_e = \gamma(a)$ et $du_{e'} = \gamma(a')$, alors a est préférée à a', c'est-à-dire:

$$\forall e, e' \in E : e > e' \Longleftrightarrow du_e \succ du_{e'}$$

Considérons ensuite l'éloignement $(du_e - du_{e'})$. On remarquera que cet éloignement se réduit au contraste $(e - e')$ associé du poids de valeur unitaire; ce contraste est favorable puisque $e > e'$. De même, l'éloignement inverse $(du_{e'} - du_e)$ est entièrement caractérisé par le contraste $(e'-e)$ associé du même poids de valeur unitaire. Or $(e'-e)$ est le contraste inverse de $(e-e')$ et il est donc défavorable. En effet, si E est une échelle qualitative, alors l'ensemble des contrastes E^* supporte "au moins" une sériation élémentaire [2], c'est-à-dire

$$\forall e, e' \in E : e > e' \Leftrightarrow (e - e') \succ^* (e' - e) .$$

C'est pourquoi la mutation (a, a') par laquelle l'acteur perçoit $(du_e - du_{e'})$ lui semblera préférable à la mutation (a', a) par laquelle il perçoit $(du_{e'} - du_e)$.

La reconnaissance d'une préférence $(\succ)$ entre du_e et $du_{e'}$ est donc corrélative de la reconnaissance d'une préférence $(\succ^*)$ entre la mutation (a, a') suivie de son "évaluation" $(du_e - du_{e'})$ et la mutation inverse (a', a) dont l'"évaluation" est $(du_{e'} - du_e)$. Formellement nous avons

$$\forall e, e' \in E :$$
$$du_e \succ du_{e'} \Longleftrightarrow (du_e - du_{e'}) \succ^* (du_{e'} - du_e)$$

Nous retrouvons ainsi une condition d'équilibre perceptif nécessaire et suffisante pour la spécification de cette préférence entre du_e et $du_{e'}$.

Ces considérations nous font conclure dès lors qu'en général, si un acteur reconnaît clairement une situation de surclassement orienté entre deux évaluations distributionnelles d_a et d_b quelconques $(d_a\ S_\pm\ d_b)$, alors la mutation (a, b) lui paraîtra également au moins aussi "favorable" que la mutation inverse (b, a), nous dirons que l'éloignement $(d_a - d_b)$ est en situation de surclassement orienté avec l'éloignement inverse $(d_b - d_a)$. Formellement, cette hypothèse, qui relie la structure $(S_\pm, R/\mathcal{P})$ à la structure $(S^*_\pm, R^*/\mathcal{P}^*)$ s'énonce ainsi:

---

1) Voir chap. I. p.15

2) Voir chap. II.B.1., p.72

HYP. H.III.2.

$$\begin{cases} \forall\ d,\ d' \in \mathcal{P} : \\ (d\ S_{\pm}\ d') \iff (d - d')\ S^*_{\pm}\ (d' - d) . \end{cases}$$

Interprétée en termes de mutations, cette hypothèse exprime l'équilibre perceptif nécessaire et suffisant à la reconnaissance d'une situation préférentielle autre que l'incomparabilité entre deux évaluations distributionnelles qualitatives. En effet, une éventuelle incomparabilité de (d-d') et de (d'-d) révèle que la précision de la perception des éloignements entre d et d' est insuffisante pour appréhender en termes de préférences l'"écart" entre d et d', c'est-à-dire pour saisir indépendamment de l'action perceptive présentement exécutée (chaque mutation prise isolément) une situation préférentielle entre d et d'.

On peut encore interpréter cette hypothèse comme une certaine "condition d'indépendance" de la connaissance des situations préférentielles par rapport à l'activité perceptive, en l'occurrence les deux mutations inverses, c'est-à-dire comme une condition d'"existence objective" des situations préférentielles, en ce sens que l'intervention du sujet (l'acteur) dans la reconnaissance de l'objet (la situation préférentielle) est "équilibrée". L'objet acquiert une "stabilité", prend un sens "hors" du sujet.[1]

L'hypothèse H.III.2 établit la relation entre la structure (S^*_+, $I^*_=$, $R^*/\mathcal{P}^*$) et la structure (S_+, $I_=$, $R/\mathcal{P}$). Fait important, la spécification d'une situation préférentielle particulière entre deux évaluations distributionnelles peut être entièrement déduite de la comparaison des éloignements inverses entre ces évaluations. En effet, il en découle que:

$$\forall\ d,\ d' \in \mathcal{P} :$$

$$(d\ S_+\ d') \iff (d - d')\ S^*_+\ (d' - d) ;$$

---

1) C'est d'ailleurs implicitement sur H.III.2. qu'est basée l'utilisation des théorèmes de séparation dans la démonstration des théorèmes d'existences des fonctions d'utilité en théorie de l'utilité espérée. Voir FISHBURN (1970) (op.cit., chap. I. p.9) p. 125 et FISHBURN (1975), Separation theorems and Expected Utility, Journal of Economic theory, vol. 11, p. 16-34.

$$d \; I_= \; d \iff (d - d') \; I^*_= \; (d' - d) \, ;$$

$$d \; R \; d \iff (d - d') \; R^* \; (d' - d) \, .$$

Grâce à ces propriétés il y a donc équivalence entre d'un côté le problème de la recherche des situations préférentielles existant entre évaluations distributionnelles qualitatives et de l'autre le problème de la recherche des situations préférentielles reliant les éloignements inverses entre ces mêmes évaluations.

C'est pourquoi nous ne concentrerons plus notre attention sur la caractérisation directe des situations préférentielles sur $\mathcal{P}$, comme il est de coutume dans la théorie classique de décision, pour porter au contraire toute notre attention sur le problème de la comparaison des éloignements inverses. L'intérêt de ce déplacement vers l'ensemble des éloignements se dégage lorsque l'on considère que les éloignements peuvent être décrits à l'aide de l'ensemble des contrastes et de l'information préférentielle que supporte cet ensemble, puisque la perception des éloignements doit prendre appui sur la perception des contrastes dans l'échelle.

III.A.3. Traduction des éloignements en termes de mélange de contrastes perçus dans l'échelle [1)]

Nous avons remarqué ci-dessus que l'éloignement entre deux évaluations distributionnelles, qui associent un poids de valeur unitaire respectivement aux états e et e', est caractérisé par le contraste (e-e') auquel est associé un poids de valeur unitaire. Dans le cadre de ce travail ces évaluations sont supposées équivalentes à des évaluations ponctuelles sur l'échelle E.[2)] Puisque les contrastes sont précisément les éloignements entre ces évaluations ponctuelles, on peut admettre que:

---

1) Cette partie est inspirée d'un texte de J.P. BENZECRI sur les ordres latéraux entre lois de probabilités sur un ensemble ordonné, dans Analyse des Données T.1. LA TAXINOMIE, Dunod (2e éd. 1976), T.I.B., n°8, p.261-287.

2) Voir I.A.1,p.16

$$\forall\ e, e' \in E : \ (du_e - du_{e'}) \equiv 1 \cdot (e - e') \equiv (e - e').$$

D'autre part, comme toute évaluation distributionnelle est, en vertu des propriétés structurelles de $\mathcal{P}$[1], équivalente à un mélange, c'est-à-dire une combinaison linéaire convexe d'évaluations ponctuelles, on peut s'attendre à ce que tout éloignement pourra être exprimé à l'aide d'un mélange d'éloignements entre évaluations ponctuelles, et donc de contrastes perçus dans l'échelle.

En effet, considérons une échelle qualitative E et les deux évaluations distributionnelles d_a et d_b suivantes:

E	e_o	e_1	e_2
d_a	0	1/3	2/3
d_b	2/3	0	1/3

On peut exprimer ces évaluations à l'aide de deux mélanges des trois évaluations ponctuelles du_{e_o}, du_{e_1} et du_{e_2}

$$d_a \equiv 1/3\ du_{e_1} + 1/3\ du_{e_2} + 1/3\ du_{e_2} ;$$

$$d_b \equiv 1/3\ du_{e_o} + 1/3\ du_{e_o} + 1/3\ du_{e_2} .$$

Et l'éloignement entre d_a et d_b prend la forme suivante:

$$(d_a - d_b) \equiv 1/3\,(du_{e_1} - du_{e_o}) + 1/3\,(du_{e_2} - du_{e_o}) + 1/3\,(du_{e_2} - du_{e_2}).$$

Comme $(du_{e_1} - du_{e_o})$, $(du_{e_2} - du_{e_o})$ et $(du_{e_2} - du_{e_2})$ sont caractérisés respectivement par les contrastes $(e_1 - e_o)$, $(e_2 - e_o)$ et $(e_2 - e_2)$, l'éloignement $(d_a - d_b)$ peut encore s'écrire:

$$(d_a - d_b) \equiv 1/3\,(e_1 - e_o) + 1/3\,(e_2 - e_o) + 1/3\,(e_2 - e_2).$$

Ainsi peut-on en général construire à partir d'une paire d'évaluations d, d' $\in \mathcal{P}$, un <u>mélange de contrastes</u>:

---

1) Voir I. A.1., p.16.

D.III.5.

$$\begin{cases} \forall \; d, d' \in \mathcal{P} \; ; \\ m^{dd'} \; : \; E^* \longrightarrow [0, 1] \quad \text{telle que } \forall e, e' \in E : \\ \text{a)} \quad 0 \leqslant m^{dd'}(e, e') \leqslant d(e), \; d'(e') \; ; \\ \text{b)} \quad \sum_{e'} m^{dd'}(e, e') = d(e) \; ; \; \sum_{e} m^{dd'}(e, e') = d'(e'). \end{cases}$$

Cette distribution $m^{dd'}$, une fonction à valeurs réelles prises dans l'intervalle $[0, 1]$ définie sur ExE, est constituée de termes $m^{dd'}(e,e')$ qui sont des parties positives ou nulles du poids d(e) <u>et</u> qui sont également des parties positives ou nulles du poids d'(e'); la somme des parties du poids d(e) qui sont des parties de <u>tous</u> les poids de d', est ce poids d(e) et la somme de toutes les parties du poids d'(e') qui sont des parties des poids de d, est ce poids d'(e').

$d(E) \backslash d'(E)$	$d'(e_0)$	$d'(e_1)$	$\cdots$	$d'(e_r)$	$m^{dd'}(E, \cdot)$
$d(e_0)$	$m^{dd'}(e_0, e_0)$	$m^{dd'}(e_0, e_1)$	$\cdots$	$m^{dd'}(e_0, e_r)$	$\sum_{j=0}^{r} m^{dd'}(e_0, e_j) = d(e_0)$
$d(e_1)$	$m^{dd'}(e_1, e_0)$	$m^{dd'}(e_1, e_1)$	$\cdots$	$m^{dd'}(e_1, e_r)$	$\sum_{j=0}^{r} m^{dd'}(e_1, e_j) = d(e_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$d(e_r)$	$m^{dd'}(e_r, e_0)$	$m^{dd'}(e_r, e_1)$	$\cdots$	$m^{dd'}(e_r, e_r)$	$\sum_{j=0}^{r} m^{dd'}(e_r, e_j) = d(e_r)$
$m^{dd'}(\cdot, E)$	$\sum_{i=0}^{r} m^{dd'}(e_i, e_0) = d'(e_0)$	$\sum_{i=0}^{r} m^{dd'}(e_i, e_1) = d'(e_1)$	$\cdots$	$\sum_{i=0}^{r} m^{dd'}(e_i, e_r) = d'(e_r)$	$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} m^{dd'}(e_i, e_j) = 1$

Autrement dit, $m^{dd'}$ est une distribution de poids sur ExE telle que les projections première et seconde sur E donnent respectivement d et d'. Il en découle que $m^{dd'}$ est un mélange de contrastes:

$$\forall\ d, d' \in \mathcal{P} \quad : \qquad \sum_e \sum_{e'} m^{dd'}(e,e') = \sum_e d(e) = \sum_{e'} d'e' = 1 \ .$$

On constate facilement que ce mélange $m^{dd'}$, que l'on peut construire à partir des évaluations d, d', n'est généralement pas unique; il ne l'est que pour les évaluations ponctuelles. Une infinité de mélanges $m^{dd'}$ peuvent être construits et cet ensemble nous le noterons $\mathcal{M}^{dd'}$.

On peut interpréter $\mathcal{M}^{dd'}$ en termes de mutations comme étant l'ensemble des "cheminements" possibles pour aller d'une action potentielle a évaluée par d vers une action potentielle a', évaluée par d', à l'aide d'un mélange de mutations d'actions potentielles évaluées uniquement par des états ponctuels.

Fidèle à notre demarche méthodologique, nous considérons maintenant les liens qui relient cette perception de l'ensemble $\mathcal{M}^{dd'}$ d'une part au domaine décisionnel et de l'autre au système relationnel de surclassement orienté défini sur $\mathcal{P}^*$. (voir fig. III.1. p. 126)

Considérons d'abord l'interaction entre la perception des mélanges de contrastes et le domaine décisionnel.

III.A.4. Interaction entre la perception des mélanges de contrastes et le domaine décisionnel

Nous abordons cette interaction par le biais de deux conditionnements réciproques:

III.A.4.a. Les mélanges de contrastes conditionnés par le domaine décisionnel

Grâce aux propriétés d'ensemble de mélanges dont nous avons muni l'ensemble $\mathcal{P}$ des évaluations distributionnelles, tous les mélanges $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$ sont admissibles comme représentation de l'éloignement entre deux évaluations distributionnelles d et d'.

De même, on remarquera que $\mathcal{M}^{dd'}$ répond également aux conditions d'ensemble de mélanges, quelles que soient les évaluations d,d' envisagées[1].

On se rend compte ici des conséquences importantes qu'implique l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{P}$ est muni d'une structure d'ensemble de mélanges. Malheureusement, le temps et la place nous ont manqué dans ce travail pour entreprendre une étude approfondie des problèmes que pose cette hypothèse au niveau de la modélisation des préférences.

III.A.4.b. Le domaine décisionnel conditionné par la perception des mélanges de contrastes

Revenons à notre exemple. On constate que $(d_a - d_b)$ peut s'exprimer comme un mélange de deux contrastes favorables, en l'occurence $(e_1 - e_o)$ et $(e_2 - e_o)$, et d'un contraste $(e_2 - e_2)$ nul, chacun intervenant avec la même proportion 1/3.

Considérons à présent l'éloignement inverse qui, lui, peut être caractérisé par le mélange des contrastes inverses:

$$(d_b - d_a) \equiv 1/3\,(e_o - e_1) + 1/3\,(e_o - e_2) + 1/3\,(e_2 - e_2).$$

Ce mélange regroupe deux contrastes défavorables, $(e_o - e_1)$ et $(e_o - e_2)$ et le contraste $(e_2 - e_2)$ nul avec les mêmes proportions 1/3 que ci-dessus.

Or, en accord avec notre définition de l'indicateur de modulation [2], on doit admettre que tout contraste favorable ou nul intervenant avec la proportion $\alpha \in [0,1]$ est toujours "au moins aussi favorable" que le contraste inverse défavorable ou nul intervenant dans un autre mélange avec la même proportion α.[3] C'est pourquoi le mélange caractérisant $(d_a - d_b)$ est

---

1) Voir chap. I. p.16
2) Voir chap. I. p.15
3) En effet, toute échelle qualitative supporte au moins une sériation élémentaire des contrastes et donc $\forall (e-e') \in E^*_+ \cup E^*_=$ $(e-e') \succcurlyeq^* (e'-e)$. Voir II.B.1.p.72

"au moins aussi favorable" que le mélange "inverse" qui caractérise $(d_b - d_a)$, puisque le premier s'avère terme par terme "au moins aussi favorable" que le second. Si nous traduisons cette situation relationnelle "au moins aussi favorable que" par une situation de surclassement orienté, nous avons

$$(d_a - d_b) \; S^*_{\pm} \; (d_b - d_a) \; ;$$

et donc grâce à l'hypothèse H.III.2.

$$d_a \; S_{\pm} \; d_b \; .$$

En général, on peut également associer à tout mélange $m^{dd'}$ un mélange $m^{d'd}$ inverse, décrivant l'éloignement inverse $(d' - d)$, en posant que

$$\forall \; d, d' \in \mathcal{P} \qquad \text{et} \quad \forall \; e, e' \in E :$$

$$m^{d'd}(e, e') \; = \; m^{dd'}(e', e) \; .$$

Ce nouveau mélange $m^{d'd}$ vérifie les mêmes propriétés que $m^{dd'}$, c'est-à-dire qu'il est également une combinaison linéaire convexe de contrastes, telle que les projections premières et secondes sur E donnent respectivement d' et d.

Or, par la perception du mélange $m^{dd'}$ et de son inverse $m^{d'd}$, d'une part, la sériation des contrastes et de l'autre, l'information véhiculée par l'indicateur de modulation sont transposées, grâce à l'hypothèse H.III.2. sur l'ensemble des éloignements entre évaluations distributionnelles.

En effet, étant données deux évaluations d_a, $d_b \in \mathcal{P}$, si $d_a(e) = d_b(e')$ et $e \succcurlyeq e'$, alors $d_a S^{1)}_{+ee'} d_b$, et en vertu de H. III,2: $(d_a - d_b) S^*_{+ee'} (d_b - d_a)$. Par conséquent, pour être cohérent avec la définition de l'indicateur de modulation, nous devons admettre que :

si $\; m^{d_a d_b}(e, e') = d_a(e) = d_b(e') = m^{d_b d_a}(e', e) \; :$

alors $\; \left[m^{d_a d_b}(e, e') \cdot (e - e') \right] \succcurlyeq^* \left[m^{d_b d_a}(e', e) \cdot (e' - e) \right]$.

---

1) Nous affectons les situations de l'indice ee' pour marquer la restriction de celles-ci aux échelons e, e' considérés.

On remarquera que l'hypothèse H.III.2. ne conserne que la sériation élémentaire des contrastes et les mélanges inverses. Or, on peut généraliser ces considérations à toute sériation éventuelle des contrastes et à toute paire de mélanges de contrastes, en posant les conditions suivantes:

Hypothèse H.III.3.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation ($\geqslant^*/E^*$) donnée et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E :

$\forall d, d, d'', d''' \in \mathcal{P}, \ \forall c, c' \in E^*, \ \forall m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$ et $m^{d''d'''} \in \mathcal{M}^{d''d'''}$:

a) $[c >^* c', \ m^{dd'}(c) > 0$ et $m^{dd'}(c) \geqslant m^{d''d'''}(c')]$

$\Longrightarrow (m^{dd'}(c).c) >^* (m^{d''d'''}(c').c')$;

b) $[c =^* c', \ m^{dd'}(c) > 0$ et $m^{dd'}(c) \geqslant m^{d''d'''}(c')$

$\Longrightarrow (m^{dd'}(c).c) \geqslant^* (m^{d''d'''}(c').c')$;

c) $[m^{dd'}(c) = m^{d''d'''}(c') = 0] \Longrightarrow (m^{dd'}(c).c) =^* (m^{d''d'''}(c').c')$

Les trois propriétés de cette hypothèse assurent l'extension de la sériation des contrastes aux parties de contrastes, c'est-à-dire aux mélanges de contrastes.

Or, cette extension nous est utile pour l'étude de la comparabilité des mélanges de contrastes et donc de l'interaction entre la perception des mélanges de contrastes et le système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}^*$.

III.A.5. Interaction entre la perception des mélanges de contrastes et les systèmes relationnels de surclassement orienté

Cette interaction se concrétise également dans deux conditionnements réciproques:

III.A.5.a. Les systèmes relationnels de surclassement orienté conditionnés par la perception des mélanges de contrastes

La comparabilité des mélanges de contrastes conduit, à partir du contenu pragmatique de cette comparaison, à la spécification d'une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}^*$ et donc sur $\mathcal{P}$. En effet, s'il existe dans $\mathcal{M}^{dd'}$ un mélange $m^{dd'}$ qui se révèle "au moins aussi favorable que" son inverse $m^{d'd}$, eu égard à la sériation des parties de contrastes intervenant dans ces mélanges, nous conclurons à la présence d'une situation de surclassement orienté entre les éloignements (d-d') et (d'-d). La perception des mélanges de contrastes associés aux éloignements inverses détermine donc la structure relationnelle de surclassement orienté $(S^*_{\pm}, R^*/\mathcal{P}^*)$ et à travers l'hypothèse H.III.2. la structure relationnelle $(S_{\pm}, R/\mathcal{P})$.

Interprété en termes de mutations, ce "critère" qui nous révèle l'existence d'une situation préférentielle autre que l'incomparabilité entre deux évaluations distributionnelles, n'est que l'expression de l'équilibre perceptif qui permet la reconnaissance "objective" d'un écart entre ces évaluations, traduit en terme de situation de surclassement orienté. En effet, nous postulons la comparabilité au sens de la relation $S_{\pm}$ entre deux actions potentielles, et, partant, entre deux évaluations distributionnelles, dès lors que la mutation de l'une à la place de l'autre, exprimée à l'aide d'un "mélange" judicieux de mutations d'actions évaluées ponctuellement, est comparable, étant donnée la précision de l'échelle, à la mutation inverse, exprimée par le mélange des mutations inverses.

III.A.5.b. Perception des mélanges de contrastes conditionnée par les systèmes relationnels de surclassement orienté

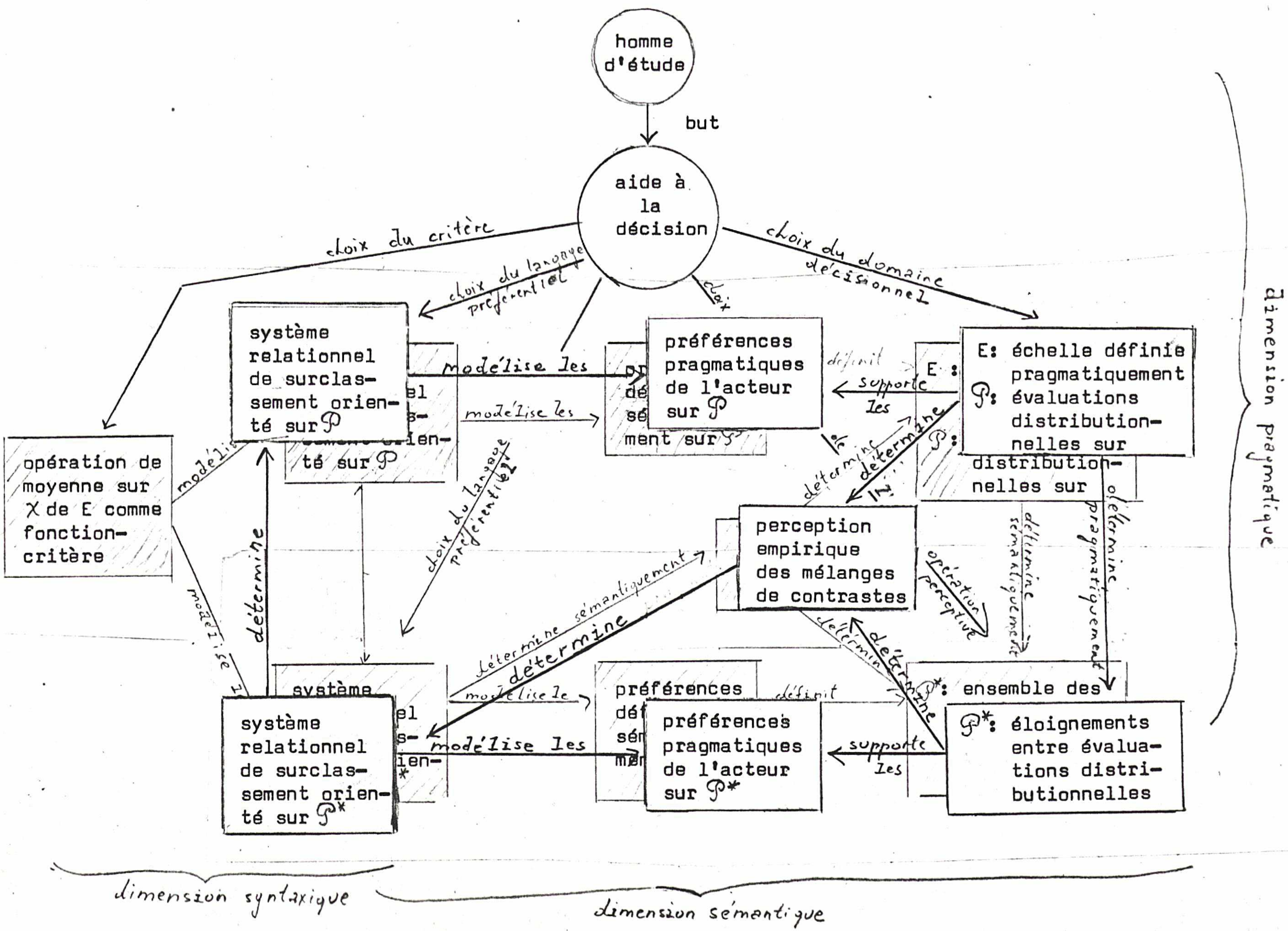
La spécification d'une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$ et donc sur $\mathcal{P}^*$, à partir du choix du modèle de la moyenne pondérée conditionne la comparabilité et, partant, la perception des mélanges de contrastes.

Or, l'interprétation sémantique de cette perception des mélanges de contrastes, exigée par le modèle de la moyenne pondérée, par l'hypothèse H.III.3. conduit à la définition d'un domaine décisionnel qui diverge de la définition pragmatique de ce domaine. Nous retrouvons ici l'artefact introduit par le modèle de la moyenne pondérée. (voir fig. III. 2. p.141)

Cependant, l'étude de la perception des mélanges de contrastes conduira à élucider les conséquences de cet artefact au niveau de la comparabilité de ces mélanges et donc au niveau des systèmes relationnels de surclassement orienté. En effet, étant donné un certain type d'échelle de préférence qualitative et étant données deux évaluations distributionnelles définies sur cette échelle, nous pouvons, grâce à l'étude directe de la comparabilité des éloignements inverses, déduite de la perception des mélanges de contrastes y associés, spécifier la situation préférentielle qui relie ces évaluations.

A chaque type d'échelle qualitative correspondra ainsi une structure relationnelle de surclassement orienté particulière. L'étude comparative de ces différentes structures préférentielles fera dès lors apparaître la "structure globale" du système relationnel de surclassement orienté défini sur un ensemble d'évaluations distributionnelles qualitatives.

Fig. III.2. Artefact du système relationnel de surclassement orienté introduit par le modèle de la moyenne pondérée



III. B. Evaluations distributionnelles sur une échelle qualitative élémentaire

Considérons d'abord une échelle de préférence élémentaire. L'étude de la comparabilité des mélanges à leur inverse sur ce type d'échelle permettra de définir sur un ensemble d'évaluations distributionnelles $\mathcal{P}$ une situation préférentielle que nous appellerons "surclassement orienté élémentaire".

Dans un second temps ce surclassement se révèlera équivalent à une situation de "dominance stochastique simple".

Cette situation engendrera sur l'ensemble $\mathcal{P}$ une structure relationnelle de surclassement orienté particulière que nous qualifierons d'élémentaire.

III. B. 1. Définition du surclassement orienté élémentaire

Comme nous venons de le remarquer dans la section précédente, les évaluations d_a et d_b, prises comme exemples[1], sont comparables entre elles lorsqu'il est possible de caractériser l'éloignement entre d_a et d_b à l'aide d'un mélange de contrastes uniquement favorables ou nuls. Dans ce cas en effet, le mélange inverse ne comprend que des contrastes défavorables ou nuls, et, grâce aux conditions de H. III.3., nous devons admettre qu'une situation de surclassement orienté relie d_a à d_b.

~~En général, considérons deux évaluations $d, d' \in \mathcal{P}$ à partir desquelles il est possible de construire un mélange de contrastes $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$ qui vérifie la propriété suivante:~~

Plus généralement, considérons deux évaluations $d, d' \in \mathcal{P}$ à partir desquelles il est possible de construire un mélange de contrastes $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$ qui vérifie la propriété suivante

$$\forall e, e' \in E : m^{dd'}(e,e') \neq 0 \Rightarrow e \succcurlyeq e'$$

1) Voir III.A.3., p. 133

E^* supportant une sériation élémentaire, $(e - e') \succcurlyeq^* (e' - e)$ pour tout $(e - e') \in E^*$ tel que $m^{dd'}_{e'e} = m^{d'd}_{e'e} \neq 0$. Il s'ensuit que $m^{dd'}_{ee'} . (e - e') \succcurlyeq^* m^{d'd}_{e'e} . (e - e')$ pour tout $(e - e') \in E^*$. Donc $(d - d')$, caractérisé par $m^{dd'}$, est relié par une situation de surclassement orienté à $(d' - d)$, caractérisé par $m^{d'd}$. Puisque cette comparaison ne repose que sur l'information relative à la sériation élémentaire des contrastes, nous désignerons cette situation préférentielle par le nom de <u>surclassement orienté élémentaire</u> [1].

Résumons ces considérations dans la **définition suivante:**

D.III.6. Soit une échelle qualitative élémentaire E et soit un ensemble d'évaluations distributionnelles définies sur E. Pour toute paire d'évaluations d, $d' \in \mathcal{P}$, nous disons que $(d - d')$ est en situation de surclassement orienté élémentaire avec $(d' - d)$, notée $(d - d')\ S^{*o}_{\pm}\ (d' - d)$, si et seulement s'il existe un mélange $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$ tel que $\forall e, e' \in E : m^{dd'}(e, e') \neq 0 \Rightarrow e \succcurlyeq e'$.

Il découle de cette définition que les évaluations d et d' sont reliées par une situation de surclassement orienté élémentaire, notée $(d\ S^{o}_{\pm}\ d')$, dès que l'on peut trouver dans $\mathcal{M}^{dd'}$ un mélange de contrastes qui ne comprend que des contrastes favorables ou nuls.

Avant d'étudier en détail la structure préférentielle ainsi modélisée sur l'ensemble $\mathcal{P}$, remarquons que le surclassement orienté élémentaire ainsi défini est équivalent à une situation préférentielle introduite dans la théorie des choix dans l'incertain sous le nom de "dominance stochastique simple" [2].

---

1) Nous avons choisi l'adjectif élémentaire pour indiquer que cette situation est définie sur une échelle qualitative élémentaire.

2) Cette situation a plus précisément été introduite dans le cadre des problèmes de choix efficients dans la sélection de porte-feuille de titres. Voir à ce sujet p.ex. HADAR, J & RUSSEL, W.R. (1969), Rules for ordering uncertain prospects, Americain Economic Review, V. 59, p.25-34, et HANOCH, G & LEVY, H (1969), The Efficiency Analysis of Choices involving Risk, Review of Economic Studies, Vol.36,p.335-346. Les liens entre notre problème et l'analyse des choix efficients se comprend aisément. Comme toute échelle de préférence discrète est au moins élémentaire, $\mathcal{P}$ est, quelle que soit l'échelle utilisée, au moins ordonné par les situations de surclassement orienté élémentaire.

III. B. 2. Equivalence entre le surclassement orienté élémentaire et la dominance stochastique simple

Une manière équivalente de formuler le surclassement orienté élémentaire consiste à imposer une condition particulière aux fonctions de répartition des évaluations distributionnelles.

Pour montrer cette équivalence, définissons d'abord les fonctions de répartition gauche et droite d'une évaluation distributionnelle.

D.III.7. Nous appelons fonction de répartition gauche, respectivement droite, d'une évaluation distributionnelle $d \in \mathcal{P}$, les fonctions :

$$d_{>} : E \rightarrow [0,1] ;$$

$$d_{<} : E \rightarrow [0,1] ;$$

déduites de d de la manière suivante: $\forall e \in E$:

$$d_{>}(e) = \sum_{e'} \{ d(e') / e' \in E, e' \leq e \}^{1)} ;$$

$$d_{<}(e) = \sum_{e'} \{ d(e') / e' \in E, e' \geq e \} .$$

La fonction de répartition gauche (resp. droite) est ainsi une fonction croissante (resp. décroissante) sur E, et on peut montrer que la connaissance de l'une quelconque des deux fonctions de répartition est suffisante pour connaître l'évaluation d.

Quelle est maintenant l'allure de ces fonctions de répartition pour deux évaluations distributionnelles d et d' lorsque d $S^o_{\pm}$ d' ?

P.III.1. [2] Soit une échelle qualitative élémentaire E et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles sur E;

1) Pour faciliter le travail dactylographique, nous préférons cette notation "linéaire" ou "littéraire" de la sommation. e' souscrit au symbole E désigne le terme variable sur lequel porte la sommation et le texte qui suit / dans l'accolade désigne le domaine sur lequel porte la sommation.

2) Cette proposition est analogue à une proposition de BENZECRI (op.cit. p.132) p. 266. Nous lui devons le principe de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{l}\forall d, d' \in \mathcal{P} \text{ les trois propositions ci-dessous sont équivalentes:}\\ 1) \quad d \; S^{\circ}_{\pm} \; d' \quad ;\\ 2) \quad \forall e \in E : \quad d_{>}(e) \leq d'_{>}(e) \; ;\\ 3) \quad \forall e \in E : \quad d_{<}(e) \geq d'_{<}(e) .\end{array}\right.$$

Ainsi, quelles que soient $d, d' \in \mathcal{P}$, $d \; S^{\circ}_{+} \; d'$ si et seulement si, pour tout échelon e de l'échelle considérée, la valeur de la fonction de repartition gauche (resp. droite) de l'évaluation d, en l'occurrence $d_{>}(e)$ (resp. $d_{<}(e)$), est toujours inférieure (resp. supérieure) ou égale à la valeur de la fonction de répartition gauche (resp. droite) de l'évaluation d', en l'occurrence $d'_{>}(e)$ (resp. $d'_{<}(e)$).

Parce que nous reviendrons dans la suite à certains des développements de la démonstration de cette proposition, reprenons en détail les raisons de cette équivalence.

Démonstration:

a) Démontrons d'abord que $\forall \; d, d' \in \mathcal{P}$:

$$(d \; S^{\circ}_{\pm} \; d') \Rightarrow (\forall e \in E : \; d_{>}(e) \leq d'_{>}(e)) .$$

D'après la définition D. III. 7. : $\forall \; e \in E$:

$$d_{>}(e) = \sum_{e'} \{ d(e') \,/\, e' \in E, e' \leq e \} ;$$

$$d'_{>}(e) = \sum_{e'} \{ d'(e') \,/\, e' \in E, e' \leq e \} .$$

Comme un mélange $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$ donne en première et seconde projection sur E, respectivement d et d', nous pouvons encore écrire que: $\forall \; e \in E$:

$$d_{>}(e) = \sum_{e'} \{ \sum_{e''} \{ m^{dd'}(e', e'') / e'' \in E \} / e' \in E, \; e' \leq e \} ;$$

$$d_{>}(e) = \sum_{e''} \{ \sum_{e'} \{ m^{dd'}(e', e'') / e' \in E \} / e'' \in E, \; e'' \leq e \} .$$

Or, nous savons que $\forall e, e' \in E \; : \; m^{dd'}(e, e') \neq 0 \Rightarrow e \geq e'$ et nous avons intérêt à fragmenter les expressions ci-dessus pour isoler les termes $m^{dd'}_{e'e''}$ et $m^{dd'}_{e''e'}$, qui sont nécessairement nuls.

Ce qui donne:

$$d_>(e) = \sum_{e'}\{\sum_{e''}\{m^{dd'}(e',e'')/ e''\in E, e''>e'\}/ e'\in E, e'\leq e\}$$
$$+ \sum_{e'}\{\sum_{e''}\{m^{dd'}(e',e'')/e''\in E, e''\leq e'\}/ e'\in E, e'\leq e\} ;$$
$$d'_>(e) = \sum_{e''}\{\sum_{e'}\{m^{dd'}(e',e'')/ e'\in E , e'< e''\}/ e''\in E, e''\leq e\}$$
$$+ \sum_{e''}\{\sum_{e'}\{m^{dd'}(e',e'')/ e'\in E, e''\leq e'\leq e\}/ e''\in E , e''\leq e\}$$
$$+ \sum_{e''}\{\sum_{e'}\{m^{dd'}(e',e'')/ e'\in E, e'>e\}/ e''\in E , e''\leq e\} .$$

On remarquera que $\forall\ e\in E$,

$$\sum_{e'}\{\sum_{e''}\{m^{dd'}(e',e'')/ e''\in E , e''>e'\}/ e'\in E , e'\leq e\}$$
$$= \sum_{e''}\{\sum_{e'}\{m^{dd'}(e',e'')/ e'\in E, e'<e''\}/ e''\in E , e''\leq e\} = 0 ;$$

et ,

$$\sum_{e'}\{\sum_{e''}\{m^{dd'}(e',e'')/ e''\in E, e''\leq e'\}/ e'\in E , e'\leq e\}$$
$$= \sum_{e''}\{\sum_{e'}\{m^{dd'}(e',e'')/ e'\in E, e''\leq e'\leq e\}/ e''\in E, e''\leq e\}.$$

Donc, $\forall e\in E$:

$$(*) \qquad d'_>(e) = d_>(e) + \sum_{e''}\{\sum_{e'}\{m^{dd'}(e',e'')/ e'\in E, e'>e\}/ e''\in E, e''\leq e\}.$$

Les développements sont identiques dans le cas de $d_<(e)$ et $d'_<(e)$.

b) La démonstration en sens inverse est un peu plus compliquée et nécessite le recours au fractionnement des poids des évaluations distributionnelles.

Le principe en est le suivant.

Nous déplacerons la fonction de répartition gauche de d vers la fonction de répartition gauche de d' de manière à construire un mélange $m^{dd'}$ de contrastes qui vérifie les propriétés voulues. (Voir figure ci-dessous p. 23)

Avant cela, définissons la <u>partie gauche</u> d'une évaluation distributionnelle.

D.III.8. Soit x un nombre compris entre 0 et 1. $\forall\ d\in\mathcal{P}$, nous appelons partie gauche de d cumulant à x, la fonction

$$d_{<x} : E \rightarrow [0,1]$$

construite à partir de d au moyen des formules suivantes:

$$\begin{cases} (d_{>}(e_0) \leq x) \Rightarrow d_{<x}(e_0) = d(e_0) \; ; \\ x < d_{>}(e_0) \Rightarrow d_{<x}(e_0) = x \; ; \\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, r : \\ (d_{>}(e_i) \leq x) \Rightarrow d_{<x}(e_i) = d(e_i) \; ; \\ (d_{>}(e_{i-1}) < x < d_{>}(e_i)) \Rightarrow d_{<x}(e_i) = x - d_{>}(e_{i-1}) \\ (x \leq d_{>}(e_{i-1})) \Rightarrow d_{<x}(e_i) = 0 \end{cases}$$

Aussi longtemps que la valeur de la fonction de repartition de d, en parcourant l'échelle de e_0 vers e_r, est inférieure à x, la partie gauche $d_{<x}$ est identique à d. Dès que, pour un échelon e_i donné, x est inférieur à cette valeur tout en étant supérieur à $d_{>}(e_{i-1})$, la valeur de la partie gauche est égale à $x - d_{>}(e_{i-1})$. Et si pour un échelon e_i la valeur de la fonction de répartition pour e_{i-1} est même supérieure ou égale à x, alors la valeur de la partie gauche est nulle.

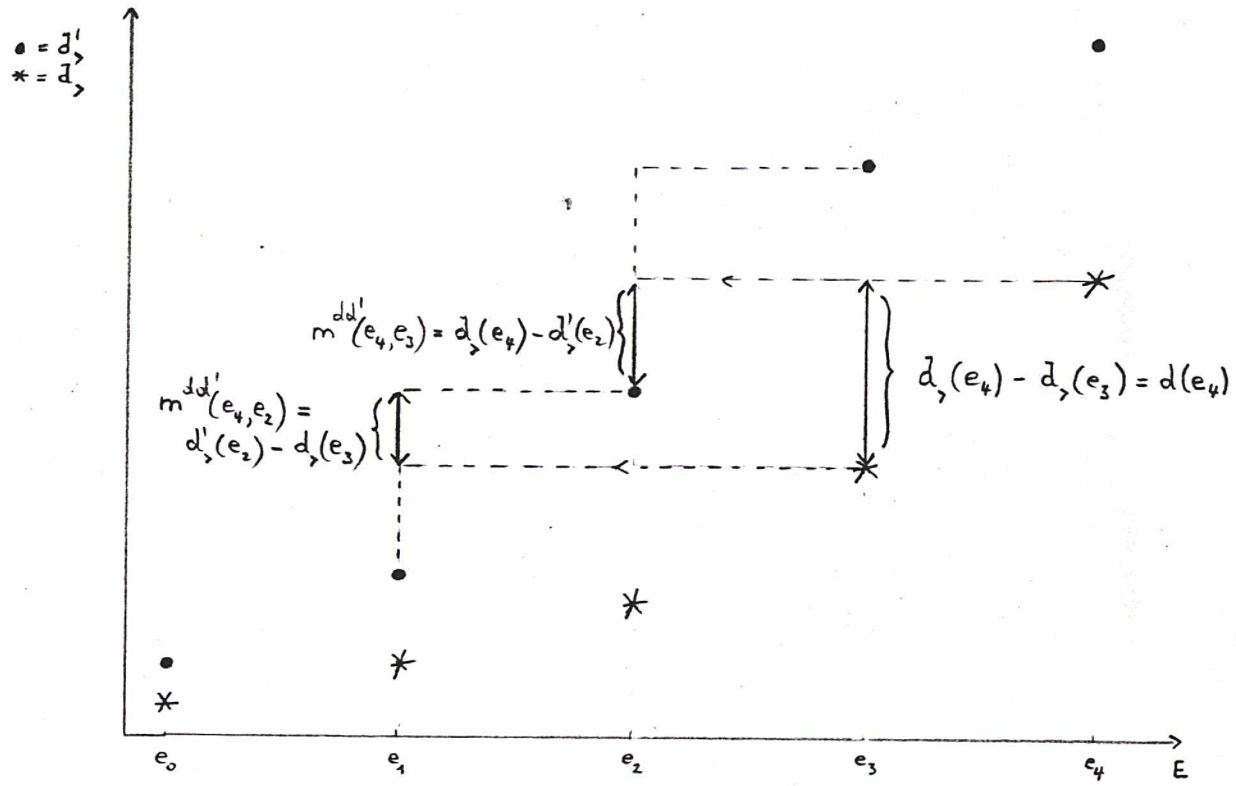
La construction d'un mélange de contrastes caractérisant l'éloignement (d - d') se fait ensuite de manière récurrente de e_0 vers e_r. En voici le principe:

Proc. III.1.

$$\begin{cases} \text{si } d(e_0) = 0, \text{ nous posons } m^{dd'}(e_0, e_j) = 0, \; \forall\, j = 0, 1, \ldots, r; \\ \text{si } d(e_0) \neq 0, \\ \quad m^{dd'}(e_0, e_j) = \left[d'_{<d_{>}(e_0)}(e_j) - d'_{<0}(e_j) \right] \; ; \\ \text{et pour tout } i = 1, 2, \ldots, r : \\ \text{si } d(e_i) = 0, \quad m^{dd'}(e_i, e_j) = 0 \;\; \forall\, j = 0, 1, \ldots, r \; ; \\ \text{si } d(e_i) \neq 0, \\ \quad m^{dd'}(e_i, e_j) = \left[d'_{<d_{>}(e_i)}(e_j) - d'_{<d_{>}(e_{i-1})}(e_j) \right]. \end{cases}$$

Ainsi le poids $d(e_i)$, qui représente la différence entre $d_>(e_i)$ et $d_>(e_{i-1})$, est-il réparti sur un ensemble de poids $d'(e_j)$ qui résulte de la différence terme par terme de la partie gauche de d' cumulant à $d_>(e_i)$ et cette même partie gauche de d' cumulant à $d_>(e_{i-1})$.

G.III.1. <u>Construction d'un mélange de contrastes à partir des fonctions de répartition gauches</u>



<u>Commentaire:</u> Pour montrer le principe de la construction de $m^{dd'}$, envisageons deux évaluations d et d', telles que $d'_>(e_3) > d_>(e_4) > d'_>(e_3) > d_>(e_2)$. Calculons $m^{dd'}(e_4,e_3)$, $m^{dd'}(e_4,e_2)$ qui donnent la répartition de $d(e_4)$ sur d':

$$m^{dd'}(e_4,e_3) = \left[\; d'_{<d_>(e_4)}(e_3) - d'_{<d_>(e_3)}(e_3)\right]$$

$$= \left[\left(d_>(e_4) - d'_>(e_2)\right) - 0\right] \;;$$

$$m^{dd'}(e_4,e_2) = \left[\; d'_{<d_>(e_4)}(e_2) - d'_{<d_>(e_3)}(e_2)\right]$$

$$= \left[\left(d'_>(e_2) - d'_>(e_1)\right) - \left(d_>(e_3) - d'_>(e_1)\right)\right].$$

Le mélange de contrastes ainsi construit vérifie les propriétés voulues. En effet, $\forall\, i, j = 0, 1, \ldots, r$: [1]

$$\sum_{j=0}^{r} \left[d'_{<d_>(e_i)}(e_j) - d'_{<d_>(e_{i-1})}(e_j) \right] = d(e_j) \; ;$$

$$\sum_{i=0}^{r} \left[d'_{<d_>(e_i)}(e_j) - d'_{<d_>(e_{i-1})}(e_j) \right] = d'(e_i) \; .$$

De même , $\forall\, i, j = 0, 1, \ldots, r$:

$$d'_{<d_>(e_i)}(e_j) - d'_{<d_>(e_{i-1})}(e_j) \neq 0 \quad \text{que si :}$$

$$d_>(e_{i-1}) \leq d'_>(e_j) \leq d_>(e_i) \quad \text{et donc} \quad e_i \geq e_j \; .$$

Une construction analogue, partant du concept de partie droite d'une évaluation distributionnelle, permet de retrouver un mélange de contrastes aux propriétés voulues à partir des fonctions de répartition droites. ◆

Etudions à présent la structure préférentielle que modélise le surclassement orienté élémentaire sur l'ensemble $\mathcal{P}$.

III. B. 3. Structure préférentielle élémentaire sur un ensemble d'évaluations distributionnelles qualitatives

A côté du surclassement orienté élémentaire, nous pouvons distinguer trois situations préférentielles, à savoir une situation d'indifférence stricte, une situation de surclassement orienté strict et une situation d'incomparabilité.

Définissons d'abord l'indifférence stricte élémentaire ($I^{*o}_{=}$) entre éloignements inverses:

D.III.9.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, d, d' \in \mathcal{P} ; \\ (d - d')\, I^{*o}_{=}\, (d' - d) \iff \exists\; m^{dd'} \in M^{dd'} \succ \forall\, e, e' \in E : \\ \qquad\qquad\qquad (m^{dd'}(e, e') \neq 0 \Rightarrow e = e') \; . \end{array} \right.$$

---

1) Pour faciliter l'expression posons $d_>(e_{0-1}) \equiv 0$

L'éloignement (d - d') est strictement indifférent à l'éloignement (d' - d), eu égard à l'information contenue dans une échelle élémentaire, si et seulement s'il est possible de caractériser ces éloignements à l'aide d'un mélange de contrastes exclusivement nuls.

On peut définir d'une manière analogue une situation de surclassement orienté strict élémentaire (S_+^{*o}) entre éloignements inverses:

D.III.10.

$$\begin{cases} \forall\ d, d' \in \mathcal{P} : \\ (d - d')\ S_+^{*o}\ (d' - d) \Leftrightarrow \Big[\exists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ \\ \qquad \forall\ e, e' \in E : (m^{dd'}(e,e') \neq 0) \Rightarrow e \geq e' \quad \text{et} \\ \qquad e'' > e''' \ \text{pour au moins un}\ m^{dd'}(e'',e''') \neq 0 \Big] \end{cases}$$

L'éloignement (d - d') est en situation de surclassement orienté strict élémentaire avec l'éloignement (d' - d) si et seulement s'il est possible de caractériser ces éloignements à l'aide d'un mélange de contrastes favorables ou nuls tel qu'à au moins un contraste favorable soit associé un poids non nul.

La situation d'incomparabilité(R^{*o})entre deux éloignements inverses caractérisera ensuite l'absence de toute situation de surclassement orienté élémentaire:

D.III.11.

$$\begin{cases} \forall\ d, d' \in \mathcal{P} : \\ (d - d')\ R^{*}\ (d' - d) \Leftrightarrow \Big[\nexists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ \\ \qquad \forall\ e, e' \in E : (\ m^{dd'}(e,e') \neq 0 \Rightarrow e \geq e')\ \text{ou}\ (\ m^{dd'}(e,e') \neq 0 \\ \qquad \Rightarrow e \leq e') \Big] . \end{cases}$$

Ces trois situations préférentielles, auxquelles nous ajoutons la situation $S_{\pm}^{*o}$, définissent une structure relationnelle de surclassement orienté sur l'ensemble des éloignements inverses entre évaluations distributionnelles. Nous notons $\underline{\mathcal{P}}^*$ ce sousensemble particulier de $\mathcal{P}^*$.[1]

P.III.2.

Soit E une échelle qualitative élémentaire et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E; la structure relationnelle $(S^{*o}_{+}, S^{*o}_{+}, I^{*o}_{=}, R^{*o}/\underline{\mathcal{P}}^*)$ définit une structure relationnelle de surclassement orienté.

Démonstration:

$$\forall d, d' \in \mathcal{P} ; \forall e \in E :$$

$$d'_{>}(e) = d_{>}(e) + \Sigma\left\{ \Sigma\left\{m^{dd'}(e',e'')/e' \in E, e' > e''\right\}/e'' \in E, e'' \leq e\right\}^{2)}$$

Dès lors $\forall (d-d') \in \underline{\mathcal{P}}^*$:

$$(d-d')S^{*o}_{+} (d'-d) \Leftrightarrow \forall e \in E : d'_{>}(e) \geqslant d_{>}(e) \text{ et } d'_{>}(e'') > d_{>}(e'')$$
pour au moins un $e'' \in E$.

Donc S^{*o}_{+} est une relation irréflexive et antisymétrique sur $\underline{\mathcal{P}}^*$.

D'autre part: $\forall (d-d') \in \underline{\mathcal{P}}^*$:

$$(d-d')I^{*o}_{=} (d'-d) \Leftrightarrow \forall e \in E : d'_{>}(e) = d_{>}(e) .$$

Donc $I^{*o}_{=}$ est une relation réflexive et symétrique sur $\underline{\mathcal{P}}^*$.
$S^{*o}_{\pm}$ correspond ainsi au regroupement de $S^{*o}_{\pm}$ et $I^{*o}_{=}$. Les définitions des relations $S^{*o}_{\pm}$, S^{*o}_{+}, $I^{*o}_{=}$ et R^{*o} correspondent donc aux définitions des situations $S^{*}_{\pm}$, S^{*}_{+}, $I^{*}_{=}$ et R^*. De plus, ces relations sont exhaustives sur $\underline{\mathcal{P}}^*$. Il en découle également que les relations S^{*o}_{+}, $I^{*o}_{=}$ et R^{*o} sont mutuellement exclusives sur $\underline{\mathcal{P}}^*$. Enfin, les relations $S^{*o}_{\pm}$ et R^{*o} sont non vides sur $\underline{\mathcal{P}}^*$.♦

A partir de cette structure préférentielle, nous pouvons déduire, grâce à l'hypothèse H.III.2 une structure $(S^{o}_{\pm}, S^{o}_{+}, I^{o}_{=}, R^{o}/\mathcal{P})$ que nous qualifierons d'élémentaire et où les relations $S^{o}_{\pm}$, S^{o}_{+}, $I^{o}_{=}$ et R^{o} représentent les relations déduites respectivement de $S^{*o}_{\pm}$, S^{*o}_{+}, $I^{*o}_{=}$ et de R^{*o}.

P.III.3.

Soit E une échelle qualitative élémentaire et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles sur E : la struc-

1) Remarquons que $\underline{\mathcal{P}}^*$ comprend les éloignements "nuls" entre une évaluation et elle-même.

2) Voir relation (*) p. 146

ture préférentielle élémentaire $(S^{o}_{\pm}, S^{o}_{+}, I^{o}_{=}, R^{o}/\wp)$ est une structure relationnelle de surclassement orienté.

Démonstration:

D'après l'hypothèse H.III.2. nous avons $\forall$ d, d'$\in \wp$:

$(d-d')S^{*o}_{\pm}(d'-d) \Leftrightarrow dS^{o}_{\pm}d'$.

La proposition P.III.3. est donc un corollaire immédiat de la proposition P.III.2. ◆

On remarquera que l'indifférence stricte élémentaire représente une situation d'identité entre évaluations distributionnelles. Autrement dit, $\forall$ a, a' $\in$ A, $aI^{o}_{=}a'$ si et seulement si $\forall e \in E : d_a(e) = d_{a'}(e)$.

Il est intéressant de rapprocher la structure préférentielle élémentaire de la structure préférentielle modélisée par l'opérateur de moyenne. Mais avant cela, essayons d'adapter la définition d'une situation de surclassement orienté à l'information préférentielle supportée par une échelle qualitative extensive.

III. C. Evaluations distributionnelles sur une échelle qualitative extensive

Que peut-on dire de la comparaison des mélanges de contrastes dans le cas où les évaluations distributionnelles correspondantes sont définies sur une échelle extensive?

L'étude de cette comparabilité nous amènera à définir une situation préférentielle sur l'ensemble des éloignements entre évaluations distributionnelles que nous qualifierons de "surclassement orienté extensif".

Tout comme pour le surclassement orienté élémentaire, il est possible par la suite, de modéliser une structure préférentielle "extensive" sur un ensemble d'évaluations.

L'étude comparative des situations de surclassement orienté rencontrées jusqu'ici, à savoir le surclassement orienté obtenu par l'opérateur de moyenne, le surclassement orienté élémentaire et le surclassement orienté extensif, et l'étude comparative des structures préférentielles modélisées à l'aide de ces situations préférentielles montrera leur emboîtement les unes dans les autres.

III. C. 1. Définition du surclassement orienté extensif

Considérons à présent deux évaluations $d, d' \in \mathcal{P}$ définies sur une échelle qualitative extensive [1] et supposons que nous ayons traduit leur éloignement (d - d') par une mélange $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$. Comparer ce mélange à son inverse revient à comparer deux "distributions" sur un ensemble complètement ordonné par la relation $\succcurlyeq_e^*$. Or, ce problème général s'apparente au problème que pose la comparaison de deux évaluations distributionnelles sur une échelle élémentaire, qui ne sont autres que deux distributions sur un ensemble complètement ordonné, et celui-ci a été résolu par l'introduction d'une situation de surclassement orienté élémentaire ou de dominance stochastique. Nous adopterons ici une démarche analogue. En particulier, nous essayerons de dé-

1) Voir D.II.11. p.93

finir une situation préférentielle sur l'ensemble des éloignements entre évaluations à partir des fonctions de répartition des mélanges de contrastes.

Pour cela, il s'avère utile de considérer à la place de l'ensemble des contrastes, l'ensemble E* quotient par la relation d'égalité $=^*_e$. Soit $\dot{c}$ 1) une classe d'équivalence de contrastes de E*:

$$\dot{c} = \{ c' \,/\, c' \in E^*, \; c' =^*_e c \}$$

Nous notons $E^*/_{=^*}$ l'ensemble quotient contenant les classes d'équivalence de contrastes,

$$E^*_{/=^*} = \{ \dot{c} \,/\, \dot{c} \subset E^* \} .$$

Puisque $\geqslant^*_e$ est un préordre complet sur E*, $>^*_e$ sera une relation d'ordre complet sur $E^*/_{=^*}$: c'est-à-dire:

$$\forall \; \dot{c}, \dot{c}' \in E^*_{/=^*} :$$

$$(\dot{c} \neq \dot{c}') \Rightarrow (\dot{c} >^*_e \dot{c}' \text{ ou } \dot{c}' >^*_e \dot{c}) .$$

Le nombre de classes d'équivalence que contient $E^*/_{=^*}$ dépend de la sériation extensive particulière. Il est compris entre un minimum observé pour l'échelle régulière 2) et un maximum pour une échelle où les contrastes non nuls sont tous inégaux entre eux:

$$(2r - 1) \leqslant \left| E^*_{/=^*} \right| \leqslant \left(r(r-1) + 1 \right) .$$

Transformons maintenant les mélanges de contrastes $m^{dd'}$ en des <u>mélanges de classes d'équivalence de contrastes</u>, notés $\dot{m}^{dd'}$:

D.III.12.

$$\Big\{ \quad \forall \; d, d' \in \mathcal{P} \text{ et } \forall \; m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} :$$

1) Nous avons choisi de marquer chaque classe d'équivalence de contrastes sous $=^*_e$ par un point au-dessus du signe avec lequel nous désignons le contraste. Ainsi $\dot{c}$ et $(e \dot{-} e')$ représentent-ils les classes d'équivalence de c respectivement de (e-e').

2) Voir chap. II. p.95

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{m}^{dd'} : E^*_{/=*} \longrightarrow [0,1] \text{ telle que} \\ \forall \dot{c} \in E^*_{/=*} : \dot{m}^{dd'}(\dot{c}) = \sum_{c'} \{ m^{dd'}(c') / c' \in \dot{c} \}. \end{array}\right.$$

Ainsi $\dot{m}^{dd'}$ est-il une fonction qui associe à chaque classe d'équivalence de contrastes un poids compris entre 0 et 1 qui est la somme des poids associés par le mélange $m^{dd'}$ à chacun des contrastes contenus dans cette classe d'équivalence.

L'additivité des poids à l'intérieur d'une classe d'équivalence qu'implicitement nous avons admise, est cohérente avec les propriétés d'ensemble de mélanges qu'est $\mathcal{M}^{dd'}$.[1]

Définissons maintenant les <u>fonctions de répartition gauches et droites</u> d'un mélange $\dot{m}^{dd'}$:

D.III.13. Nous appelons fonctions de répartition gauche, respectivement droite de $\dot{m}^{dd'}$, les fonctions:

$$\dot{m}^{dd'}_{>} : E^*_{/=*} \longrightarrow [0,1] \; ;$$

$$\dot{m}^{dd'}_{<} : E^*_{/=*} \longrightarrow [0,1] \; .$$

déduites de $\dot{m}^{dd'}$ de la manière suivante:

$$\forall \dot{c} \in E^*_{/=*} :$$

$$\dot{m}^{dd'}_{>}(\dot{c}) = \sum_{\dot{c}'} \{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}') / \dot{c}' \in E^*_{/=*} , \dot{c}' \leqslant^*_{e} \dot{c} \} ;$$

$$\dot{m}^{dd'}_{<}(\dot{c}) = \sum_{\dot{c}'} \{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}') / \dot{c}' \in E^*_{/=*} , \dot{c}' \geqslant^*_{e} \dot{c} \} .$$

La fonction de répartition gauche (resp. droite) est une fonction croissante (resp. décroissante) sur $E^*_{/=*}$ et on peut montrer que la connaissance de l'une quelconque des fonctions de répartition est suffisante pour connaître le mélange $\dot{m}^{dd'}$.

Par analogie avec la situation de dominance stochastique on peut admettre dès lors que le mélange $\dot{m}^{dd'}$ est "comparable" à son inverse dès que:

---

1) En effet: $\forall c \in E^*$ et $\alpha \in [0,1]$: $\alpha m^{dd'}(c) + (1-\alpha) m^{dd'}(c) = m^{dd'}(c)$.
Voir III. A. 3., p.136

$$\forall\, \dot{c} \in E^*_{/=*} \quad : \quad \dot{m}^{dd'}_{>}(\dot{c}) \leqslant \dot{m}^{d'd}_{>}(\dot{c})$$ [1]

Cependant, puisque la sériation des contrastes favorables et la sériation des contrastes défavorables sont liées par la condition de réversibilité S.E.1. qui lie la réciprocité de la relation $\geqslant^*_e$ à l'inversion des contrastes [2], il faut s'attendre à ce que les fonctions de répartition des mélanges inverses soient également liées entre elles. En effet, une telle propriété fait l'objet de la proposition suivante:

P.III.4.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, d, d' \in \mathcal{P} \text{ et } \forall\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} : \\ \forall\, (e \dot{-} e') \in E^*_{/=*} : \\ \quad \dot{m}^{dd'}_{>}(e \dot{-} e') = \dot{m}^{d'd}_{<}(e' \dot{-} e) \quad ; \\ \quad \dot{m}^{dd'}_{<}(e \dot{-} e') = \dot{m}^{d'd}_{>}(e' \dot{-} e) \quad . \end{array}\right.$$

La fonction de répartition gauche (resp. droite) du mélange $\dot{m}^{dd'}$ est identique à la fonction de répartition droite (resp. gauche) "inversée" du mélange inverse.

En effet, $\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*_{/=*}$:

$$\dot{m}^{d'd}_{<}(e \dot{-} e') =$$

$$\sum_{(e'' \dot{-} e''')} \left\{ \dot{m}^{dd'}(e'' \dot{-} e''') \,/\, (e'' \dot{-} e''') \in E^*_{/=*} , (e'' \dot{-} e''') \leqslant^*_e (e' \dot{-} e) \right\}.$$

Ainsi un mélange $\dot{m}^{dd'}$ est-il "comparable" à son inverse dès que:

$$\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*_{/=*} \quad : \quad \dot{m}^{dd'}_{<}(e \dot{-} e') \geqslant \dot{m}^{dd'}_{>}(e' \dot{-} e) \,.$$

c'est-à-dire que pour toute classe d'équivalence de contrastes $(e \dot{-} e')$, la somme des poids attribués à des classes au moins aussi favorables est supérieure ou égale à la somme des poids associés à des classes au plus aussi favorables que la classe inverse $(e' \dot{-} e)$.

---

1) Ou encore, ce qui revient au même, $\forall\, \dot{c} \in E^*_{/=*} : \dot{m}^{dd'}_{<}(\dot{c}) \geqslant \dot{m}^{d'd}_{<}(\dot{c})$.
2) Voir chap. II.B.3., p.93

Mais on remarquera qu'il ne faut point parcourir tout l'ensemble $E^*/_{=*}$ pour arriver à ce résultat. Il suffit de ne prendre en compte que les classes d'équivalence de contrastes favorables ou nuls. Cette propriété fait l'objet de la proposition suivante:

P.III.5.

$\forall\, d, d' \in \mathcal{P}$ et $m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$,

les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*/_{=*} : \dot{m}_{>}^{dd'}(e \dot{-} e') \leq \dot{m}_{>}^{d'd}(e \dot{-} e')$;

b) $\forall\, (e \dot{-} e') \in (E^*_+ \cup E^*_=)/_{=*} : \dot{m}_{<}^{dd'}(e \dot{-} e') \geq \dot{m}_{>}^{dd'}(e' \dot{-} e)$.

<u>Démonstration</u>:

L'implication (a) => (b) est immédiate, démontrons encore l'implication inverse, (b) => (a).

En effet, soit $\dot{c}_0$ la classe d'équivalence des contrastes nuls. Dès lors $\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*_-/_{=*}$:

$$\dot{m}_{<}^{dd'}(e \dot{-} e') = \overbrace{\sum_{\dot{c}} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}) \,/\, \dot{c} \in E^*/_{=*},\ \dot{c} \geq_e^* \dot{c}_0 \right\}}^{A}$$

$$+ \overbrace{\sum_{\dot{c}} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}) \,/\, \dot{c} \in E^*/_{=*},\ \dot{c} <_e^* \dot{c}_0 \right\}}^{b}$$

$$\dot{m}_{>}^{dd'}(e' \dot{-} e) = \underbrace{\sum_{\dot{c}} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}) \,/\, \dot{c} \in E^*/_{=*},\ \dot{c} \leq_e^* \dot{c}_0 \right\}}_{B}$$

$$+ \overbrace{\sum_{\dot{c}} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}) \,/\, \dot{c} \in E^*/_{=*},\ \dot{c} >_e^* \dot{c}_0 \right\}}^{a}$$

Or supposons (b) vérifié, alors:

$$A - a \geq B - b, \ \forall\, (e' \dot{-} e) \in E^*_-/_{=*} .$$

Ces considérations nous donnent tous les éléments nécessaires à la définition d'une situation préférentielle sur l'ensemble des éloignements entre évaluations distributionnelles.

D.III.14. Etant donnés une échelle qualitative extensive E et un ensemble $\mathcal{P}$ d'évaluations distributionnelles définies sur E. $\forall\, d, d \in \mathcal{P}$, nous disons que (d - d') est en <u>situation de surclassement orienté extensif</u> avec (d' - d) si et seulement si $\exists\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \ni$ $\forall\, (e \dot{-} e') \in (E^*_+ \cup E^*_=)/_{=*} : \dot{m}_{<}^{dd'}(e \dot{-} e') \geq \dot{m}_{>}^{dd'}(e' \dot{-} e)$.

Ainsi l'éloignement (d - d') est-il relié par une situation de surclassement orienté extensif, notée $S^{*}_{\pm}e$, à l'éloignement inverse (d' - d) si et seulement si il est possible de décrire ces éloignements à l'aide d'un mélange de contrastes tel que pour toute classe d'équivalence de contrastes favorables et nuls, la valeur de la fonction de répartition droite soit toujours supérieure ou égale à la valeur de la fonction de repartition gauche pour la classe d'équivalence des contrastes inverses.

Illustrons cette définition à l'aide d'un exemple numérique:

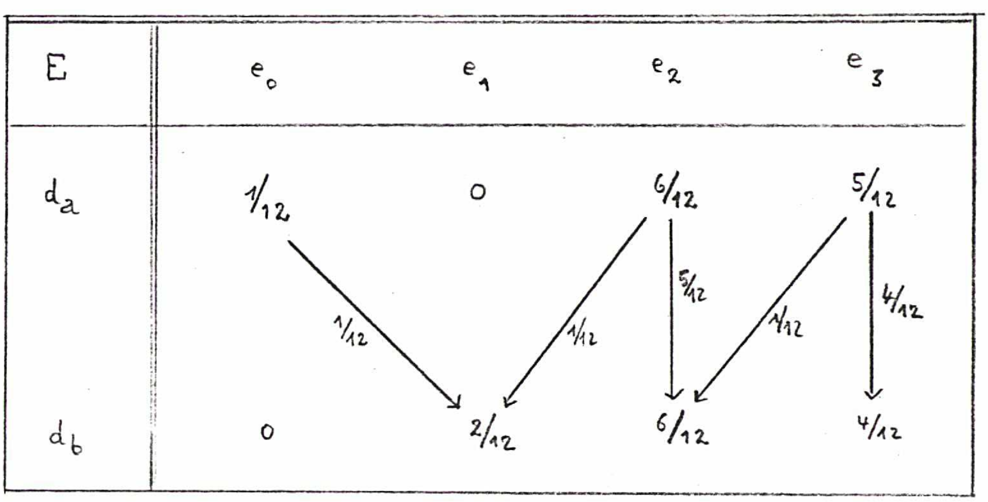
E.III.1.: Soit $E = \{e_o, e_1, e_2, e_3\}$ et soit $(\leq^{*}_{e} / E^{*})$ telle que :

$(e_1-e_o) <^{*}_{e} (e_2-e_1) <^{*}_{e} (e_3-e_2) <^{*}_{e} (e_2-e_o) <^{*}_{e} (e_3-e_1) <^{*}_{e} (e_3-e_o$

soient d_a et d_b les évaluations suivantes:

E	e_o	e_1	e_2	e_3
d_a	1/12	0	6/12	5/12
d_b	0	2/12	6/12	4/12

Construisons à l'aide de la procédure utilisée dans la démonstration de P.III.1. [1] un mélange de constrastes $m^{d_a d_b} \in \mathcal{M}^{d_a d_b}$ que nous pouvons représenter de la manière suivante: [2]



---

1) Voir III.B.2., p.147 Proc.III.1.

2) La flêche ⟶ allant de $d_a(e_i)$ vers $d_a(e_j)$, $\forall i, j = 0, 1, 2, 3$, indique le poids $m^{d_a d_b}(e_i, e_j) \neq 0$.

Résumons les calculs de $\dot{m}_{<}^{d_a d_b}$ et de $\dot{m}_{<}^{d_b d_a}$ dans le tableau ci-dessous. On constate que

$$(d_a - d_b) \quad S_{\pm}^{e} \quad (d_b - d_a) .$$

En effet, seul le contraste $(e_o - e_1)$, associé d'un poids 1/12, indique une préférence de d_b sur d_a, alors que deux contrastes favorables, $(e_2 - e_1)$ et $(e_3 - e_2)$, chacun avec un poids de 1/12, indiquent une préférence de d_a sur d_b. Et puisque la sériation extensive donnée impose les relations suivantes:

$$(e_3 - e_2) \succ_e^* (e_2 - e_1) \succ_e^* (e_1 - e_o),$$

on peut en déduire que $(d_a - d_b)$ est certainement au moins aussi favorable que $(d_b - d_a)$.

$E^*/_{=^*}$	$\dot{m}^{d_a d_b}$	$\dot{m}_{<}^{d_a d_b}$	$\dot{m}_{<}^{d_b d_a}$
$(e_3 \dot{-} e_o)$	0	0	0
$(e_3 \dot{-} e_1)$	0	0	0
$(e_2 \dot{-} e_o)$	0	0	0
$(e_3 \dot{-} e_2)$	1/12	1/12	0
$(e_2 \dot{-} e_1)$	1/12	2/12	0
$(e_1 \dot{-} e_o)$	0	2/12	1/12
$(e_o \dot{-} e_o)$	9/12	11/12	10/12
$(e_o \dot{-} e_1)$	1/12	12/12	10/12
$(e_1 \dot{-} e_2)$	0	12/12	11/12
$(e_2 \dot{-} e_3)$	0	12/12	12/12
$(e_o \dot{-} e_2)$	0	12/12	12/12
$(e_1 \dot{-} e_3)$	0	12/12	12/12
$(e_o \dot{-} e_3)$	0	12/12	12/12

III. C. 2. Structure préférentielle extensive sur un ensemble d'évaluations distributionnelles qualitatives

A côté du surclassement orienté extensif, on peut à nouveau distinguer trois situations préférentielles particulières qui sont le surclassement orienté strict extensif (S_{+}^{*e}), l'indifférence stricte extensive ($I^{*e}_{=}$) et l'incomparabilité extensive (R^{*e}).

Définissons d'abord le surclassement orienté strict extensif:

D.III.15.

$$\begin{cases} \forall\ d, d' \in \mathcal{P} \\ (d - d')\ S^{*e}_{+}\ (d' - d) \Leftrightarrow \exists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \\ \text{tel que } \forall\ (e \doteq e') \in (E^*_+ \cup E^*_=)/_{=*} : \dot{m}^{dd'}_{<}(e \doteq e') \geq \\ \dot{m}^{dd'}_{>}(e' \doteq e) \text{ et } \dot{m}^{dd'}_{<}(e'' \doteq e''') > \dot{m}^{dd'}_{>}(e''' \doteq e'') \\ \text{pour au moins un } (e'' \doteq e''') \in E^*_+/_{=*}. \end{cases}$$

L'éloignement (d - d') est en situation de surclassement orienté strict extensif avec l'éloignement (d' - d) si et seulement si il est possible de construire un mélange de contrastes tel que pour toute classe d'équivalence de contrastes favorables ou nuls, les valeurs de la fonction de répartition droite de $\dot{m}^{dd'}$ soient supérieures ou égales aux valeurs de la fonction de répartition gauche de $\dot{m}^{dd'}$ sur les classes d'équivalence "inversées", et tel que la fonction de répartition droite prenne une valeur strictement supérieure à la fonction de répartition gauche pour au moins une classe d'équivalence de contrastes favorables et son "inverse".

On peut définir d'une manière analogue la situation d'indifférence stricte extensive:

D.III.16.

$$\begin{cases} \forall\ d, d' \in \mathcal{P} \\ (d - d')\ I^{*e}_{=}\ (d' - d) \Leftrightarrow \exists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ \\ \forall\ (e \doteq e') \in (E^*_+ \cup E^*_=)/_{=*} : \dot{m}^{dd'}_{<}(e \doteq e') = \dot{m}^{dd'}_{>}(e' \doteq e). \end{cases}$$

L'éloignement (d - d') est strictement indifférent à l'éloignement (d' - d) si et seulement s'il est possible de construire un mélange de contrastes tel que pour toute classe d'équivalence de contrastes favorables ou nuls la valeur de la fonction de répartition droite soit égale à la valeur de la fonction de répartition gauche pour la classe "inverse".

Et en fin de compte, nous pouvons définir la situation d'incomparabilité extensive par l'absence de toute situation de surclassement extensif:

D.III.17.

$$\begin{cases} \forall\ d\ ,\ d' \in \mathcal{P} & : \\ (d - d')\ R^{*e}\ (d' - d) \iff \nexists\ \bar{m}^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ \\ \forall\ (e \doteq e') \in (E_+^* \cup E_=^*)/_{=*} : (\ \bar{m}_<^{dd'}(e \doteq e') \geq \\ \bar{m}_>^{dd'}(e' \doteq e)\ )\ \text{ou}\ (\ \bar{m}_<^{dd'}(e \doteq e') \leq \bar{m}_>^{dd'}(e' \doteq e)). \end{cases}$$

Ainsi l'éloignement (d - d'') est-il incomparable à son inverse (d' - d) dès qu'il n'existe aucun mélange de contraste décrivant ces éloignements tel que pour toute classe d'équivalence de contrastes favorables ou nuls les valeurs de la fonction de répartition droite sont toujours supérieures ou égales (resp. inférieurs ou égales) aux valeurs de la fonction de répartition gauche pour les classes "inverses".

Ces quatres relations $S^{*e}_{\pm}$, S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$ et R^{*e} définissent une structure relationnelle ($S^{*e}_{\pm}$, S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$, $R^{*e}/\underline{\mathcal{P}}^*$) que nous appellons extensive.

A l'aide de l'hypothèse H.III.2 nous pouvons en déduire une structure relationnelle ($S^{e}_{\pm}$, S^{e}_{+}, $I^{e}_{=}$, $R^{e}/\mathcal{P}$) que nous qualifierons également d'extensive et où $S^{e}_{\pm}$, S^{e}_{+}, $I^{e}_{=}$, et R^{e} sont les relations déduites respectivement des relations $S^{*e}_{\pm}$, S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$ et R^{*e} .

Avant de montrer que ces deux structures représentent bien des structures relationnelles de surclassement orienté respectivement sur $\underline{\mathcal{P}}^*$ et sur $\mathcal{P}$, étudions les liens entre le surclassement orienté extensif et d'une part le surclassement orienté élémentaire et de l'autre le surclassement orienté modélisé par la moyenne pondérée.

III. C. 3. Structures préférentielles emboîtées

Il est utile d'étudier les liens entre les situations de surclassement orienté élémentaire et extensif et la situation de surclassement orienté modélisée par l'opérateur de moyenne sur l'échelle codée, car ce rapprochement apportera des précisions concernant les caractéristiques de la structure préférentielle extensive. De plus, nous verrons que les structures préférentielles élémentaire et extensive représentent des structures "partielles" emboîtées dans la structure "complète" obtenue par l'opérateur de moyenne pondérée.

III. C. 3.a. Trois situations de surclassement orienté emboîtées

Notons $S_{\pm}^{m}$ et $S_{\pm}^{*m}$ les situations de surclassement modélisées par l'opérateur de moyenne respectivement sur un ensemble d'évaluations $\mathcal{P}$ et sur l'ensemble des éloignements inverses entre ces évaluations. Ainsi, quelles que soient $d, d' \in \mathcal{P}$ et étant donné un codage χ de E, nous avons:

$$d \; S_{\pm}^{m} \; d' \iff (d \circ \chi) \geqslant (d' \circ \chi)\,,^{1)}$$

et par conséquent:

$$(d - d') \; S_{\pm}^{*m} \; (d' - d) \iff [(d \circ \chi) - (d' \circ \chi)] \geqslant [(d' \circ \chi) - (d \circ \chi)]$$

L'éloignement $(d - d')$ est en situation $S_{\pm}^{*m}$ avec l'éloignement inverse $(d' - d)$ si et seulement si la différence entre les valeurs moyennes de l'évaluation d et de l'évaluation d' est supérieure ou égale à la différence entre les valeurs moyennes de l'évaluation d' et de l'évaluation d.

Quels sont les liens qui unissent cette situation $S_{\pm}^{*m}$ aux deux situations de surclassement orienté $S_{\pm}^{*e}$ et $S_{\pm}^{*o}$ précédemment définies?

La réponse donne lieu à la proposition suivante:

P.III.6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \; d, d' \in \mathcal{P}: \\ (d - d') \; S_{\pm}^{*o} \; (d' - d) \Rightarrow (d - d') \; S_{\pm}^{*e} \; (d' - d) \Rightarrow (d - d') \; S_{\pm}^{*m} \; (d' - d). \end{array} \right.$$

---

1) Voir chap. I. p. 33 : $(d \circ \chi)$ représente la multiplication vectorielle de d par χ .

Deux éloignements liés par une situation $S_{\pm}^{*o}$ (resp. $S_{\pm}^{*e}$) sont également liés par la situation $S_{\pm}^{*e}$ (resp. $S_{\pm}^{*m}$).

Autrement dit, la situation $S_{\pm}^{*m}$ "contient" la situation $S_{\pm}^{*e}$ et celle-ci, à son tour, "contient" la situation $S_{\pm}^{*o}$.

La démonstration de cette proposition importante comportera trois parties. Nous démontrerons d'abord que $S_{\pm}^{*o} \Rightarrow S_{\pm}^{*m}$, ensuite que $S_{\pm}^{*e} \Rightarrow S_{\pm}^{*m}$ et enfin que $S_{\pm}^{*o} \Rightarrow S_{\pm}^{*e}$.

- $S_{\pm}^{*o} \Rightarrow S_{\pm}^{*m}$: 1)

$\forall\ d, d' \in \mathcal{P}$ et étant donné un codage χ de E;

si $(d - d')\ S_{\pm}^{*}\ (d' - d)$ alors $\exists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ$

$\forall\ (e - e') \in E^{*}:\quad m^{dd'}(e - e') \neq 0 \Rightarrow e \geqslant e'.$

Dès lors, $\forall\ (e - e') \in E^{*}:\quad m^{d'd}(e - e') \neq 0 \Rightarrow e \leqslant e'.$

Or:

$$[(d \circ \chi) - (d' \circ \chi)] = \sum_e \{ \sum_{e'} \{ m^{dd'}(e - e') \cdot (\chi(e) - \chi(e')) / e' \in E \} / e \in E \},$$

et

$$[(d' \circ \chi) - (d \circ \chi)] = \sum_e \{ \sum_{e'} \{ m^{d'd}(e - e') \cdot (\chi(e) - \chi(e')) / e' \in E \} / e \in E \}.$$

Donc:

$$[(d \circ \chi) - (d' \circ \chi)] \geqslant 0 \geqslant [(d' \circ \chi) - (d \circ \chi)].$$

- $S_{\pm}^{*e} \Rightarrow S_{\pm}^{*m}$:

$\forall\ d, d' \in \mathcal{P} : (d - d')\ S_{\pm}^{*e}\ (d' - d) \Rightarrow \exists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$

---

1) Dans le cadre des travaux sur la dominance stochastique la démonstration de ce résultat, toutefois au niveau des situations $S_{\pm}^{o}$ et $S_{\pm}^{m}$, repose sur les propriétés des fonctions de répartition. On peut trouver cette démonstration notamment dans les travaux suivants:
FISHBURN, P.C. (1974), convex stochastic dominance with finite consequences, Theory and Decision, 5, p. 119-137;
HADAR & RUSSEL (op.cit. p.143);
HANOCH & LEVY (op.cit. p.143 ;
QUIRK & SAPOSNIK (1962), Admissibility and measurable Utility Functions, Review of Economic Studies, 29, p.140-146.
Par contre, BENZECRI (op.cit. p.14) p.265, démontre ce résultat à partir des propriétés du mélange de contrastes associés à $S_{\pm}^{*o}$; cependant, cette démonstration concerne également les situations $S_{\pm}^{o}$ et $S_{\pm}^{m}$.

tel que

$$\forall\,(e \dot{-} e') \in (E^*_+ \cup E^*_=)/_{=*} \;:\quad \dot{m}^{dd'}_{<}(e \dot{-} e') \;\geqslant\; \dot{m}^{dd'}_{>}(e' \dot{-} e) .$$

D'après P.III.3. $\dot{m}^{dd'}$ est tel que:

$$\forall\,(e \dot{-} e') \in E^*_{/=*} \;:\quad \dot{m}^{dd'}_{>}(e \dot{-} e') \;\leqslant\; \dot{m}^{d'd}_{>}(e \dot{-} e') .$$

Soit ϕ un codage-C de E. Il est facile de voir que $E^*/_{=*}$ est une équivalence de codage-C, puisque les classes d'équivalences sous $=^*_e$ sont également les classes modulo ϕ de E^*. Donc ϕ est un codage de $E^*/_{=*}$. Désignons par A et B les sommes suivantes:

$$A \;=\; \sum_{\dot{c}} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}) \cdot \phi(\dot{c}) \,/\, \dot{c} \in E^*_{/=*} \right\} = (\dot{m}^{dd'} \circ \phi) ;$$

$$B \;=\; \sum_{\dot{c}} \left\{ \dot{m}^{d'd}(\dot{c}) \cdot \phi(\dot{c}) \,/\, \dot{c} \in E^*_{/=*} \right\} = (\dot{m}^{d'd} \circ \phi) .$$

On peut montrer que $A \geqslant B$. En effet, numérotons de 1 à q les classes d'équivalences de $E^*/_{=*}$ dans l'ordre croissant de $<^*_e$ Dans ce cas, nous avons:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{q} \left[\dot{m}^{dd'}(\dot{c}_j) \cdot \phi(\dot{c}_j) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[\dot{m}^{dd'}(\dot{c}_j) \cdot (\phi(\dot{c}_k) - \phi(\dot{c}_{k+1})) \right] \right\} \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{q} \left[\dot{m}^{dd'}(\dot{c}_j) \cdot \phi(\dot{c}_q) \right] \;^{1)} \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \left[\dot{m}^{dd'}_{>}(\dot{c}_k) \cdot (\phi(\dot{c}_k) - \phi(\dot{c}_{k+1})) \right] + \phi(\dot{c}_q) . \end{aligned}$$

Dès lors A - B devient:

$$(A - B) = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \left[\dot{m}^{dd'}_{>}(\dot{c}_k) - \dot{m}^{d'd}_{>}(\dot{c}_k) \right] \cdot \left[\phi(\dot{c}_k) - \phi(\dot{c}_{k+1}) \right] \right\} .$$

Or,

$$\left[\phi(\dot{c}_k) - \phi(\dot{c}_{k+1}) \right] < 0 \;, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, q-1 ;$$

et

$$\left[\dot{m}^{dd'}_{>}(\dot{c}_k) - \dot{m}^{d'd}_{>}(\dot{c}_k) \right] \leqslant 0 \;, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, q-1 ;$$

donc $A \geqslant B$. Et puisque une sériation extensive $(\geqslant^*_e / E^*)$ est compatible avec le choix du codage-C ϕ^m suivant [2]:

$$\forall\,(e - e') \in E^* :\quad \phi^m(e - e') = (\chi(e) - \chi(e')) ;$$

---

1) "ABEL's summation identity", voir FISHBURN, op.cit.p.58.

2) En effet, l'addition partitive à la base de la propriété "métrique" du codage-C ϕ^m est compatible avec la sériation extensive ($\geqslant^*_e / E^*$) , Voir chap. II.C.1., p. 103

on voit que $(m^{dd'} \circ \phi^m) \geq (m^{d'd} \circ \phi^m)$, et donc

$$[(d \circ \chi) - (d' \circ \chi)] - [(d' \circ \chi) - (d \circ \chi)] \geq 0 .$$

- $S^{*o}_{\pm} \Rightarrow S^{*e}_{\pm}$:

$\forall\ d, d' \in \mathcal{P}$: $(d - d')\ S^{*o}_{\pm}\ (d' - d) \Rightarrow \exists\ m^{dd'} \in M^{dd'}$ tel que $\forall\ (e - e') \in E^*$: $m^{dd'}(e, e') \neq 0 \Rightarrow e \geq e'$. Il s'ensuit que $\dot{m}^{dd'}(e \dot{-} e') = 0$ pour tout $(e \dot{-} e') \in E^*_{-/=*}$, et donc

$$\forall\ (e \dot{-} e') \in (E^*_+ \cup E^*_=)/_{=*} : \dot{m}^{dd'}_{<}(e \dot{-} e') \geq \dot{m}^{dd'}_{>}(e' \dot{-} e) . \blacklozenge$$

Avant de transposer ces résultats aux situations préférentielles entre évaluations distributionnelles, c'est-à-dire entre actions potentielles à la décision, reconsidérons la structure préférentielle extensive $(S^e_+, I^e_=, R^e/\mathcal{P})$.

III. C. 3.b. Caractéristiques de la structure préférentielle extensive

De la proposition P.III.4. nous pouvons déduire, dans un premier temps, certaines propriétés essentielles qui font de $(S^{*e}_{\pm}, S^{*e}_{+}, I^{*e}_{=}, R^{*e}/\mathcal{P}^*)$ et $(S^e_{\pm}, S^e_+, I^e_=, R^e/\mathcal{P})$ des structures relationnelles de surclassement orienté.

P.III.7.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation extensive $(\geq^*/E^*)$ et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E; les structures $(S^{*e}_{\pm}, S^{*e}_{+}, I^{*e}_{=}, R^{*e}/\mathcal{P}^*)$ et $(S^e_{\pm}, S^e_+, I^e_=, R^e/\mathcal{P})$ sont des structures relationnelles de surclassement orienté.

Démonstration

Nous allons démontrer d'abord que la structure ($S^{*e}_{\pm}$, S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$, $R^{*e}/\mathcal{P}^*$) est une structure relationnelle de surclassement orienté.

$\forall (d-d') \in \mathcal{P}^* : (d-d') S^{*e}_{+} (d'-d) \xRightarrow{P.III.6.b.} (d-d') S^{*m} (d'-d)$ et $(d'-d) \not S^{*m} (d-d')$, car, pour un codage $\emptyset^m$ vérifiant la sériation ($\geqslant^*_e$ /E*) donnée, nous avons:

$$(d-d') \circ \emptyset^m > (d'-d) \circ \emptyset^m \quad .$$

Donc S^{*e}_{+} est une relation irréflexive et antisymétrique sur $\mathcal{P}^*$ et $(d-d') S^{*e}_{+} (d'-d) \Leftrightarrow (d-d') S^{*e}_{+} (d'-d)$ et $(d'-d) \not S^{*e}_{\pm} (d-d')$.

D'autre part, $\forall (d-d') \in \mathcal{P}^* : (d-d') I^{*e}_{=} (d'-d) \Leftrightarrow (d-d') S^{*e}_{\pm} (d'-d)$ et $(d'-d) S^{*e}_{\pm} (d-d')$, donc I^{*e} est une relation symétrique sur $\mathcal{P}^*$.

D'après P.III.6.c. I^*_e contient la relation I^{*o}, donc $I^{*e}_{=}$ est une relation réflexive et R^{*e} est par conséquent une relation irréflexive et symétrique. Les définitions des quatre relations $S^{*e}_{\pm}$, S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$ et R^{*e} correspondent ainsi aux définitions des quatre situations $S^*_{\pm}$, S^*_{+}, $I^*_{=}$ et R^*. Il est facile de vérifier que ces relations sont exhaustives sur $\mathcal{P}^*$, puisque R^{*e} correspond à l'absence de situations S^{*e}_{+} et $I^{*e}_{=}$ entre deux éloignements inverses. Le même raisonnement montre d'autre part que les relations S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$ et R^{*e} sont mutuellement exclusives. Enfin, on peut montrer à l'aide d'exemples judicieusement choisis que $S^{*e}_{\pm}$ et R^{*e} sont non vides sur $\mathcal{P}^*$ [1]. Les relations $S^{*e}_{\pm}$, S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$, R^{*e} définissent donc une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}^*$. Et puisque $\forall d, d' \in \mathcal{P}$: $(d-d') S^{*e}_{+} (d'-d) \Leftrightarrow d S^e_{+} d'$, les relations $S^e_{\pm}$, S^e_{+}, $I^e_{=}$ et R^e déduites de ces relations à l'aide de l'hypothèse H.III.2. définissent également une structure relationnelle de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$.♦

La connaissance de la situation $S^{*e}_{\pm}$ détermine donc entièrement ces deux structures préférentielles. C'est pourquoi nous les noterons indifféremment ($S^{*e}_{\pm}$, $R^{*e}/\mathcal{P}^*$) ou (S^{*e}_{+}, $I^{*e}_{=}$, $R^{*e}/\mathcal{P}^*$)

---

1) Voir E.III.2., p.167 ; d_a et d_c sont "incomparables" au sens de $S^e_{\pm}$.

et (S_+^e, $R^e/\mathcal{P}$) ou (S_+^{*e}, $I_=^e$, $R^e/\mathcal{P}$).

Il est important de noter que la propriété d'antisymétrie de S_+^e et en général l'"exclusivité" des situations S_+^e et $I_=^e$, nécessaire à la modélisation des préférences, reposent sur l'emboîtement des situations de surclassement orienté $S_\pm^{*e}$ et $S_\pm^{*m}$. Or, cet emboîtement repose à son tour sur la compatibilité des types d'échelles qualitatives entre eux.

On retrouve ici le fait que les conditions d'équilibre perceptif à la base des définitions des types d'échelles qualitatives sont également des conditions nécessaires pour que la structure relationnelle (S_+^e, $I_=^e$, $R^e/\mathcal{P}$) décrive un modèle de préférence "cohérent" sur $\mathcal{P}$.

On remarquera encore que la situation $S_\pm^e$, par opposition avec les situations $S_\pm^o$ et $S_\pm^m$ n'est pas transitive. Pour montrer cette absence, considérons l'exemple suivant:

E.III.2. Soit E une échelle qualitative extensive :

$$E = \{ e_o , e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , e_5 \} \text{ telle que:}$$

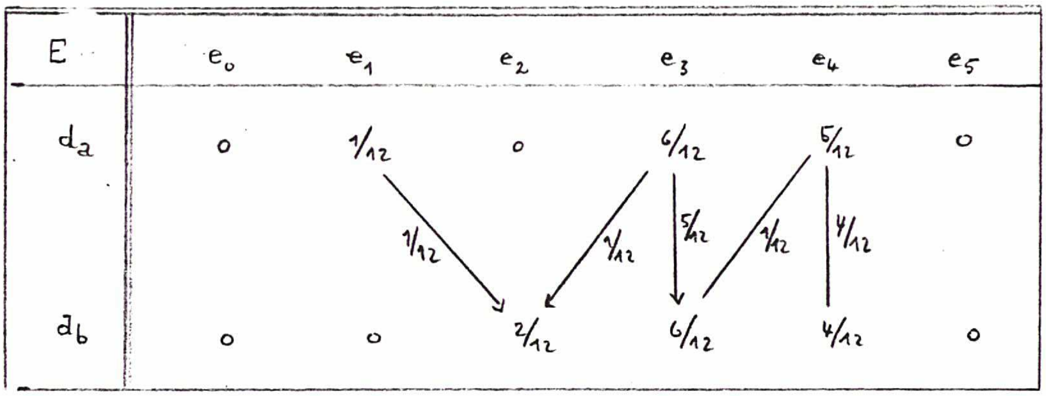
$$(e_1-e_o) <_e^* (e_2-e_1) <_e^* (e_3-e_2) <_e^* (e_4-e_3) <_e^* (e_5-e_4) <_e^*$$
$$(e_2-e_o) <_e^* (e_3-e_1) <_e^* (e_4-e_2) <_e^* (e_5-e_3) <_e^* (e_3-e_o) <_e^*$$
$$(e_4-e_1) <_e^* (e_5-e_2) <_e^* (e_4-e_o) <_e^* (e_5-e_1) <_e^* (e_5-e_o) .$$

Considérons les trois évaluations distributionnelles suivantes:

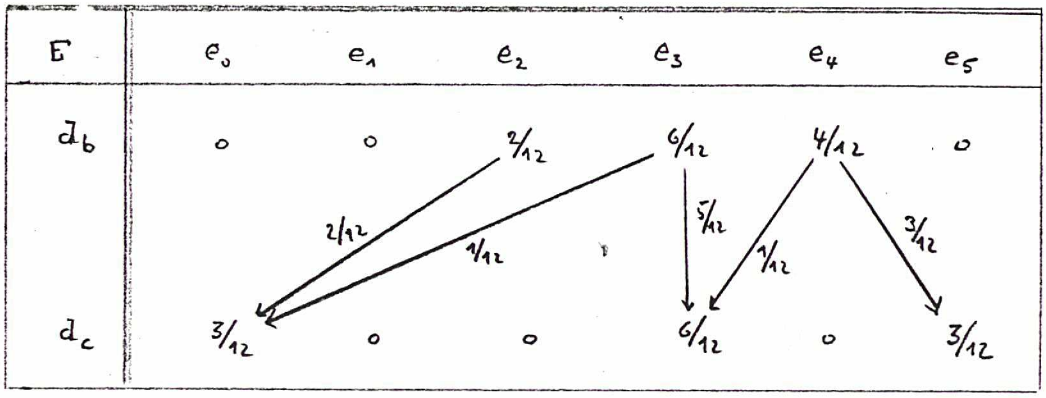
E	e_o	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
d_a	0	1/12	0	6/12	5/12	0
d_b	0	0	2/12	6/12	4/12	0
d_c	3/12	0	0	6/12	0	3/12

On peut construire à l'aide de la procédure décrite dans la proposition P.III.1. les trois mélanges suivants:

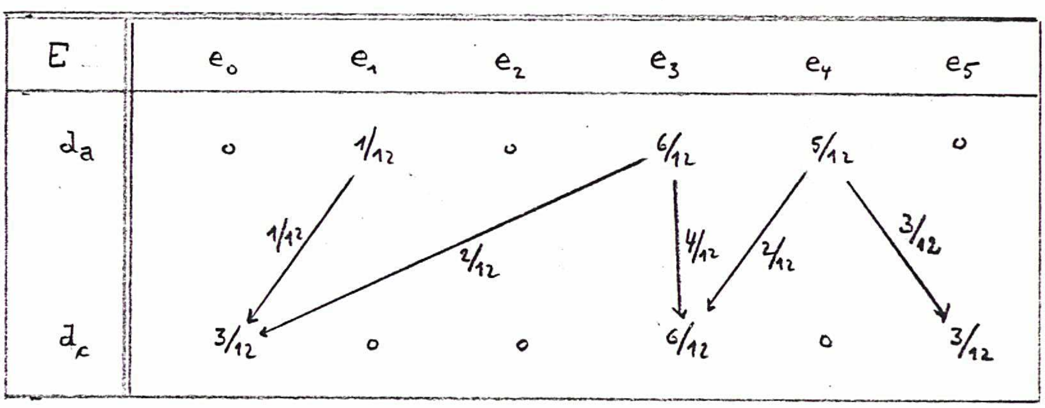
a)



b)



c)



Le calcul des fonctions de repartition montre que $d_a S^e_{\pm} d_b$ et $d_b S^e_{\pm} d_c$, mais aussi que $d_a \not S^e_{\pm} d_c$.

On doit donc constater que la situation $S^e_{\pm}$, et partant les situations S^e_{+} et $I^e_{=}$ sont "non-transitives". Cependant, cette propriété ne conduit à aucune contradiction avec un modèle de préférence sur $\mathcal{P}$, comme le montre la proposition suivante:

P.III.8. $\forall\ d,\ d',\ d'' \in \mathcal{P}$:

$$\begin{cases} -(d\ S^e_{\pm}\ d') \text{ et } (d'\ S^e_{\pm}\ d'') \Rightarrow (d\ S^e_{\pm}\ d'') \text{ ou } (d\ R^e\ d'')\ ; \\ -(d\ I^e_{=}\ d') \text{ et } (d'\ I^e_{=}\ d'') \Rightarrow (d\ I^e_{=}\ d'') \text{ ou } (d\ R^e\ d'')\ ; \end{cases}$$

$\{-(d\ S^e_+\ d')$ et $(d'\ S^e_+\ d'') \Rightarrow (d\ S^e_+\ d'')$ ou $(d\ R^e\ d'')$

Si l'évaluation d est en situation $S^e_{\pm}$ avec l'évaluation d' et celle-ci, de même, en situation $S^e_{\pm}$ avec l'évaluation d", alors ou bien d est en situation $S^e_{\pm}$ avec d", ou bien d est incomparable à d" au sens de $S^e_{\pm}$.

Cette proposition nous mène à désigner cette non-transitivité par les termes de "SR-transitivité", de "IR-transitivité", ou de "K-transitivité".[1)]

Démonstration:

$-(dS^e_{\pm}d')$ et $(d'S^e_{\pm}d'') \xrightarrow{P.III.6.b} (dS^m_{\pm}d')$ et $(d'S^m_{\pm}d'') \Longrightarrow (dS^m_{\pm}d'')$.

Donc $d''S^e_{\pm}d \Longrightarrow dS^e_{\pm}d''$ ou $dR^e d''$.

- même raisonnement pour les relations I^e et S^e.♦

Abordons à présent les liens qu'établit la proposition P.III. 6. entre les trois structures préférentielles envisagées jusqu'à présent.

III. C. 3.c. Trois structures préférentielles emboîtées

Il est intéressant de rapprocher les structures préférentielles élémentaire et extensive définies ci-dessus avec la structure préférentielle modélisée par l'opérateur de moyenne[2)] que nous appelons pour simplifier <u>structure préférentielle complète</u>.

D.III.18. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble d'évaluations distributionnelles définies sur E et soit χ un codage de E. Nous appelons structure préférentielle complète la structure relationnelle $(S^m_+, I^m_= / \mathcal{P})$ où

$\forall\, d\,,\, d \in \mathcal{P}$:

$$(d\ S^m_+\ d') \Leftrightarrow (d \circ \chi) > (d' \circ \chi)\ ;$$
$$(d\ I^e_=\ d') \Leftrightarrow (d \circ \chi) = (d' \circ \chi)\ .$$

Ainsi, la relation binaire S^m_+ décrit-elle une situation où la valeur moyenne de l'évaluation d est strictement supérieure

---

1) $SR = S_{\pm}UR$, $IR = I_{=}UR$, $K = S_{+}UR$. Nous avons gardé le terme transitivité pour montrer que seule une incomparabilité peut perturber la transitivité "normale" de ces relations.

2) Voir chapitre I. partie B. p.32

à la valeur moyenne de l'évaluation d' et, la relation $I^m_=$, une situation où ces valeurs sont strictement égales entre-elles.

On remarquera que S^m_+ est la partie antisymétrique, irréflexive et $I^m_=$ la partie symétrique, réflexive de $S^m_{\pm}$, l'union de S^m_+ et $I^m_=$ donnant $S^m_{\pm}$. La structure $(S^m_+, I^m_=/\mathcal{P})$ n'est qu'une autre forme de la structure $(S^m_{\pm}/\mathcal{P})$ introduite au chapitre premier.[1)]

Il découle de la proposition P.III.4. que cette structure complète $(S^m_+, I^m_=/\mathcal{P})$ "contient" les structures élémentaire et extensive, comme le montre la proposition suivante:

P.III.9.) Soit E une échelle qualitative supportant une sériation extensive $(\succcurlyeq^*_e/E^*)$, soit $\emptyset$ un codage-C de E et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E: $\forall$ d,d'$\in \mathcal{P}$:

1) $(d \; S^o_{\pm} \; d') \Rightarrow (d \; S^e_{\pm} \; d') \Rightarrow (d \; S^m_{\pm} \; d')$;

2) $(d \; S^o_+ \; d') \Rightarrow (d \; S^e_+ \; d') \Rightarrow (d \; S^m_+ \; d')$;

3) $(d \; I^e_= \; d') \Rightarrow (d \; I^e_= \; d') \Rightarrow (d \; I^m_= \; d')$;

4) $(d \; R^e \; d') \Rightarrow (d \; R^o \; d')$.

Démonstration:

- Les implications sous 1) sont une conséquence immédiate de la proposition P.III.4. et de l'hypothèse H.III.2.
- Notons S^{*m}_+ et $I^{*m}_=$ les situations induites sur l'ensemble $\mathcal{P}^*$ des éloignementsinverses à partir des situations S^m_+ et $I^m_=$. Ainsi, $\forall$ d, d'$\in \mathcal{P}$:

$$(d - d') \; S^{*m}_+ \; (d' - d) \iff [(d \circ \chi) - (d' \circ \chi)] > [(d' \circ \chi) - (d \circ \chi)];$$

$$(d - d') \; I^{*m}_= \; (d' - d) \iff [(d \circ \chi) - (d' \circ \chi)] = [(d' \circ \chi) - (d \circ \chi)].$$

Un raisonnement analogue à celui qui a conduit à la proposition P.III.6., permet de démontrer les implications suivantes:

---

1) Voir chapitre I.B.2., p. 35 .

$$(d - d')\ S_{+}^{*o}(d' - d) \Rightarrow (d - d')\ S_{+}^{*e}(d' - d) \Rightarrow (d - d')\ S_{+}^{*m}(d' - d);$$

$$(d - d)\ I_{=}^{*o}(d' - d) \Rightarrow (d - d')\ I_{=}^{*e}(d' - d) \Rightarrow (d - d')\ I_{=}^{*m}(d' - d).$$

L'hypothèse H.III.2. conduit dès lors aux implications sous 2) et 3):

$$- \ \forall\ d,\ d' \in \mathcal{P}_A : \ (d\ S_{\pm}^{o}\ d') \text{ et } (d\ R^{e}\ d')$$

sont contradictoires de par la définition des situation $S_{\pm}^{*o}$ et R^{*e}. ◆

Ainsi, étant donné un ensemble $\mathcal{P}$ d'évaluations distributionnelles définies sur une échelle extensive, la structure extensive (S_{+}^{e}, $I_{=}^{e}$, $R^{e}/\mathcal{P}$) apparaît comme "intermédiaire" entre la structure complète (S_{+}^{m}, $I_{=}^{m}/\mathcal{P}$) modélisée par l'opération de moyenne et la structure élémentaire (S_{+}^{o}, $I_{=}^{o}$, $R^{o}/\mathcal{P}$) modélisée par la dominance stochastique simple.

Nous avons constaté au premier chapitre que la correspondance entre les préférences pragmatiques de l'acteur et la structure complète (S_{+}^{m}, $I_{=}^{m}/\mathcal{P}$) était sujette, outre la condition de complète comparabilité transitive, à une condition d'indépendance et à une condition archimédienne.[1)]

Or, fait très important, il apparaît que la correspondance entre ces préférences pragmatiques et les structures élémentaire ou extensive est également sujette à cette condition d'indépendance. Autrement dit, les situations de surclassement orienté élémentaire et extensif vérifient, tout comme le surclassement $S_{\pm}^{m}$, la condition d'indépendance par rapport aux mélanges:

P.III.10. Soit E une échelle qualitative extensive (resp. élémentaire) et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E :

$$\forall\ d, d', d'' \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \alpha \in (0,1] :$$

1) $(d \ \ S_{\pm}^{e}\ (\text{resp. } S_{\pm}^{o})\ d') \Rightarrow$
$[\alpha d + (1-\alpha) d''] \ \ S_{\pm}^{e}\ (\text{resp. } S_{\pm}^{o})\ [\alpha d' + (1-\alpha) d''];$

2) $(d \ \ S_{+}^{e}\ (\text{resp. } S_{+}^{o})\ d') \Rightarrow$

1) Voir chapitre I. B. 2., p.35-36.

$$\left\{\begin{array}{l} \quad [\alpha d + (1-\alpha) d''] \; S_+^e (\text{resp. } S_+^o) [\alpha d' + (1-\alpha) d''] ; \\ 3) \; (d \; I_=^e (\text{resp. } I_=^o) \, d') \Rightarrow \\ \quad [\alpha d + (1-\alpha) d''] \; I_=^e (\text{resp. } I_=^o) [\alpha d' + (1-\alpha) d''] . \end{array}\right.$$

<u>Démonstration:</u>

$$- \forall \, d, d', d'' \in \mathcal{P} \; : \quad d \; S_\pm^e \; d' \Rightarrow \exists \, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ$$
$$\forall (e \dot{-} e') \in (E_+^* \cup E_=^*)/_{=*} : \quad \dot{m}_<^{dd'}(e \dot{-} e') \geq \dot{m}_>^{dd'}(e' \dot{-} e) ,$$

et puisque $S_\pm^e$ est une relation réflexive,

$$d'' \, I_e^= \, d'' \quad \text{et} \quad \exists \; m^{d''d''} \in \mathcal{M}^{d''d''} \succ$$
$$\dot{m}_<^{d''d''}(e \dot{-} e') = \dot{m}_>^{d''d''}(e' \dot{-} e) \; , \; \forall (e \dot{-} e') \in (E_+^* \cup E_=^*)/_{=*} .$$

Construisons avec $m^{dd'}$ et $m^{d''d''}$ le mélange $p^{d'''d^{IV}}$ suivant, où

$$d''' \equiv [\alpha d + (1-\alpha) d''] ,$$
$$d^{IV} \equiv [\alpha d' + (1-\alpha) d''] , \quad \text{et}$$
$$\forall (e - e') \in E^* : \quad p^{d'''d^{IV}}(e,e') = \alpha \, m^{dd'}(e,e') + (1-\alpha) \, m^{d''d''}(e,e') .$$

On voit aisément que $p^{d'''d^{IV}} \in \mathcal{M}^{d'''d^{IV}}$,

et que de plus $\dot{p}_<^{d'''d^{IV}}(e \dot{-} e') \geq \dot{p}_>^{d'''d^{IV}}(e' \dot{-} e)$

pour tout $(e \dot{-} e') \in (E_+^* \cup E_=^*)/_{=*}$,

puisque $\left[\alpha \cdot \dot{m}_<^{dd'}(e \dot{-} e') + (1-\alpha) \, \dot{m}^{d''d''}(e \dot{-} e')\right]$

$$\geq \left[\alpha \, \dot{m}_>^{dd'}(e' \dot{-} e) + (1-\alpha) \, \dot{m}_>^{d''d''}(e \dot{-} e')\right] ,$$

pour tout $(e \dot{-} e') \in (E_+^* \cup E_=^*)/_{=*}$.

- Un raisonnement analogue conduit au même résultat pour les situations S_+^e et $I_=^e$.
- De même, on voit aisément que la situation $S_\pm^o$ vérifie la condition d'indépendance. En effet, $\forall \, (e - e') \in E^*$:
$(m^{dd'}(e,e') \neq 0 \Rightarrow e \geq e')$ et $(m^{d''d''}(e,e') \neq 0 \Rightarrow e \geq e') \Rightarrow$

$$\left(p^{d'''d^{IV}}(e,e') = \left[\alpha\, m^{dd'}(e,e') + (1-\alpha)\, m^{d''d''}(e,e') \right] \neq 0 \Rightarrow e \geq e' \right).$$

Le même raisonnement s'impose en ce qui concerne les situations S^o_+ et $I^o_=$.♦

Nous constatons donc, tout en pensant au débat autour de la condition d'indépendance [1] introduit par M. ALLAIS, que l'éventuelle violation de cette condition peut être interprétée comme un indice du caractère non-mesurable et même non-métrisable des échelles de préférence en général. En effet, les situations de surclassement orienté, adaptées chacune au degré de précision avec laquelle on connaît l'échelle de préférence sousjacente, vérifient cette condition.[2]

Ce résultat est par ailleurs parfaitement cohérent avec notre conception d'une reconnaissance "objective" des situations préférentielles. En effet, nous avons contraint cette reconnaissance par des conditions d'équilibre perceptif dont nous retrouvons les effets précisément dans cette condition d'indépendance. Elle n'est qu'une conséquence de la reconnaissance des situations, indépendante de l'activité perceptive concrète.

En fin de compte, nous avons remarqué au premier chapitre que la correspondance entre les préférences pragmatiques de l'acteur et la structure complète était sujette à la condition archimédienne.[3]

Nous retrouvons une condition similaire, affaiblie au niveau des situations S^o_+ et S^e_+. Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

P.III.11. Soit E une échelle qualitative extensive (resp. élémentaire) et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E. $\forall d, d' \in \mathcal{P}$:
si $[\alpha d + (1-\alpha) d''] S^e_+$ (resp. S^o_+) d'

1) Voir ALLAIS, M., Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine, Econometrica, V.21, 1953, N°4, et ALLAIS&HAGEN (op. cit. p.42)
2) Ce phénomène expliquerait en particulier pourquoi la condition d'indépendance est précisément violée pour des probabilités très faibles. Dans ce cas, en effet, l'imprécision avec laquelle on connaît l'échelle, devient apparente.
3) Voir chapitre I, B. 2., p. 35

$\}$ pour tout $\alpha \in (0,1]$ alors $d' \; S_+^e \; (\text{resp. } S_+^o) \; d''$.

Si le mélange des évaluations d et d" avec les proportions α et $(1 - \alpha)$ est en situation de surclassement orienté strict extensif (resp. élémentaire) avec l'évaluation d' pour tout $\alpha \in (0,1]$, alors l'évaluation d' ne peut être en situation de surclassement orienté strict avec l'évaluation d".

Démonstration:

Appelons d"' l'évaluation $[\alpha d + (1-\alpha) d'']$. On peut construire un mélange $m^{d'''d'}$ à partir d'un mélange $m^{dd'}$ et d'un mélange $m^{d''d'}$. En effet, $\forall \; (e-e') \in E^*$:

$$m^{d'''d'}(e,e') = \alpha \, m^{dd'}(e,e') + (1-\alpha) \, m^{d''d'}(e,e') .$$

Si $\quad m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \quad$ et $\quad m^{d''d'} \in \mathcal{M}^{d''d'}$

alors on voit aisément que $\quad m^{d'''d'} \in \mathcal{M}^{d'''d'}$.

D'autre part, supposons que $d''' \; S_+^e \; (S_+^o) d'$ et $d' \; S_+^e (S_+^o) \; d''$.
On sait dès lors que pour tout codage-C ϕ^m tel que

$$\forall \; (e-e') \in E^* : \; \phi^m(e-e') = (\chi(e) - \chi(e')) ,$$

nous avons

$$(m^{d'''d'} \circ \phi^m) > 0 > (m^{d'd'''} \circ \phi^m) ,$$

et donc

$$[\alpha (m^{dd'} \circ \phi^m) + (1-\alpha) (m^{d''d'} \circ \phi^m)] > 0 ,$$

$$\forall \; m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \quad \text{et} \quad \forall \; m^{d''d'} \in \mathcal{M}^{d''d'} .$$

Or nous savons également que pour tout codage-C ϕ, nous avons

$$(m^{d'd''} \circ \phi^m) > 0 > (m^{d''d'} \circ \phi^m) ,$$

$\forall \; m^{d'd''} \in \mathcal{M}^{d'd''}$. Donc

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} > \frac{(m^{d'd''} \circ \phi^m)}{(m^{dd'} \circ \phi^m)} > 0$$

pour tout $\emptyset^m$ admissible, ce qui est contradictoire. ◆ [1)]

Résumons l'ensemble des résultats dans le tableau ci-dessous (v. p.176). Nous voyons ainsi que les structures préférentielles élémentaire et extensive, étant des "sous-structures" de la structure préférentielle complète, sont également les parties stables de celles-ci par rapport aux choix possibles d'images numériques.

Abordons à présent la comparabilité des éloignements inverses dans le cas où les évaluations distributionnelles sont définies sur une échelle qualitative intensive.

---

1) On remarquera que la démonstration de cette propriété archimédienne repose largement sur l'antisymétrie des situations $S^m_{\mp}$. C'est pourquoi, inversément, dans la théorie de l'utilité espérée en présence d'ordres stricts partiels l'antisymétrie de la situation de préférence est basée sur cette condition archimédienne affaiblie. Voir FISHBURN op.cit., 1970, p. 131.

T.III.1. Comparaison des Structures Préférentielles Elémentaire, Extensive et Complète

Structure Préférentielle Elémentaire	Structure Préférentielle Extensive	Structure Préférentielle Complète
E : échelle élémentaire ; χ vérifie $(>/E)$; ϕ vérifie $(\geqslant^*/E^*)$; S_+^o : relation binaire antisymétrique, irréflexive et transitive ; $I_=^o$: relation binaire symétrique, réflexive et transitive ; R^o : relation binaire symétrique, irréflexive et non vide sur $\mathcal{P}$; Indépendance des situations S_+^o, $I_=^o$ par rapport aux mélanges ; Propriété archimédienne affaiblie de la situation S_+^o ; $(S_+^o, I_=^o, R^o/\mathcal{P})$: parie stable de $(S_+^m, I_=^m/\mathcal{P})$ par rapport aux choix de codages χ et ϕ admissibles .	E : échelle extensive ; χ vérifie $(>/E)$; ϕ vérifie $(\geqslant_e^*/E^*)$; S_+^e: relation binaire antisymétrique, irréflexive et K-transitive ; $I_=^e$: relation binaire symétrique, réflexive et IR-transitive ; R^e : relation binaire symétrique, irréflexive et non vide sur $\mathcal{P}$; Indépendance des situations S_+^e , $I_=^e$ par rapport aux mélanges ; Propriété archimédienne affaiblie de la situation S_+^e ; $(S_+^e, I_=^e, R^e/\mathcal{P})$: partie stable de $(S_+^m, I_=^m/\mathcal{P})$ par rapport aux choix de codages χ et ϕ admissibles .	E : échelle métrée ou métrique régulière ; χ vérifie $(>/E)$ et $(\geqslant_e^*/E^*)$; χ unique à l'unité et à l'origine près S_+^m : relation binaire antisymétrique, irréflexive et transitive ; $I_=^m$: relation binaire symétrique, réflexive et transitive ; Indépendance des situations S_+^m, $I_=^m$ par rapport aux mélanges ; Propriété archimédienne de la situation S_+^m ; $(S_+^m, I_=^m/\mathcal{P})$: préordre complet sur $\mathcal{P}$.

III.D. Evaluations distributionnelles sur une échelle qualitative intensive

La définition du surclassement orienté extensif, en reposant sur les fonctions de répartition, présuppose une sériation extensive, donc complète, des contrastes. Nous essayerons à présent d'adapter cette définition au cas de la sériation intensive.

Or cette définition fera apparaître une équivalence entre le surclassement orienté défini sur une échelle intensive et le surclassement orienté élémentaire.

Nous retrouvons donc l'emboîtement de la structure préférentielle, modélisée sur $\mathcal{P}$ dans le cas où E est une échelle intensive, dans la structure préférentielle extensive et la structure préférentielle complète.

III.D.1. Définition du surclassement orienté intensif

Pour adapter la définition du surclassement orienté à l'échelle intensive, nous devons introduire des concepts analogues aux fonctions de répartition, mais adaptés à la sériation partielle qu'est la sériation intensive des contrastes. C'est pourquoi nous introduisons les parties commençantes et finissantes de l'ensemble quotient des contrastes par la relation $=^*$.

D.III.19.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation commune ($\succ^*_s/E^*$). On appellera parties commençantes, respectivement finissantes, notées E^*_{cs}, E^*_{fs} ,les sous-ensembles suivants de classes d'équivalence de contrastes:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\ \dot{c} \in E^*/_{\overset{*}{\underset{s}{=}}}\ : \\ E^*_{cs}(\dot{c}) = \left\{ \dot{c}'/\ \dot{c}' \in E^*/_{\overset{*}{\underset{s}{=}}}\ \ \text{et}\left(\dot{c}' \leqslant^*_s \dot{c}\right)\right\} \\ E^*_{fs}(\dot{c}) = \left\{ \dot{c}'/\ \dot{c}' \in E^*/_{\overset{*}{\underset{s}{=}}}\ \ \text{et}\left(\dot{c}' \leqslant^*_s \dot{c}\right)\right\} \end{array}\right.$$

La partie commençante (finissante) associée à la classe d'équivalence $\dot{c}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de contrastes $\dot{c}'$ qui sont au plus (au moins) aussi favorable que $\dot{c}$ au sens de la sériation ($\geqslant^*_s/E^*$)

On peut dès lors introduire les parties commençantes et finissantes d'un mélange de classe d'équivalence de contrastes.

D.III.20.

Soit E une échelle qualitative supportant la sériation commune ($\geqslant^*_s/E^*$) et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E; $\forall\ d,d' \in \mathcal{P}$ et $\forall m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$: on appellera partie commençante, respectivement finissante, du mélange $\dot{m}^{dd'}$ les fonctions suivantes:

$$\dot{m}^{dd'}_{cs}\ :\ E^*/_{\overset{*}{\underset{s}{=}}} \longrightarrow [0,\ 1]$$

$$\dot{m}^{dd'}_{fs}\ :\ E^*/_{=^*} \longrightarrow [0,\ 1]$$

déduites de $\dot{m}^{dd'}$ de la manière suivante:

$$\forall\ \dot{c} \in E^*/_{=^*}\ :$$

$$\dot{m}^{dd'}_{cs}(\dot{c}) = \sum_{\dot{c}'} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}')/\dot{c}' \in E^*_{cs}(\dot{c}) \right\}$$

$$\dot{m}^{dd'}_{fs}(\dot{c}) = \sum_{\dot{c}'} \left\{ \dot{m}^{dd'}(\dot{c}')/\dot{c}' \in E^*_{fs}(\dot{c}) \right\}$$

Ainsi la partie finissante (commençante) de $\dot{m}^{dd'}$ est-elle une fonction décroissante (croissante) sur $E^*/_{\overset{*}{\underset{s}{=}}}$ et la connaissance de l'une quelconque des deux fonctions est suffisante pour décrire le mélange $\dot{m}^{dd'}$.

On remarquera que l'on retrouve la définition des fonctions de répartition gauche et droite de $\dot{m}^{dd'}$, dès que la sériation commune $(\geqslant^*_s / E^*)$ est extensive.

De même, nous retrouvons les propriétés remarquables de ces fonctions de repartition[1].

P.III.12.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation commune $(\geqslant^*_s / E^*)$ et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E :

$\forall\, d, d' \in \mathcal{P}$ et $\forall\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$: $\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*/_{=^*_s}$:

$$\text{a)} \quad \dot{m}^{dd'}_{cs}(e \dot{-} e') = \dot{m}^{d'd}_{fs}(e' \dot{-} e) \;;$$

$$\text{b)} \quad \dot{m}^{dd'}_{fs}(e \dot{-} e') = \dot{m}^{d'd}_{cs}(e' \dot{-} e) \;.$$

Démonstration:

La sériation commune $(\geqslant^*_s / E^*)$ vérifie l'équilibre perceptif liant l'inversion des contrastes à la réciprocité de la relation $\geqslant^*_s$. Donc: $\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*/_{=^*_s}$: $\dot{m}^{dd'}(e \dot{-} e') = \dot{m}^{d'd}(e' \dot{-} e)$

et l'on retrouve les formules a et b.◆

La partie commençante (finissante) de $\dot{m}^{dd'}$ associée à la classe d'équivalence $(e \dot{-} e')$ de contrastes est identique à la partie finissante (commençante) de $\dot{m}^{d'd}$ associée à la classe d'équivalence inverse $(e' \dot{-} e)$.

Par analogie avec la situation de surclassement orienté extensif, nous dirons que le mélange $\dot{m}^{dd'}$ est comparable à son inverse $\dot{m}^{d'd}$, dès que : $\forall\, (e \dot{-} e') \in E^*/_{=^*_s}$:

$$\dot{m}^{dd'}_{cs}(e \dot{-} e') \leqslant \dot{m}^{d'd}_{cs}(e \dot{-} e')$$

ou $\dot{m}^{dd'}_{fs}(e \dot{-} e') \geqslant \dot{m}^{d'd}_{fs}(e \dot{-} e')$,

c'est-à-dire si pour toute classe d'équivalence $(e \dot{-} e')$ de contrastes la partie commençante (finissante) de $\dot{m}^{d'd}$ est in-

---

1) Voir III.C.1. p. 156 - 157

férieure (supérieure) ou égale à la partie commençante (finissante) du mélange inverse $\dot{m}^{d'd}$.

On remarquera à nouveau qu'il ne faut point parcourir tout l'ensemble $E^*/_{\stackrel{*}{=}_s}$ pour trouver ce résultat, car nous retrouvons ici la propriété de la proposition P.III.5.[1]

P.III.13.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation commune ($\succ^*_s/E^*$) et soit $\wp$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E; $\forall\, d,d' \in \wp$ et $\forall m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'}$; les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $\forall\,(e \dot{-} e') \in E^*/_{\stackrel{*}{=}_s}$: $\dot{m}^{dd'}_{fs}(e\dot{-}e') \geqslant \dot{m}^{d'd}_{fs}(e\dot{-}e')$;

b) $\forall\,(e\dot{-}e') \in E^*_+ \cup E^*/_{\stackrel{*}{\neq}_s}$: $\dot{m}^{dd'}_{fs}(e\dot{-}e') \geqslant \dot{m}^{dd'}_{cs}(e'\dot{-}e)$.

<u>Démonstration</u>:

Analogue à la démonstration de la proposition P.III.5.◆

Ces considérations nous montrent le chemin pour adapter la situation de surclassement orienté à l'ensemble de la classe des échelles qualitatives communes.

D.III.12.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation commune ($\succcurlyeq^*_s/E^*$) et soit $\wp$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E; $\forall\, d,d' \in \wp$, nous dirons que l'éloignement (d-d') est en situation de surclassement orienté avec l'éloignement inverse (d'-d), orientée $S^{*s}_{\pm}$, si et seulement si $\exists\; m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ \forall\,(e-e') \in E^*_+ \cup E^*_=/_{\stackrel{*}{=}_s}$:

$$\dot{m}^{dd'}_{fs}(e\dot{-}e') \geqslant \dot{m}^{dd'}_{cs}(e'\dot{-}e).$$

Ainsi, l'éloignement (d-d') est-il relié par une situation de surclassement orienté $S^{*s}_{\pm}$ à l'éloignement (d'-d) ssi il existe dans $\mathcal{M}^{dd'}$ un mélange $m^{dd'}$ tel que toute partie finissante associée à une classe d'équivalence $(e\dot{-}e')$ de contrastes

---

1) Voir III.C.1. p. 157

favorables ou nuls soit supérieure ou égale à la partie commençante associée à la classe d'équivalence de contrastes inverses.

Dans cette définition D.III.12. nous retrouvons comme cas particulier, la définition du surclassement orienté extensif[1] correspondant au cas où la sériation $(\geqslant^*_S/E^*)$ est extensive sur E^*. Mais nous y trouvons également le surclassement orienté correspondant à une sériation $(\geqslant^*_S/E^*)$ qui est intensive et que nous appellerons pour cela surclassement orienté intensif.

III.D.2. Structure préférentielle intensive sur un ensemble d'évaluations distributionnelles qualitatives

A côté du surclassement orienté intensif, nous pourrons de même définir les situations de surclassement orienté intensif strict (S^{*i}_{+}), d'indifférence intensive stricte $(I^{*i}_{\underline{+}})$ et d'incomparabilité intensive (R^{*i}).

D.III.22.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation intensive et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E;

a) $\forall d, d' \in \mathcal{P}$:

$$(d-d')\ S^{*i}_{+}\ (d'-d) \Longleftrightarrow \exists\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ$$

$$\forall (e \dot{-} e') \in E^*_+ \cup E^*_{=}/_{=^*_i} \ :\ \dot{m}^{dd'}_{fi}(e \dot{-} e') \geqslant \dot{m}^{dd'}_{ci}(e' \dot{-} e) \quad \text{et}$$

$$\dot{m}^{dd'}_{fi}(e'' \dot{-} e''') > \dot{m}_{ci}(e''' \dot{-} e'') \text{ pour au moins un}$$

$$(e'' \dot{-} e''') \in E^*_+ \ ;$$

b) $\forall d, d' \in \mathcal{P}$:

$$(d-d')\, I^{*i}_{=}(d'-d) \Longleftrightarrow \exists\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ$$

$$\forall (e \dot{-} e') \in E^*_+ \cup E^*_{=}/_{=^*_i} \ :\ \dot{m}^{dd'}_{fi}(e \dot{-} e') = \dot{m}^{dd'}_{ci}(e' \dot{-} e)$$

c) $\forall d, d' \in \mathcal{P}$:

$$(d-d')\, R^{*i}(d'-d) \Longleftrightarrow \nexists\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ$$

$$\forall (e \dot{-} e') \in E^*_+ \cup E^*_{=}/_{=^*} \ :\ \dot{m}^{dd'}_{fi}(e \dot{-} e') \geqslant \dot{m}^{dd'}_{ci}(e' \dot{-} e),$$

$$\text{ou} \qquad \text{id.} \qquad :\ \dot{m}^{dd'}_{fi}(e \dot{-} e') \leqslant \dot{m}^{dd'}_{ci}(e \dot{-} e').$$

---

1) Voir p.157

A l'aide des quatres situations préférentielles "intensives" nous pouvons caractériser une structure préférentielle intensive ($S^{*i}_{\pm}$, S^{*i}_{+}, $I^{*i}_{=}$, $R^{*i}/\underline{\mathcal{P}}^*$) sur l'ensemble des éloignements inverses entre évaluations distributionnelles.

Grâce à nouveau à l'hypothèse H.III.2. nous pouvons déduire de cette structure relationnelle sur $\mathcal{P}^*$ une structure préférentielle ($S^{i}_{\pm}$, S^{i}_{+}, $I^{i}_{=}$, $R^{i}/\mathcal{P}$) que nous qualifierons d'intensive et où $S^{i}_{\pm}$, S^{i}_{+}, $I^{i}_{=}$, et R^{i} sont les relations déduites respectivement des relations $S^{*i}_{\pm}$, S^{*i}_{+}, I^{*i}_{+} et R^{*i}.

Pour montrer que ces structures relationnelles modélisent bien des structures relationnelles de surclassement respectivement sur $\underline{\mathcal{P}}^*$ et $\mathcal{P}$, étudions les liens entre le surclassement orienté intensif et le surclassement orienté élémentaire.

III.D.3. Equivalence entre le surclassement orienté intensif et le surclassement orienté élémentaire

Essayons d'abord de montrer que le surclassement orienté élémentaire est emboîté dans le surclassement orienté intensif.

P.III.14.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation intensive ($\succcurlyeq^*_i/E^*$) des contrastes, et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E:

$$\forall\ d, d' \in \mathcal{P} :$$
$$(d-d')S^{*o}_{\pm}(d'-d) \Longrightarrow (d-d')S^{*i}_{\pm}(d'-d)\ .$$

Démonstration:

$$\forall d, d' \in \mathcal{P}: (d-d')S^{*o}_{\pm}(d'-d) \Longrightarrow \Big[\ \exists\ m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ\ \forall\ (e-e') \in E^* :$$
$$m^{dd'}(e-e') \neq 0 \Longrightarrow e \succcurlyeq e'\Big] \Longrightarrow \forall\ (e \dot{-} e') \in E^*_+ \cup E^*_= / =^*_i$$
$$m^{dd'}_{fi}(e \dot{-} e') \succcurlyeq \dot{m}^{dd'}_{ci}(e' \dot{-} e)\ .\blacklozenge$$

Le surclassement orienté élémentaire est donc "contenu" dans le surclassement orienté intensif.

Mais inversément, est-ce que le surclassement orienté intensif ne serait pas également contenu dans le surclassement orienté élémentaire?

P.III.15.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation intensive $(\geqslant^*_i/E^*)$ et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E :

$\forall\, d, d' \in \mathcal{P} : (d-d')S^{*i}_+(d'-d) \Longrightarrow (d-d')S^{*o}_+(d'-d)$

<u>Démonstration:</u>

$\forall\, d, d' \in \mathcal{P} : (d-d')S^{*i}_+(d'-d) \Longrightarrow \exists\, m^{dd'} \in \mathcal{M}^{dd'} \succ$

$\forall\,(e\dot{-}e') \in E^*_+ \cup E^*_{=/=^*_i} : \quad \dot{m}^{dd'}_{fi}(e-e') \geqslant \dot{m}^{dd'}_{ci}(e'-e)$.

Or, on peut vérifier que:

$$\dot{m}^{dd'}_{fi}(e_1\dot{-}e_o) \geqslant \dot{m}^{dd'}_{ci}(e_o\dot{-}e_i) \Longleftrightarrow d'(e_o) \geqslant d(e_o);$$

$$\dot{m}^{dd'}_{fi}(e_2\dot{-}e_1) \geqslant \dot{m}^{dd'}_{ci}(e_1\dot{-}e_2) \Longleftrightarrow [d'(e_o) + d'(e_1)] \geqslant [d(e_o) + d(e_o)];$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\dot{m}^{dd'}(e_r\dot{-}e_{r-1}) \geqslant \dot{m}^{dd'}(e_{r-1}\dot{-}e_r \Longleftrightarrow [d'(e_o) + d'(e_1) + \ldots + d'(e_r)]$$

$$\geqslant [d(e_o) \quad d(e_1) + \ldots + d(d_r) \ . \blacklozenge$$

La fonction de repartition gauche de d' est supérieure ou égale à la fonction de repartition gauche de d pour tout échelon e de E.

Il s'ensuit que les situations $S^{*i}_\pm$ et $S^{*o}_\pm$ définissent la même relation sur $\underline{\mathcal{P}}^*$. Les structures préférentielles élémentaires et intensives définies sur $\underline{\mathcal{P}}^*$ et $\mathcal{P}$ sont donc identiques.

P.III.16.

Soit E une échelle qualitative supportant une sériation intensive $(\geqslant^*_i/E^*)$ des contrastes et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des évaluations distributionnelles définies sur E; les structures $(S^{*i}_\pm,\ S^{*i}_+,\ I^{*i}_=,\ R^{*i}/\underline{\mathcal{P}}^*)$ et $(S^i_\pm,\ S^i_+,\ I^i_=,\ R^i/\mathcal{P})$ représentent des structures relationnelles de surclassement orienté. De plus ces structures sont identiques aux structures préférentielles élémentaires.

Démonstration:

Ce résultat est une suite immédiate de la proposition P.III. 15.♦

Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où l'équivalence entre le surclassement orienté élémentaire et la dominance stochastique simple laissait prévoir que le passage de l'échelle élémentaire à l'échelle intensive et même à l'échelle métrique n'apportait pas d'informations préférentielles qui permettent d'enrichir les structures préférentielles élémentaires sur $\underline{\mathcal{P}}^*$ et sur $\mathcal{P}$.

Cependant est-ce qu'il en serait de même si l'on définissait le surclassement orienté S^*_+ non pas sur $\underline{\mathcal{P}}^*$ mais sur tout l'ensemble des éloignements entre évaluations distributionnelles?

Il nous semble que le passage de l'échelle élémentaire à l'échelle intensive et de celle-ci à l'échelle métrique apporte bien de l'information quant à la comparaison des éloignements autres qu'inverses. Il en découlerait que ce passage est une condition nécessaire à la différentiation des situations d'indifférence orientée, de préférence faible et de préférence forte regroupées dans le surclassement orienté strict.

Mais ceci nous mènerait trop loin dans le cadre de ce travail. Mentionnons encore, pour clore ici la discussion sur la comparaison des évaluations distributionnelles qualitatives, que la généralisation de la définition du surclassement orienté à l'ensemble des échelles communes, intermédiaires entre l'échelle intensive et l'échelle extensive, n'est pas immédiate en ce sens qu'elle nécessite d'abord une étude de l'emboîtement de ces échelles, donc des sériations intermédiaires entre la sériation intensive et extensive.

III.E. La structure globale du système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$

Nous n'avons pas pu aborder dans ce travail les structures préférentielles définies sur $\mathcal{P}$ par les surclassements orientés adaptés à l'information préférentielle supportée par les échelles qualitatives métriques. Nous proposerons néanmoins, sous forme de conjectures, deux résultats dont il y a des raisons pour admettre qu'ils peuvent être démontrés .

Conjecture 1:

La structure préférentielle modélisée sur $\mathcal{P}$ par le surclassement orienté adapté à l'information préférentielle supportée par l'échelle métrique est identique aux structures préférentielles élémentaires et intensives.

L'équivalence constatée entre le surclassement orienté élémentaire et la dominance stochastique simple laisse prévoir ce résultat.

D'autre part, les conséquences du passage de l'échelle extensive à l'échelle métrique extensive sur les structures préférentielles modélisées sur $\mathcal{P}$ se retrouvent au niveau de la transitivité des situations de surclassement orienté.

Conjecture 2:

La fermeture transitive du surclassement orienté extensif donne le surclassement orienté adapté à l'information préférentielle supportée par l'échelle métrique extensive.

Remarquons que si cette conjecture se révèle exacte, et il y a des raisons pour l'admettre, alors la fermeture transitive de surclassement orienté "régulier" donne le surclassement orienté, modélisé par l'opération de moyenne pondérée à partir du codage de l'échelle métrique régulière.

Ainsi se dessine la structure globale du système relationnel de surclassement orienté sur $\mathcal{P}$. Alors que le passage des types d'échelles intensives aux types d'échelles extensives augmente en général la comparabilité des évaluations distributionnelles, le passage des types d'échelles non métriques aux types d'échelles métriques contribue à la transitivité des jugements préférentiels.

CONCLUSION

> "Le vieux problème des conditions et limites de la connaissance n'est plus à traiter dans l'objectif pur et simple, naïf ou dans le transcendental du sujet, mais aux bords fluctuants de l'ordre et du désordre, où est toujours mis entre parenthèses le bord commun au sujet, à l'objet."
>
> M. Serres[1)]

Après avoir étudié l'impact de la "subjectivité" de la conséquence qualitative sur la définition de l'échelle de préférence et sur le système relationnel de surclassement orienté modélisé sur $\mathcal{P}$, nous devrions aborder à présent une étude similaire de l'impact de cette subjectivité sur l'opérationnalité de la modélisation des préférences. Sans pouvoir entreprendre dans ce travail une telle étude, nous voudrions néanmoins, pour conclure, en esquisser les perspectives. La portée de notre travail s'en trouvera éclairée.

Nous avons vu au chapitre I que l'opérationnalité du modèle de la moyenne pondérée était liée à la nature objective de l'information prise en compte. Le corollaire en est l'absence d'une intervention de l'acteur pendant la phase de calcul et de comparaison. Le modèle reproduit l'état des comparaisons dans leur globalité sans impliquer l'acteur.

Cependant, dans le cas où le domaine décisionnel revêt un caractère qualitatif, nous avons vu, aux chapitres II et III, qu'il était opportun d'introduire l'acteur comme sujet actif dans la définition du domaine décisionnel et des systèmes relationnels de surclassement orienté. Par là, nous avons introduit une dimension "historique" dans la modélisation des préférences, que le côté opérationnel du modèle devrait respecter à son tour.

1) Le Passage du Nord-Ouest, Minuit, Paris.

Or, nous croyons que la popularité croissante des modélisations interactives auprès des hommes d'études et des acteurs, n'est pas indépendante de la volonté de prendre en compte, dans les problèmes d'aide à la décision, une information de nature plus qualitative et subjective. En effet, les modèles interactifs semblent indiquer le chemin par où l'on peut intégrer une dimension historique dans la modélisation.

Dans cet ordre d'idées, il nous semble très prometteur de s'intéresser à la procédure que nous avons utilisée pour démontrer l'équivalence entre le surclassement orienté élémentaire et la dominance stochastique simple. La mise en relation de cette procédure avec les différents types de structures relationnelles de surclassement orienté permettrait peut-être de construire les modèles interactifs adaptés à la nature qualitative du domaine décisionnel.

Or, comme pour celui-ci et le système relationnel de surclassement orienté, il faut admettre que ces modèles interactifs, en tant que structures signifiantes, s'emboîteront les uns dans les autres, pour constituer une suite de modèles opérationnellement de plus en plus performants, dont le plus performant aurait une opérationnalité analogue au modèle de la moyenne pondérée.

Remarquons que dans ces modèles interactifs, les concepts d'<u>équilibre perceptif</u> et de <u>conservation des grandeurs et rapports</u> qualitatifs nous semblent devoir jouer un rôle très important, puisque la progression de ces modèles vers une performance opérationnelle toujours plus grande se caractérise précisément par l'accès progressif à de nouveaux équilibres perceptifs, englobant et dépassant ceux acquis précédemment.

D'autre part, l'introduction de ces concepts dans la modélisation interactive, permettrait de profiter de certains résultats empruntés aux sciences pédagogiques. En effet, l'aide à la décision peut être interprétée comme une situation pédagogique particulière, en ce sens que l'homme d'étude est censé apporter un savoir, une connaissance à l'acteur.

Des considérations pédagogiques, inspirées des travaux de PIAGET, pourraient dès lors fournir à l'homme d'étude le cadre théorique par rapport auquel il peut orienter et justifier ses interventions auprès de l'acteur.

Mais ces considérations dépassent le cadre de ce travail et nous ne pouvons les développer davantage dans cette conclusion.

Avant de finir, nous voudrions cependant mentionner encore un problème qui nous a beaucoup intrigué, mais auquel nous n'avons pas pu consacrer l'attention qu'il mérite.

Ce problème est celui que pose la structure d'ensemble de mélanges dont nous avons muni l'ensemble des évaluations distributionnelles. Avec cette hypothèse, nous avons implicitement imposé à l'indicateur de modulation un statut "objectif". Il serait intéressant de concevoir cet indicateur, tout comme l'échelle de préférence, d'une manière plus qualitative et subjective, c'est-à-dire d'inclure dans sa définition l'acteur comme sujet qui perçoit la modulation de l'importance relative des différents éléments d'une évaluation distributionnelle.

Ainsi pourrait-on distinguer différents types d'indicateur de modulation suivant la performance de la perception de la modulation. Or, à tous ces types correspond une structure particulière associée à l'ensemble $\wp$; la structure d'ensemble de mélanges étant le type nécessitant l'indicateur le plus performant.

On peut s'attendre à ce que cette généralisation engendre des conséquences intéressantes sur les systèmes relationnels de surclassement orienté.

Enfin, nous avons gardé pour ultime remarque, un problème qui se rapporte à la "dimension" de la conséquence qualitative. En effet, quelle est la "dimension" d'une échelle de préférence qualitative?

La conséquence qualitative se conçoit souvent comme un "continu qualitatif" du plus favorable au plus défavorable.

Quoi de plus tentant que de parler d'un axe de préférence. L'échelle qualitative serait-elle donc de dimension un?

D'un autre côté, on ne peut connaître cette échelle qu'à partir d'un ensemble fini de qualités, d'états ou d'échelons, puisque la perception qualitative comporte nécessairement un seuil de discrimination lié à la non-additivité des contrastes. La "dimension" de l'échelle, dans ce cas, prendrait donc la valeur zéro.

Mais l'échelle qualitative n'en est pas moins un ensemble de points organisés directionnellement. Est-ce qu'elle n'aurait de ce fait pas une dimension "fractionnaire" de valeur intermédiaire entre zéro et un et dépendante de l'acteur et de l'homme d'étude à travers le nombre d'échelons qualitatifs pris en compte?

L'échelle qualitative serait ainsi un objet "fractal" au sens de MANDELBROT[1)], dont la dimension "fractale" traduirait précisément la partie subjective de son apparence objective. A cet objet "fractal" il conviendrait dès lors d'adapter un modèle numérique de "dimension fractale" qui traduirait formellement l'absence d'indépendance objective entre les préférences pragmatiques et les évaluations distributionnelles qui caractérise tout domaine décisionnel qualitatif.

---

1) MANDELBROT, B., Les Objets Fractals, Flammarion, Paris.

BIBLIOGRAPHIE

ABELSON, R.P. & TUKEY, J.W.: "Efficient conversion of non-metric information into metric information", Proceedings of the social statistics section, American Statistical Association, 1959;

ADAMS, E.W.: "Elements of a theory of inexact measurement", Philosophy of Science, Vol 32, 1965, N° 3, p. 205-228;

ALLAIS, M.: "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine", Econometrica, Vol. 21, 1953, N° 4;

ALLAIS, M. & HAGEN, O. (eds):"Expected Utility Hypotheses and the Allain Paradox", Reidel, Theory and Decision library, vol. 21, 1979;

AUMANN, R.J.: "Utility Theory without the Completeness Axiom", Econometrica, Vol. 30, 1962, p. 445-462;

AUMANN, R.J.: "Utility Theory without the Completeness Axiom: A Correction", Econometrics, Vol. 32, 1964;

ARNASZUS H.: "Spieltheorie und Nutzenbegriff aus marxistischer Sicht", Suhrkamp Taschenbuch, Wissenschaft, STW 51, 1974;

BACHELARD , G.:"Essai sur la connaissance approchée", Vrin, Paris, 4e ed. 1975;

BENZECRI, J.-P.: "Ordre latéral entre lois de probabilités sur un ensemble ordonné", dans L'Analyse des Données, T.1. La Taxinomie, Dunod, Paris, 2e éd. 1976, p. 261-277;

BIRNBACHER, D.: "Die Logik der Kriterien, Analysen zur Spätphilosophie Wittgensteins", Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1974;

BRUNCK, H.D.: "Mathematical models for ranking from paired comparisons, J.A.S.A., Vol. 55, 1960, p. 503-520;

COOMBS C.H. & HUANG L.C.: "Polynomial psychophysics of Risk", Journal of mathematical psychology, V. 7., 1970, p.317-338;

D'ADHEMAR, C.: "Monoides et groupes", dans Combinatoire Graphes et Algèbre, Gauthier-Villars, Paris, 1973;

DELEUZE, G.:"Logique du sens", Minuit, Paris, 1969;

DELEUZE, G. & GUATTARI : "Le Lisse et le Strié", dans Mille Plateaux,Minuit, Paris, 1980;

ELLIS, B.: "Basic Concepts of measurement", Cambridge University Press, London, 1968;

ELLSBERG, D.: "Classic and current notions of mesurable utility", Economic Journal, Vol. 64, 1954, p. 528-556;

FISHBURN, P.C.: "Decision and Value theory", J. Wiley and Sons, New York, 1964;

FISHBURN, P.C.: "Utility Theory with inexact preferences and degrees of preference", Synthese, Vol. 21, 1970;

FISHBURN, P.C.: "Utility Theory for Decision making, J. Wiley and Sons, New York, 1970;

FISHBURN, P.C. "Les Mathématiques de la Décision", Gauthiers Villars, Paris, 1973;

FISHBURN, P.C.: "Convex stochastic dominance with finite consequences", Theory and decision, Vol. 5, 1974, p.119-137;

FISHBURN, P.C.:"Bounded One-way expected utility", Econometrica, Vol. 43, 1975;

FISHBURN, P.C.:"Axioms for lexicographic Preferences", Review of economic Studies, Vol. 42, 1975;

FISHBURN, P.C.: "Separation theorems and expected utilities", Journal of economic theory, Vol. 11, 1975, p. 16-34;

FISHBURN, P.C.: "Continua of stochastic dominance relation for bounded probability distributions", Journal of mathematical economics, 3, 1976, p. 295-311, North Holland Publish.Co.

FISHBURN, P.C.: "Mean-Risk Analysis with Risk associated with Below-Target Returns", The American Economic Review, Vol. 67, N° 2, 1977, p. 116-126;

GIGERENZER, G.: "Messung und Modellbildung in der Psychologie", U.T.B. 1047, Reinhardt, München, Basel, 1981;

GOTTINGER, H.W.: "Die Existenz einiger Klassen deterministischer Nutzenfunktionen", Jahrb. für Nationalök. u. Stat., B.183, 1969;

GOTTINGER, H.W.: "Grundlagen der Entscheidungstheorie", G. Fischer Verlag, Stuttgart, 1974;

HABERMAS, J.: "Connaissance et intérêt", Gallimard, Paris, 1976;

HADAR J. & RUSSELL W.R.: "Rules for ordering Uncertain Prospects", The American economic Review, Vol. 59, 1969, p. 25-34;

HANOCH G. & LEVY H.: "The Efficiency Analysis of Choices involving Risk", Review of Economic Studies, V. 36, 1969, p. 335-346;

HOEFFE, O.: "Rationalität, Dezision oder praktische Vernunft", Philosophisches Jahrbuch, 80. Jahrgang, 1973;

HÖRMAN, H.: "Meinen und Verstehen: Grundzüge einer psychologischen Semantik", Suhrkamp, STW 230, 1976;

HUBER, O.: "Zu Logik multidimensionaler Präferenzen in der Entscheidungstheorie", Duncker & Humblot, Berlin, 1977, Coll. Erfahrung und Denken, Bd. 49;

HURST P.M. & SIEGEL S.:"Prediction of Decisions from a higher ordered metric scale of utility", Journal of experimental psychology, Vol. 52, 1956, p. 138-194;

INHELDER, B. & PIAGET, J.: "De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent", P.U.F. Paris, 2e éd. 1970;

JACQUET-LAGREZE, E.: "La Modélisation des Préférences - Préordres, quasi ordres et relations floues", thèse, Université Paris V, 1975;

JACQUET-LAGREZE, E.: "Modelling preferences among distributions using fuzzy relations", Presented to the 5th Research Conference on subjective Probability, Utility and Decision Making, Darmstadt, 1975;

JACQUET-LAGREZE E. & MOSCAROLA J. & ROY B. & HIRSCH G.: "Description d'un processus de décision I. Quelques concepts", Cahier du Lamsade, N° 13, 1978, Université Paris IX, Dauphine;

JACQUET-LAGREZE, E & ROY, B.: "Aide à la décision multicritère et systèmes relationnels de préférences", Cahier de Lamsade N° 34, 1980, Université Paris IX, Dauphine;

JACQUET-LAGREZE, E.: "Modélisation et décision", Communication prés. au colloque: La décision: ses disciplines, ses acteurs, C.C.I.C. sept. 1980;

JUNGERMANN, H.: "Einleitung: Entscheidung in der Theorie", in Wayne Lee, Psychologische Entscheidungstheorie: eine

Einführung, Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1977;

KAHNEMAN D. & TVERSKY A.: "Prospect Theory: an analysis of decision under risk", Econometrica, V. 47, 1979, N° 2, p. 263-291;

KEENEY, R.L. & RAIFFA, H.: "Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value trade offs", J. Wiley and Sons, New York, 1976;

KOCH, H.: "Die Problematik der Bernouilli-Nutzentheorie", Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, V. 29, 1977, p. 415-426;

KRANTZ, D.H. LUCE R.D., SUPPES P. & TVERSKY A.: "Foundations of measurement: Vol. I. Additive and polynomial representations", Academic Press, New York, 1971;

KRISTOF, W.: "Structural properties and measurement theory of certain sets admitting a concatenation operation", The British Journal of Math. and Stat. psychol., Vol. 21, part 2, 1968, p. 201-229;

IRVING, H. LAVALLE: "On cash equivalents and information evaluation in decision under incertainty, part 1.", JASA, Vol. 63, 1968, p. 252-276;

LUCE, R.D.: "Semi orders and a theory of utility discrimination", Econometrica, V. 24, 1956, p. 178-191;

MANDELBROT, B.: "Les objets Fractals", Flammarion, Paris, 1975;

MAY, K.O.: "Intransitivity, utility, and the aggregation of preference patterns", Econometrica, V. 22, 1954, N° 1, p. 1-13;

MONJARDET, B.: "Ordre et Classement", dans Combinatoire, graphes et algèbre", Gauthier-Villars, Paris, 1973;

MONJARDET, B., BATTEAU, P., JACQUET-LAGREZE, E. (eds.): "Analyse et Agrégation des Préférences", Economica, 1980;

NOVICK, M.R. & LINDLEY D.V.: "Fixed-State assesment of Utility Functions", Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, N° 266, 1979, p. 306-311;

PFANZAGL, J.: "Theory of Measurement", Physico-Verlag, Würzburg-Wien, 2d Ed. 1973;

PIAGET, J.: "Les Mécanismes perceptifs", P.U.F., Paris, 2e éd. 1975;

PIAGET, J.: "Introduction à l'épistémologie génétique, 1. pensée mathématique", P.U.F., Paris, 2e éd. 1973;

PIAGET, J.: "Essai de Logique opératoire", Dunod, Paris, 1972;

PIAGET, J.: "La Psychologie de l'Intelligence", Armand Colin, Paris, 1967;

PIAGET, J.: "L'épistémologie génétique", P.U.F., Paris, 1970, Q.S.J.

PIAGET, J. (sous la direction de): "Logique et Connaissance Scientifique", Encycl. Pleiade, Gallimard, Paris, 1967;

PIAGET, J.: "Les Formes élémentaires de la dialectique", Idées Gallimard, Paris, 1980;

PLOTT Cl.R. & LITTLE J.T. & PARKS R.P.: "Individual choice when objects have "ordinal" properties", Review of economic studies, V. 42, 1975;

PORTER, R.B.: "Semivariance and Stochastic Dominance: A composion", The American Economic Review, Vol. 64, N° 1, 1974, p. 200-204;

ROY, B.: "Critères multiples et modélisation des préférences - L'apport des relations de surclassement", Revue de l'Economie politique, N° 1, 1974;

ROY, B.: "Vers une méthodologie générale d'aide à la décision", Sema (Metra International) Direction Scientifique, Rapport de synthèse, n° 87, 1975;

ROY, B.: "Partial preference analysis and decision aid: the fuzzy outranking relation concept", in Bell et al."Conflicting objectives in decision", J. Wiley and Sons, New York, 1977;

ROY, B.: "A conceptual framework for a prescriptive theory of decision-aid", in Starr and Zeleny: "Multiples criteria Decision Making", Studies in Management Science, Vol. 6. North Holland, 1977;

ROY, B., JACQUET-LAGREZE E. & BLANCHER, M.: "Elaboration de critère permettant une intégration des divers aspects liés au temps dans l'aide à la décision en matière de transports (2e phase)", Sema (Metra) 1977, A.T.P. Socio-Economie des transports;

ROY, B.: L'aide à la décision: critères multiples et optimation pour choisir, trier, ranger, (livre en préparation);

SCHNEIDER, D.: "Meßbarkeitsstufen subjektiver Wahrscheinlichkeiten als Erscheinungsformen der Ungenauigkeit", Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Heft 2, 1979, p. 89-122;

SCOTT D. & SUPPES, P.: "Foundational aspects of theories of measurement", The journal of symbolic logic, Vol. 23, N° 2, 1958;

SHEPARD R.N.: "The Analysis of proximities: multi-dimensional scaling with an unknown distance function I.", Psychometrica, Vol. 27, 1962, p. 125-140;

SHEPARD, R.N.: "Metric structures in ordinal data", Journal of mathematical psychology, Vol. 3, 1965, p. 287-315;

SIEGEL, S.: "A method for obtaining an ordered metric scale", Psychometrica, Vol. 21, 1956, N° 2;

SUPPES, P. & WINET, M.: "An axiomatization of utility based on the notion of utility differences", Management Science, Vol. 1, 1965, p. 259-270;

TATE, R.F.: "On the use of partially ordered observations in measuring the support of a complete order", JASA, Vol. 56, 1961, p. 299-313;

TESFATSION, L.: "Stochastic Dominance and the Maximisation of Expected Utility", Review of economic Studies, Vol. 42, 1975;

TVERSKY, A.: "Utility theory and additivity analysis of risky choices", J.Exp. Psychol. V. 75, 1967, p.27-36;

TVERSKY, A.: "Intransitivity of Preferences", Psychol. Review, Vol. 76, 1969, p. 31-48;

TVERSKY A. & KRANTZ D.H.: "The dimensional representation and the metric structure of similarity data", Journal of mathematical psychology, Vol. 7, 1970. p. 572-596;

VICKSON, R.G.: "Stochastic dominance tests for decreasing absolite risk aversion: discret randoms versibles", Management Science, Vol. 21, 1975, p. 1438-1446;

VON NEUMANN, T. & MORGENSTERN, O. "Theory of games and Economic behaviour", J. Wiley and Sons, New York, 2nd ed. 1947;

WERMUS, H.: "Formalisation de quelques structures initiales de la psychogenèse", Archives de Psychologie, tome 41, 1972, Genève, p. 271-288;

WHORF, B.L.: "Sprache, Denken, Wirklichkeit",Reinbeck, Rowohlt, 1963;

WITHMORE, G.-A.: "Third degree Stochastic Dominance", American Economic Review, Vol. 60, 1970, p. 457-459.

TABLE DES MATIERES

Vu, le Président

M.

Vu, les Suffragants

MM.

Vu et permis d'imprimer
Le Président de l'Université PARIS-Dauphine