ACTIONS EXPONENTIELLES ET NOYAUX D'OPÉRATEURS

Carine MOLITOR-BRAUN[1]

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162 A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg

Abstract. This paper studies the restriction of the non-commutative Fourier transform to the orbit of an irreducible unitary representation of an exponential Lie group under an exponential action. This means the following : let $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$ be an exponential Lie group acting on another exponential Lie group $G = \exp \mathfrak{g}$, with Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the form $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, $\ell \in \mathfrak{g}^*$ and $\mathfrak{n}$ nilpotent. The corresponding action of $\mathfrak{D}$ on the irreducible unitary representation $\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell$ is written as ${}^D\pi$. For all $f \in L^1(G)$ the kernel of the operator ${}^D\pi(f)$ is a function of D. In this paper we characterize a generalized Schwartz space endowed with an appropriate covariance condition whose functions are precisely kernels of such operators ${}^D\pi(f)$.

[1]Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN|CUL|95|05

Introduction

Le but du présent travail consiste à fournir certaines indications sur l'image de la transformée de Fourier non commutative dans le cadre des groupes de Lie exponentiels. Précisons les données : Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie exponentiel connexe simplement connexe. Supposons G soumis à une action exponentielle par $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$. Soit $\pi = \pi_\ell \in \hat{G}$ fixé et supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent. Alors $\pi(f)$ est un opérateur à noyau de même que ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$ pour tout $D \in \mathfrak{D}$. Le noyau en question peut donc être considéré comme une fonction de $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$, $\mathfrak{D}_\pi$ désignant le stabilisateur de l'orbite de π sous l'action en question. Etudier les ${}^D\pi(f)$ et leurs noyaux revient alors à étudier la restriction de la transformée de Fourier non commutative à l'orbite de π. Dans ce travail nous caractériserons un espace $E\mathcal{S}$ de fonctions qui seront précisément des noyaux pour cette transformée de Fourier. La lettre $\mathcal{S}$ rappelle qu'il s'agira d'un analogue des fonctions de Schwartz et la lettre E indique qu'il faudra exiger une décroissance exponentielle dans certaines directions.

L'utilité du résultat démontré consistera entre autres dans le fait que le théorème en question permettra de remplacer certains raisonnements sur les fonctions f par des raisonnements sur les noyaux des opérateurs ${}^D\pi(f)$. Ces techniques vont être importantes dans l'étude des idéaux $\mathfrak{D}$-invariants des algèbres $L^1(G)$ et $\mathcal{S}(G)$, lorsque G est un groupe nilpotent soumis à une action exponentielle ([Lud. Mol. 2]). Le présent travail est une généralisation d'un résultat de Ludwig ([Lud.]), dont les techniques ont été adaptées aux actions exponentielles.

Chapitre 1

Groupes exponentiels et leurs représentations

1.1. Intuitivement on peut dire que les groupes exponentiels constituent la classe de groupes de Lie la plus vaste pour laquelle il existe un difféomorphisme entre le groupe et son algèbre de Lie. Cette classe de groupes se situe entre les groupes de Lie nilpotents et les groupes de Lie résolubles. Les groupes exponentiels ont été introduits par Dixmier ([Dix. 1]). L'adaptation aux groupes exponentiels de la théorie de Kirillov pour les représentations unitaires irréductibles est entre autres due à Pukanszky ([Puk. 1]), grâce à sa condition nécessaire et suffisante sur les polarisations. La caractérisation topologique de l'espace $\hat{G}$ finalement est assez récente et est due à Leptin et Ludwig ([Lep. Lud.]).

1.2. Convention : Dans la suite de ce travail G désignera un groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G sera notée par exp. Les éléments de l'algèbre seront notés par des majuscules $X, Y, ...$ et les éléments du groupe par des minuscules $x, y, ...$.

1.3. Définition : ([Dix. 1])
Un groupe exponentiel est un groupe de Lie connexe simplement connexe résoluble G vérifiant une des trois conditions équivalentes suivantes :
(i) L'application exponentielle exp est un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G.
(ii) Quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, ad X n'a pas de valeur propre non nulle imaginaire pure.
(iii) Les racines de $\mathfrak{g}$ (dans l'algèbre complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) ont la forme $\varphi(X)(1+$

$i\omega)$, où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$.

1.4. Les *représentations unitaires irréductibles* de G exponentiel sont obtenues de la manière suivante :

(i) Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$. On appelle *polarisation* au point ℓ toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est en même temps un sous-espace totalement isotrope maximal, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle \equiv 0 \\ \dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}\Big(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(\ell)\Big) \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{g}(\ell) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle \ell, [X, Y] \rangle = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

(ii) On dit que la polarisation $\mathfrak{h}$ vérifie le *critère de Pukanszky* si

$$\ell + \mathfrak{h}^{\perp} = \{\mathrm{Ad}^*(h)\ell \mid h \in H\} = \mathrm{Ad}^*\, H(\ell)$$

où

$$\mathfrak{h}^{\perp} = \{k \in \mathfrak{g}^* \mid \langle k, \mathfrak{h} \rangle \equiv 0\}.$$

D'ailleurs le signe $=$ peut être remplacé par le signe $\subset$, l'autre inclusion étant toujours vérifiée.

(iii) On obtient un caractère unitaire de $H = \exp \mathfrak{h}$ par

$$\begin{aligned} \chi_\ell : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longmapsto \chi_\ell(h) = e^{-i\langle \ell, \log h \rangle}. \end{aligned}$$

(iv) Notons par Δ_G, resp. Δ_H les fonctions modulaires sur G, resp. H. Soit Δ un homomorphisme de G dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\Delta\Big|_H = \frac{\Delta_H}{\Delta_G\Big|_H}$$

en notant par $\Delta\Big|_H$ et $\Delta_G\Big|_H$ les restrictions de Δ et Δ_G à H. Alors il existe une mesure semi-invariante unique $d\dot{y}$ sur l'espace G/H telle que

$$\int_{G/H} \varphi(x^{-1}\dot{y})d\dot{y} = \Delta(x) \int_{G/H} \varphi(\dot{y})d\dot{y}$$

pour toute fonction φ continue à support compact dans G/H ([B.C. et al]).

(v) On note par $\mathcal{H}_\pi$ l'espace de Hilbert obtenu par complétion à partir de l'espace des fonctions continues de G dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\xi(x \cdot h) = e^{i\langle \ell, \log h\rangle}\xi(x) = \overline{\chi_\ell(h)}\xi(x) \ \forall x \in G, h \in H$$
$$\int_{G/H} |\xi(\dot{x})|^2 d\dot{x} < +\infty.$$

On définit la représentation π de G sur $\mathcal{H}_\pi$ par

$$\Big(\pi(x)\xi\Big)(y) = \Delta^{-1/2}(x)\xi(x^{-1}y).$$

On note $\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell = \pi(\ell, \mathfrak{h})$ et on l'appelle *représentation induite* par χ_ℓ sur G.

(vi) La représentation induite π est irréductible si et seulement si $\mathfrak{h}$ est une polarisation vérifiant le critère de Pukanszky et toutes les représentations unitaires irréductibles de G sont obtenues de cette manière.

(vii) Pour tout $\ell \in \mathfrak{g}^*$ il existe des polarisations vérifiant le critère de Pukanszky.

(viii) La théorie des représentations induites des groupes de Lie exponentiels est équivalente à la théorie de Dixmier ([Dix. 2]) des représentations induites pour les algèbres résolubles exponentielles et leurs algèbres enveloppantes ([Mol.]).

1.5. L'espace $\hat{G}$ de toutes les classes de représentations unitaires irréductibles de G est caractérisé grâce aux résultats suivants :

(i) Tout $\pi \in \hat{G}$ est obtenu comme en 1.4., et est indépendant de la polarisation de Pukanszky choisie. Par abus de notation, π désignera à la fois une représentation et sa classe dans $\hat{G}$.

(ii) Pour tout $a \in G$, $\pi(\ell, \mathfrak{h})$ et $\pi\Big((\mathrm{Ad}^* a)(\ell), (\mathrm{Ad}\, a)(\mathfrak{h})\Big)$ sont unitairement équivalents. Donc la classe d'équivalence de $\pi(\ell, \mathfrak{h})$ dépend uniquement de l'orbite

$$\mathcal{O}(\ell) := \{(\mathrm{Ad}^* a)(\ell) \mid a \in G\}$$

dans $\mathfrak{g}^*$. On notera pour simplifier $\pi(\ell)$ au lieu de $\pi(\ell, \mathfrak{h})$.

(iii) L'application de Kirillov

$$K : \mathcal{O}(\ell) \longmapsto \pi(\ell)$$

est une bijection entre l'espace des orbites, identifié à $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^* G$, et l'espace $\hat{G}$.

(iv) La topologie de $\hat{G}$ est déduite de manière naturelle de la topologie de Jacobson de l'espace Prim $C^*(G)$ des idéaux primitifs de $C^*(G)$. L'espace $\mathfrak{g}^* / \operatorname{Ad}^* G$ est muni de la topologie quotient. Dans ce cas l'application de Kirillov pour les groupes exponentiels est un homéomorphisme entre $\mathfrak{g}^* / \operatorname{Ad}^* G$ et $\hat{G}$ ([Lep. Lud.]).
(v) Lorsque le groupe G est nilpotent (ou, de manière plus générale, $*$-régulier), la topologie de $\hat{G}$ peut même être déduite de la topologie de Jacobson de l'espace $\mathrm{Prim}_* L^1(G)$ des noyaux dans $L^1(G)$ des représentations unitaires irréductibles de $L^1(G)$, puisque dans ce cas il y a homéomorphisme entre Prim $C^*(G)$ et $\mathrm{Prim}_* L^1(G)$ ([Boi.]).

1.6. **(i)** Soit G un groupe exponentiel connexe simplement connexe et soient G_1 et G_2 deux sous-groupes fermés connexes de G tels que $G_2 \subset G_1 \subset G$. Il existe alors des homomorphismes continus Δ_1 de G_1 dans $\mathbb{R}_+^*$, $\tilde{\Delta}$ de G dans $\mathbb{R}_+^*$ et Δ de G dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\Delta_1\Big|_{G_2} = \frac{\Delta_{G_2}}{\Delta_{G_1}\Big|_{G_2}}$$

$$\tilde{\Delta}\Big|_{G_1} = \frac{\Delta_{G_1}}{\Delta_{G}\Big|_{G_1}}$$

$$\Delta\Big|_{G_2} = \frac{\Delta_{G_2}}{\Delta_{G}\Big|_{G_2}}$$

et

$$\Delta\Big|_{G_1} = \Delta_1 \cdot \tilde{\Delta}\Big|_{G_1}.$$

D'ailleurs Δ_1 peut même être étendu en un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}_+^*$, également noté Δ_1, tel que

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \tilde{\Delta}.$$

De plus, par construction,

$$\Delta(n) = \tilde{\Delta}(n) = \Delta_1(n) = 1$$

pour tout $n \in N = \exp \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ désignant le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$.

(ii) Notons par $d\dot{x}$, $d\dot{y}$ et $d\dot{z}$ les mesures semi-invariantes sur G/G_1, G_1/G_2 et G/G_2 correspondant à $\tilde{\Delta}$, Δ_1, Δ. On a alors

$$\int_{G/G_2} \varphi(z)d\dot{z} = \int_{G/G_1} \Delta_1(x) \int_{G_1/G_2} \varphi(xy)d\dot{y}\, d\dot{x}$$

pour tout $\varphi \in C_c(G/G_2)$. (Voir [Lep. Lud.] pour la construction des homomorphismes Δ et des mesures semi-invariantes.)

(iii) La définition des représentations induites de 1.4. admet la généralisation suivante : Soit H un sous-groupe fermé connexe de G. Soit ζ une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\zeta$. Soient Δ l'homomorphisme continu de G/H dans $\mathbb{R}_+^*$ et $d\dot{x}$ la mesure semi-invariante correspondante. On définit la représentation induite $\pi = \mathrm{ind}_H^G\, \zeta$ de la manière suivante :
L'espace $\mathcal{H}_\pi$ est formé par l'ensemble des fonctions mesurables de G dans $\mathcal{H}_\zeta$ telles que

$$\xi(xh) = \zeta(h)^*\xi(x) \qquad \text{pour tout } h \in H \text{, pour presque tout } x \in G$$

$$\int_{G/H} ||\xi(x)||^2_{\mathcal{H}_\zeta} d\dot{x} < +\infty.$$

La représentation π est encore donnée par

$$(\pi(x)\xi)(y) = \Delta(x)^{-1/2}\xi(x^{-1}y) \quad \text{pour tout } x \in G \text{, pour presque tout } y \in G.$$

(iv) Soient $G, G_1, G_2, \Delta, \tilde{\Delta}, \Delta_1$ comme en (i). Soit ζ une représentation unitaire de G_2. Posons

$$\pi = \mathrm{ind}_{G_2}^G\, \zeta, \quad \pi_1 = \mathrm{ind}_{G_2}^{G_1}\, \zeta, \quad \tilde{\pi} = \mathrm{ind}_{G_1}^G\, \pi_1.$$

Alors π et $\tilde{\pi}$ sont unitairement équivalents, grâce à

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{H}_\pi & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\tilde{\pi}} \\ \xi & \longmapsto & \tilde{\xi} \end{array}$$

où

$$\tilde{\xi}(g)(g_1) = \Delta_1(g)^{1/2}\xi(g\, g_1) \quad \text{pour presque tous les } g \in G, g_1 \in G_1.$$

En effet, grâce à cette définition de ν,

$$\nu \circ \pi(x) = \tilde{\pi}(x) \circ \nu \quad \text{pour tout } x \in G.$$

1.7. Bases coexponentielles

(i) Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Alors il existe une base $\mathfrak{B} = \{B_1, ..., B_r\}$ supplémentaire à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r \times \exp \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ (t_1, ..., t_r; h) &\longmapsto \exp t_r B_r ... \exp t_2 B_2 \cdot \exp t_1 B_1 \cdot h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r \times \exp \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ (t_1, ..., t_r; h) &\longmapsto h \cdot \exp t_1 B_1 \cdot \exp t_2 B_2 ... \exp t_r B_r \end{aligned}$$

soient des difféomorphismes. Une telle base est appelée base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

(ii) La construction des bases coexponentielles peut être effectuée de la manière suivante :

a) Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et si $B \in \mathfrak{g}$ est un élément quelconque tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{h}$, alors $\{B\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

b) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre et non un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}$. Alors $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_0 = 1$ et tout $B \in \mathfrak{n}$ vérifiant $\mathfrak{n} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{n}_0$ est tel que $\{B\}$ soit une base coexponentielle à $\mathfrak{n}_0$ dans $\mathfrak{n}$ et une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

c) Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est un quotient irréductible de dimension 2 pour l'action de $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$, alors $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_0 = 2$ et il existe $B, B' \in \mathfrak{n}$ tels que

$$(\operatorname{ad} X) \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} = \varphi(X) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \operatorname{mod} \mathfrak{h}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, pour un certain $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$. Dans ce cas $\{B, B'\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{n}_0$ dans $\mathfrak{n}$ et une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

d) A l'aide des étapes précédentes on peut construire une base coexponentielle à toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ ([Puk. 2]).

1.8. Grâce aux bases coexponentielles, l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de 1.4. peut être identifié à un espace de fonctions sur $\mathbb{R}^r$.

1.9. Noyau d'une représentation unitaire irréductible
(i) Soit $\pi \in \hat{G}$. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, définissons

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx.$$

Alors $\pi(f)$ est un opérateur à noyau, dont le noyau f_π est donné par

$$f_\pi(x,y) = \Delta^{-1/2}(x)\Delta_G^{-1}(y)\Delta^{-1/2}(y)\int_H \Delta^{-1/2}(h)f(xhy^{-1})\chi_\ell(h)dh,$$

Δ_G désignant la fonction modulaire de G et π s'écrivant $\pi = \mathrm{ind}_H^G\chi_\ell$. Le noyau f_π est C^∞ et vérifie

$$f_\pi(xh, x'h') = \overline{\chi_\ell(h)}\chi_\ell(h')f_\pi(x,x')$$

pour $x, x' \in G$, $h, h' \in H$ ([Lud.]).
(ii) Une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ étant fixée, le noyau f_π peut donc être identifié à une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r)$.

Chapitre 2

Actions exponentielles et leurs orbites

2.1. Soit G un groupe exponentiel et soit $N = \exp \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ désignant le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas $\mathfrak{g}$ agit sur $\mathfrak{n}$ et G agit sur $\mathfrak{n}$ et N par $\operatorname{ad} X\big|_{\mathfrak{n}}$, $\operatorname{Ad}(\exp X)\big|_{\mathfrak{n}}$, resp. par conjugaison d'un élément de N par un élément de G. D'ailleurs on peut définir de manière plus générale l'action d'un groupe sur un sous-groupe normal. Cette constatation nous amène à définir une action exponentielle sur un groupe exponentiel. Remarquons que certaines propriétés de groupes soumis à des actions extérieures ont entre autres été étudiées par Ludwig ([Lud.]) et Poguntke ([Pog.]).

2.2. Définition : Soit G un groupe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{d}$ une algèbre de dérivations de $\mathfrak{g}$ et posons $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$. Nous disons que $\mathfrak{d}$ (resp. $\mathfrak{D}$) *agit exponentiellement* sur $\mathfrak{g}$ (resp. G) si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\mathfrak{d}$ est une algèbre de Lie exponentielle

(ii) $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$

(iii) $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{d}$-module de type exponentiel, à savoir les poids pour l'action de $\mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ont la forme

$$d \longmapsto \varphi(d)(1 + i\omega)$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathfrak{d}^*$. Cela signifie qu'il existe une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de $\mathfrak{g}$

$$0 = \mathfrak{g}_n \lhd \mathfrak{g}_{n-1} \lhd \ldots \lhd \mathfrak{g}_1 \lhd \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$$

pour l'action de $\mathfrak{d}$ vérifiant une des deux conditions suivantes :

- $\dim \mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1} = 1$ et il existe $X_k \in \mathfrak{g}_k \backslash \mathfrak{g}_{k+1}$ tel que

$$d(X_k) = \varphi_k(d) X_k \mod \mathfrak{g}_{k+1}$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$, avec $\varphi_k \in \mathfrak{d}^*$.

- $\dim \mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1} = 2$ et il existe $X_k, X'_k \in \mathfrak{g}_k \backslash \mathfrak{g}_{k+1}$ tels que

$$d \begin{pmatrix} X_k \\ X'_k \end{pmatrix} = \varphi_k(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega_k \\ \omega_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ X'_k \end{pmatrix} \mod \mathfrak{g}_{k+1}$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$, avec $\varphi_k \in \mathfrak{d}^*$, $\omega_k \in \mathbb{R}^*$.
L'action de $\mathfrak{D}$ sur G qu'on en déduit est expliquée en 2.4.

2.3. Lemme : Pour toute action exponentielle, $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ est un idéal $\mathfrak{d}$-invariant contenu dans le radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ et contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Démonstration : Puisque les éléments de $\mathfrak{d}$ sont des dérivations,

$$\big(\mathrm{ad}\, d(X)\big)(Y) = [d, \mathrm{ad}\, X](Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall d \in \mathfrak{d}$$

où $[d, \mathrm{ad}\, X] = d \circ \mathrm{ad}\, X - \mathrm{ad}\, X \circ d$. L'algèbre $\mathfrak{d}$ étant exponentielle, donc résoluble, l'opérateur $[d, \mathrm{ad}\, X]$ est nilpotent. Il en est donc de même de l'opérateur $\mathrm{ad}\, d(X)$. Ceci prouve que $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, donc que $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$. Puisque $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$ par hypothèse, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$.

2.4. L'action exponentielle permet de définir les actions suivantes :
(i) Pour $d \in \mathfrak{d}$, notons $D = \exp d \in \mathfrak{D}$, c'est-à-dire

$$D(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

(ii) Pour $x = \exp X \in G$ posons

$${}^{D}x = {}^{D}(\exp X) = \exp\big(D(X)\big).$$

Cette notation garantit que

$${}^{(D_1 D_2)}x = {}^{D_1}({}^{D_2}x)$$

quels que soient $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$, $x \in G$.
(iii) Pour tout $f \in L^1(G)$ définissons f^D par

$$f^D(x) = \delta(D) f({}^{D}x)$$

où δ désigne la fonction modulaire telle que

$$\int f^D(x)dx = \int f(x)dx.$$

Quels que soient $f \in L^1(G)$, $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$,

$$f^{(D_1D_2)} = (f^{D_1})^{D_2}.$$

(iv) Pour $\pi \in \hat{G}$ on définit ${}^D\pi$ par

$$({}^D\pi)(x) = \pi({}^{D^{-1}}x) \qquad \forall D \in \mathfrak{D}, x \in G.$$

On vérifie facilement que

$${}^{(D_1D_2)}\pi = {}^{D_1}({}^{D_2}\pi) \qquad \forall D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$$

et

$$\pi(f^D) = ({}^D\pi)(f) \qquad \forall D \in \mathfrak{D}, \forall f \in L^1(G).$$

(v) L'action coadjointe sur $\mathfrak{g}^*$ est définie de manière habituelle par

$$\begin{aligned} \langle d^* \cdot \ell, X\rangle &= \langle \ell, -d(X)\rangle \\ \langle D^* \cdot \ell, X\rangle &= \langle \ell, D^{-1}(X)\rangle \qquad \forall \ell \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}, \\ & \qquad d \in \mathfrak{d}, D \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

2.5. Si G est un groupe de Lie nilpotent, on peut définir son algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(G)$. Nous renvoyons à ([Lud. Mol. 1]) pour la définition de $\mathcal{S}(G)$ et des différentes normes engendrant la topologie de $\mathcal{S}(G)$. L'action exponentielle de $\mathfrak{D}$ sur G définit alors également une action de $\mathfrak{D}$ sur $\mathcal{S}(G)$ par $f^D(x) = \delta(D)f({}^Dx)$. Un certain nombre de propriétés de continuité et de transformations concernant cette action ont été démontrées dans ([Lud. Mol. 1]) et seront utilisées dans la suite. Revenons à présent aux groupes exponentiels.

2.6. Lemme : Soient $\pi = \pi(\ell, \mathfrak{h})$ et $D \in \mathfrak{D}$. Alors $D\mathfrak{h}$ est une polarisation pour $D^*\ell$ et les représentations ${}^D\pi$ et $\pi_D = \pi(D^*\ell, D\mathfrak{h})$ sont unitairement équivalentes.

<u>Démonstration</u> : L'équivalence unitaire

$$\mathcal{U} : \mathcal{H}_{D\pi} \equiv \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_D}$$

est donnée par

$$(\mathcal{U}\xi)(x) = \xi({}^{D^{-1}}x)$$

à condition de prendre sur $G/\exp D\mathfrak{h}$ la mesure semi-invariante correspondant au caractère $\Delta \circ D^{-1}$ et définie par

$$\eta \longmapsto \int_{G/\exp D\mathfrak{h}} \eta(\dot{x})d\dot{x} = \int_{G/\exp\mathfrak{h}} \eta \circ D(\dot{y})d\dot{y}.$$

2.7. Soit $\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell \in \hat{G}$ et soit $D \in \mathfrak{D}$. Sous quelle condition π et ${}^D\pi$ sont-ils unitairement équivalents ? D'après 2.6., ${}^D\pi$ est unitairement équivalent à $\pi_D = \pi(D^*\ell, D\mathfrak{h})$. D'après 1.5., $\pi(D^*\ell, D\mathfrak{h})$ est unitairement équivalent à $\pi(\ell, \mathfrak{h})$ si et seulement si

$$D^*\ell \in \mathcal{O}(\ell) = (\mathrm{Ad}^* G)(\ell).$$

Or remarquons que

$$\begin{aligned}
& D^*\ell \in (\mathrm{Ad}^* G)(\ell) \\
\iff\ & \mathrm{Ad}^* G(D^*\ell) \subset (\mathrm{Ad}^* G)(\ell) \\
\iff\ & D^*\big((\mathrm{Ad}^* G)(\ell)\big) \subset (\mathrm{Ad}^* G)(\ell) \\
\iff\ & D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) \subset \mathcal{O}(\ell) \\
\iff\ & D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) = \mathcal{O}(\ell)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si D^* laisse l'orbite $\mathcal{O}(\ell)$ invariante, puisque $\mathrm{Ad}^* G$ est un sous-groupe normal de $\mathfrak{D}^*$. Ce résultat nous amène aux définitions suivantes.

2.8. Définition : Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$.
(i) L'*annihilateur* $\mathfrak{d}_\ell$ de ℓ est défini par

$$\mathfrak{d}_\ell = \{d \in \mathfrak{d} \mid d^* \cdot \ell = 0\}.$$

Le *stabilisateur* $\mathfrak{D}_\ell$ de ℓ est défini par

$$\mathfrak{D}_\ell = \exp \mathfrak{d}_\ell = \{D \in \mathfrak{D} \mid D^* \cdot \ell = \ell\}.$$

(ii) Le *stabilisateur* $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$ de l'orbite est défini par

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} &= \{D \in \mathfrak{D} \mid D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) \subset \mathcal{O}(\ell)\} \\ &= \{D \in \mathfrak{D} \mid D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) = \mathcal{O}(\ell)\} \\ &= \{D \in \mathfrak{D} \mid {}^D\pi \text{ et } \pi \text{ sont unitairement équivalents} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } \pi = \pi(\ell, \mathfrak{h})\}.\end{aligned}$$

De plus on notera

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}(\ell)} = \ell n \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \{d \in \mathfrak{d} \mid \exp d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}\}.$$

Si $\pi = \pi(\ell, \mathfrak{h})$ on notera encore $\mathfrak{d}_\pi$ et $\mathfrak{D}_\pi$ au lieu de $\mathfrak{d}_{\mathcal{O}(\ell)}$ resp. $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$.

2.9. Proposition : Le stabilisateur $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$ de l'orbite est un sous-groupe connexe de $\mathfrak{D}$, contenant $\mathrm{Ad}\, G$ et vérifiant $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \mathrm{Ad}\, G \cdot \mathfrak{D}_\ell$.

Démonstration : La relation $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \mathrm{Ad}\, G \cdot \mathfrak{D}_\ell$ découle de l'équivalence

$$D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} \Longleftrightarrow D^* \cdot \ell \in (\mathrm{Ad}^* G)(\ell) \tag{2.7.}$$

La connexité de $\mathfrak{D}_\ell$ découle de ([B.C. et al], I.3.3.).
Puisqu'en plus $\mathrm{Ad}\, G$ est connexe par arcs, donc connexe, on en déduit la connexité de $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \mathfrak{D}_\pi$.

2.10. Définition : On appelle *orbite généralisée* de ℓ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^*$ défini par

$$\Omega_\ell = \{D^* \cdot \ell \mid D = \exp d \in \mathfrak{D}\}.$$

Si aucune confusion n'est possible, l'orbite généralisée sera simplement appelée orbite. Elle jouera un rôle essentiel dans la suite de ce travail.

2.11. Certains raisonnements se feront par récurrence sur $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. On construira alors une base coexponentielle $\{d_1, ..., d_n\}$ à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$. Une fonction sur $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ sera identifiée à une fonction sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F(\exp t_n d_n \cdot \exp t_{n-1} d_{n-1} ... \exp t_1 d_1 \cdot \mathfrak{D}_\pi) \equiv F(t_1, ..., t_n).$$

Si $D = \exp t_n d_n ... \exp t_1 d_1 \bmod \mathfrak{D}_\pi$, on notera indistinctement $F(D)$ et $F(t_1, ..., t_n)$.

Chapitre 3

Différentes étapes d'une démonstration par récurrence

3.1. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\pi = \pi(\ell)$. Les démonstrations concernant certaines propriétés de π (fonctions qui sont noyaux des représentations ${}^D\pi$; idéaux $\mathfrak{D}$-premiers contenus dans Ker π) se font par récurrence. Dans ce chapitre nous analyserons les différentes étapes nécessaires à une telle récurrence. Nous nous baserons essentiellement sur les travaux de Ludwig ([Lud.]). Soulignons pour commencer les différences avec les résultats de Ludwig.
(i) Ludwig se limite aux algèbres de dérivations $\mathfrak{d}$ telles que $d^*(\ell) = 0$ pour tout $d \in \mathfrak{d} \setminus \operatorname{ad}\mathfrak{g}$, alors que nous étudierons des algèbres $\mathfrak{d}$ plus générales. Cela aura entre autres comme conséquence que nos polarisations ne seront plus $\mathfrak{d}$-invariantes.
(ii) En contrepartie nous nous limiterons à des algèbres de Lie de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ désignant le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. Cette hypothèse simplifiera un certain nombre de calculs. D'autre part, lors de l'étude des orbites sous l'action de Ad^*G, une telle restriction semble être sans conséquences pour nos problèmes. En effet, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre exponentielle plus générale. Posons $\mathfrak{m}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$. Dans ce cas l'orbite de ℓ dans $\mathfrak{g}^*$ pour l'action de Ad^*G est saturée pour $\mathfrak{m}(\ell)$, c'est-à-dire $\mathcal{O}(\ell) + \mathfrak{m}(\ell)^\perp = \mathcal{O}(\ell)$.
(iii) Finalement, Ludwig fait une récurrence sur $\dim\mathfrak{g}$, alors que notre récurrence se fera sur $\dim\mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. Cependant, remarquons que si $d^*(\ell) = 0$ pour tout $d \in \mathfrak{d} \setminus \operatorname{ad}\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{d} \equiv \mathfrak{d}_\pi$. Donc notre récurrence se ramène à celle de Ludwig.
(iv) Soulignons en fin de compte la différence de notations. Nous supposons

d'office $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$, alors que Ludwig note $\mathfrak{d} + \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ pour tenir compte de cette hypothèse.
Lorsque nos démonstrations ressemblent considérablement à celles de Ludwig ([Lud.]), nous nous contenterons de donner de brèves indications.

3.2. Proposition : Soit $G = \exp\mathfrak{g}$ un groupe exponentiel muni d'une action exponentielle donnée par $\mathfrak{D} = \exp\mathfrak{d}$. Soit $\ell \neq 0 \in \mathfrak{g}^*$. Alors au moins un des cas suivants se présente :

<u>1er cas</u> : On a $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \equiv 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}$ est une algèbre abélienne ne subissant aucune action extérieure.

<u>2me cas</u> : Il existe un idéal non nul $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$-invariant, annulé par ℓ et contenu dans le radical nilpotent $\mathfrak{n}$.

<u>3me cas</u> : Il existe $Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ et $\varphi \in \mathfrak{d}^*$, $\varphi \not\equiv 0$, tels que

$$d(Y) = \varphi(d) \cdot Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}^*$$
$$\langle \ell, Y \rangle = 1.$$

Si $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, alors $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$ et Y est central dans $\mathfrak{g}$.

<u>4me cas</u> : Il existe $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, $\varphi \in \mathfrak{d}^*$, $\varphi \not\equiv 0$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$d\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \varphi(d)\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \forall d \in \mathfrak{d}^*$$
$$|\langle \ell, Y_1 \rangle| + |\langle \ell, Y_2 \rangle| \neq 0.$$

Si $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, alors $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$ et Y_1, Y_2 sont centraux dans $\mathfrak{g}$.

<u>5me cas</u> : Il existe $U, Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ et $\alpha, \beta \in \mathfrak{d}^*$ tels que

$d(Y) = 0 \quad \forall d \in \mathfrak{d}$, donc, en particulier, Y est central dans $\mathfrak{g}$
$d(U) = \alpha(d)U + \beta(d)Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}$
$\langle \ell, U \rangle = 0$ et $\langle \ell, Y \rangle = 1$
α, β sont indépendants, donc non nuls.

<u>6me cas</u> : Il existe $Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, $U \in \mathfrak{g}$, $\beta \in \mathfrak{d}^*$, $\beta \not\equiv 0$ tels que

$d(Y) = 0 \quad \forall d \in \mathfrak{d}$, donc, en particulier, Y est central dans $\mathfrak{g}$
$d(U) = \beta(d)Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}$
$\langle \ell, U \rangle = 0$ et $\langle \ell, Y \rangle = 1$.

Si $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, on peut choisir $U \in \mathfrak{n}$.

<u>7me cas</u> : Il existe $U, V, Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, $\varphi, \alpha, \beta \in \mathfrak{d}^*$ tels que

$d(Y) = 0 \quad \forall d \in \mathfrak{d}$, donc, en particulier, Y est central dans $\mathfrak{g}$

$$d\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \varphi(d)\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(d) \\ \beta(d) \end{pmatrix} Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}$$
$$[U, V] = 0$$

$\langle \ell, U\rangle = \langle \ell, V\rangle = 0$ et $\langle \ell, Y\rangle = 1$
φ, α, β sont indépendants, donc non nuls.

Démonstration : Si on n'est pas en présence des cas 1) ou 2) on fait le raisonnement suivant : Puisque l'action est exponentielle, les idéaux minimaux $\mathfrak{d}$-invariants (contenus dans $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ si $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \neq 0$) sont de dimension 1 ou 2. On a donc les cas

a) $$d(Y) = \varphi(d)Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}^*, \quad \langle \ell, Y\rangle = 1, \quad Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$$

ou

b) $$d\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \varphi(d)\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \forall d \in \mathfrak{d}^*, \quad Y_1, Y_2 \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$$

$$|\langle \ell, Y_1\rangle| + |\langle \ell, Y_2\rangle| \neq 0.$$

Dans b) on peut supposer $\varphi \not\equiv 0$ car sinon on se ramène à a). Dans a) il faut distinguer $\varphi \not\equiv 0$ et $\varphi \equiv 0$.
Pour étudier a) avec $\varphi \equiv 0$, supposons d'abord $\mathfrak{d}^2(\mathfrak{g}) \not\equiv 0$. En particulier $\mathbb{R}Y \subsetneqq \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Considérons les idéaux minimaux $\mathfrak{d}$-invariants de $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ contenant strictement $\mathbb{R}Y$. Ils sont de dimension 2 ou 3. On trouve donc les cas 5), 6) ou 7) avec $U, V, Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$. Dans le 5me cas et le 6me cas, on peut supposer $\langle \ell, U\rangle = 0$ (en ajoutant, si nécessaire, un multiple de Y à U). Dans les cas 5) et 6) on peut supposer $\beta \not\equiv 0$ (sinon on est dans le 2me cas avec $\mathfrak{a} = \mathbb{R}U$). Si $\beta = k\alpha$ dans le 5me cas, on retrouverait le 3me cas pour $Y' = \frac{1}{k}(U + kY)$. Donc on peut supposer α et β indépendants dans le 5me cas. Dans le 7me cas on peut supposer $\langle \ell, U\rangle = \langle \ell, V\rangle = 0$ (en ajoutant, si nécessaire, un multiple de Y à U, resp. V). On a $\varphi \not\equiv 0$, car sinon $\mathbb{R}U + \mathbb{R}V + \mathbb{R}Y$ ne serait pas minimal. L'indépendance de φ, α, β se démontre par la méthode utilisée par Ludwig ([Lud.]) pour montrer l'indépendance de $\varphi', \psi'_1, \psi'_2$. Le calcul de $[U, U]$ et $[U, V]$ montre que $0 = d([U, V]) = 2\varphi(d)[U, V]$. Puisque $\varphi \not\equiv 0$ on en déduit que $[U, V] = 0$.
Considérons ensuite le cas $\mathfrak{d}^2(\mathfrak{g}) \equiv 0$. Pour exclure le 2me cas on peut supposer que $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Y$. On cherche alors les idéaux minimaux $\mathfrak{d}$-invariants de $\mathfrak{g}$ contenant strictement $\mathbb{R}Y$. Puisqu'en plus $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Y$, seul le 6me cas se présente avec $U \in \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{d}(\mathfrak{n}) \neq 0$, $\mathfrak{d}(\mathfrak{n}) = \mathbb{R}Y$ et on peut chercher les idéaux minimaux $\mathfrak{d}$-invariants contenant strictement $\mathbb{R}Y$ dans $\mathfrak{n}$, c'est-à-dire on peut supposer $U \in \mathfrak{n}$. Si, par contre, $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Y$ et $\mathfrak{d}(\mathfrak{n}) = 0$, on

a $\mathfrak{n} = \mathbb{R}Y$ (sinon on retrouverait le 2me cas). Il faut alors distinguer deux cas : $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}Y$. Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, $\mathfrak{g}$ est abélien et $U \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$. Le cas $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}Y$ est exclu lorsque $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathbb{R}Y$. Pour les algèbres de cette forme, on peut donc toujours supposer $U \in \mathfrak{n}$ dans le 6me cas.
Remarquons que dans les cas 3) et 4) on a $\varphi\big(\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}) \equiv \varphi(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}(\ell)\big) \equiv 0$.

3.3. Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$. Nous remarquerons que les cas 5), 6) et 7) doivent être séparés en différents sous-cas. Finalement, nous montrerons comment, dans un raisonnement par récurrence, il faut construire la polarisation $\mathfrak{h}$ pour ℓ, la représentation irréductible $\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell$ et les bases coexponentielles $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{C}$ à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$.

3.4. Début de la récurrence : $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = 1$.
On a $\dim \mathfrak{g} = 1$, c'est-à-dire $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}$ et $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\pi = \{0\}$. En effet une dérivation non nulle ne peut laisser stable l'orbite $\mathcal{O}(\ell) = \mathrm{Ad}^* G \cdot \ell = \{\ell\}$. En particulier $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ et ceci est un cas particulier du 1er cas.

3.5. 1er cas : $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \equiv 0$.
L'algèbre $\mathfrak{g}$ est abélienne, toute polarisation coïncide avec $\mathfrak{g}$, π est le caractère χ_ℓ, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\pi$ et les bases coexponentielles $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sont vides.

3.6. 2me cas : Toute polarisation $\mathfrak{h}$ pour ℓ dans $\mathfrak{g}$ doit contenir l'idéal $\mathfrak{a}$, par maximalité, puisque $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ est encore une sous-algèbre subordonnée à ℓ. Dans le raisonnement par récurrence on passe au quotient $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ sur lequel on définit

$$\begin{aligned} \tilde{d}(X + \mathfrak{a}) &= d(X) + \mathfrak{a} \quad \forall d \in \mathfrak{d}, \forall X \in \mathfrak{g} \\ \langle \tilde{\ell}, X + \mathfrak{a} \rangle &= \langle \ell, X \rangle \qquad \forall X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Soit P la projection canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$.
Soit $\tilde{\mathfrak{h}}$ une polarisation de Pukanszky de $\tilde{\ell}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors $\mathfrak{h} = P^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}})$ est une polarisation de Pukanszky de ℓ dans $\mathfrak{g}$. De plus, si $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\tilde{B}_1, ..., \tilde{B}_r\}$ est une base coexponentielle à $\tilde{\mathfrak{h}}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ construite comme en 1.7. par exemple et si $P(B_i) = \tilde{B}_i$ pour tout i, alors $\mathfrak{B} = \{B_1, ..., B_r\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Dans $\tilde{G}$ définissons $\tilde{\pi} = \mathrm{ind}_{\tilde{H}}^{\tilde{G}} \chi_{\tilde{\ell}}$. On a $\pi = \tilde{\pi} \circ P$. Alors $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = \dim(\tilde{\mathfrak{d}}/\tilde{\mathfrak{d}}_{\tilde{\pi}})$ et $\dim \tilde{\mathfrak{g}} < \dim \mathfrak{g}$. Donc la récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{g}$ en passant de $\mathfrak{g}$ à $\tilde{\mathfrak{g}}$. Finalement, si $\tilde{\mathfrak{C}} = \{\tilde{d}_1, ..., \tilde{d}_n\}$ est une base coexponentielle à $\tilde{\mathfrak{d}}_{\tilde{\pi}}$ dans $\tilde{\mathfrak{d}}$, on peut poser $d_i = \tilde{d}_i \circ P$ pour tout i et $\mathfrak{C} = \{d_1, ..., d_n\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$.

3.7. 3me cas : Puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{d}_0 = \operatorname{Ker}\varphi = \{d \in \mathfrak{d} \mid \varphi(d) = 0\}$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{d}$, contenant $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Il existe $d_1 \in \mathfrak{d}$ tel que $\varphi(d_1) = 1$. Alors $\{d_1\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_0$ dans $\mathfrak{d}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ (d_0, t) &\longmapsto \exp td_1 \cdot \exp d_0 \end{aligned}$$

étant un difféomorphisme. Pour $\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell$ on trouve

$$\pi(\exp yY) = e^{-i\langle \ell, yY\rangle} = e^{-iy}$$

$$^{(\exp td_1 \cdot \exp d_0)}\pi(\exp yY) = \pi\Big(\exp(e^{-t}yY)\Big) = e^{-ie^{-t}y}.$$

De plus, $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_0$. Donc $(\mathfrak{d}_0)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$ et $\dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. La récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi$, en remplaçant $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}_0$ et en gardant l'algèbre $\mathfrak{g}$ (donc également $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{B}$) inchangée. Si $\mathfrak{C}_0$ est la base coexponentielle à $(\mathfrak{d}_0)_\pi$ dans $\mathfrak{d}_0$, alors $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \cup \{d_1\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$.

3.8. 4me cas : Il s'agit de l'analogue complexe du 3me cas. En effet, les relations peuvent s'écrire

$$\begin{array}{ll} d(Y_1 + iY_2) = \varphi(d)(1 + i\omega)(Y_1 + iY_2) & \forall d \in \mathfrak{d} \\ \exp(-td)(Y_1 + iY_2) = e^{-t\varphi(d)(1+i\omega)}(Y_1 + iY_2) & \forall d \in \mathfrak{d}. \end{array}$$

En notant par

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la matrice de la rotation d'angle θ et en identifiant l'élément $r_1Y_1 + r_2Y_2 \in \mathfrak{g}$ avec $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on obtient

$$\exp(-td)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = e^{-t\varphi(d)}K(-t\varphi(d)\omega)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(-td)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = e^{-t\varphi(d)}K(t\varphi(d)\omega)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Comme dans le 3me cas, $\mathfrak{d}_0 = \operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{d}$, contenant $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Il existe $d_1 \in \mathfrak{d}$ tel que $\varphi(d_1) = 1$ et $\{d_1\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_0$ dans $\mathfrak{d}$. Les calculs montrent que, pour $\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell$,

$$\pi(\exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2) = \pi\Big(\exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)\Big) = e^{-i\langle \ell, r_1 Y_1 + r_2 Y_2\rangle}$$

$$^{(\exp t d_1 \cdot \exp d_0)}\pi\Big(exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)\Big) = \pi\left(\exp\left[(Y_1 Y_2) e^{-t} K(t\omega)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}\right]\right)$$
$$= e^{-ie^{-t}\left\langle \ell, \left[(Y_1 Y_2) K(t\omega)\binom{r_1}{r_2}\right]\right\rangle}.$$

Comme dans le 3me cas, $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_0$ et $\dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. On a les mêmes conclusions concernant la récurrence.

3.9. 5me cas : (i) Le calcul

$$[d, d_1](U) = \Big(\alpha(d_1)\beta(d) - \alpha(d)\beta(d_1)\Big)Y$$

montre que $\operatorname{Ker}\alpha$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{d}$ et $\operatorname{Ker}\beta$ une sous-algèbre de codimension 1 dans $\mathfrak{d}$. Puisque α et β sont indépendants, $\operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta$ est un idéal de codimension 2 dans $\mathfrak{d}$.
(ii) Il existe $d_1, d_2 \in \mathfrak{d}$ tels que

$$\begin{array}{ll} \alpha(d_1) = 1 & \beta(d_1) = 0 \\ \alpha(d_2) = 0 & \beta(d_2) = 1. \end{array}$$

(iii) En remplaçant d_2 par $[d_2, d_1]$, on peut supposer que d_2 est dans le radical nilpotent de $\mathfrak{d}$ et que les applications

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker}\beta \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{D} & & \operatorname{Ker}\beta \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{D} \\ & \text{et} & \\ (d_0, s) \longmapsto \exp s d_2 \cdot \exp d_0 & & (d_0, s) \longmapsto \exp d_0 \cdot \exp s d_2 \end{array}$$

sont des difféomorphismes analytiques par 1.7.
(iv) Il faudra dans la suite distinguer les cas $\beta\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$ et $\beta\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$.

3.10. Cas 5a) : $\beta\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$.
(i) On sait que $\mathfrak{d}_0 = \operatorname{Ker}\beta$ est une sous-algèbre de codimension 1 dans $\mathfrak{d}$ et que $\{d_2\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_0$ dans $\mathfrak{d}$.
(ii) Toute polarisation $\mathfrak{h}$ pour ℓ dans $\mathfrak{g}$ doit contenir U, par maximalité,

puisque $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} + \mathbb{R}U$ est encore une sous-algèbre subordonnée à ℓ.
(iii) Pour $\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell$ on trouve

$$\begin{aligned}
&\pi(\exp yY) = e^{-i\langle \ell, yY\rangle} = e^{-iy}\\
&\pi(\exp uU) = 1\\
&({}^{\exp d}\pi)(\exp uU) = e^{iu\beta(d)\cdot\frac{e^{-\alpha(d)}-1}{-\alpha(d)}}\\
&{}^{(\exp sd_2\cdot\exp d_0)}\pi(\exp yY) = e^{-iy}\\
&{}^{(\exp sd_2\cdot\exp d_0)}\pi(\exp uU) = e^{isu}.
\end{aligned}$$

En effet, on se base sur les calculs

$$\begin{aligned}
&\exp(-uU)\exp X = \exp X\cdot\exp(-ue^{-\alpha(\mathrm{ad}\,X)}U) \qquad\qquad \forall X\in\mathfrak{g}\\
&(\exp d)(U) = e^{\alpha(d)}U + \beta(d)\cdot\frac{e^{\alpha(d)}-1}{\alpha(d)}Y\\
&\exp(-d_0)\Big(\exp(-sd_2)\Big)(uU) = e^{-\alpha(d_0)}uU - suY.
\end{aligned}$$

(iv) La relation

$$({}^{\exp d}\pi)(\exp uU) = e^{iu\beta(d)\cdot\frac{e^{-\alpha(d)}-1}{-\alpha(d)}}$$

entraîne que $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_0 = \mathrm{Ker}\,\beta$. A nouveau, $(\mathfrak{d}_0)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$ et $\dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. La récurrence se fait sur $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$, en remplaçant $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}_0$ et en gardant l'algèbre $\mathfrak{g}$ (donc également $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{B}$) inchangée. Si $\mathfrak{C}_0$ est la base coexponentielle à $(\mathfrak{d}_0)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}_0$, alors $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \cup \{d_2\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$.

3.11. Cas 5b) : $\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$.

(i) Il existe $X \in \mathfrak{n}$ tel que $[X, U] = Y$. En effet, comme $\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$, $\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}(\ell)} \equiv 0$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, on peut choisir $X \in \mathfrak{n}$ tel que $\beta(\mathrm{ad}\,X) = 1$. Puisque $\mathrm{ad}\,X$ est nilpotent, $\alpha(\mathrm{ad}\,X) = 0$.
(ii) Dans la suite nous écrirons, par abus de notations $\mathrm{Ker}\,\alpha\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} = \mathrm{Ker}(\alpha\circ\mathrm{ad})$ et $\mathrm{Ker}\,\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} = \mathrm{Ker}(\beta\circ\mathrm{ad})$. Posons $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Ker}\,\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{Ker}\,\alpha\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \cap \mathrm{Ker}\,\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$, $G_1 = \exp\mathfrak{g}_1$, $G_2 = \exp\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{d}_0 = \mathrm{Ker}\,\beta$, $\mathfrak{D}_0 = \exp\mathfrak{d}_0$. On a

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_1 \quad \text{et} \quad U, Y \in \mathfrak{g}_2.$$

La relation

$$[d, d_1](U) = \Big(\alpha(d_1)\beta(d) - \alpha(d)\beta(d_1)\Big)Y$$

montre encore que $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_2$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Notons que $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n} \subset \operatorname{Ker}\alpha\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$. De plus, l'évaluation de $d([W, U])$ pour $W \in \mathfrak{g}$ montre que $\mathfrak{g}_1$ est $\mathfrak{d}_0$-invariant et $\mathfrak{g}_2$ est $\mathfrak{d}$-invariant. Posons encore $\ell_1 = \ell\Big|_{\mathfrak{g}_1}$.

(iii) Par 1.7. $\{X\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{n}$ et à $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$.

(iv) Par 3.9. l'application

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\beta \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ (d_0, a) &\longmapsto \exp d_0 \cdot \exp a \operatorname{ad} X \end{aligned}$$

est un difféomorphisme analytique.

(v) Le calcul de

$$^{(\exp d_0 \cdot \exp a \operatorname{ad} X)}\pi = \pi\Big(\exp(-aX)\Big) \cdot {}^{(\exp d_0)}\pi \cdot \pi(\exp aX)$$

montre que $^{(\exp d_0 \cdot \exp a \operatorname{ad} X)}\pi$ et $^{(\exp d_0)}\pi$ sont unitairement équivalents.

(vi) Soit $\mathfrak{h}_1$ une polarisation de Pukanszky pour ℓ_1 dans $\mathfrak{g}_1$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ est également une polarisation de Pukanszky pour ℓ dans $\mathfrak{g}$. En effet le fait que $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_1(\ell_1)$, $U \in \mathfrak{g}_1(\ell_1)$, $U \notin \mathfrak{g}(\ell)$ montre que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre subordonnée à ℓ dans $\mathfrak{g}$ ayant la dimension correcte. La vérification du critère de Pukanszky est due aux observations suivantes : Soit $k \in \mathfrak{h}^\perp$ et posons $k_1 = k\Big|_{\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{h}_1^\perp$. Par hypothèse de récurrence il existe $W_1 \in \mathfrak{h}_1$ tel que $\ell_1 + k_1 = \operatorname{Ad}^*(\exp W_1)(\ell_1)$.

On montre que

$$\ell_1 + k_1 = \operatorname{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U)\Big)(\ell_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\ell + k = \operatorname{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U)\Big)(\ell) \text{ sur } \mathfrak{g}_1.$$

D'autre part,

$$\langle \operatorname{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U)\Big)(\ell), X\rangle = \langle \operatorname{Ad}^*(\exp W_1)(\ell), X\rangle + \lambda \cdot \frac{e^{\alpha(\operatorname{ad} W_1)} - 1}{\alpha(\operatorname{ad} W_1)}.$$

Lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$, on peut donc choisir λ tel que

$$\langle \mathrm{Ad}^*\Big(\exp(W_1+\lambda U)\Big)(\ell), X\rangle = \langle \ell, X\rangle + \langle k, X\rangle.$$

Puisque $W_1+\lambda U \in \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$, $\ell + \mathfrak{h}^\perp \subset \mathrm{Ad}^*(H)(\ell)$, c'est-à-dire la polarisation $\mathfrak{h}$ vérifie également le critère de Pukanszky.

(vii) Soit $D_0 = \exp d_0 \in \mathfrak{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$. L'évaluation de

$$0 = d_0([X,U]) = [d_0(X), U] + [X, d_0(U)]$$

donne

$$\begin{aligned}
& d_0(X) = -\alpha(d_0)X \mod \mathfrak{g}_2 \\
\Rightarrow\ & D_0^{-1}(X) = e^{\alpha(d_0)}X \mod \mathfrak{g}_2 \\
\Rightarrow\ & {}^{D_0^{-1}}(\exp rX) = \exp(re^{\alpha(d_0)}X) \quad \mod G_2 \text{ avec } G_2 \subset G_1 \\
\Rightarrow\ & {}^{D_0^{-1}}(\exp rX \exp W_1) = \exp(re^{\alpha(d_0)}X) \quad \mod G_1 \quad \forall r \in \mathbb{R}, W_1 \in \mathfrak{g}_1.
\end{aligned}$$

(viii) Soit $\pi_1 \in \hat{G}_1$ (par exemple $\pi_1 = \mathrm{ind}_H^{G_1}\chi_{\ell_1}$) et étudions $\tilde{\pi} = \mathrm{ind}_{G_1}^{G}\pi_1 \equiv \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell = \pi$, si ℓ est obtenu en prolongeant ℓ_1 par 0 hors de $\mathfrak{g}_1$. Identifions $G/G_1 \equiv \mathbb{R}$ et $d\dot{g} \equiv dr$ (mesure semi-invariante sur G/G_1). La représentation $\tilde{\pi} = \mathrm{ind}_{G_1}^{G}\pi_1$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\tilde{\pi}} &= \Big\{\xi : G \to \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(g\cdot g_1) = \pi_1(g_1)^*\xi(g)\ \forall g_1 \in G_1 \text{ et} \\
&\qquad\qquad \int_{G/G_1} ||\xi(g)||^2_{\mathcal{H}_{\pi_1}} d\dot{g} < \infty\Big\} \\
&\equiv L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_1}) \\
&\equiv L^2\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{k-1})\Big) \\
&\quad \tilde{\pi}(g')\xi(g) = \tilde{\Delta}^{-1/2}(g')\xi(g'^{-1}\cdot g) \\
&\quad ||\tilde{\pi}(g')\xi||_{L^2(G/G_1)} = ||\xi||_{L^2(G/G_1)} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{\tilde{\pi}}, \forall g' \in G.
\end{aligned}$$

(ix) Etudions l'action de $\mathfrak{D}_0$ sur la représentation π. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{G/G_1} \varphi({}^{D_0^{-1}}g)d\dot{g} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp rX \cdot \exp W_1)\Big)dr \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\exp(re^{\alpha(d_0)}X)\Big)dr \\
&= e^{-\alpha(d_0)} \int_{G/G_1} \varphi(g)d\dot{g}
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in L^1(G/G_1)$. Alors le calcul

$$\begin{aligned}
||\xi||^2_{L^2(G/G_1)} &= ||\tilde{\pi}({}^{D_0^{-1}}g')\xi||^2_{L^2(G/G_1)} \\
&= \tilde{\Delta}({}^{D_0^{-1}}g')^{-1} \int_{G/G_1} \left|\xi\left({}^{D_0^{-1}}\left(g'^{-1}\,{}^{D_0}(\exp rX \cdot \exp W_1)\right)\right)\right|^2 dr \\
&= \tilde{\Delta}({}^{D_0^{-1}}g')^{-1} \int_{G/G_1} \left|\xi\left({}^{D_0^{-1}}\left(g'^{-1} \exp(re^{-\alpha(d_0)}X)\right)\right)\right|^2 dr \\
&= \tilde{\Delta}({}^{D_0^{-1}}g')^{-1}\tilde{\Delta}(g')||\xi||^2_{L^2(G/G_1)}
\end{aligned}$$

donne

$$\tilde{\Delta}({}^{D_0^{-1}}g') = \tilde{\Delta}(g') \quad \forall g' \in G.$$

Rappelons finalement que ${}^{D_0}\tilde{\pi}(g) = \tilde{\pi}({}^{D_0^{-1}}g)$, donc que

$$\mathcal{H}_{D_0\tilde{\pi}} \equiv \mathcal{H}_{\tilde{\pi}} \equiv L^2\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{k-1})\Big).$$

(x) Définissons ensuite ${}^{D_0}\pi_1(g_1) = \pi_1({}^{D_0^{-1}}g_1)$, $g_1 \in G_1$, et

$$\pi_{D_0} = \mathrm{ind}_{G_1}^G({}^{D_0}\pi_1).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\pi_{D_0}} &= \Big\{\xi : G \to \mathcal{H}_{D_0\pi_1} \equiv \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(g \cdot g_1) = {}^{D_0}\pi_1(g_1)^*\xi(g) \quad \forall g_1 \in G_1 \\
&\qquad \text{et } \int_{G/G_1} ||\xi(g)||^2_{\mathcal{H}_{D_0\pi_1}} d\dot{g} < \infty\Big\} \\
&\equiv L^2\Big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{k-1})\Big).
\end{aligned}$$

On a $\Delta_{\tilde{\pi}} = \Delta_{\pi_{D_0}} = \tilde{\Delta}$, puisque ces fonctions modulaires sont toutes définies à partir de la mesure semi-invariante sur G/G_1.
(xi) Les représentations ${}^{D_0}\tilde{\pi}$ et π_{D_0} sont unitairement équivalentes, l'équivalence unitaire étant donnée par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} = \mathcal{U}(D_0) : \mathcal{H}_{D_0\tilde{\pi}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_{D_0}} \\
&\qquad (\mathcal{U}\xi)(g) = e^{\alpha(d_0)/2}\xi({}^{D_0^{-1}}g) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{D_0\tilde{\pi}}, \forall g \in G.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\mathcal{U}\xi \in \mathcal{H}_{\pi_{D_0}}, ||\mathcal{U}\xi||_{\mathcal{H}_{\pi_{D_0}}} = ||\xi||_{\mathcal{H}_{D_0\tilde{\pi}}} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{U} \circ {}^{D_0}\tilde{\pi} = \pi_{D_0} \circ \mathcal{U}.$$

(xii) Comme Y est central et $\mathfrak{D}$-invariant,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\exp yY) &= \pi(\exp yY) = \pi_1(\exp yY) = e^{-i\langle \ell, yY\rangle} = e^{-iy} \\ & \quad {}^{D}\pi(\exp yY) = {}^{D_0}\pi_1(\exp yY) = e^{-iy} \\ & \quad {}^{D_0}\tilde{\pi}(\exp yY) = \pi_{D_0}(\exp yY) = e^{-iy}. \end{aligned}$$

Si $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$, U est central dans $\mathfrak{g}_1 = \ker \beta\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$. Donc

$$\pi_1(\exp uU) = e^{-i\langle \ell_1, uU\rangle} = 1.$$

De plus, pour $d_0 \in \mathfrak{d}_0 = \ker \beta$, $D_0 = \exp d_0$,

$${}^{D_0}\pi_1(\exp uU) = \pi_1\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp uU)\Big) = \pi_1(\exp ue^{-\alpha(d_0)}U) = 1.$$

Par contre, si $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$, remarquons que U appartient à toute polarisation $\mathfrak{h}_1$ de $\ell_1 = \ell\Big|_{\mathfrak{g}_1}$ dans $\mathfrak{g}_1$. En effet, si $\mathfrak{h}_1$ est une telle polarisation, $\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h}_1 + \mathbb{R}U$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_1$ subordonnée à ℓ_1, donc $\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h}_1$ par maximalité. Donc, pour $W_1 \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned} \Big(\pi_1(\exp uU)\xi\Big)(\exp W_1) &= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp(-uU)\cdot \exp W_1) \\ &= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}\Big(\exp uU)\xi(\exp W_1 \cdot \exp(-ue^{-\alpha(\mathrm{ad}\,W_1)}U)\Big) \\ &= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp W_1). \end{aligned}$$

Puisque π_1 est unitaire, $\Delta_{\pi_1}(\exp uU) = 1$ et $\pi_1(\exp uU) = 1$. Comme précédemment, ${}^{D_0}\pi_1(\exp uU) = 1$. Finalement,

$$\begin{aligned} & (\pi_{D_0}(\exp uU)\xi)(\exp rX \cdot \exp W_1) \\ = \ & \Delta_{\pi_{D_0}}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp(-uU)\cdot \exp rX \cdot \exp W_1) \\ = \ & \Delta_{\pi_{D_0}}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp rX \cdot \exp W_1 \cdot \exp(-ue^{-\alpha(W_1)}U)\cdot \exp ruY) \\ = \ & \Delta_{\pi_{D_0}}^{-1/2}(\exp uU)e^{iru}\xi(\exp rX \exp W_1). \end{aligned}$$

Puisque $\pi_{D_0}(\exp uU)$ est unitaire, $\Delta_{\pi_{D_0}}(\exp uU) = 1$ et

$$(\pi_{D_0}(\exp uU)\xi)(\exp rX \cdot \exp W_1) = e^{iru}\xi(\exp rX \cdot \exp W_1).$$

(xii) Supposons $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Alors il existe $T \in \mathfrak{g}$ tel que $\alpha(\mathrm{ad}\, T) = 1$. Puisque $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}} \equiv 0$, on peut supposer $T \in \mathfrak{g}(\ell)$ (en ajoutant, si nécessaire, un élément de $\mathfrak{n}$) et $\beta(\mathrm{ad}\, T) = 0$, comme $\beta\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}(\ell)} \equiv 0$. Donc

$$[T, U] = U \text{ et } \mathrm{Ad}(\exp tT)(rU) = e^t rU.$$

Plus tard on montrera qu'on peut en fait choisir T dans une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$. Les calculs montrent que

$$\alpha(\mathrm{ad}[X, T]) = 0 \text{ et } \beta(\mathrm{ad}[X, T]) = 1$$

c'est-à-dire, en remplaçant X par $[X, T]$, on peut supposer que $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$, si $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. D'autre part, puisque

$$\Big[[T, X], U\Big] = -[X, U]$$

on a

$$[T, X] = -X \bmod \mathfrak{g}_2.$$

(xiii) Notons $\mathfrak{g}_3 = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_2$ et $G_3 = \exp \mathfrak{g}_3$. Puisque

$$\begin{aligned} [tT, xX + g_2] &= -txX \quad \bmod \mathfrak{g}_2 \\ &= 0 \qquad\quad \bmod \mathfrak{g}_3, \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_3$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et $\{T\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_3$ dans $\mathfrak{g}$. D'autre part, $\mathfrak{g}_2$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_3$ et $\{X\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_2$ dans $\mathfrak{g}_3$. Ceci prouve que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow G \\ (t, x, g_2) &\longmapsto \exp tT \cdot \exp xX \cdot g_2 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

(xiv) Rappelons que $\mathfrak{d} = \mathbb{R}\,\mathrm{ad}\, X + \mathfrak{d}_0$, $\mathrm{ad}\, X \in \mathfrak{d}_\pi$. Donc $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = \dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi)$. D'autre part $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$. La récurrence va donc se faire sur $\dim \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ étant remplacé par $\mathfrak{g}_1$, et $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}_0$. Une base coexponentielle $\mathfrak{C}_0$ à $(\mathfrak{d}_0)_\pi$ dans $\mathfrak{d}_0$, est également base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$. Si $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation de Pukanszky pour ℓ_1 dans $\mathfrak{g}_1$, il en est de même de $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ pour ℓ et $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{B}_1$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$,

$$\mathfrak{B} = \{X\} \cup \mathfrak{B}_1$$

est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Remarquons pour terminer que puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{d}_0(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_1$ désignant le radical nilpotent de $\mathfrak{g}_1$. En effet, nous savons que $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_1(\ell_1)$, donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \mathfrak{g}_1 \cap (\mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}) \\ &\subset \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n} \\ &\subset \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1 \end{aligned}$$

et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1$.

3.12. 6me cas : C'est un cas particulier du 5me cas avec $\alpha \equiv 0$ et $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$. Les résultats précédents restent valables.

3.13. 7me cas : (i) Il s'agit de l'analogue complexe du 5me cas. En effet, les relations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} d(U+iV) &= \varphi(d)(1+i\omega)(U+iV) + \big(\alpha(d)+i\beta(d)\big)Y \\ (\exp d)(U+iV) &= e^{\varphi(d)(1+i\omega)}(U+iV) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi(d)(1+i\omega)} \cdot \left(e^{\varphi(d)(1+i\omega)} - 1\right) \cdot \big(\alpha(d)+i\beta(d)\big)Y. \end{aligned}$$

(ii) Nous montrerons que le 7me cas se réduit à trois possibilités :

a) $\varphi\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv \alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv \beta\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$

b) $\varphi\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$, $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ et $\beta\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ sont indépendants

c) $\varphi\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$, $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ et $\beta\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ sont indépendants.

(iii) Supposons d'abord $\varphi\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$ et $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Il existe

$$\begin{array}{llll} X \in \mathfrak{g} & \text{tel que} & \varphi(\mathrm{ad}\,X) = 0 & \text{et} \quad \alpha(\mathrm{ad}\,X) \neq 0 \\ d \in \mathfrak{d} & \text{tel que} & \varphi(d) = 1, & \qquad \alpha(d) = \beta(d) = 0. \end{array}$$

Supposons $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} = k \cdot \alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$. En développant les relations

$$\begin{aligned} d([X,U]) &= [d(X),U] + [X,d(U)] \\ d([X,V]) &= [d(X),V] + [X,d(V)] \end{aligned}$$

on trouve une contradiction. De même si $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Par conséquent $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$, $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$ ou $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$ entraîne $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ et $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ indépendants.

(iv) Supposons ensuite $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Supposons $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv \beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$. Il existe

$$\begin{array}{lllll} X \in \mathfrak{g} & \text{tel que} & \varphi(\operatorname{ad} X) = 1 & \text{et} & \alpha(\operatorname{ad} X) = \beta(\operatorname{ad} X) = 0 \\ d \in \mathfrak{d} & \text{tel que} & \varphi(d) = 0 & \text{et} & \alpha(d) = 1. \end{array}$$

De plus $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n} \subset \operatorname{Ker}\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$. L'évaluation des mêmes relations qu'en (iii) donne une contradiction. Donc $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$ entraîne $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$ ou $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$.

(v) Remarquons que $\mathfrak{g}(\ell) \subset \operatorname{Ker}\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \cap \operatorname{Ker}\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$. Supposons $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$ et $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} = k\cdot\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Puisque $\mathfrak{n} \subset \operatorname{Ker}\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{g}(\ell) \subset \operatorname{Ker}\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} = \operatorname{Ker}\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g} \subset \operatorname{Ker}\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ contrairement à l'hypothèse $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Ainsi $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ et $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ sont indépendants. On fait un raisonnement analogue pour $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ si $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$.

(vi) Supposons $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Par (v) on peut supposer par exemple que $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ et $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ sont indépendants. Donc il existe

$$\begin{array}{lllll} X, X' \in \mathfrak{g} & \text{tels que} & \varphi(\operatorname{ad} X) = 1 & \text{et} & \alpha(\operatorname{ad} X) = 0 \\ & & \varphi(\operatorname{ad} X') = 0 & \text{et} & \alpha(\operatorname{ad} X') = 1. \end{array}$$

Supposons en plus

$$\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} = r\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} + r_1\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}.$$

L'évaluation de $\big[[X,X'],U\big]$, $\big[[X,X'],V\big]$ et $\beta(\operatorname{ad}[X,X'])$ conduit à une contradiction. Donc $\varphi\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$, $\alpha\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ et $\beta\big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ sont indépendants.

De (iii) à (vi) on vient de montrer que a), b), c) sont les seuls cas possibles.

(vii) Vu l'indépendance de φ, α, β, il existe $d_1, d_2, d_3 \in \mathfrak{d}$ tels que

$$\begin{array}{lll} \varphi(d_1) = 1, & \alpha(d_1) = 0, & \beta(d_1) = 0 \\ \varphi(d_2) = 0, & \alpha(d_2) = 1, & \beta(d_2) = 0 \\ \varphi(d_3) = 0, & \alpha(d_3) = 0, & \beta(d_3) = 1. \end{array}$$

En remplaçant d_2 et d_3 par $\frac{1}{1+\omega^2}([d_2, d_1] - \omega[d_3, d_1])$, resp. $\frac{1}{1+\omega^2}(\omega[d_2, d_1] + [d_3, d_1])$, on peut supposer que d_2 et d_3 appartiennent au radical nilpotent de $\mathfrak{d}$. Donc les applications

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta) \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathfrak{D} \\ (d_0, t_1, t_2, t_3) & \longmapsto & \exp d_0 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_3 d_3 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta) \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathfrak{D} \\ (d_0, t_1, t_2, t_3) & \longmapsto & \exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0 \end{array}$$

sont des difféomorphismes analytiques par 1.7.

3.14. Cas 7a) : $\varphi\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv \alpha\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv \beta\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$.

(i) Posons $\mathfrak{d}_1 = \ker\alpha \cap \ker\beta$, sous-algèbre de codimension 2 dans $\mathfrak{d}$. Alors, vu la décomposition 3.13. (vii), $\{d_2, d_3\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_1$ dans $\mathfrak{d}$.

(ii) Puisque U, V, Y sont centraux, ils appartiennent à toute polarisation.

(iii) Pour $\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell$ on trouve

$$\begin{aligned} {}^D\pi(\exp yY) &= \pi(\exp yY) = e^{-iy} \\ \pi(\exp uU) &= \pi(\exp vV) = 1 \end{aligned}$$

$$^{(\exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0)}\pi(\exp uU \cdot \exp vV) = e^{i(t_2 u + t_3 v)}.$$

En effet, on se base sur le calcul

$$\begin{aligned} & \exp(-d_0)\exp(-t_1 d_1)\exp(-t_2 d_2)\exp(-t_3 d_3)(uU + vV) \\ = \; & e^{-t_1}\Big((\cos t_1\omega)u - (\sin t_1\omega)v\Big)U + e^{-t_1}\Big((\sin t_1\omega)u + (\cos t_1\omega)v\Big)V \\ & -(t_2 u + t_3 v)Y. \end{aligned}$$

(iv) La relation

$$^{(\exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0)}\pi(\exp uU \cdot \exp vV) = e^{i(t_2 u + t_3 v)}$$

entraîne que $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_1$. En effet

$$D = \exp d = \exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0 \in \exp \mathfrak{d}_\pi$$

entraîne que $t_2 = t_3 = 0$. Donc

$$D = \exp d = \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0$$

et

$$\begin{aligned}
\exp d(U + iV) &= e^{\varphi(d)(1+i\omega)}(U + iV) + \frac{e^{\varphi(d)(1+i\omega)} - 1}{\varphi(d)(1 + i\omega)}\Big(\alpha(d) + i\beta(d)\Big)Y \\
&= e^{t_1(1+i\omega)}(U + iV)
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\alpha(d) = \beta(d) = 0$.

(v) Puisque $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_1$, $(\mathfrak{d}_1)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$ et $\dim\big(\mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi\big) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. La récurrence se fait sur $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$, en remplaçant $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}_1$ et en gardant l'algèbre $\mathfrak{g}$ (donc également $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{B}$) inchangée. Si $\mathfrak{C}_1$ est la base coexponentielle à $(\mathfrak{d}_1)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}_1$, alors $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \{d_2, d_3\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$.

3.15. Cas 7b) et 7c) : Ces deux cas peuvent être traités en partie simultanément.

(i) Comme $\alpha\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ et $\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ sont indépendants, il existe X_2, X_3 tels que $\alpha(\mathrm{ad}\, X_2) = \beta(\mathrm{ad}\, X_3) = 1$, $\alpha(\mathrm{ad}\, X_3) = \beta(\mathrm{ad}\, X_2) = 0$. Puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, que $\alpha\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}(\ell)} \equiv \beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}(\ell)} \equiv 0$, on peut supposer $X_2, X_3 \in \mathfrak{n}$ (en ajoutant, si nécessaire, un élément de $\mathfrak{g}(\ell)$). De plus $\varphi\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}} \equiv 0$ et $\varphi(\mathrm{ad}\, X_2) = \varphi(\mathrm{ad}\, X_3) = 0$. Dans le cas c) on peut choisir $X_1 \in \mathfrak{g}(\ell)$ (en ajoutant, si nécessaire, un élément de $\mathfrak{n}$) tel que $\varphi(\mathrm{ad}\, X_1) = 1$, $\alpha(\mathrm{ad}\, X_1) = \beta(\mathrm{ad}\, X_1) = 0$.

(ii) Dans le cas c) on peut même supposer $X_2, X_3 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. En effet, dans ce cas il suffit de remplacer X_2, X_3 par X_2', X_3' donnés par

$$\begin{aligned}
X_2' &= \frac{1}{1+\omega^2}(-[X_1, X_2] + \omega[X_1, X_3]) \\
X_3' &= \frac{1}{1+\omega^2}(-\omega[X_1, X_2] - [X_1, X_3]).
\end{aligned}$$

Plus tard on verra qu'il est permis de choisir X_1 dans une sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$.

(iii) Posons

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_1 &= \mathrm{Ker}\,\alpha \cap \mathrm{Ker}\,\beta \\
\mathfrak{g}_1 &= \mathrm{Ker}\,\alpha\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \cap \mathrm{Ker}\,\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \\
\mathfrak{g}_2 &= \mathrm{Ker}\,\varphi\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \cap \mathrm{Ker}\,\alpha\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \cap \mathrm{Ker}\,\beta\big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

On a :

$$U, V, Y \in \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1$$

et $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1$ dans le cas b). En calculant $d_1([W_1, U])$ et $d_1([W_1, V])$ pour $W_1 \in \mathfrak{g}_1$ et $d_1 \in \mathfrak{d}_1$, on voit que

$$\mathfrak{d}_1(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1.$$

Donc $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre $\mathfrak{d}_1$-invariante de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_2$ est un idéal $\mathfrak{d}$-invariant de $\mathfrak{g}$.

(iv) En évaluant $d([X_2, U]), d([X_2, V]), d([X_3, U]), d([X_3, V])$ on voit que

$$d\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = -\varphi(d)\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \operatorname{mod} \mathfrak{g}_2, \operatorname{mod}(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}).$$

De plus, le calcul de $\Big[[X_2, X_3], U\Big] = \Big[[X_2, X_3], V\Big] = 0$ montre que $[X_2, X_3] \in \mathfrak{g}_2$.

(v) Par 1.7., $\{X_2, X_3\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{n}$ et à $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$. De plus, puisque

$$\operatorname{Ker} \varphi\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} = \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus \mathfrak{g}_2$$

$\{X_2, X_3\}$ est également une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_2$ dans $\operatorname{Ker} \varphi\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}}$. Dans le cas 7b), $\operatorname{Ker} \varphi\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. Dans le cas 7c), $\operatorname{Ker} \varphi\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et $\{X_1\}$ est une base coexponentielle à $\operatorname{Ker} \varphi\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}$. Donc les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & G \\ (r_2, r_3, W_2) & \longmapsto & \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \cdot \exp W_2 \end{array}$$
dans le cas 7b)

resp.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & G \\ (r_1, r_2, r_3, W_2) & \longmapsto & \exp r_1 X_1 \cdot \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \cdot \exp W_2 \end{array}$$
dans le cas 7c)

sont des difféomorphismes analytiques. De plus, puisque

$\exp r_2X_2{\cdot}\exp r_3X_3 = \exp(r_2X_2+r_3X_3){\cdot}[\exp(-r_2X_2-r_3X_3)\exp r_2X_2 \exp r_3X_3]$,

que $\operatorname{ad} X_2, \operatorname{ad} X_3$ sont nilpotents, que $[X_2, X_3] \in \mathfrak{g}_2$,

$$\log[\exp(-r_2X_2 - r_3X_3)\exp r_2X_2 \cdot \exp r_3X_3] \in \mathfrak{g}_2$$

et les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & G \\ (r_2, r_3, W_2) & \longmapsto & \exp(r_2X_2 + r_3X_3) \cdot \exp W_2 \\ & & \text{dans le cas 7b)} \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{g}_2 & \longrightarrow & G \\ (r_1, r_2, r_3, W_2) & \longmapsto & \exp r_1X_1 \exp(r_2X_2 + r_3X_3) \cdot \exp W_2 \\ & & \text{dans le cas 7c)} \end{array}$$

sont des difféomorphismes analytiques. De même, puisque $\{X_2, X_3\}$ est également une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$, les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & G \\ (r_2, r_3, W_1) & \longmapsto & \exp r_2X_2 \cdot \exp r_3X_3 \cdot \exp W_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_1 & \longrightarrow & G \\ (r_2, r_3, W_1) & \longmapsto & \exp(r_2X_2 + r_3X_3) \cdot \exp W_1 \end{array}$$

sont des difféomorphismes analytiques.

(vi) Puisque $\mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}$ sont $\mathfrak{d}_1$-invariants, la relation obtenue en (iv) donne

$$\begin{array}{rcl} d_1(X_2 + iX_3) & = & -\varphi(d_1)(1 - i\omega)(X_2 + iX_3) \operatorname{mod}(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n})^{\mathbb{C}} \\ \exp d_1(X_2 + iX_3) & = & e^{-\varphi(d_1)}[\cos(\varphi(d_1)\omega) + i\sin(\varphi(d_1)\omega)] \\ & & (X_2 + iX_3) \operatorname{mod}(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n})^{\mathbb{C}} \\ \exp d_1 \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} & = & e^{-\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \operatorname{mod}(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\exp d_1(r_2X_2 + r_3X_3) &= \exp d_1\left[(X_2\ X_3)\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\right] \\
&= (X_2\ X_3)\cdot e^{-\varphi(d_1)}K(-\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
&\qquad \mathrm{mod}(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}) \\
{}^{D_1}\exp(r_2X_2 + r_3X_3) &= \exp\left[(X_2\ X_3)e^{-\varphi(d_1)}K(-\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\right] \\
&\qquad \mathrm{mod}\, G_2
\end{aligned}$$

et, puisque tout élément de G s'écrit sous la forme $\exp(r_2X_2+r_3X_3)\cdot\exp W_1$ on a pour l'action de $\mathfrak{D}_1$ sur G,

$$\begin{aligned}
{}^{D_1}[\exp(r_2X_2 + r_3X_3)\exp W_1] &= \exp\left[(X_2\ X_3)e^{-\varphi(d_1)}K(-\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\right] \\
&\qquad \mathrm{mod}\, G_1.
\end{aligned}$$

(vii) Soit $\ell_1 = \ell\Big|_{\mathfrak{g}_1}$ et soit $\mathfrak{h}_1$ une polarisation de Pukanszky pour ℓ_1 dans $\mathfrak{g}_1$. Par maximalité, $U, V, Y \in \mathfrak{h}_1$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ est également une polarisation de Pukanszky pour ℓ dans $\mathfrak{g}$. En effet, le fait que $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_1(\ell_1)$, $U, V \in \mathfrak{g}_1(\ell_1)$ et $U, V \notin \mathfrak{g}(\ell)$ montre que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre subordonnée à ℓ dans $\mathfrak{g}$ ayant la dimension correcte. La vérification du critère de Pukanszky est due aux observations suivantes : Soit $k \in \mathfrak{h}^\perp$ et posons $k_1 = k\Big|_{\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{h}_1^\perp$. Par hypothèse de récurrence il existe $W_1 \in \mathfrak{h}_1$ tel que

$$\ell_1 + k_1 = \mathrm{Ad}^*(\exp W_1)(\ell_1).$$

On montre que

$$\ell_1 + k_1 = \mathrm{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V)\Big)(\ell_1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\ell + k = \mathrm{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V)\Big)(\ell) \text{ sur } \mathfrak{g}_1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V)\Big)(\ell), X_2 + iX_3\rangle \\
= \ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp W_1)(\ell), X_2 + iX_3\rangle + \frac{e^{\varphi(\mathrm{ad}\, W_1)(1-i\omega)} - 1}{(1 - i\omega)\varphi(\mathrm{ad}\, W_1)}(\lambda + i\mu).
\end{aligned}$$

Lorsque $\lambda + i\mu$ parcourt $\mathbb{C}$, on obtient $\mathbb{C}$ tout entier, donc on peut choisir λ et μ tels que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}^*\Big(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V)\Big)(\ell), X_2 + iX_3\rangle = \\ \langle \ell, X_2 + iX_3\rangle + \langle k, X_2 + iX_3\rangle.\end{aligned}$$

Puisque $W_1 + \lambda U + \mu V \in \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$, $\ell + \mathfrak{h}^\perp \subset \mathrm{Ad}^*(H)(\ell)$, c'est-à-dire la polarisation $\mathfrak{h}$ vérifie également le critère de Pukanszky.

(viii) Sur G/G_1 nous définissons la mesure semi-invariante par

$$\begin{aligned}&\int_{G/G_1} \xi(\exp W) d\exp \dot{W} \qquad W \in \mathfrak{g} \\ =\ &\int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(r_2X_2 + r_3X_3)\cdot \exp W_1) dr_2dr_3 \qquad W_1 \in \mathfrak{g}_1 \\ =\ &\int_{\mathbb{R}^2} \xi\Big(\exp(r_2X_2 + r_3X_3)\Big) dr_2dr_3,\end{aligned}$$

ξ étant une fonction constante sur les classes modulo G_1. L'homomorphisme $\tilde{\Delta}$ tel que

$$\int_{G/G_1} \xi\Big((\exp W')^{-1}\exp W\Big) d\exp \dot{W} = \tilde{\Delta}(\exp W')\int_{G/G_1} \xi(\exp W) d\exp \dot{W}$$

vérifie

$$\begin{aligned}&\int_{G/G_1} \xi(\exp(-W_2)\exp W) d\exp \dot{W} \\ &\quad= \int_{G/G_1} \xi(\exp W[\exp(-W)\exp(-W_2)\exp W]) d\exp \dot{W} \\ &\quad= \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d\exp \dot{W}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\tilde{\Delta}(\exp W_2) \equiv 1$ pour $W_2 \in \mathfrak{g}_2$.

$$\begin{aligned}&\int_{G/G_1} \xi(\exp(-s_3X_3)\exp W) d\exp \dot{W} \\ &\quad= \int_{G/G_1} \xi(\exp(-s_3X_3)\exp(r_2X_2 + r_3X_3)\exp W_1) dr_2dr_3 \\ &\quad= \int_{G/G_1} \xi(\exp(r_2X_2 + (r_3 - s_3)X_3)\exp W_2'\exp W_1) dr_2dr_3 \\ &\quad= \int_{G/G_1} \xi\Big(\exp(r_2X_2 + r_3X_3)\Big) dr_2dr_3 \\ &\quad= \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d\exp \dot{W}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\tilde{\Delta}(\exp s_3X_3) \equiv 1$.
De même $\tilde{\Delta}(\exp s_2X_2) \equiv 1$. Ainsi $\tilde{\Delta} \equiv 1$ dans le cas 7b). Pour $D_1 = \exp d_1$ avec $d_1 \in \mathfrak{d}_1$,

$$\begin{aligned}
&\int_{G/G_1} \xi\Big({}^{D_1^{-1}}(\exp W)\Big) d\exp \dot{W} \\
= &\int_{G/G_1} \xi({}^{D_1^{-1}}(\exp(r_2X_2 + r_3X_3) \cdot {}^{D_1^{-1}}\exp W_1) dr_2 dr_3 \\
= &\int_{G/G_1} \xi\Bigg(\exp\Bigg[(X_2\, X_3) e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\Bigg]\Bigg) dr_2 dr_3 \\
= &\; e^{-2\varphi(d_1)} \int_{G/G_1} \xi\Big(\exp(u_2X_2 + u_3X_3)\Big) du_2 du_3 \\
= &\; e^{-2\varphi(d_1)} \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d\exp \dot{W}.
\end{aligned}$$

D'où, dans le cas 7c),

$$\begin{aligned}
&\int_{G/G_1} \xi(\exp(-s_1X_1)\exp W) d\exp \dot{W} \\
&\quad = \int_{G/G_1} \xi\Big({}^{\exp \mathrm{ad}(-s_1X_1)}\exp W \cdot \exp(-s_1X_1)\Big) d\exp \dot{W} \\
&\quad = \int_{G/G_1} \xi\Big({}^{\exp \mathrm{ad}(-s_1X_1)}\exp W\Big) d\exp \dot{W} \\
&\quad = e^{-2s_1} \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d\exp \dot{W}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\tilde{\Delta}(\exp s_1X_1) = e^{-2s_1}$.
Comme dans le cas 5b) on montre que

$$\tilde{\Delta}({}^{D_1^{-1}}\exp W) = \tilde{\Delta}(\exp W) \qquad \forall W \in \mathfrak{g}, \forall D_1 \in \exp \mathfrak{d}_1.$$

(ix) Soit $\ell_1 = \ell\Big|_{\mathfrak{g}_1}$ et soit $\mathfrak{h}_1$ une polarisation de Pukanszky pour ℓ_1 dans $\mathfrak{g}_1$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ est une polarisation de Pukanszky pour ℓ dans $\mathfrak{g}$ et

$$\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell \cong \mathrm{ind}_{G_1}^G \Big(\mathrm{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{\ell_1}\Big) = \mathrm{ind}_{G_1}^G \pi_1 = \tilde{\pi}$$

en posant $\pi_1 = \mathrm{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{\ell_1}$. Posons $\pi_{D_1} = \mathrm{ind}_{G_1}^G ({}^{D_1}\pi_1)$ et montrons que ${}^{D_1}\tilde{\pi}$ et π_{D_1} sont unitairement équivalents pour $D_1 \in \exp \mathfrak{d}_1$. On a

$$\mathcal{H}_{D_1\pi_1} \;=\; \mathcal{H}_{\pi_1} \equiv L^2(\mathbb{R}^{k-2}) \text{ et}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{D_1\tilde{\pi}} &= \mathcal{H}_{\tilde{\pi}} \\
&= \Big\{\xi : G \to \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(\exp W \cdot \exp W_1) = \pi_1(\exp W_1)^*\xi(\exp W) \\
&\qquad \forall W_1 \in \mathfrak{g}_1 \text{ et } \int_{G/G_1} ||\xi(\exp W)||^2_{\mathcal{H}_{\pi_1}} d\exp\dot{W} < +\infty\Big\} \\
&\equiv L^2\Big(\mathbb{R}^2, L^2(\mathbb{R}^{k-2})\Big) \\
\mathcal{H}_{\pi_{D_1}} &= \Big\{\xi : G \to \mathcal{H}_{D_1\pi_1} \equiv \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(\exp W \cdot \exp W_1) \\
&\qquad = ({}^{D_1}\pi_1)(\exp W_1)^*\xi(\exp W) \\
&\qquad \forall W_1 \in \mathfrak{g}_1 \text{ et } \int_{G/G_1} ||\xi(\exp W)||^2_{\mathcal{H}_{\pi_1}} d\exp\dot{W} < +\infty\Big\} \\
&\equiv L^2\Big(\mathbb{R}^2, L^2(\mathbb{R}^{k-2})\Big).
\end{aligned}$$

On a $\Delta_{\tilde{\pi}} = \Delta_{\pi_{D_1}} = \tilde{\Delta}$, puisque ces fonctions modulaires sont toutes définies à partir de la mesure semi-invariante sur G/G_1. L'équivalence unitaire entre ${}^{D_1}\tilde{\pi}$ et π_{D_1} est alors donnée par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} = \mathcal{U}(D_1) : \mathcal{H}_{D_1\tilde{\pi}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_{D_1}} \\
&\qquad (\mathcal{U}\xi)(g) = e^{\varphi(d_1)}\xi\Big({}^{D_1^{-1}}(g)\Big) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{D_1\tilde{\pi}}, \forall g \in G.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\begin{gathered}
\mathcal{U}\xi \in \mathcal{H}_{\pi_{D_1}}, ||\mathcal{U}\xi||_{\mathcal{H}_{\pi_{D_1}}} = ||\xi||_{\mathcal{H}_{D_1\tilde{\pi}}} \text{ et} \\
\mathcal{U} \circ {}^{D_1}\tilde{\pi} = \pi_{D_1} \circ \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

(x) Comme Y est central et $\mathfrak{D}$-invariant

$$\begin{aligned}
&\tilde{\pi}(\exp yY) = \pi(\exp yY) = \pi_1(\exp yY) = e^{-iy} \\
&{}^{D}\pi(\exp yY) = {}^{D_1}\tilde{\pi}(\exp yY) = {}^{D_1}\pi_1(\exp yY) = \pi_{D_1}(\exp yY) = e^{-iy}.
\end{aligned}$$

Pour $d_1 \in \mathfrak{d}_1$ on a

$$\begin{aligned}
d_1(U + iV) &= \varphi(d_1)(1 + i\omega)(U + iV) \\
\exp d_1(U + iV) &= e^{\varphi(d_1)}\Big(\cos(\varphi(d_1)\omega) + i\sin(\varphi(d_1)\omega)\Big)(U + iV) \\
\exp d_1 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= e^{\varphi(d_1)}K(\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\
{}^{\exp d_1}(uU + vV) &= (U\ V)e^{\varphi(d_1)}K(-\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci a lieu en particulier pour $d_1 = \operatorname{ad} W_1$ avec $W_1 \in \mathfrak{g}_1$. D'où

$$
\begin{aligned}
& (\pi_1(\exp uU \cdot \exp vV)\xi)(\exp W_1) \\
= \ & \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU \cdot \exp vV)\xi(\exp(-uU - vV)\exp W_1) \\
= \ & \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU \cdot \exp vV)\xi\Bigg(\exp W_1 \cdot \exp\Bigg[(U\ V)e^{-\varphi(\operatorname{ad} W_1)} \\
& \qquad K(\varphi(\operatorname{ad} W_1)\omega)\begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}\Bigg]\Bigg) \\
= \ & \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU \cdot \exp vV)\xi(\exp W_1) \\
= \ & \xi(\exp W_1)
\end{aligned}
$$

puisque π_1 est unitaire. D'où

$$\pi_1(\exp uU \cdot \exp vV) = \pi_1\Big(\exp(uU + vV)\Big) = 1 \quad \forall u, v$$

et

$$^{D_1}\pi_1\Big(\exp(uU + vV)\Big) = \pi_1\left((U\ V)e^{-\varphi(d_1)}K(\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
& \pi_{D_1}(\exp uU \exp vV)\xi(\exp r_3X_3 \cdot \exp r_2X_2 \exp W_1) \\
= \ & \tilde{\Delta}^{-1/2}(\exp uU \exp vV)\xi(\exp(-vV)\exp(-uU)\exp r_3X_3 \\
& \qquad \exp r_2X_2 \exp W_1) \\
= \ & \xi(\exp r_3X_3 \cdot [^{\exp \operatorname{ad}(-r_3X_3)}\exp(-vV)]\exp r_2X_2 \\
& \qquad \cdot[^{\exp \operatorname{ad}(-r_2X_2)}\exp(-uU)] \cdot \exp W_1) \\
= \ & \xi(\exp r_3X_3 \cdot \exp r_2X_2 \cdot \exp(-uU - vV)\exp W_1 \exp(r_2u + r_3v)Y) \\
= \ & e^{i(r_2u + r_3v)}\xi\Bigg(\exp r_3X_3 \exp r_2X_2 \exp W_1 \exp\Bigg[(U\ V)e^{-\varphi(\operatorname{ad} W_1)} \\
& \qquad K(\varphi(\operatorname{ad} W_1)\omega)\begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}\Bigg]\Bigg) \\
= \ & e^{i(r_2u + r_3v)}\xi(\exp r_3X_3 \exp r_2X_2 \exp W_1).
\end{aligned}
$$

(xi) Dans le cas 7b) on a pour $D = \exp d_0 \cdot \exp s_1d_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \cdot \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3)$,

$$\begin{aligned}
&{}^{\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \cdot \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3)}\pi \\
= \;& \pi\Big(\exp(-s_3 X_3)\Big)\pi\Big(\exp(-s_2 X_2)\Big)\big({}^{\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1}\pi\big) \cdot \pi(\exp s_2 X_2) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \pi(\exp s_3 X_3).
\end{aligned}$$

Donc $({}^{\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \cdot \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3)}\pi)$ et $({}^{\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1}\pi)$ sont unitairement équivalents, avec $d_0 \in \operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$.
De même, dans le cas 7c), $({}^{\exp d_0 \cdot \exp s_1 \operatorname{ad} X_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3)}\pi)$ et $({}^{\exp d_0}\pi)$ sont unitairement équivalents.
(xii) Rappelons que $\mathfrak{d} = \mathbb{R} \operatorname{ad} X_2 + \mathbb{R} \operatorname{ad} X_3 + \mathfrak{d}_1$, $\operatorname{ad} X_2 \in \mathfrak{d}_\pi$, $\operatorname{ad} X_3 \in \mathfrak{d}_\pi$. Donc $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = \dim(\mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi)$. D'autre part, $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$. La récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ étant remplacé par $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}_1$. Une base coexponentielle $\mathfrak{C}_1$ à $(\mathfrak{d}_1)_\pi$ dans $\mathfrak{d}_1$, est également une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$. Si $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation de Pukanszky pour ℓ_1 dans $\mathfrak{g}_1$, il en est de même de $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$, ℓ et $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{B}_1$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$,

$$\mathfrak{B} = \{X_2, X_3\} \cup \mathfrak{B}_1$$

est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Remarquons pour terminer que puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_1$ désignant le radical nilpotent de $\mathfrak{g}_1$. Le raisonnement est analogue à celui du cas 5b).

Chapitre 4

Les espaces ES

4.1. D'après 1.9. l'opérateur $\pi(f)$, $\pi \in \hat{G}$, est un opérateur à noyau dont le noyau f_π est défini sur $G \times G$ et vérifie une certaine propriété de covariance. Vu notre action exponentielle, nous pouvons considérer le noyau de $({}^D\pi)(f) = \pi(f^D)$, c'est-à-dire nous pouvons regarder la fonction noyau comme une fonction de D. Cependant, puisque ${}^D\pi$ et π sont unitairement équivalents si $D \in \mathfrak{D}_\pi$, la fonction noyau sera seulement considérée comme une fonction sur $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$. Etant donné la base coexponentielle $\mathfrak{C} = \{d_1, ..., d_n\}$ à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$ construite en 3. par récurrence, tout élément de $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ sera identifié à un élément de $\mathbb{R}^n$ par

$$(\exp s_n d_n) \cdot ...(\exp s_2 d_2) \cdot (\exp s_1 d_1) \cdot \mathfrak{D}_\pi \equiv (s_1, ..., s_n).$$

Au chapitre 3 nous avons construit pour $\ell \in \mathfrak{g}^*$ une polarisation de Pukanszky $\mathfrak{h}$ ainsi qu'une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ particulières. Dans la suite nous supposerons ces bases fixées une fois pour toutes. Nous poserons $\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell$ et $k = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Nous pourrons alors introduire l'espace de fonctions $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$, fonctions qui seront noyaux des opérateurs ${}^D\pi(f)$, où $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \equiv \mathbb{R}^n$. Grâce à la base coexponentielle fixe, cet espace pourra être identifié à un espace $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$. La lettre N indique que, pour des raisons techniques, nous devrons introduire N paramètres supplémentaires. La lettre $\mathcal{S}$ dans $E\mathcal{S}$ suggère qu'il s'agit d'un analogue des fonctions de Schwartz et la lettre E indique qu'il faut exiger une décroissance exponentielle dans certaines directions.
Dans ([Lud.]), Ludwig introduit les espaces ES dans un contexte légèrement

différent. Contrairement à Ludwig nous n'avons pas besoin d'introduire des transformations de Fourier partielles dans la définition de ES. Cela est dû à la forme particulière $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ de notre algèbre de Lie. En effet, grâce à cette forme particulière les noyaux considérés seront des fonctions de Schwartz dans les directions correspondant à G/H. Chez Ludwig par contre, les noyaux ne dépendent pas de l'action. Cela provient du fait que son algèbre de dérivations extérieures vérifie $\mathfrak{d}^*(\ell) = 0$. Elle est donc contenue dans $\mathfrak{d}_\pi$. Dans ([Lep. Lud.]) on travaille avec un espace de fonctions légèrement différent.

4.2. Définition : L'espace $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ est l'ensemble des applications C^∞ de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{C}$ telles que quels que soient $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $S = (s_1, ..., s_n)$, $T = (t_1, ..., t_k)$ et $T' = (t'_1, ..., t'_k)$

$$(1) \qquad ||F||_{\alpha,P} = \int \Big| e^{\langle \alpha, S\rangle} P\Big(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\Big) F(\bar{x}; S; T; T')\Big| d\bar{x}\, dS\, dT\, dT' < +\infty$$

pour tout P, où $\langle \alpha, S\rangle = \alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n$ et où P désigne une expression polynomiale en les variables $\bar{x}, S, T, T'$ et leurs dérivées partielles. On munit l'espace $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ de la topologie engendrée par les semi-normes $||F||_{\alpha,P}$.

4.3. La condition (1) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$(2) \qquad \int \Big| e^{|\langle \alpha, S\rangle|} P\Big(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\Big) F(\bar{x}; S; T; T')\Big| d\bar{x}\, dS\, dT\, dT' < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P,$

$$(3) \qquad \sup_{\bar{x}, S, T, T'} \Big| e^{\langle \alpha, S\rangle} P\Big(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\Big) F(\bar{x}; S; T; T')\Big| < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P.$

Ces expressions forment également une famille de semi-normes pour la topologie de $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$.

$$(4) \qquad \sup_{\bar{x}, S, T, T'} \Big| e^{|\langle \alpha, S\rangle|} P\Big(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\Big) F(\bar{x}; S; T; T')\Big| < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P$.
(5) L'application

$$(\bar{x}; s_1, ..., s_n; t_1, ..., t_k; t'_1, ..., t'_k)$$
$$\longmapsto e^{\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n} F(\bar{x}; s_1, ..., s_n; t_1, ..., t_k; t'_1, ..., t'_k)$$

est une fonction de Schwartz pour tout $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.
Remarquons simplement que l'équivalence de (1) et (2) resp. de (3) et (4), est obtenue en divisant le domaine d'intégration en deux domaines, à savoir celui où $\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n \geq 0$ et celui où $\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n < 0$. L'équivalence de (1) et (3) découle des propriétés des fonctions de Schwartz.

4.4. Rappelons la construction de la base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Les vecteurs de cette base $\mathfrak{B}$ sont obtenus dans les cas 5b), 7b) et 7c). Après changement de notations on trouve alors une suite de sous-algèbres $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \supset \mathfrak{g}_{p-1} \supset ... \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{h}$. Si $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}) = 1$, $\{C_i\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_i$, où C_i est l'élément X obtenu dans le cas 5b). Les éléments de $G_i = \exp \mathfrak{g}_i$ s'écrivent alors sous la forme $(\exp t_i C_i) \cdot g_{i-1}$ où $g_{i-1} \in G_{i-1}$. Si $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}) = 2$, $\{C'_i, C''_i\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_i$, où C'_i et C''_i sont les éléments X_2, X_3 obtenus dans les cas 7b) et 7c). Les éléments de G_i s'écrivent alors $\exp(t'_i C'_i + t''_i C''_i) \cdot g_{i-1}$ avec $g_{i-1} \in G_{i-1}$. Posons $T_i = (t_i)$, resp. $T_i = (t'_i, t''_i)$ et $g_i(T_i) = \exp t_i C_i$, resp. $g_i(T_i) = \exp(t'_i C'_i + t''_i C''_i)$. Les éléments de G s'écrivent donc

$$g_p(T_p) \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) ... g_1(T_1) \cdot h$$

avec $h \in H = \exp \mathfrak{h}$.

4.5. Définition : L'espace $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times G \times G$ dans $\mathbb{C}$, vérifiant la propriété de covariance

$$F(\bar{x}; a_1, ..., a_n; g \cdot h; g' \cdot h') = e^{i\langle \ell, \ln h \rangle} \cdot e^{-i\langle \ell, \ln h' \rangle} F(\bar{x}; a_1, ..., a_n; g; g')$$

quels que soient $h, h' \in H$ et telles que la fonction

$$(\bar{x}; a_1, ..., a_n; S_1, ..., S_p; T_1, ..., T_p)$$
$$\longmapsto e^{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n} F\Big(\bar{x}; a_1, ..., a_n; g_p(S_p) ... g_1(S_1); g_p(T_p) ... g_1(T_1)\Big),$$

soit une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ (si $S_1, ..., S_p$ se composent de k coordonnées) quels que soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

On peut identifier les espaces $\mathcal{ES}(N,\mathbb{R}^n,G/H\times G/H,\ell)$ et $\mathcal{ES}(N,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k)$ en posant, pour tout $F_1\in\mathcal{ES}(N,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k)$,

$$\begin{aligned}&F(\bar{x};D;g_p(S_p)...g_1(S_1)\cdot h;g_p(T_p)...g_1(T_1)\cdot h')\\&=e^{i\langle\ell,\ln h\rangle}\cdot e^{-i\langle\ell,\ln h'\rangle}F_1(\bar{x};D;S_1,...,S_p;T_1,...,T_p).\end{aligned}$$

De plus, l'espace $\mathcal{ES}(N,\mathbb{R}^n,G/H\times G/H,\ell)$ sera muni de la topologie de $\mathcal{ES}(N,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k)$.

4.6. Soit $R\in\mathfrak{g}$ un élément tel que $\varphi(R)\neq 0$ pour toute racine φ non nulle pour l'action de $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Alors R est un élément générique et $\mathfrak{g}_0$ défini par

$$\mathfrak{g}_0=\{W\in\mathfrak{g}\mid\exists m:(\operatorname{ad}R)^m(W)=0\}$$

est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{n}$ ([Dix. 2], 1.9.9). Dans la suite $\mathfrak{g}_0$ désignera une sous-algèbre nilpotente quelconque de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{n}$.

4.7. Soit $(C_1,...,C_m)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{n}$ ([Lep. Lud.], p. 2) et soit $(B_1,...,B_r)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ choisie dans $\mathfrak{g}_0$ (toute base supplémentaire à $\mathfrak{n}$ choisie dans $\mathfrak{g}_0$ convient). On obtient une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ par réunion de ces deux bases et la mesure de Haar de $\mathfrak{g}$ coïncide alors avec la mesure de Lebesgue pour les fonctions $\tilde{f}$ définies comme dans la suite ([Lep. Lud.], p. 9). Nous appellerons bases $\mathfrak{n}$-*spéciales* les bases construites de cette manière ([Lep. Lud.], p. 72). Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^N\times G$, définissons la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{r+m}$ par

$$\tilde{f}(\bar{x};s_1,...,s_r,t_1,...,t_m)=f(\bar{x},\exp s_rB_r...\exp s_1B_1\cdot\exp t_mC_m...\exp t_1C_1).$$

4.8. Définition : L'espace $\mathcal{ES}(N,G)$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^N\times G$ telles que les fonctions $\tilde{f}$ correspondantes soient des applications C^∞ de $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{r+m}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$(1)\qquad ||f||_{\alpha,P}=\int e^{\langle\alpha,S\rangle}\Big|P\Big(\bar{x};S,T;\frac{\partial}{\partial\bar{x}},\frac{\partial}{\partial S},\frac{\partial}{\partial T}\Big)\tilde{f}(\bar{x};S;T)\Big|\,d\bar{x}\,dS\,dT<+\infty$$

$\forall\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r,\forall P$,
où $S=(s_1,...,s_r)$, $T=(t_1,...,t_m)$ et P désigne une expression polynomiale en les variables $\bar{x},S,T$ et leurs dérivées partielles. On munit $\mathcal{ES}(N,G)$ de la topologie engendrée par les semi-normes $||f||_{\alpha,P}$.

4.9. Remarques : **(i)** D'après ([Lep. Lud.], p. 73), la définition précédente est indépendante de l'algèbre nilpotente $\mathfrak{g}_0$ et de la base $\mathfrak{n}$-spéciale choisies.
(ii) Dans ([Lep. Lud.], p. 72) on fait une construction analogue pour une base coexponentielle à une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ donnée.
(iii) La condition (1) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$(2) \qquad \int e^{|\langle\alpha,S\rangle|}\Big|P\Big(\bar{x};S,T;\frac{\partial}{\partial\bar{x}},\frac{\partial}{\partial S},\frac{\partial}{\partial T}\Big)\tilde{f}(\bar{x};S;T)\Big|d\bar{x}\,dS\,dT<+\infty$$

$\forall\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r,\forall P.$

$$(3) \qquad \sup_{\bar{x},S,T}\Big|e^{\langle\alpha,S\rangle}P\Big(\bar{x};S,T;\frac{\partial}{\partial\bar{x}},\frac{\partial}{\partial S},\frac{\partial}{\partial T}\Big)\tilde{f}(\bar{x};S;T)\Big|<+\infty$$

$\forall\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r,\forall P.$

$$(4) \qquad \sup_{\bar{x},S,T}\Big|e^{|\langle\alpha,S\rangle|}P\Big(\bar{x};S,T;\frac{\partial}{\partial\bar{x}},\frac{\partial}{\partial S},\frac{\partial}{\partial T}\Big)\tilde{f}(\bar{x};S;T)\Big|<+\infty$$

$\forall\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r,\forall P.$
(5) L'application

$$(\bar{x};s_1,...,s_r,t_1,...,t_m)\longmapsto e^{\alpha_1s_1+...+\alpha_rs_r}\tilde{f}(\bar{x};s_1,...,s_r,t_1,...,t_m)$$

est une fonction de Schwartz $\forall(\alpha_1,...,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r$.
(iv) Afin de simplifier les notations on identifiera f et $\tilde{f}$ dans la suite.

4.10. Revenons aux notations du chapitre 3. Dans les différents cas à considérer dans la récurrence, on choisira les bases de manière plus particulière et on modifiera légèrement la forme de f, resp. $\tilde{f}$.
(i) 1er cas : Puisque $\mathfrak{g}$ est abélien, le choix de la base est arbitraire.
(ii) 2me cas : Comme $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{n}$ et que $\mathfrak{a}$ est un idéal, on peut choisir les premiers vecteurs de base de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{a}$ et les suivants dans un supplémentaire à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$.
(iii) 3me cas : Puisque Y est central dans $\mathfrak{g}$, on prend $C_1=Y$.
(iv) 4me cas : Puisque Y_1 et Y_2 sont centraux dans $\mathfrak{g}$, on prend $C_1=Y_1$ et $C_2=Y_2$.
(v) 5me cas :
a) Cas 5a) : Par minimalité de l'idéal $\mathbb{R}U+\mathbb{R}Y$, on peut choisir $C_1=Y$ et $C_2=U$.

b) Cas 5b) : Puisque $\operatorname{ad} X$ est nilpotent, $\{X\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{n}$ et on peut choisir $C_1 = Y$, $C_2 = U$, $C_m = X$. Choisissons $C_1, ..., C_{m-1}$ dans $\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \cap \mathfrak{n}$. Alors $\langle C_1, ..., C_{m-1} \rangle$ est un idéal. Montrons ensuite que si $\alpha\Big|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \not\equiv 0$, on peut choisir $\mathfrak{g}_0$ de manière à avoir $T \in \mathfrak{g}_0$. Dans ce cas on pourra donc prendre $B_r = T$. En effet supposons que $aT + bX + W_2$ avec $W_2 \in \mathfrak{g}_2$ soit un élément générique. Puisque l'addition d'un élément nilpotent ne change pas le caractère générique, $aT + W_2$ est également générique. Alors nécessairement $a \neq 0$, puisque $[W_2, U] = 0$, c'est-à-dire que W_2 annule la racine α. D'où, en remplaçant T par $T + \frac{1}{a} W_2$, on trouve un élément générique tel que $[T + \frac{1}{a} W_2, U] = U$. Dans la suite nous supposerons T générique tel que $[T, U] = U$. Alors

$$T \in \mathfrak{g}_0 = \{W \in \mathfrak{g} \mid \exists m : (\operatorname{ad} T)^m (W) = 0\}$$

et on peut choisir $B_r = T$. Dans ce cas on peut modifier légèrement l'ordre des vecteurs de base, c'est-à-dire $f \in \mathcal{ES}(N, G)$ si et seulement si la fonction

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{f}}(\bar{x}, s_1, ..., s_{r-1}, \lambda; t_1, ..., t_{m-1}, \mu) \\ = \;& f(\bar{x}; \exp \lambda T \exp \mu X \exp s_{r-1} B_{r-1} ... \exp s_1 B_1 \exp t_{m-1} C_{m-1} ... \exp t_1 C_1) \end{aligned}$$

vérifie les conditions équivalentes (1) à (5) de 4.8. et 4.9. On notera simplement $f(\bar{x}; \exp \lambda T \exp \mu X \cdot w \cdot \exp t_2 U \exp t_1 Y)$ avec
$w = \exp s_{r-1} B_{r-1} ... \exp s_1 B_1 \exp t_{m-1} C_{m-1} ... \exp t_3 C_3$. En effet, il suffit de remarquer que

$$\exp(-s_1 B_1) ... \exp(-s_{r-1} B_{r-1}) \exp \mu X \exp s_{r-1} B_{r-1} ... \exp s_1 B_1$$

peut s'écrire sous la forme

$$\exp[\mu F_1(s_1, ..., s_{r-1}) C_1 + ... + \mu F_m(s_1, ..., s_{r-1}) C_m]$$

où les F_i sont des fonctions C^∞ à croissance bornée exponentiellement, de même que leurs dérivées, par ([Lep. Lud.], p. 69). Donc

$$\begin{aligned} &\exp \lambda T \exp \mu X \exp s_{r-1} B_{r-1} ... \exp s_1 B_1 \exp t_{m-1} C_{m-1} ... \exp t_1 C_1 \\ = &\exp \lambda T \exp s_{r-1} B_{r-1} ... \exp s_1 B_1 \exp Q_m X \exp Q_{m-1} C_{m-1} ... \exp Q_1 C_1 \end{aligned}$$

où les Q_i sont des fonctions C^∞, polynomiales en $t_1, ..., t_{m-1}, \mu$ et à croissance bornée exponentiellement en $s_1, ..., s_{r-1}$, de même que leurs dérivées, par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff qui est polynomiale pour l'algèbre nilpotente $\mathfrak{n}$. Réciproquement,

$$\begin{aligned}
&\exp \lambda T \exp s_{r-1} B_{r-1} \ldots \exp s_1 B_1 \exp \mu X \exp t_{m-1} C_{m-1} \ldots \exp t_1 C_1 \\
&= \exp \lambda T [\exp s_{r-1} B_{r-1} \ldots \exp s_1 B_1 \exp \mu X \exp(-s_1 B_1) \\
&\qquad \ldots \exp(-s_{r-1} B_{r-1})] \cdot \exp s_{r-1} B_{r-1} \ldots \exp s_1 B_1 \exp t_{m-1} C_{m-1} \ldots \exp t_1 C_1 \\
&= \exp \lambda T \exp Q'_m X \exp Q'_{m-1} C_{m-1} \ldots \exp Q'_1 C_1 \exp s_{r-1} B_{r-1} \ldots \exp s_1 B_1 \\
&\qquad \cdot \exp t_{m-1} C_{m-1} \ldots \exp t_1 C_1 \\
&= \exp \lambda T \exp Q'_m X \exp s_{r-1} B_{r-1} \ldots \exp s_1 B_1 \exp Q''_{m-1} C_{m-1} \ldots \exp Q''_1 C_1
\end{aligned}$$

où Q'_i sont des fonctions C^∞, polynomiales en μ, à croissance bornée exponentiellement en $s_1, \ldots, s_{r-1}$, de même que leurs dérivées, par ([Lep. Lud.], p. 69). De même, les Q''_i sont des fonctions C^∞, polynomiales en $t_1, \ldots, t_{m-1}$, μ, à croissance bornée exponentiellement en $s_1, \ldots, s_{r-1}$, de même que leurs dérivées. En effet, on fait un raisonnement analogue à celui effectué précédemment en on utilise le fait que $\langle C_1, \ldots, C_{m-1} \rangle$ est un idéal. D'où la conclusion. Lorsque $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$, le facteur $\exp \lambda T$ manque dans les expressions précédentes. Il est important de remarquer que dans ces raisonnements, les coefficients de $B_1, \ldots, B_{r-1}, T$ restent inchangés. Remarquons aussi qu'avec le nouvel ordre des vecteurs de base, on a toujours une base de Malcev, donc que la mesure de Haar coïncide avec la mesure de Lebesgue.

(vi) <u>6me cas</u> : Ceci est un cas particulier du 5me cas.

(vii) <u>7me cas</u> :

a) Cas 7a) : Puisque U, V, Y sont centraux, on peut choisir $C_1 = Y$, $C_2 = V$, $C_3 = U$.

b) Cas 7b) : La base de Jordan-Hölder dans $\mathfrak{n}$ peut être choisie de manière à ce que $C_1 = Y$, $C_2 = V$, $C_3 = U$, $C_{m-1} = X_2$, $C_m = X_3$. En effet, $\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}$ est un idéal dans $\mathfrak{n}$, $[X_2, X_3] \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{n} = \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n})$. De plus, $f \in ES(N, G)$ si et seulement si la fonction

$$\begin{aligned}
& \tilde{\tilde{f}}(\bar{x}, s_1, \ldots, s_{r-1}, \lambda; t_1, \ldots, t_{m-1}, \mu) \\
= \;& f(\bar{x}; \exp \lambda T \exp \mu X \exp s_{r-1} B_{r-1} \ldots \exp s_1 B_1 \exp t_{m-1} C_{m-1} \\
& \qquad \ldots \exp t_1 C_1)
\end{aligned}$$

vérifie les conditions équivalentes (1) à (5) de 4.6. et 4.7.

En effet,

$$\exp(t_{m-1} C_{m-1} + t_m C_m) \exp t_{m-2} C_{m-2} \ldots \exp t_1 C_1$$

$$= \exp t'_m C_m \exp t'_{m-1} C_{m-1} \exp t'_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t'_1 C_1,$$

les t'_i étant des fonctions polynomiales des t_j et réciproquement, par nilpotence. Par un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas 5b), on montre qu'on peut faire passer le facteur $\exp(t_{m-1}C_{m-1} + t_m C_m)$ en tête de la décomposition. On notera simplement, après changement du nom de certaines coordonnées,

$$f(\bar{x}, \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY)$$

avec $w = \exp s_r B_r \dots \exp s_1 B_1 \exp t_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t_4 C_4$. De plus, la mesure de Haar coïncide toujours avec la mesure de Lebesgue pour les coordonnées "mitigées" considérées.

c) Cas 7c) : Comme dans le cas 7b), la base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{n}$ est choisie telle que $C_1 = Y$, $C_2 = V$, $C_3 = U$, $C_{m-1} = X_2$, $C_m = X_3$. Comme dans le cas 5b) on remarque qu'on peut choisir $X_1 \in \mathfrak{g}_0$ (X_1 générique) tel que

$$\operatorname{ad} X_1 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Donc on peut poser $B_r = X_1$. Un raisonnement analogue à celui du cas 7b) montre alors qu'il suffit de considérer les expressions de la forme

$$f(\bar{x}; \exp t_1 X_1 \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp vV \cdot \exp yY)$$

avec $w = \exp s_{r-1} B_{r-1} \dots \exp s_1 B_1 \cdot \exp t_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t_4 C_4$, la décroissance exponentielle étant exigée pour les coordonnées $t_1, s_1, \dots, s_{r-1}$. De plus, la mesure de Haar coïncide toujours avec la mesure de Lebesgue pour les coordonnées "mitigées" considérées.

Chapitre 5

Les fonctions de $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ comme noyaux

5.1. Dans ce chapitre nous démontrerons que les fonctions de $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ peuvent être considérées comme noyaux d'opérateurs ${}^D\pi(f)$. Comme précédemment, nous supposerons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ exponentiel, $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et $G = \exp \mathfrak{g}$ groupe de Lie exponentiel connexe, simplement connexe associé. De plus, nous supposerons que $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$ agit exponentiellement sur G. Nos démonstrations s'inspireront de celles de Ludwig. Les différences avec le cas étudié par Ludwig ([Lud.]) ont déjà été soulevées en 4.1. La démonstration du théorème étudié est très technique. Elle se base sur les différents cas de récurrence étudiés précédemment et utilise de façon primordiale le théorème d'inversion de Fourier. Soient $\ell \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}$ la polarisation de Pukanszky pour ℓ dans $\mathfrak{g}$ construite en 3., $H = \exp \mathfrak{h}$ et $\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell$. Nous identifierons $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ à $\mathbb{R}^n$ grâce à une base coexponentielle $\{\tilde{d}_1, ..., \tilde{d}_n\}$ à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$ construite comme en 3. Nous supposerons cette base coexponentielle fixée une fois pour toutes.

5.2. Soit $\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell$ et soit $\mathcal{H}_\pi$ l'espace de représentation de π. Pour tout $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$, notons $A_F(\bar{x}, D)$ l'opérateur sur $\mathcal{H}_\pi$ admettant $F(\bar{x}; D; .; .)$ comme noyau, à savoir l'opérateur défini par

$$(A_F(\bar{x}, D)\xi)(g) = \int_{G/H} F(\bar{x}; D; g; g')\xi(g')d\dot{g}' \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

Vu les propriétés de covariance de F et de ξ, cette intégrale sur G/H a un sens et fournit bien un élément de $\mathcal{H}_\pi$.

5.3. Théorème : Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$. Alors il existe une polarisation de Pukanszky $\mathfrak{h}$ pour ℓ dans $\mathfrak{g}$, une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$ telles que $H = \exp \mathfrak{h}$ et $\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell$ vérifient : Pour tout $F \in E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,G/H \times G/H,\ell)$ il existe $f \in E\mathcal{S}(N,G)$ tel que
(i) ${}^D\pi(f)$ a pour noyau F, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}({}^D\pi(f(\bar{x},\cdot))\xi)(g) &= (A_F(\bar{x},D)\xi)(g)\\ &= \int_{G/H} F(\bar{x};D;g;g')\xi(g')d\dot{g}'\end{aligned}$$

quels que soient $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \equiv \mathbb{R}^n$ et presque tout $g \in G$.
(ii) Si $F(\bar{x}_0;.;.;.) \equiv 0$ pour un certain $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, alors $f(\bar{x}_0;.) \equiv 0$.
(iii) Si, pour une certaine fonction q sur $\mathbb{R}^N$, $q \cdot F \in E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,G/H \times G/H,\ell)$, alors $q \cdot f \in E\mathcal{S}(N,G)$.

Démonstration : La récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$. Le début de la récurrence est obtenu pour $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = 1$, c'est-à-dire pour $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi = 0$. Il s'agit d'une situation particulière du 1er cas étudié dans la suite. Nous traiterons assez rapidement les raisonnements analogues à ceux de Ludwig ([Lud.]).

5.4. Etude du 1er cas : Puisque $\mathfrak{g}$ est abélien, on peut supposer $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$ et $\mathfrak{d} = \{0\}$. On a $E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,G/H \times G/H,\ell) \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $E\mathcal{S}(N,G) \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m)$. La représentation π coïncide avec le caractère χ_ℓ, c'est-à-dire $\pi(f)$ peut être identifié à la transformée de Fourier en $-\ell$. Soit $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Choisissons $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ tel que $\hat{v}(-\ell) = 1$, la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ étant définie par $\hat{f}(\ell) = \int f(x)e^{i\langle x,\ell\rangle}dx$ pour $x, \ell \in \mathbb{R}^m$. Posons $f(\bar{x};x) = F(\bar{x})v(x)$. Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m)$ et $\pi\big(f(\bar{x};.)\big) \equiv F(\bar{x})$ (multiplication par $F(\bar{x})$). Il n'y a pas d'action à considérer dans ce cas.

5.5. Etude du 2me cas : Puisque $G/H \equiv \tilde{G}/\tilde{H}$, que $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi \equiv \tilde{\mathfrak{d}}/\tilde{\mathfrak{d}}_{\tilde{\pi}}$, que $\langle \ell, \mathfrak{a}\rangle = 0$ et que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$, les espaces $E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,G/H \times G/H,\ell)$ et $E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,\tilde{G}/\tilde{H} \times \tilde{G}/\tilde{H},\tilde{\ell})$ peuvent être identifiés, de même que les espaces $\mathcal{H}_\pi$ et $\mathcal{H}_{\tilde{\pi}}$. Soit $F \in E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,G/H \times G/H,\ell)$. Par hypothèse de récurrence il existe $g \in E\mathcal{S}(N,\tilde{G})$ tel que

$${}^{\tilde{D}}\tilde{\pi}(g(\bar{x},.))\tilde{\xi}(\tilde{u})$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\tilde{G}/\tilde{H}} F(\bar{x};\tilde{D};\tilde{u};\tilde{u}')\tilde{\xi}(\tilde{u}')d\dot{\tilde{u}}' \\
&= \int_{G/H} F(\bar{x};D;u;u')\xi(u')d\dot{u}'.
\end{aligned}
$$

Soit $A=\exp\mathfrak{a}$ et soit $k\in C_c^\infty(A)$ tel que $\int_A k(x)dx=1$. La base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{n}$ est choisie de manière à ce que $C_1,...,C_s\in\mathfrak{a}$ et $C_{s+1},...,C_m\in\mathfrak{n}\backslash\mathfrak{a}$. Définissons $f\in ES(N,G)$ par

$$
\begin{aligned}
& f(\bar{x};\exp t_rB_r...\exp t_1B_1\exp s_mC_m...\exp s_{s+1}C_{s+1}\cdot\exp s_sC_s \\
&\qquad ...\exp s_1C_1) \\
=\ & g(\bar{x};\exp t_rB_r...\exp t_1B_1\exp s_mC_m...\exp s_{s+1}C_{s+1})\cdot k(\exp s_sC_s \\
&\qquad ...\exp s_1C_1).
\end{aligned}
$$

Alors ${}^D\pi(f(\bar{x},.))={}^{\tilde{D}}\tilde{\pi}(g(\bar{x},.))$ et ${}^D\pi(f(\bar{x},.))$ a pour noyau $F(\bar{x};D;.;.)$.

5.6. Etude du 3me cas : Posons $D=\exp td_1\cdot\exp d_0=\exp td_1\cdot D_0$ et notons les éléments de G par $g=w\cdot\exp rY$. On montre que

$$
\begin{aligned}
& \left[{}^D\pi\Big(f(\bar{x};.)\Big)\xi\right](\exp X) \\
=\ & e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\cdot e^{-t}\int_{G/\exp\mathbb{R}Y}\int_{\mathbb{R}} f(\bar{x},({}^{\exp td_1}w) \\
&\qquad \cdot\exp rY)\pi({}^{D_0^{-1}}w)\cdot e^{-ire^{-t}}\xi(\exp X)dr\,d\dot{w}.
\end{aligned}
$$

Rappelons que dans la base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$, $\tilde{d}_n=d_1$. Donc

$$D=\exp td_1\cdot D_0=\exp td_1\cdot\exp a_{n-1}\tilde{d}_{n-1}...\exp a_1\tilde{d}_1 \mod\mathfrak{D}_\pi$$

avec

$$D_0=\exp a_{n-1}\tilde{d}_{n-1}...\exp a_1\tilde{d}_1 \mod\mathfrak{D}_\pi.$$

Soit $F\in ES(N,\mathbb{R}^n,G/H\times G/H,\ell)$ et définissons $F_1\in ES(N+1,\mathbb{R}^{n-1},G/H\times G/H,\ell)$ par

$$
\begin{cases}
F_1(\bar{x},t;a_1,...,a_{n-1};.;.) & =2\pi\cdot t^{-\mathrm{tr}\,d_1}F(\bar{x};a_1,...,a_{n-1},\ln t;.;.) \\
& \qquad\text{pour } t>0 \\
F_1(\bar{x},t;a_1,...,a_{n-1};.;.) & =0 \\
& \qquad\text{pour } t\le 0.
\end{cases}
$$

Puisque

$$e^{\beta u}F(\bar{x};a_1,...,a_{n-1},u;.;.)\in ES(N,\mathbb{R}^n,G/H\times G/H,\ell)\quad\forall\beta\in\mathbb{R},$$

$$t^{\beta}F_1(\bar{x},t;a_1,...,a_{n-1};.;.)\in ES(N+1,\mathbb{R}^{n-1},G/H\times G/H,\ell)\quad\forall\beta\in\mathbb{R}.$$

Par hypothèse de récurrence il existe $g\in ES(N+1,G)$ tel que

$$\begin{aligned}&\left[{}^{D_0}\pi(g(\bar{x},t;.))\xi\right](\exp X)\\ =\;&\int F_1(\bar{x},t;D_0;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\, X')\end{aligned}$$

pour tout $D_0\in\mathfrak{D}_0$. De plus, comme $F_1(\bar{x},t;.;.;.)\equiv 0$ pour $t\leq 0$, l'hypothèse de récurrence donne $g(\bar{x},t;.)\equiv 0$ pour $t\leq 0$. Définissons

$$g_1(\bar{x},t;\exp X)=\int g(\bar{x},t;\exp X\cdot\exp rY)e^{-ir}dr$$

et

$$\begin{aligned}f(\bar{x};\exp X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1\Big(\bar{x},e^u;\,{}^{\exp(-ud_1)}(\exp X)\Big)du\\&=\int_0^{+\infty}g_1\Big(\bar{x},s;\,{}^{\exp(-\ln sd_1)}(\exp X)\Big)\cdot\frac{1}{s}ds\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1\Big(\bar{x},s;\,{}^{\exp(-\ln sd_1)}(\exp X)\Big)\cdot\frac{1}{s}ds\end{aligned}$$

puisque $g_1(\bar{x},s;.)\equiv 0$ pour $s\leq 0$. Les calculs montrent que

$$\begin{aligned}f(\bar{x};w\cdot\exp rY)&=\int_{\mathbb{R}}g_1(\bar{x},e^u;\,{}^{\exp(-ud_1)}w)e^{ire^{-u}}du\\&=\int_{\mathbb{R}}g_1\left(\bar{x},\frac{1}{s};\,{}^{\exp(\ln sd_1)}w\right)e^{irs}\cdot\frac{1}{s}ds\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\left[{}^{D}\pi\big(f(\bar{x};.)\big)\xi\right](\exp X)\\=\;&e^{t\operatorname{tr}d_1}\cdot e^{-t}\int_{G/\exp\mathbb{R}Y}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}g_1(\bar{x},e^u;\,{}^{\exp(t-u)d_1}w)e^{ire^{-u}}e^{-ire^{-t}}\pi({}^{D_0^{-1}}w)\\&\qquad\qquad\xi(\exp X)dudrd\dot{w}\\=\;&e^{t\operatorname{tr}d_1}\cdot e^{-t}\int_{G/\exp\mathbb{R}Y}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}g_1\left(\bar{x},\frac{1}{s};\,{}^{\exp(t+\ln|s|)d_1}w\right)\cdot e^{irs}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot e^{-ire^{-t}}\pi({}^{D_0^{-1}}w)\xi(\exp X)\cdot\frac{1}{s}dsdrd\dot{w}\\
=\;& \frac{1}{2\pi}e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\cdot e^{-t}\int_{G/\exp\mathbb{R}Y} g_1(\bar{x},e^t;w)\pi({}^{D_0^{-1}}w)\xi(\exp X)\cdot e^t d\dot{w}\\
=\;& \frac{1}{2\pi}e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\;{}^{D_0}\pi\Big(g(\bar{x},e^t;.)\Big)\xi(\exp X)\\
=\;& \frac{1}{2\pi}e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\int F_1(\bar{x},e^t;D_0;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X')\\
=\;& \int F(\bar{x};D_0,t;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X')\\
=\;& \int F(\bar{x};D;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X').
\end{aligned}
$$

Nous avons déjà remarqué qu'on a bien $F_1\in ES(N+1,\mathbb{R}^{n-1},G/H\times G/H,\ell)$. De plus, puisqu'il en est de même de la fonction $t^\beta\cdot F_1$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, on sait, par hypothèse de récurrence, que $t^\beta\cdot g\in ES(N+1,G)$, donc $t^\beta\cdot g_1\in ES(N+1,G/\exp\mathbb{R}Y)$. Remarquons ensuite que la fonction g_2 définie par

$$
\begin{array}{lll}
g_2(\bar{x},s;w) & = g_1(\bar{x},\frac{1}{s};\,{}^{\exp(\ln sd_1)}w)\cdot\frac{1}{s} & \text{pour } s>0\\
g_2(\bar{x},s;w) & = 0 & \text{pour } s\leq 0
\end{array}
$$

est une fonction de $ES(N+1;G/\exp\mathbb{R}Y)$. Par conséquent, la fonction $f(\bar{x};w\cdot\exp rY)$ est dans $ES(N;G)$, comme transformée de Fourier partielle de la fonction g_2. Pour les justifications détaillées, il faut se baser sur le fait que

$$
\begin{aligned}
{}^{\exp(\ln sd_1)}(\exp t_iB_i) &= \exp\Big(t_iB_i+\sum_1^\infty\frac{1}{k!}(\ln s)^k d_1^k(t_iB_i)\Big)\\
&= \exp\Big(t_iB_i+N_i(s,t_i)\Big)
\end{aligned}
$$

avec $N_i(s,t_i)\in\mathfrak{n}$, linéaire en t_i, à croissance bornée exponentiellement en $|\ln s|$, de même que ses dérivées. De plus

$$
{}^{\exp(\ln sd_1)}(\exp t_iB_i)=\exp t_iB_i\cdot\exp N_i'(s,t_i)
$$

avec $N_i'(s,t_i)\in\mathfrak{n}$, à croissance bornée exponentiellement en t_i et $|\ln s|$, par ([Lep. Lud.], p. 69). Raisonnement comparable pour ${}^{\exp(\ln sd_1)}(\exp t_iC_i)$. Il faut ensuite utiliser ([Lep. Lud.], p. 69) pour écrire les termes dans l'ordre correct. On voit alors que les coordonnées qui nécessitent la présence d'une exponentielle dans la définition de $E\mathcal{S}$ ne sont pas modifiées par $\exp(\ln sd_1)$. Puisque $t^\beta \cdot g_1 \in E\mathcal{S}(N+1, G/\exp\mathbb{R}Y)$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on en déduit alors que $g_2 \in E\mathcal{S}(N+1; G/\exp\mathbb{R}Y)$. Ceci termine la récurrence dans le 3me cas.

5.7. Etude du 4me cas : Posons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$ et $A = \exp\mathfrak{a} = \exp\mathbb{R}Y_1 \cdot \exp\mathbb{R}Y_2$. Les éléments de G seront notés $g = w \cdot \exp(r_1Y_1 + r_2Y_2) = w \cdot \exp r_1Y_1 \cdot \exp r_2Y_2$ et les éléments de $\mathfrak{D}$ seront notés $D = \exp td_1 \cdot \exp d_0 = \exp td_1 \cdot D_0$. Comme dans le 3me cas, $\tilde{d}_n = d_1$. De plus on a la même décomposition de D dans une base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$. Soit $F \in E\mathcal{S}(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ et définissons $F_1 \in E\mathcal{S}(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, G/H \times G/H, \ell)$ par

$$\begin{aligned} F_1(\bar{x}, t; a_1, ..., a_{n-1}; .; .) &= (2\pi)^2 \cdot t^{-\operatorname{tr} d_1} F(\bar{x}; a_1, ..., a_{n-1}, \ln t; .; .) \\ &\qquad \text{pour } t > 0 \\ F_1(\bar{x}, t; a_1, ..., a_{n-1}; .; .) &= 0 \\ &\qquad \text{pour } t \leq 0. \end{aligned}$$

Comme dans le 3me cas,

$$t^\beta F_1(\bar{x}, t; a_1, ..., a_{n-1}; .; .) \in E\mathcal{S}(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, G/H \times G/H, \ell) \quad \forall\beta \in \mathbb{R}.$$

On montre que

$$\begin{aligned} \Big[{}^D\pi\Big(f(\bar{x}; .)\Big)\xi\Big](\exp X) = e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \cdot \int_{G/A}\int_{\mathbb{R}^2} f\Big(\bar{x}; {}^{\exp td_1} w \\ \cdot \exp(s_1Y_1 + s_2Y_2)\Big) \cdot {}^{D_0}\pi(w) e^{-i \cdot e^{-t}\left\langle \ell, K(tw)\left(\begin{smallmatrix} s_1 \\ s_2 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle} \xi(\exp X) ds_1 ds_2 d\dot{w}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence on trouve $g \in E\mathcal{S}(N+1, G)$ tel que l'opérateur ${}^{D_0}\pi\Big(g(\bar{x}, t; .)\Big)$ ait pour noyau $F_1(\bar{x}, t; D_0; .; .)$ pour tout D_0 et tout t. La définition de g_1 et f est légèrement différente :

$$g_1 : \mathbb{R}^{N+1} \times G \times \mathfrak{a}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g_1(\bar{x}, t; \exp X; Y^*) = \int_A g\Big(\bar{x}, t; \exp X \exp(y_1Y_1 + y_2Y_2)\Big) e^{-i\langle Y^*, y_1Y_1 + y_2Y_2\rangle} \\ dy_1 dy_2.$$

En particulier, $g_1(\bar{x}, t; .; .) \equiv 0$ pour $t \leq 0$ et

$$\begin{aligned} &g_1(\bar{x},t; \exp X \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2); Y^*) \\ &\quad = e^{i\langle Y^*, r_1 Y_1 + r_2 Y_2\rangle} g_1(\bar{x}, t; \exp X; Y^*). \end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned} f(\bar{x}; \exp X) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1\Big(\bar{x}, e^u; {}^{\exp(-ud_1)}(\exp X); K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})\Big) du\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} g_1\Big(\bar{x}, s; {}^{\exp(-\ln s d_1)}(\exp X); K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})\Big) \frac{1}{s} ds\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_1\Big(\bar{x}, s; {}^{\exp(-\ln s d_1)}(\exp X); K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})\Big) \frac{1}{s} ds\, dr \end{aligned}$$

puisque $g_1(\bar{x}, s; .) \equiv 0$ pour $s \leq 0$. Les calculs montrent que

$$\begin{aligned} &f\Big(\bar{x}; w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)\Big) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_1\Big(\bar{x}, e^u; {}^{\exp(-ud_1)}w; K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})\Big) e^{i\left\langle e^{-u}K(r-u\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}}), \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\rangle} du\, dr \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\Big[{}^{D}\pi\Big(f(\bar{x}; .)\Big)\xi\Big](\exp X) \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_1\Big(\bar{x}, e^u; {}^{\exp(t-u)d_1}w; K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})\Big) \\ &\qquad \cdot e^{i\left\langle e^{-u}K(r-u\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}}), \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot ({}^{D_0}\pi)(w) \cdot e^{-ie^{-t}\left\langle \ell, K(t\omega)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \\ &\qquad \xi(\exp X) du\, dr\, ds_1 ds_2 d\dot{w} \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} g_1\Bigg(\bar{x}, \frac{1}{||a||}; {}^{\exp(t+\ln ||a||)d_1}w; \\ &\qquad K(-\ln ||a|| \omega) \cdot \frac{1}{||a||} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\Bigg) \cdot e^{-i\left\langle e^{-t}K(-t\omega)\ell, \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \\ &\qquad \cdot e^{i\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot {}^{D_0}\pi(w)\xi(\exp X) \cdot \frac{1}{||a||^2} da_1 da_2 ds_1 ds_2 d\dot{w} \end{aligned}$$

en effectuant le changement de paramètres

$$e^{-u}K(r - u\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}}) = e^{-u}K(r - u\omega)(\ell_1 Y_1^* + \ell_2 Y_2^*) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

et à condition de supposer que $\ell_1^2+\ell_2^2=1$.
Donc

$$\begin{aligned}
& \left[{}^{D}\pi\Big(f(\bar{x};.)\Big)\xi\right](\exp X)\\
= \;& \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\cdot e^{-2t}\int_{G/A} g_1\Big(\bar{x},e^t;w;K(t\omega)\cdot e^t\cdot e^{-t}K(-t\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}})\Big)\\
& {}^{D_0}\pi(w)\xi(\exp X)\cdot e^{2t}d\dot{w}\\
& \text{par le théorème d'inversion de Fourier}\\
= \;& \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\cdot e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\int_{G/A}\int_A g\Big(\bar{x},e^t;w\cdot\exp(y_1Y_1+y_2Y_2)\Big)\\
& e^{-i\langle\ell|_{\mathfrak{a}},y_1Y_1+y_2Y_2\rangle}\;{}^{D_0}\pi(w)\xi(\exp X)dy_1dy_2d\dot{w}\\
= \;& \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\cdot e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\;{}^{D_0}\pi\Big(g(\bar{x},e^t;.)\Big)\xi(\exp X)\\
= \;& \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 e^{t\,\mathrm{tr}\,d_1}\int F_1(\bar{x},e^t;D_0;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X')\\
= \;& \int F(\bar{x};D_0,t;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X')\\
= \;& \int F(\bar{x};D;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X').
\end{aligned}$$

Comme dans le 3me cas, $t^\beta F_1\in ES(N+1,\mathbb{R}^{n-1},G/H\times G/H,\ell)$, donc $t^\beta\cdot g\in ES(N+1,G)$. Alors $t^\beta\cdot g_1\in ES(N+1,G/A,\mathfrak{a}^*)$ comme transformée de Fourier partielle de $t^\beta\cdot g$. De plus, en effectuant dans l'expression de f le même changement de variables que celui utilisé dans le calcul de ${}^{D}\pi\Big(f(\bar{x};.)\Big)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& f\Big(\bar{x};w\cdot\exp(r_1Y_1+r_2Y_2)\Big)\\
= \;& \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} g_1\left(\bar{x},\frac{1}{||a||};\;{}^{\exp(\ln||a||d_1)}w;\frac{1}{||a||}K(-\ln||a||\omega)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right)\\
& \cdot\frac{1}{||a||^2}e^{i\left\langle\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}\right\rangle}da_1da_2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $f\Big(\bar{x};w\cdot\exp(r_1Y_1+r_2Y_2)\Big)$ est la transformée de Fourier partielle en $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ de la fonction

$$g_2(\bar{x}; a_1, a_2; w) = \begin{cases} g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{||a||}; {}^{\exp(\ln ||a|| d_1)}w; \frac{1}{||a||}K(-\ln ||a||\omega)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \\ \qquad \cdot \frac{1}{||a||^2} \text{ pour } ||a|| \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad \text{pour } ||a|| = 0. \end{cases}$$

Vu les propriétés de g_1, on peut montrer par un raisonnement analogue à celui du 3me cas que $g_2 \in ES(N+2, G/A)$. Par conséquent $f \in ES(N, G)$.

5.8. Etude du cas 5a) : Posons $D = \exp td_2 \cdot \exp d_0 = \exp td_2 \cdot D_0$ et notons les éléments de G par $g = w \cdot \exp uU \cdot \exp yY$. Posons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}U + \mathbb{R}Y$ et $A = \exp \mathfrak{a} = \exp(\mathbb{R}U + \mathbb{R}Y) = \exp \mathbb{R}U \cdot \exp \mathbb{R}Y$. On montre que

$$\begin{aligned} &\left[{}^{D}\pi\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\xi\right](\exp X) \\ = \quad & e^{t \operatorname{tr} d_2} \int_{G/A}\int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}, {}^{\exp td_2}w \cdot \exp uU \cdot \exp yY)\, {}^{D_0}\pi(w) \\ & \qquad \cdot e^{-iy} e^{iut}\xi(\exp X) du\, dy\, d\dot{w}. \end{aligned}$$

Rappelons que dans la base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$, $\tilde{d}_n = d_2$. Donc

$$D = \exp td_2 \cdot D_0 = \exp td_2 \cdot \exp a_{n-1}\tilde{d}_{n-1} ... \exp a_1 \tilde{d}_1 \mod \mathfrak{D}_\pi$$

avec

$$D_0 = \exp a_{n-1}\tilde{d}_{n-1} ... \exp a_1 \tilde{d}_1 \mod \mathfrak{D}_\pi.$$

Soit $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ et définissons $F_1 \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, G/H \times G/H, \ell)$ par

$$F_1(\bar{x}, t; a_1, ..., a_{n-1}; .; .) = 2\pi \cdot e^{-t \operatorname{tr} d_2} F(\bar{x}; a_1, ..., a_{n-1}, t; .; .).$$

Par hypothèse de récurrence il existe $g \in ES(N+1, G)$ tel que

$$\begin{aligned} &\left[{}^{D_0}\pi\Big(g(\bar{x}, t; .)\Big)\xi\right](\exp X) \\ = &\int F_1(\bar{x}, t; D_0; \exp X; \exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp} X'). \end{aligned}$$

Définissons

$$g_1(\bar{x}, t; w) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\bar{x}, t; w \cdot \exp rU \cdot \exp r'Y)e^{-ir'} dr\, dr'.$$

On a
$$g_1(\bar{x},t;w\cdot\exp uU\exp yY)=e^{iy}g_1(\bar{x},t;w)$$
et
$$g_1\Big(\bar{x},t;{}^{\exp(-sd_2)}(w\cdot\exp uU\exp yY)\Big)=e^{iy}\cdot e^{-isu}g_1(\bar{x},t;{}^{\exp(-sd_2)}w).$$

Soit alors $a\in C_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{a}(-1)=1$ et posons, dans la base fixe de $\mathfrak{g}$,
$$f(\bar{x};w\exp uU\exp yY)=\int g_1(\bar{x},s;{}^{\exp(-sd_2)}w)e^{-ius}ds\cdot a(y).$$

En décomposant
$${}^{\exp td_2}w=w_t\cdot\exp u_tU\cdot\exp y_tY$$
dans la base en question on trouve
$$\begin{aligned}
&\Big[{}^{D}\pi\Big(f(\bar{x},.)\Big)\xi\Big](\exp X)\\
=\;& e^{t\,\mathrm{tr}\,d_2}\int_{G/A}\int_{\mathbb{R}^2}f(\bar{x};w_t\cdot\exp(u+u_t)U\exp(y+y_t)Y)\,{}^{D_0}\pi(w)\\
&\qquad\cdot e^{-iy}\cdot e^{iut}\xi(\exp X)du\,dy\,d\dot{w}\\
=\;& e^{t\,\mathrm{tr}\,d_2}\int_{G/A}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}g_1(\bar{x},s;{}^{\exp(t-s)d_2}w)e^{-iy_t}\cdot e^{-ius}ds\\
&\qquad a(y+y_t)\,{}^{D_0}\pi(w)\cdot e^{-iy}\cdot e^{iut}\xi(\exp X)du\,dy\,d\dot{w}\\
=\;& e^{t\,\mathrm{tr}\,d_2}\hat{a}(-1)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{G/A}g_1(\bar{x},t;w)\,{}^{D_0}\pi(w)\xi(\exp X)d\dot{w}\\
&\qquad\text{(théorème d'inversion de Fourier)}\\
=\;& e^{t\,\mathrm{tr}\,d_2}\cdot\frac{1}{2\pi}\,{}^{D_0}\pi\Big(g(\bar{x},t;.)\Big)\xi(\exp X)\\
=\;& e^{t\,\mathrm{tr}\,d_2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int F_1(\bar{x},t;D_0;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X')\\
=\;& \int F(\bar{x};D_0,t;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X')\\
=\;& \int F(\bar{x};D;\exp X;\exp X')\xi(\exp X')d(\dot{\exp}\,X').
\end{aligned}$$

Vu les propriétés de F, on a bien $e^{\mu t}\cdot F_1\in ES(N+1,\mathbb{R}^{n-1},G/H\times G/H,\ell)$ pour tout $\mu\in\mathbb{R}$. Par hypothèse de récurrence, $e^{t\mu}\cdot g\in ES(N+1,G)$.

Donc $e^{t\mu} \cdot g_1 \in ES(N+1, G/A)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. La fonction g_2 définie par

$$g_2(\bar{x}, s, y; w) = g_1(\bar{x}, s; {}^{\exp(-sd_2)}w) \cdot a(y)$$

est une fonction de $ES(N+2, G/A)$. Donc $f \in ES(N, G)$ par transformée de Fourier partielle de g_2. En effet, un raisonnement analogue à celui fait dans le 3me cas permet de décomposer ${}^{\exp(-sd_2)}w$ dans la base utilisée, les coordonnées le long des vecteurs de base B_i étant inchangées, les coordonnées le long des vecteurs de base C_i étant des fonctions à croissance exponentielle en s et en les coordonnées le long des B_i, à croissance polynomiale en les coordonnées de w le long des C_i. On utilise alors le fait que $e^{\beta s} \cdot g_1(\bar{x}, s; .) \in ES(N+1, G/A)$.

5.9. Etude du cas 5b) : a) Soient $\Delta, \tilde{\Delta}$ et Δ_1 les homomorphismes de G dans $\mathbb{R}_+^*$ intervenant dans la définition des mesures semi-invariantes (voir 1.6.) et vérifiant

$$\begin{aligned} &\Delta = \tilde{\Delta} \cdot \Delta_1 \\ &\Delta(n) = \tilde{\Delta}(n) = \Delta_1(n) \quad \text{pour tout } n \in N. \end{aligned}$$

Posons

$$\pi = \mathrm{ind}_H^G \chi_\ell, \ \pi_1 = \mathrm{ind}_H^{G_1} \chi_\ell, \ \tilde{\pi} = \mathrm{ind}_{G_1}^G \pi_1 = \mathrm{ind}_{G_1}^G (\mathrm{ind}_H^{G_1} \chi_\ell).$$

D'après (1.6.), π et $\tilde{\pi}$ sont unitairement équivalents grâce à

$$\begin{array}{rcl} \nu_1 : \mathcal{H}_\pi & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\tilde{\pi}} \\ \xi & \longmapsto & \tilde{\xi} \end{array}$$

où

$$\tilde{\xi}(g)(g_1) = \Delta_1(g)^{1/2} \xi(g\, g_1) \quad \text{pour presque tous les} \quad \begin{array}{l} g \in G \\ g_1 \in G_1. \end{array}$$

b) Puisque $D = D_0 \cdot \exp a \,\mathrm{ad}\, X$, $D = D_0 \bmod \mathfrak{D}_\pi$ et il suffit de travailler avec D_0. De plus, ν_1 est également une équivalence unitaire entre ${}^{D_0}\pi$ et ${}^{D_0}\tilde{\pi}$, c'est-à-dire

$${}^{D_0}\tilde{\pi} \circ \nu_1 = \nu_1 \circ {}^{D_0}\pi$$

et, pour $\tilde{\xi}=\nu_1\xi$,

$$\begin{aligned}
&({}^{D_0}\tilde{\pi}(x)\tilde{\xi})(g)(g_1)\\
=\ &({}^{D_0}\tilde{\pi}(x)\circ\nu_1\xi)(g)(g_1)\\
=\ &(\nu_1\circ{}^{D_0}\pi(x)\xi)(g)(g_1)\\
=\ &\Delta_1(g)^{1/2}({}^{D_0}\pi(x)\xi)(g\,g_1).
\end{aligned}$$

Posons alors $\pi_{D_0}=\operatorname{ind}_{G_1}^{G}({}^{D_0}\pi_1)$. Les représentations ${}^{D_0}\tilde{\pi}$ et π_{D_0} sont unitairement équivalentes grâce à

$$\nu_2:\mathcal{H}_{D_0\tilde{\pi}}\longrightarrow\mathcal{H}_{\pi_{D_0}}$$

avec

$$(\nu_2\tilde{\xi})(g)(g_1)=e^{\alpha(d_0)/2}\tilde{\xi}({}^{D_0^{-1}}g)(g_1)$$

pour presque tous les $g\in G$, $g_1\in G_1$.

c) Etudions d'abord le cas $\alpha\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}\not\equiv 0$. Il existe $T\in\mathfrak{g}_0$ (sous-algèbre nilpotente) tel que $[T,U]=U$. L'étude de la mesure semi-invariante sur G/G_1 montre que $\tilde{\Delta}(\exp tT\cdot\exp xX\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp yY)=e^{-t}$. On vérifie que

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_0}\big(f(\bar{x};.)\big)\tilde{\xi}\Big](\exp sX)\\
=\ &\int f(\bar{x},\exp tT\cdot\exp xX\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp yY)\,{}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot[\exp(-tT)\\
&\exp(-sX)\exp tT\exp(e^tsX)]\cdot[\exp(-e^ts+x)X\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp yY\\
&\exp(e^ts-x)X])\tilde{\xi}(\exp(e^ts-x)X)e^{t/2}dt\,dx\,d\dot{w}\,du\,dy\\
=\ &\int f\big(\bar{x},\exp tT\cdot\exp(e^ts-\mu)X\cdot\exp\mu X\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp yY\\
&\cdot\exp(-\mu X)\big)\,{}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot[\exp(-tT)\exp(-sX)\exp tT\\
&\cdot\exp(e^tsX)]\cdot[w\cdot\exp uU\cdot\exp yY])\tilde{\xi}(\exp\mu X)e^{t/2}dt\,d\mu\,d\dot{w}\,du\,dy
\end{aligned}$$

en posant $\mu=e^ts-x$. En multipliant les éléments de G_2 à gauche par $\exp(-e^tsX)\exp(-tT)\exp sX\exp tT$ on trouve

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_0}\big(f(\bar{x},.)\big)\tilde{\xi}\Big](\exp sX)\\
=&\int f\big(\bar{x},\exp tT\cdot\exp(e^ts-\mu)X\exp\mu X\exp(-e^tsX)\exp(-tT)\exp sX\\
&\exp tT\cdot w\cdot\exp uU\exp yY\exp(-\mu X)\big)\,{}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot w\exp uU\exp yY)\\
&\tilde{\xi}(\exp\mu X)e^{t/2}dt\,d\mu\,d\dot{w}\,du\,dy.
\end{aligned}$$

Grâce à la définition

$$Q(\lambda,\mu,s)=\exp(-\mu X)\exp(-\lambda T)\exp sX\exp\lambda T\exp(\mu-e^{\lambda}s)X\in G_2\cap N \quad \text{pour } \lambda,\mu,s\in\mathbb{R}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_0}\big(f(\bar{x},.)\big)\tilde{\xi}\Big](\exp sX)\\
=\ &\int f(\bar{x},\exp tT\exp(e^ts-\mu)X\cdot Q(t,-\mu+e^ts,s)\cdot {}^{\exp\mu X}w\cdot\\
&\exp uU\exp yY)\ {}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot w)e^{-iy}e^{i\mu u}\tilde{\xi}(\exp\mu X)e^{t/2}\\
&dt\,d\mu\,d\dot{w}\,du\,dy.
\end{aligned}$$

Rappelons que $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi\equiv\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi$ et écrivons

$$\begin{aligned}
D\ &=\exp a_n\tilde{d}_n\ldots\exp a_1\tilde{d}_1 && \operatorname{mod}\mathfrak{D}_\pi\\
&=D_0 && \operatorname{mod}\mathfrak{D}_\pi=\operatorname{mod}(\mathfrak{D}_0)_\pi.
\end{aligned}$$

Soit $F\in ES(N,\mathbb{R}^n,G/H\times G/H,\ell)$ et définissons $F_1\in ES(N+2,\mathbb{R}^n,G_1/H\times G_1/H,\ell_1)$ avec $\ell_1=\ell\big|_{\mathfrak{g}_1}$ par

$$\begin{aligned}
&F_1(\bar{x},s,\mu;D_0;w,w')\\
=\ &2\pi e^{\alpha(d_0)}F(\bar{x};D_0;\ {}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\cdot w;\ {}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w').
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $g\in ES(N+2,G_1)$ tel que

$$\begin{aligned}
&\Big[{}^{D_0}\pi_1\big(g(\bar{x},s,\mu;.)\big)\xi_1\Big](w)\\
=\ &\int_{G_1/H}F_1(\bar{x},s,\mu;D_0;w;w')\xi_1(w')d\dot{w}'
\end{aligned}$$

pour tout $\xi_1\in\mathcal{H}_{\pi_1}$. Définissons g_1 par

$$g_1(\bar{x},s,\mu;w)=\int g(\bar{x},s,\mu;w\exp uU\exp yY)e^{-iy}du\,dy.$$

Soit $k\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{k}(-1)=1$. La fonction $f\in ES(N,G)$ est alors définie par

$$\begin{aligned}
&f(\bar{x},\exp\lambda T\exp\mu X\cdot w\cdot\exp uU\exp yY)\\
=\ &e^{-\lambda/2}\Big\{\int g_1(\bar{x},e^{-\lambda}(\mu+v),v;\exp\lambda T\cdot[{}^{\exp(-vX)}Q(\lambda,\mu,e^{-\lambda}(v+\mu)]^{-1}\\
&\cdot{}^{\exp(-vX)}w)e^{-iuv}dv\Big\}k(y).
\end{aligned}$$

On pose $Q(t,-\mu+e^t s,s)\cdot({}^{\exp\mu X}w) = w_R\cdot\exp r_1U\exp r_2Y \in G_2$ et on vérifie que

$$
\begin{aligned}
& \Big[\pi_{D_0}\big(f(\bar{x},.)\big)\tilde{\xi}\Big](\exp sX) \\
= \; & \hat{k}(-1)\int\!\!\int e^{ir_2}\cdot e^{-i\mu r_1}g_1\Big(\bar{x},e^{-t}(e^t s-\mu+v),v;\exp tT\cdot \\
& \Big[{}^{\exp(-vX)}Q\big(t,e^t s-\mu,e^{-t}(v+e^t s-\mu)\big)\Big]^{-1}\cdot {}^{\exp(-vX)}w_R\Big) \\
& {}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot w)e^{-iuv}\cdot e^{i\mu u}\tilde{\xi}(\exp\mu X)dv\,dt\,d\mu\,d\dot{w}\,du \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\int e^{ir_2}e^{-i\mu r_1}g_1(\bar{x},s,\mu;\exp tT[{}^{\exp(-\mu X)}Q(t,e^{ts}-\mu,s)]^{-1} \\
& \quad {}^{\exp(-\mu X)}w_R)\,{}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot w)\tilde{\xi}(\exp\mu X)dt\,d\mu\,d\dot{w} \\
& \qquad\qquad\qquad \text{(théorème d'inversion de Fourier)} \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int e^{ir_2}e^{-i\mu r_1}g(\bar{x},s,\mu;\exp tT\cdot w\cdot\exp(u-r_1)U\cdot \\
& \quad \exp(y-r_2+\mu r_1)Y)e^{-iy}\,{}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot w)\tilde{\xi}(\exp\mu X) \\
& \qquad\qquad dt\,d\mu\,d\dot{w}\,du\,dy \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int g(\bar{x},s,\mu;\exp tT\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp yY)e^{-iy}\,{}^{D_0}\pi_1(\exp tT\cdot w) \\
& \quad \tilde{\xi}(\exp\mu X)dt\,d\mu\,d\dot{w}\,du\,dy \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\int {}^{D_0}\pi_1\big(g(\bar{x},s,\mu;.)\big)\tilde{\xi}(\exp\mu X)d\mu.
\end{aligned}
$$

Puisque ${}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\in N$ et que $\Delta_1\big({}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\big)=1$ par conséquent,

$$
\begin{aligned}
& e^{\alpha(d_0)/2}\Big({}^{D_0}\pi\big(f(\bar{x},.)\big)\xi\Big)\Big(\big({}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\big)\cdot w_1\Big) \\
= \; & e^{\alpha(d_0)/2}\Big(\nu_1\circ{}^{D_0}\pi\big(f(\bar{x},.)\big)\xi\Big)\Big(\big({}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\big)(w_1)\Big) \\
= \; & \Big(\Big[\nu_2\circ\nu_1\circ{}^{D_0}\pi\big(f(\bar{x},.)\big)\Big]\xi\Big)(\exp sX)(w_1) \\
= \; & \Big(\Big[\nu_2\circ{}^{D_0}\tilde{\pi}\big(f(\bar{x},.)\big)\circ\nu_1\Big]\xi\Big)(\exp sX)(w_1) \\
= \; & \Big(\Big[\pi_{D_0}\big(f(\bar{x},.)\big)\circ\nu_2\circ\nu_1\Big]\xi\Big)(\exp sX)(w_1) \\
= \; & \Big(\pi_{D_0}\big(f(\bar{x},.)\big)(\nu_2\tilde{\xi})\Big)(\exp sX)(w_1) \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\int {}^{D_0}\pi_1\big(g(\bar{x},s,\mu;.)\big)(\nu_2\tilde{\xi})(\exp\mu X)d\mu(w_1) \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{G_1/H}F_1(\bar{x},s,\mu;D_0;w_1;w')(\nu_2\tilde{\xi})(\exp\mu X)(w')d\dot{w}'d\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\alpha(d_0)/2}\cdot\frac{1}{2\pi}\iint_{G_1/H} F_1(\bar{x},s,\mu;D_0;w_1;w')\tilde{\xi}\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\Big)(w') \\
&\qquad\qquad d\dot{w}'d\mu \\
&= e^{\alpha(d_0)/2}\cdot e^{\alpha(d_0)}\iint_{G_1/H} F(\bar{x};D_0;\ {}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\cdot w_1;\ {}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w') \\
&\qquad\qquad \xi\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w'\Big)d\dot{w}'d\mu \\
&= e^{\alpha(d_0)/2}\cdot e^{\alpha(d_0)}\iint_{G_1/H} F(\bar{x};D_0;.;\ {}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w') \\
&\qquad\qquad \xi\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w'\Big)d\dot{w}'d\mu\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp sX)\cdot w_1\Big).
\end{aligned}
$$

La relation précédente étant vraie pour presque tous les s, w_1, on a

$$
\begin{aligned}
&\Big({}^{D_0}\pi\Big(f(\bar{x},.)\Big)\xi\Big)(g) \\
&= e^{\alpha(d_0)}\iint_{G_1/H} F\Big(\bar{x};D_0;g;\ {}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w'\Big)\xi\Big({}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X)\cdot w'\Big) \\
&\qquad\qquad d\dot{w}'d\mu.
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$
\begin{aligned}
{}^{D_0^{-1}}(\exp\mu X) &= \exp(\mu\, e^{\alpha(d_0)}X) \qquad \bmod G_2\cap N \\
&= \exp(\mu\, e^{\alpha(d_0)}X)\cdot g(\mu,D_0)
\end{aligned}
$$

où $g(\mu,D_0)\in G_2\cap N\subset G_1\cap N$. En particulier

$$\Delta_1(g(\mu,D_0))=1$$

quels que soient μ, D_0. D'où

$$
\begin{aligned}
&\Big({}^{D_0}\pi\Big(f(\bar{x},.)\Big)\xi\Big)(g) \\
&= e^{\alpha(d_0)}\iint_{G_1/H} F(\bar{x};D_0;g;\exp(\mu\, e^{\alpha(d_0)}X)\cdot g(\mu,D_0)\cdot w') \\
&\qquad\qquad \xi(\exp(\mu\, e^{\alpha(d_0)}X)\cdot g(\mu,D_0)\cdot w')d\dot{w}'d\mu \\
&= \iint_{G_1/H} F(\bar{x};D_0;g;\exp\mu X\cdot g(e^{-\alpha(d_0)}\mu,D_0)\cdot w') \\
&\qquad\qquad \xi(\exp\mu X\cdot g(e^{-\alpha(d_0)}\mu,D_0)\cdot w')d\dot{w}'d\mu \\
&= \iint_{G_1/H} F(\bar{x};D_0;g;\exp\mu X\cdot w')\xi(\exp\mu X\cdot w')d\dot{w}'d\mu \\
&= \int_{G/H} F(\bar{x};D_0;g;g')\xi(g')d\dot{g}'
\end{aligned}
$$

puisque $\Delta_1\Big(g(e^{-\alpha(d_0)}\mu, D_0)\Big) = 1$. Pour les justifications, remarquons que

$$Q(\lambda,\mu,s) = \exp(-\mu X)[\exp(-\lambda T)\exp sX \exp \lambda T]\exp(\mu - e^{\lambda}s)X$$

est un élément de $G_2 \cap N$ dont les coordonnées dans toute base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{n}$ sont des fonctions C^∞, à croissance bornée exponentiellement en λ, à croissance polynomiale en μ et s, de même que les dérivées de ces coordonnées ([Lep. Lud.], p. 69). Il en est de même des coordonnées de $[{}^{\exp(-vX)}Q(\lambda,\mu,e^{-\lambda}(v+\mu))]^{-1}$ et de leurs dérivées. D'autre part, l'étude de ${}^{\exp(-vX)}w$ se fait de manière analogue à l'étude de ${}^{\exp(\ln s d_1)}w$ dans le troisième cas. Notons alors que par hypothèse $g \in E\mathcal{S}(N+2,G)$, donc $g_1 \in E\mathcal{S}\big(N+2, G/\exp(\mathbb{R}U+\mathbb{R}Y)\big)$. Par conséquent la fonction

$$\begin{aligned}&(\bar{x};\exp\lambda T \exp \mu X \cdot w \cdot \exp vU)\\ &\longmapsto e^{-\lambda/2} g_1\Bigg(\bar{x}, e^{-\lambda}(\mu+v), v; \exp\lambda T \cdot \Big[{}^{\exp(-vX)}Q(\lambda,\mu,\\ &\qquad e^{-\lambda}(v+\mu)\big)\Big]^{-1}\,{}^{\exp(-vX)}w\Bigg)\end{aligned}$$

appartient à $E\mathcal{S}(N, G/\exp\mathbb{R}Y)$. On en déduit que $f \in E\mathcal{S}(N,G)$.

b) Le cas $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \equiv 0$ est une version simplifiée de ce qui précède. Dans ce cas, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$ et les éléments de G se décomposent en $\exp xX \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY$. Pour tout $f \in E\mathcal{S}(N,G)$, on trouve

$$\begin{aligned}&\Big[\pi_{D_0}\big(f(\bar{x},.)\big)\tilde{\xi}\Big](\exp sX)\\ &= \int f(\bar{x},\exp xX \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY)\,{}^{D_0}\pi_1(\exp(x-s)X \cdot w \cdot\\ &\qquad \exp uU \cdot \exp yY \exp(s-x)X)\tilde{\xi}(\exp(s-x)X)dx\,d\dot{w}\,du\,dy\\ &= \int f(\bar{x},\exp(s-\mu)X \cdot {}^{\exp\mu X}w \cdot \exp uU \cdot \exp yY)\,{}^{D_0}\pi_1(w)\cdot e^{-iy}\cdot\\ &\qquad e^{iu\mu}\tilde{\xi}(\exp\mu X)d\mu\,d\dot{w}\,du\,dy.\end{aligned}$$

La définition de F_1 est analogue à celle du cas $\alpha\Big|_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \not\equiv 0$. Les fonctions g et g_1 sont obtenues comme précédemment. La fonction f est donnée par

$$\begin{aligned}&f(\bar{x},\exp\mu X \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY)\\ &= \int g_1(\bar{x},\mu+v,v;\,{}^{\exp(-vX)}w)e^{-iuv}dv \cdot k(y).\end{aligned}$$

On montre que

$$[\pi_{D_0}(f)\tilde{\xi}](\exp sX) = \frac{1}{2\pi}\int {}^{D_0}\pi_1\Big(g(\bar{x},s,\mu;.)\Big)\tilde{\xi}(\exp \mu X)d\mu$$

et on termine comme précédemment.
Pour faire les détails des justifications on peut dans les deux cas utiliser les résultats ([Lep. Lud.], p. 69).

5.10. Etude du 6me cas : C'est un cas particulier des cas 5a) et 5b).

5.11. Etude du cas 7a) : Posons

$$D = \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0 = \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot D_0'$$

avec $D_0' \in \exp(\mathbb{R}d_1 + \mathfrak{d}_0) = \mathfrak{D}_1 = \exp \mathfrak{d}_1$ et notons les éléments de G par $g = w \cdot \exp uU \cdot \exp vV \cdot \exp yY$. On montre que

$$\begin{aligned} & \Big[{}^{D}\pi\Big(f(\bar{x},.)\Big)\xi\Big](\exp X) \\ = \quad & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \cdot \operatorname{tr} d_3} \int f(\bar{x}, {}^{\exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2} w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \\ & {}^{D_0'}\pi(w) e^{-iy} e^{ir_2 u} e^{ir_3 v}\xi(\exp X) d\dot{w}\, du\, dv\, dy. \end{aligned}$$

Rappelons que dans la base coexponentielle à $\mathfrak{d}_\pi$ dans $\mathfrak{d}$, $\tilde{d}_{n-1} = d_2$, $\tilde{d}_n = d_3$. Donc

$$\begin{aligned} D \quad &= \quad \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot \exp a_{n-2}\tilde{d}_{n-2} \ldots \exp a_1 \tilde{d}_1 \mod \mathfrak{D}_\pi \\ &= \quad \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot D_0' \mod \mathfrak{D}_\pi. \end{aligned}$$

Soit $F \in ES(N,\mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ et définissons $F_1 \in ES(N+2, \mathbb{R}^{n-2}, G/H \times G/H, \ell)$ par

$$\begin{aligned} & F_1(\bar{x}, r_2, r_3; a_1, \ldots, a_{n-2}; .; .) \\ = \quad & (2\pi)^2 e^{-r_2 \operatorname{tr} d_2} e^{-r_3 \operatorname{tr} d_3} F(\bar{x}; a_1, \ldots, a_{n-2}, r_2, r_3; .; .). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il existe $g \in ES(N+2, G)$ tel que

$$\begin{aligned} & \Big[{}^{D_0'}\pi\Big(g(\bar{x}, r_2, r_3; .)\Big)\xi\Big](\exp X) \\ = \quad & \int_{G/H} F_1(\bar{x}, r_2, r_3; D_0'; \exp X; \exp X')\xi(\exp X') d(\exp X'). \end{aligned}$$

Définissons

$$g_1(\bar{x},s_2,s_3;\exp X) = \int g(\bar{x},s_2,s_3;\exp X\cdot\exp u'U\exp v'V\exp y'Y)\, e^{-iy'}du'dv'dy'.$$

On a

$$g_1(\bar{x},s_2,s_3;\exp xX\exp uU\exp vV\exp yY)=e^{iy}g_1(\bar{x},s_2,s_3;\exp X).$$

Rappelons que la base de $\mathfrak{n}$ est choisie telle que $C_m=Y$, $C_{m-1}=V$, $C_{m-2}=U$. Soit $a\in C_c^\infty(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{a}(-1)=1$. Posons

$$\begin{aligned}&f(\bar{x};w\cdot\exp uU\exp vV\exp yY)\\ =\ &\int g_1(\bar{x},s_2,s_3;{}^{\exp(-s_2d_2)\exp(-s_3d_3)}w)e^{-is_2u}\cdot e^{-is_3v}ds_2ds_3\cdot a(y).\end{aligned}$$

Décomposons

$${}^{\exp r_3d_3\cdot\exp r_2d_2}w=w'\cdot\exp u'U\cdot\exp v'V\cdot\exp y'Y.$$

On trouve

$$\begin{aligned}&\left[{}^{D}\pi\big(f(\bar{x},.)\big)\xi\right](\exp X)\\
=\ &e^{r_2\operatorname{tr}d_2}\cdot e^{r_3\operatorname{tr}d_3}\cdot\int f(\bar{x};w'\cdot\exp(u+u')U\exp(v+v')V\exp(y+y')Y)\\
&\quad{}^{D_0'}\pi(w)e^{-iy}e^{ir_2u}e^{ir_3v}\xi(\exp X)d\dot{w}\,du\,dv\,dy\\
=\ &e^{r_2\operatorname{tr}d_2}\cdot e^{r_3\operatorname{tr}d_3}\int\int g_1\Big(\bar{x},s_2,s_3;{}^{\exp(-s_2d_2)\exp(-s_3d_3)\exp r_3d_3\exp r_2d_2}w\\
&\quad\cdot{}^{\exp(-s_2d_2)\exp(-s_3d_3)}\big(\exp(-u'U)\exp(-v'V)\exp(-y'Y)\big)\Big)\\
&\quad e^{-is_2(u+u')}e^{-is_3(v+v')}ds_2ds_3\,a(y+y')\,{}^{D_0'}\pi(w)\\
&\quad e^{-iy}e^{ir_2u}e^{ir_3v}\xi(\exp X)d\dot{w}\,du\,dv\,dy\\
=\ &e^{r_2\operatorname{tr}d_2}e^{r_3\operatorname{tr}d_3}\int\int g_1(\bar{x},s_2,s_3;{}^{\exp(-s_2d_2)\exp(-s_3d_3)\exp r_3d_3\exp r_2d_2}w)\\
&\quad e^{-iy'}\cdot e^{-is_2u}\cdot e^{-is_3v}ds_2ds_3\,a(y+y')\,{}^{D_0'}\pi(w)e^{-iy}\\
&\quad e^{ir_2u}\cdot e^{ir_3v}\xi(\exp X)d\dot{w}\,du\,dv\,dy\\
=\ &\hat{a}(-1)\cdot e^{r_2\operatorname{tr}d_2}e^{r_3\operatorname{tr}d_3}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\int g_1(\bar{x},r_2,r_3;w)\,{}^{D_0'}\pi(w)\xi(\exp X)d\dot{w}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \cdot \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \, {}^{D_0'}\pi\Big(g(\bar{x}, r_2, r_3; .)\Big)\xi(\exp X) \\
&= e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \cdot \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int_{G/H} F_1(\bar{x}, r_2, r_3; D_0'; \exp X; \exp X') \\
&\qquad\qquad \xi(\exp X') d(\dot{\exp} X') \\
&= \int_{G/H} F(\bar{x}; D_0', r_2, r_3; \exp X; \exp X')\xi(\exp X') d(\dot{\exp} X') \\
&= \int_{G/H} F(\bar{x}; D; \exp X; \exp X')\xi(\exp X') d(\dot{\exp} X').
\end{aligned}
$$

Les justifications sont analogues à celles du cas 5a).

5.12. Etude du cas 7b) : Il s'agit de l'équivalent complexe du cas 5b) où $\alpha\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \equiv 0$. Rappelons que $\mathfrak{d}_1 = \operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta$, $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Ker}\alpha\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}} \cap \operatorname{Ker}\beta\Big|_{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$, $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$. Les éléments de G se décomposent

$$
\begin{aligned}
g &= \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \mod G_1 \\
&= \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \mod G_1.
\end{aligned}
$$

Les éléments de $\mathfrak{D}$ s'écrivent $D = D_1 \cdot \exp s_2 \operatorname{ad} X_2 \cdot \exp s_3 \operatorname{ad} X_3$ avec $D_1 \in \mathfrak{D}_1 = \exp \mathfrak{d}_1$. Donc $D = D_1 \operatorname{mod} \mathfrak{D}_\pi$ et il suffit de travailler avec D_1. Comme en (5.9.) définissons

$$
\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell, \quad \pi_1 = \operatorname{ind}_H^{G_1} \chi_\ell, \quad \tilde{\pi} = \operatorname{ind}_{G_1}^G \pi_1 = \operatorname{ind}_{G_1}^G (\operatorname{ind}_H^{G_1} \chi_\ell).
$$

L'équivalence unitaire ν_1 entre π et $\tilde{\pi}$, respectivement ${}^{D_1}\pi$ et ${}^{D_1}\tilde{\pi}$, est obtenue comme dans le cas 5b). Posons $\pi_{D_1} = \operatorname{ind}_{G_1}^G({}^{D_1}\pi_1)$. Alors les représentations ${}^{D_1}\tilde{\pi}$ et π_{D_1} sont unitairement équivalentes grâce à

$$
\nu_2 : \mathcal{H}_{D_1\tilde{\pi}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_{D_1}}
$$

avec

$$
(\nu_2\tilde{\xi})(g)(g_1) = e^{\varphi(d_1)}\tilde{\xi}({}^{D_1^{-1}}g)(g_1).
$$

Pour $f \in ES(N, G)$, évaluons

$$
\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\tilde{\xi}\Big]\Big(\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)\Big) \\
&= \int f(\bar{x}, \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}(\exp(t_2X_2+t_3X_3)\cdot w\cdot \exp uU \exp vV \exp yY)\tilde{\xi}\Big] \\
&\quad \Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)dt_2dt_3d\dot{w}\,du\,du\,dy \\
= &\int f(\bar{x},\exp(t_2X_2+t_3X_3)w \exp uU \exp vV \exp yY)\tilde{\xi}(\exp(-yY) \\
&\quad \exp(-vV)\exp(-uU)w^{-1}\exp\left[(X_2\ X_3)\left(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right)\right]\cdot \\
&\quad \left[\exp\left(-(X_2\ X_3)\cdot\left(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right)\right)\exp(-t_2X_2-t_3X_3)\right. \\
&\qquad \left.\exp(s_2X_2+s_3X_3)\right]dt_2dt_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy
\end{aligned}
$$

avec $\exp\left[-(X_2\ X_3)\left(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right)\right]\exp(-t_2X_2-t_3X_3)\cdot\exp(s_2X_2+s_3X_3)\in G_1$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x},.)\Big)\tilde{\xi}\Big](\exp(s_2X_2+s_3X_3)) \\
= &\int f\left(\bar{x},\exp(s_2X_2+s_3X_3)\cdot w\cdot\exp\left(-(X_2\ X_3)\left(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right)\right)\right. \\
&\quad \exp uU\exp vV\exp(y+(s_2-t_2)u+(s_3-t_3)v)Y\Big)\,{}^{D_1}\pi_1(w\cdot\exp uU \\
&\quad \exp vV\exp yY)\tilde{\xi}\left(\exp\left((X_2\ X_3)\left(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right)\right)\right) \\
&\qquad\qquad dt_2dt_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy \\
= &\int f\left(\bar{x},\exp\left((X_2\ X_3)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right)\exp(-b_2X_2-b_3X_3)^{\exp(b_2X_2+b_3X_3)}w\right. \\
&\quad \exp uU\exp vV\exp yY\Big)\,{}^{D_1}\pi_1(w)e^{-iy}e^{i(b_2u+b_3v)}\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big) \\
&\qquad\qquad db_2db_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy
\end{aligned}
$$

en effectuant le changement de variables

$$
\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}.
$$

Rappelons que $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi\equiv\mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi$ et écrivons

$$
\begin{aligned}
D &= \exp a_n\tilde{d}_n\ldots\exp a_1\tilde{d}_1 && \operatorname{mod}\mathfrak{D}_\pi \\
&= D_1 && \operatorname{mod}\mathfrak{D}_\pi=\operatorname{mod}(\mathfrak{D}_1)_\pi.
\end{aligned}
$$

Soit $F \in E\mathcal{S}(N,\mathbb{R}^n,G/H \times G/H,\ell)$ et définissons $F_1 \in E\mathcal{S}(N+4, \mathbb{R}^n, G_1/H \times G_1/H, \ell_1)$ avec $\ell_1 = \ell\Big|_{\mathfrak{g}_1}$ par

$$\begin{aligned}&F_1(\bar{x}, s_2, s_3, \mu_2, \mu_3; D_1; w, w')\\ = \;& (2\pi)^2 e^{2\varphi(d_1)} F(\bar{x}; D_1;\; {}^{D_1^{-1}}(\exp(s_2X_2+s_3X_3))\cdot w;\\ & \qquad {}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(\mu_2X_2+\mu_3X_3))\cdot w'\Big).\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il existe $g \in E\mathcal{S}(N+4, G_1)$ tel que

$$\begin{aligned}&\Big[{}^{D_1}\pi_1\Big(g(\bar{x}, s_2, s_3, \mu_2, \mu_3; .)\Big)\xi_1\Big](w)\\ = \;& \int_{G_1/H} F_1(\bar{x}, s_2, s_3, \mu_2, \mu_3; D_1; w; w')\xi_1(w')d\dot{w}'.\end{aligned}$$

Définissons g_1 par

$$\begin{aligned}g_1(\bar{x}, x_2, x_3, x_2', x_3'; w_1) = \int & g(\bar{x}, x_2, x_3, x_2', x_3'; w_1 \exp uU \exp vV \exp yY)\\ & e^{-iy} du\, dv\, dy\end{aligned}$$

pour $w_1 \in G_1$ quelconque. Soit $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{k}(-1) = 1$. La fonction $f \in E\mathcal{S}(N, G)$ est alors définie par

$$\begin{aligned}&f(\bar{x}, \exp(t_2X_2+t_3X_3)\cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY)\\ = \;& \Bigg(\int g_1\Bigg(\bar{x}, t_2+v_2, t_3+v_3, v_2, v_3; \Bigg\{{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}\Bigg[\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\\ & \begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}\Bigg)\exp\Bigg((X_2\ X_3)\Bigg(\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\\ & \begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}^{-1}{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}w\Bigg)\cdot e^{-i(uv_2+vv_3)}dv_2dv_3\Bigg)\cdot k(y).\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\tilde{\xi}\Big]\Big(\exp s_2X_2+s_3X_3)\Big)\\ = \;& \int f\Bigg(\bar{x}, \exp\Bigg((X_2\ X_3)\Bigg(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\cdot\Bigg[\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\\ & \Bigg(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\cdot\exp\Bigg((X_2\ X_3)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Bigg)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \exp(-b_2X_2 - b_3X_3) \cdot {}^{\exp(b_2X_2+b_3X_3)}w\Big] \\
&\cdot \exp uU \exp vV \exp yY\Big)\, {}^{D_1}\pi_1(w) e^{-iy} e^{i(b_2u+b_3v)} \\
&\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big) db_2 db_3 d\dot{w}\, du\, dv\, dy \\
= \;& \int\Bigg(\int g_1\Bigg(\bar{x}, -b_2+s_2+v_2, -b_3+s_3+v_3, v_2, v_3; \\
&\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\Bigg(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg) \\
&\qquad \exp(s_2X_2+s_3X_3)\cdot w \cdot \\
&\exp(-b_2X_2 - b_3X_3)\exp(v_2X_2+v_3X_3)\Bigg) e^{-iuv_2} e^{-ivv_3} dv_2 dv_3\Bigg) \\
&k(y)\, {}^{D_1}\pi_1(w) e^{-iy} e^{i(b_2u+b_3v)} \\
&\qquad \tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big) db_2 db_3 d\dot{w}\, du\, dv\, dy \\
= \;& \hat{k}(-1)\cdot\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int g_1(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; w)\, {}^{D_1}\pi_1(w)\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big) \\
&\qquad db_2 db_3 d\dot{w} \\
= \;& \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int {}^{D_1}\pi_1\Big(g(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; .)\Big)\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big) db_2 db_3.
\end{aligned}
$$

Puisque ${}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big) \in N$ et que $\Delta_1\Big({}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)\Big) = 1$ par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&e^{\varphi(d_1)}\Big({}^{D_1}\pi\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\xi\Big)\Big({}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)\cdot w_1\Big) \\
= \;& e^{\varphi(d_1)}\Big(\nu_1 \circ {}^{D_1}\pi(f(\bar{x}, .))\xi\Big)\Big({}^{D_1^{-1}}(\exp(s_2X_2+s_3X_3))\Big)(w_1) \\
= \;& \Big(\Big[\nu_2\circ\nu_1\circ {}^{D_1}\pi\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\Big]\xi\Big)\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)(w_1) \\
= \;& \Big(\Big[\nu_2\circ {}^{D_1}\tilde{\pi}\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\circ\nu_1\Big]\xi\Big)\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)(w_1) \\
= \;& \Big(\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x}, .)\Big)\circ\nu_2\circ\nu_1\Big]\xi\Big)\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)(w_1) \\
= \;& \Big(\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x}, .)\Big)(\nu_2\tilde{\xi})\Big)\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)(w_1) \\
= \;& \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2 \int {}^{D_1}\pi_1\Big(g(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; .)\Big)(\nu_2\tilde{\xi})\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big) \\
&\qquad db_2\, db_3 (w_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{G_1/H} F_1(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; D_1; w_1; w') \\
&\qquad\qquad (\nu_2\tilde{\xi})(\exp(b_2X_2 + b_3X_3))(w') d\dot{w}' db_2 db_3 \\
&= e^{2\varphi(d_1)} \cdot e^{\varphi(d_1)} \iint_{G_1/H} F\Big(\bar{x}; D_1; {}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(s_2X_2 + s_3X_3)\Big) \cdot w_1; \\
&\qquad {}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big) \cdot w'\Big) \tilde{\xi}\Big({}^{D_1^{-1}}(\exp b_2X_2 + b_3X_3)\Big)(w') d\dot{w}' db_2 db_3.
\end{aligned}
$$

La relation précédente étant vraie pour presque tous les s_2, s_3, w_1, on a

$$
\begin{aligned}
&\Big({}^{D_1}\pi\Big(f(\bar{x},.)\Big)\xi\Big)(g) \\
&= e^{2\varphi(d_1)} \cdot \iint_{G_1/H} F\Big(\bar{x}; D_1; g; {}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big) \cdot w'\Big) \\
&\qquad\qquad \tilde{\xi}\Big({}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big)\Big)(w') d\dot{w}' db_2 db_3 \\
&= e^{2\varphi(d_1)} \iint_{G_1/H} F\Big(\bar{x}; D_1; g; {}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big) \cdot w'\Big); \\
&\qquad\qquad \xi\Big({}^{D_1^{-1}}\Big(\exp b_2X_2 + b_3X_3)\Big) \cdot w'\Big) d\dot{w}' db_2 db_3.
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$
\begin{aligned}
&{}^{D_1^{-1}}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big) \\
&= \exp\left[(X_2\ X_3) e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \operatorname{mod} G_1 \cap N \\
&= \exp\left[(X_2\ X_3) e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \cdot g(b_2, b_3, D_1)
\end{aligned}
$$

où $g(b_2, b_3, D_1) \in G_1 \cap N$. En particulier $\Delta_1(g(b_2, b_3, D_1)) = 1$ quels que soient b_2, b_3, D_1. D'où

$$
\begin{aligned}
&\Big[{}^{D}\pi\Big(f(\bar{x},.)\Big)\xi\Big](g) \\
&= e^{2\varphi(d_1)} \iint_{G_1/H} F\left(\bar{x}; D_1; g; \exp\left[(X_2\ X_3) e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right]\right. \\
&\qquad \left. \cdot g(b_2, b_3, D_1) \cdot w'\right) \xi\left(\exp\left[(X_2\ X_3) e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right]\right. \\
&\qquad \left. \cdot g(b_2, b_3, D_1) \cdot w'\right) d\dot{w}' db_2 db_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{2\varphi(d_1)}\iint_{G_1/H} F\Big(\bar{x};D_1;g;\exp\Big[(X_2\ X_3)e^{\varphi(d_1)}K(\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}\Big]\cdot w'\Big)\\
&\qquad \xi\Big(\exp\Big[(X_2\ X_3)e^{\varphi(d_1)}K(\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}\Big]\cdot w'\Big)d\dot{w}'db_2db_3\\
&\quad \text{puisque } \Delta_1\Big(g(b_2,b_3,D_1)\Big)=1\\
&= \iint_{G_1/H} F(\bar{x};D_1;g;\exp(b_2X_2+b_3X_3)\cdot w')\xi(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\cdot w')\\
&\qquad d\dot{w}'db_2db_3\\
&= \int_{G/H} F(\bar{x};D_1;g;g')\xi(g')d\dot{g}'.
\end{aligned}
$$

Les justifications se font de manière analogue à celles du cas 5b).

5.13. Etude du cas 7c) : Les raisonnements sont analogues à ceux du cas 7b), mais plus complexes. Les définitions de $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{g}_1$ sont les mêmes. Les éléments de G se décomposent

$$
\begin{aligned}
g &= \exp r_1X_1\cdot\exp r_2X_2\cdot\exp r_3X_3 \quad \operatorname{mod} G_2\\
&= \exp r_1X_1\cdot\exp(r_2X_2+r_3X_3) \quad \operatorname{mod} G_2\\
&= \exp r_1X_1\cdot\exp(r_2X_2+r_3X_3)\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp vV\cdot\exp yY.
\end{aligned}
$$

Les éléments de $\mathfrak{D}$ s'écrivent

$$D=D_0\cdot\exp s_1\operatorname{ad}X_1\cdot\exp s_2\operatorname{ad}X_2\cdot\exp s_3\operatorname{ad}X_3$$

avec $D_0\in\mathfrak{D}_0=\exp(\operatorname{Ker}\varphi\cap\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\beta)$. Donc $D=D_0\operatorname{mod}\mathfrak{D}_\pi$ et il suffit de travailler avec D_0. Comme dans le cas 7b) il suffit d'ailleurs d'écrire

$$D=D_1\cdot\exp s_2\operatorname{ad}X_2\cdot\exp s_3\operatorname{ad}X_3$$

avec $D_1\in\mathfrak{D}_1=\exp(\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\beta)$. Les définitions de π, π_1, $\tilde{\pi}$, π_{D_1}, ν_1, ν_2 sont les mêmes que dans le cas 7b). Pour $f\in ES(N,G)$, évaluons

$$
\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x},.)\Big)\tilde{\xi}\Big]\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)\\
&= \int f(\bar{x},\exp t_1X_1\exp(t_2X_2+t_3X_3)\cdot w\cdot\exp uU\cdot\exp vV\cdot\exp yY)e^{t_1}\\
&\qquad \tilde{\xi}\Big(\exp(-yY)\exp(-vV)\exp(-uU)\cdot w^{-1}\exp(-t_2X_2-t_3X_3)\cdot\\
&\qquad [\exp(-t_1X_1)\exp(s_2X_2+s_3X_3)\exp t_1X_1]\exp(-t_1X_1)\Big)dt_1dt_2dt_3\\
&\qquad\qquad d\dot{w}\,du\,dv\,dy.
\end{aligned}
$$

Posons

$$\begin{aligned}
&\exp(-t_1X_1)\exp(s_2X_2+s_3X_3)\exp t_1X_1\\
=\;&\exp\Big[(X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big]\cdot\Big(\exp\Big[-(X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big]\\
&\qquad\cdot\exp(-t_1X_1)\exp(s_2X_2+s_3X_3)\exp t_1X_1\Big)
\end{aligned}$$

avec $\exp\Big[-(X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big]\cdot\exp(-t_1X_1)\exp(s_2X_2+s_3X_3)$ $\cdot\exp t_1X_1\in G_2$ et

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-(X_2\ X_3)\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}\Big)\cdot\exp\Big((X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\\
=\;&\exp\Big[(X_2\ X_3)\Big(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big]\cdot g_2(t_1,t_2,t_3,s_2,s_3)
\end{aligned}$$

avec $g_2\in G_2$ puisque $[X_2,X_3]\in\mathfrak{g}_2$. D'où

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\big(f(\bar{x},.)\big)\tilde{\xi}\Big]\big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\big)\\
=\;&\int f(\bar{x},\exp t_1X_1\exp(t_2X_2+t_3X_3)\cdot w\cdot\exp uU\exp vV\exp yY)\cdot e^{t_1}\cdot\\
&{}^{D_1}\pi_1\Big(\exp t_1X_1\cdot\Big[\exp(-t_1X_1)\exp(-s_2X_2-s_3X_3)\exp t_1X_1\\
&\exp\Big((X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big]\cdot g_2(t_1,t_2,t_3,s_2,s_3)^{-1}\\
&\cdot\Big[\exp\Big(-(X_2\ X_3)\Big(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\cdot w\cdot\exp uU\\
&\exp vV\exp yY\cdot\exp\Big((X_2\ X_3)\Big(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\Big]\Big)\\
&\tilde{\xi}\Big(\exp\Big((X_2\ X_3)\Big(-\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\Big)\\
&\qquad dt_1dt_2dt_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy.
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

avec
$$-\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$
On trouve
$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x},.)\Big)\tilde{\xi}\Big]\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big) \\
= &\int f\Bigg(\bar{x}, \exp t_1X_1 \exp\Bigg((X_2\ X_3)\Bigg(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\Bigg) \\
&\quad \exp(b_2X_2+b_3X_3)\Bigg[\exp(-b_2X_2-b_3X_3)\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\Bigg(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\quad +e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\exp\Bigg((X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\Bigg] \\
&\quad \Bigg[\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\exp(-t_1X_1) \\
&\exp(s_2X_2+s_3X_3)\exp t_1X_1\Bigg]\cdot w\cdot \exp(-b_2X_2-b_3X_3)\exp uU \\
&\exp vV \exp(y+ub_2+vb_3)Y\Bigg)e^{t_1}\cdot\ {}^{D_1}\pi_1(\exp t_1X_1\cdot w\cdot \exp uU \\
&\cdot \exp vV\cdot \exp yY)\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big)dt_1db_2db_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy.
\end{aligned}$$
Grâce à la définition
$$\begin{aligned}
&Q\Bigg(t_1,\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg) \\
= &{}^{\exp\left((X_2\ X_3)\left(-\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right)}\Bigg\{\Bigg[\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\Bigg(-\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \\
&\quad +e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\Bigg)\cdot\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}\Bigg) \\
&\qquad \exp\Bigg((X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\Bigg]\cdot \\
&\quad \Bigg[\exp\Bigg(-(X_2\ X_3)e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\exp(-t_1X_1) \\
&\qquad \exp\Bigg((X_2\ X_3)\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\Bigg)\exp t_1X_1\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x},.)\Big)\tilde{\xi}\Big]\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)\\
=\ &\int f\Big(\bar{x},\exp t_1X_1\exp\Big((X_2\ X_3)\Big(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\cdot\\
&Q\Big(t_1,-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\cdot{}^{\exp(b_2X_2+b_3X_3)}w\cdot\\
&\exp uU\exp vV\exp yY\Big)e^{t_1}\cdot{}^{D_1}\pi_1(\exp t_1X_1\cdot w)\cdot e^{-iy}e^{i(b_2u+b_3v)}\\
&\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big)dt_1db_2db_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas 7b), $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi=\mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi$. Pour tout $F\in ES(N,\mathbb{R}^n, G/H\times G/H,\ell)$, la définition de F_1, l'existence de g et g_1 sont obtenues comme dans le cas 7b). Soit ensuite $k\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{k}(-1)=1$. La définition de $f\in ES(N,G)$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
&f\Big(\bar{x},\exp t_1X_1\exp(t_2X_2+t_3X_3)\cdot w\cdot\exp uU\exp vV\exp yY\Big)\\
=\ &e^{-t_1}\Big\{\int g_1\Big(\bar{x},e^{-t_1}K(-t_1\omega)\Big(\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Big),\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix};\exp t_1X_1\cdot\\
&\Big[{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}Q\Big(t_1,\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix},e^{-t_1}K(-t_1\omega)\Big(\begin{pmatrix} t_2\\ t_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\Big]^{-1}\cdot\\
&{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}w\Big)\cdot e^{-i(uv_2+vv_3)}dv_2dv_3\Big\}k(y).
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
&Q\Big(t_1,-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\cdot{}^{\exp(b_2X_2+b_3X_3)}w\\
=\ &w_R\cdot\exp r_1U\cdot\exp r_2V\cdot\exp r_3Y\in G_2
\end{aligned}$$

et on vérifie que

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{D_1}\Big(f(\bar{x},.)\Big)\tilde{\xi}\Big]\Big(\exp(s_2X_2+s_3X_3)\Big)\\
=\ &\int f\Big(\bar{x},\exp t_1X_1\cdot\exp\Big((X_2\ X_3)\Big(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\cdot
\end{aligned}$$

$$Q\Big(t_1,-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\cdot{}^{\exp(b_2X_2+b_3X_3)}w\cdot$$

$$\exp uU\exp vV\exp yY\Big)e^{t_1}\cdot{}^{D_1}\pi_1(\exp t_1X_1\cdot w)e^{-iy}e^{i(b_2u+b_3v)}$$

$$\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big)dt_1db_2db_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy$$

$$= \int e^{-t_1}\Big\{\int g_1\Big(\bar{x},e^{-t_1}K(-t_1\omega)\Big(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Big)\Big),\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix};$$

$$\exp t_1X_1\Big[{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}Q\Big(t_1,-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix},$$

$$e^{-t_1}K(-t_1\omega)\Big(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\Big]^{-1}$$

$$\cdot{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}w_R\Big)$$

$$e^{-i(u+r_1)v_2}\cdot e^{-i(v+r_2)v_3}dv_2dv_3\Big\}k(y+r_3)e^{t_1}\cdot{}^{D_1}\pi_1(\exp t_1X_1\cdot w)$$

$$e^{-iy}e^{i(b_2u+b_3v)}\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big)dt_1db_2db_3d\dot{w}\,du\,dv\,dy$$

$$= \hat{k}(-1)\int\Big\{\int g_1\Big(\bar{x},e^{-t_1}K(-t_1\omega)\Big(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Big)\Big),$$

$$\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix};\exp t_1X_1\Big[{}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}Q\Big(t_1,-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix},$$

$$e^{-t_1}K(-t_1\omega)\Big(-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_2\\ v_3\end{pmatrix}\Big)\Big)\Big]^{-1}\cdot$$

$${}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)}Q\Big(t_1,-\begin{pmatrix} b_2\\ b_3\end{pmatrix}+e^{t_1}K(t_1\omega)\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Big)\cdot$$

$${}^{\exp(-v_2X_2-v_3X_3)\exp(b_2X_2+b_3X_3)}w\Big)e^{-iuv_2}e^{-ivv_3}dv_2dv_3\Big\}$$

$$\cdot{}^{D_1}\pi_1(\exp t_1X_1\cdot w)e^{i(b_2u+b_3v)}\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2+b_3X_3)\Big)dt_1db_2db_3d\dot{w}\,du\,dv$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\int g_1\left(\bar{x}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \exp t_1X_1 \cdot w\right) {}^{D_1}\pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot w) \\
&\quad \tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big) dt_1 db_2 db_3 d\dot{w} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int {}^{D_1}\pi_1\Big(g(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; .)\Big)\tilde{\xi}\Big(\exp(b_2X_2 + b_3X_3)\Big) db_2 db_3.
\end{aligned}$$

La démonstration se termine alors comme dans le cas 7b). Les justifications se font comme dans le cas 5b).

5.14. A chaque étape de la récurrence on vérifie facilement que la construction de la fonction f respecte les propriétés (ii) et (iii) de 5.3. Ceci prouve donc le théorème en question.

5.15. Proposition : L'application

$$\begin{array}{rcl} R : ES(N,\mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell) & \longrightarrow & ES(N,G) \\ F & \longmapsto & f \end{array}$$

est une application linéaire continue vérifiant

$$R(q \cdot F) = q \cdot R(F)$$

pour toute fonction q sur $\mathbb{R}^N$. Elle est appelée rétracte.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de remarquer que la construction de f respecte la topologie des espaces ES.

5.16. Remarques : a) Rappelons qu'on peut identifier les espaces $ES(N,\mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ et $ES(N,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ (4.5.). Donc on peut dire que tout $F \in ES(N,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ est noyau d'opérateurs ${}^D\pi(f(\bar{x}, .))$.

b) Pour $f \in ES(G)$, le noyau $F(D; .; .)$ des opérateurs ${}^D\pi(f)$ n'est pas nécessairement une fonction de $ES(N,\mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$. A titre d'exemple notons par $\mathfrak{D}$ la composante connexe du groupe $ax+b$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{d} = \langle X, Y\rangle$ avec $[X,Y] = Y$. Soient $\mathfrak{g} = [\mathfrak{d},\mathfrak{d}] = \mathbb{R}Y$ et $G = \exp\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}$. L'action de $\mathfrak{D}$ sur G et sur $L^1(G)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
{}^{(x,y)}g &\equiv {}^{(x,y)}(0,g) \\
&= (x,y)(0,g)(x,y)^{-1} \\
&= (0, e^x g) \\
&\equiv e^x g \\
f^{(x,y)}(g) &= e^x f(e^x g).
\end{aligned}$$

Soit alors $\pi \in \hat{G}$ défini par $\pi(g) = e^{ig}$. On a $\pi(f) = \hat{f}(1)$. On voit que

$$^{(x,y)}\pi(f) = \pi(f^{(x,y)}) = \hat{f}(e^{-x}).$$

En remarquant que $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \equiv \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}$ et que les noyaux des opérateurs $^{(x,y)}\pi(f)$ sont des fonctions de x uniquement, puisque $G/H = \{0\}$, on peut donc écrire $F(x) = \hat{f}(e^{-x})$. Donc, si $\hat{f}(0) \neq 0$, $F \notin E\mathcal{S}(\mathbb{R}) \equiv E\mathcal{S}(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi)$.

c) Supposons à présent le groupe G nilpotent, connexe, simplement connexe. Donc $E\mathcal{S}(N,G) \equiv \mathcal{S}(N,G)$, espace de Schwartz. D'après R. Howe ([Ho.]), l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(N,G) & \longrightarrow & \mathcal{S}(N, G/H \times G/H, \ell) \\ f & \longmapsto & f_\pi \end{array}$$

où f_π indique le noyau de l'opérateur $\pi(f)$, est une surjection continue ouverte. D'après ([Lud. Mol. 1], 9.7.), l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi & \longrightarrow & \mathcal{S}(N,G) \\ D & \longmapsto & f^D \end{array}$$

est continue, $f \in \mathcal{S}(N,G)$ étant fixé. Par conséquent, puisque $^D\pi(f) = \pi(f^D)$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi & \longrightarrow & \mathcal{S}(N, G/H \times G/H, \ell) \\ D & \longmapsto & F(.;D;.;.) \end{array}$$

où $F(.;D;.;.)$ est le noyau de l'opérateur $^D\pi(f)$, est continue. En particulier, quels que soient $\bar{x}, g, g', F(\bar{x}; D; g; g')$ dépend continûment de D. De plus, on voit facilement que la relation $^D\pi(f) = \pi(f^D)$ entraîne que le noyau $F(.;D;.;.)$ est même C^∞ en D si $f \in \mathcal{S}(N,G)$. On a le même résultat pour le noyau $F'(.;D;.;.)$ de l'opérateur $^D\pi(f)$ si D parcourt $\mathfrak{D}$ (au lieu de $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$).

Finalement, si $|||.|||$ désigne une norme de Schwartz quelconque sur $\mathcal{S}(G/H \times G/H, \ell)$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ D & \longmapsto & |||F(\bar{x}; D; .; .)|||, \end{array}$$

$\bar{x}$ étant un paramètre fixé, est continue.

d) Dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ exponentiel, la formule suivante du noyau de ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$

$$(f^D)_\pi(x,y) = \Delta^{-1/2}(x)\Delta_G^{-1}(y)\Delta^{-1/2}(y)\int_H \Delta^{-1/2}(h) f^D(xhy^{-1})$$

$$\chi_\ell(h)dh$$

([Lud.]) montre encore que le noyau de ${}^D\pi(f)$ est C^∞ en D si $f \in E\mathcal{S}(G)$.

5.17. Question ouverte : Supposons que $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$ agit exponentiellement sur $G = \exp \mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$. Soit $f \in E\mathcal{S}(G)$. Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que le noyau de ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$ appartienne à $E\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$? Cette condition pourrait-elle être la suivante : La transformée de Fourier non commutative de f et des fonctions $P\Big(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) f(x)$ s'annule sur la frontière de l'orbite Ω, P désignant une expression polynomiale en les variables x et leurs dérivées, c'est-à-dire la fonction $P\Big(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) f(x)$ est annulée par toute représentation unitaire irréductible $\zeta \in \partial\Omega$? D'ailleurs la question du comportement de la transformée de Fourier non commutative sur le bord de l'orbite semble jouer un rôle important dans plusieurs questions, telle par exemple la question de la densité éventuelle de $\operatorname{Ker}\Omega \cap \mathcal{S}(G)$ dans $\operatorname{Ker}\Omega$, si G est nilpotent et si l'orbite Ω n'est pas fermée.

Références

[B.C. et al] Bernat, P., Conze, N., Duflo, M., Lévy-Nahas, M., Rais, M., Renouard, P., Vergne, M., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris (1972).

[Boi.] Boidol, J., Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren, Math. Ann. 236, 1-13 (1978).

[Dix. 1] Dixmier, J., L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France 85, 113-121 (1957).

[Dix. 2] Dixmier, J., Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris (1974).

[Ho.] Howe, R., On a Connection between Nilpotent Groups and Oscillatory Integrals associated to Singularities, Pacific J. of Math. 73, 2, 329-363 (1977).

[Lep. Lud.] Leptin, H., Ludwig, J., Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups, De Gruyter Expositions in Mathematics 18, De Gruyter, Berlin, New York (1994).

[Lud.] Ludwig, J., Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels, J. reine angew. Math. 339, 1-26 (1983).

[Lud. Mol. 1] Ludwig, J., Molitor-Braun C., Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent, Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques VII, 25-67 (1995).

[Lud. Mol. 2] Ludwig, J., Molitor-Braun C., Exponential Actions, Orbits and their Kernels, preprint.

[Mol.] Molitor-Braun C., Représentations induites dans les groupes et algèbres de Lie exponentiels, Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques V, 113-130 (1993).

[Pog.] Poguntke, D., Algebraically Irreducible Representations of L^1-Algebras of Exponential Lie Groups, Duke Math. J. 50, No 4, 1077-1106 (1983).

[Puk. 1] Pukanszky, L., On the theory of exponential groups, Trans. Amer. Math. Soc. 126, 487-507 (1967).

[Puk. 2] Pukanszky, L., On the Unitary Representations of Exponential Groups, J. Funct. Anal. 2, 73-113 (1968).