

Représentations induites dans les groupes et algèbres de Lie exponentiels

Carine Molitor-Braun*

1. Préliminaires

- 1.1. But du présent travail : Dans [3], Dixmier introduit et étudie la notion de représentation induite pour les algèbres de Lie et leurs algèbres enveloppantes. D'autre part il existe une notion de représentation induite pour les groupes de Lie résolubles [1]. Le but du présent travail consiste à mettre en évidence le lien existant entre ces deux notions. Pour des raisons de simplicité nous nous limiterons aux groupes de Lie exponentiels.
- 1.2. Notations : Dans la suite, G désignera un groupe de Lie exponentiel, connexe, simplement connexe, réel et \mathfrak{g} désignera son algèbre de Lie. Nous noterons par $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ son algèbre complexifiée correspondante et par $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ son algèbre enveloppante [3].
- 1.3. Nous utiliserons à maintes reprises la propriété universelle suivante des algèbres enveloppantes [3] :

Lemme : Soient σ l'application canonique de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, A une algèbre à élément unité, τ une application linéaire de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dans A telle que $\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x) = \tau([x, y])$, quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Il existe un homomorphisme τ' et un

*Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche
MEN|CUL|90|009

seul de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ dans A tel que $\tau'(1) = 1$ et $\tau' \circ \sigma = \tau$. Intuitivement on peut dire que τ peut être prolongé à $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ tout entier.

2. Représentations induites dans les groupes de Lie exponentiels

- 2.1. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et soit \mathfrak{h} une polarisation pour ℓ vérifiant la condition de Pukanszky ([1], [5]). Posons $H = \exp \mathfrak{h}$, munissons les groupes G et H des mesures de Haar à gauche μ_G et μ_H , et soient Δ_G et Δ_H les fonctions modulaires respectives. Définissons, pour tout $\exp h \in H$,

$$\Delta(\exp h) = \Delta_{H,G}(\exp h) = \frac{\Delta_H(\exp h)}{\Delta_G(\exp h)}.$$

On montre que ([1], V.1.) :

$$\Delta(\exp h) = e^{\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h}$$

avec

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}} \operatorname{ad} h - \operatorname{tr}_{\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h,$$

tr désignant la trace de l'opérateur en question.

- 2.2. Soit $\mathcal{K}^\Delta(G)$ l'espace des fonctions numériques continues sur G qui vérifient

$$F(x \exp h) = \Delta(\exp h)F(x)$$

quels que soient $x \in G$, $\exp h \in H$, et dont le support est compact modulo H . Il existe alors une forme linéaire positive unique $\mu_{G,H}$ sur $\mathcal{K}^\Delta(G)$ notée

$$\mu_{G,H}(f) = \oint_{G/H} f(x) d\mu_{G,H}(x)$$

telle que

$$\int_G f(y) d\mu_G(y) = \oint_{G/H} d\mu_{G,H}(x) \int_H f(x \exp h) \Delta^{-1}(\exp h) d\mu_H(\exp h)$$

([1], V.1.). Dans la suite les mesures de Haar seront souvent notées simplement dx , $d(\exp h)$...

2.3. Par définition de \mathbf{h} , $\langle \ell, [\mathbf{h}, \mathbf{h}] \rangle \equiv 0$ et par conséquent l'application

$$\begin{aligned} \chi_\ell : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \exp h &\longmapsto \chi_\ell(\exp h) = e^{-i\langle \ell, h \rangle} \end{aligned}$$

est un caractère unitaire de H , c'est-à-dire vérifie

$$\chi_\ell(\exp h_1 \cdot \exp h_2) = \chi_\ell(\exp h_1) \cdot \chi_\ell(\exp h_2).$$

De plus, puisque $\text{tr}(\text{ad}[\mathbf{g}, \mathbf{g}]) \equiv 0$, l'application

$$\begin{aligned} \zeta : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \exp h &\longmapsto \zeta(\exp h) = e^{-i\langle \ell, h \rangle} \cdot \Delta^{-1/2}(\exp h) \end{aligned}$$

est également un caractère de H .

2.4. Considérons l'espace des fonctions continues de G dans \mathbb{C} vérifiant

$$\varphi(x \exp h) = e^{i\langle \ell, h \rangle} \cdot \Delta^{1/2}(\exp h) \varphi(x) = \zeta(\exp(-h)) \varphi(x)$$

quels que soient $x \in G$, $\exp h \in H$ et

$$\int_{G/H} |\varphi(x)|^2 d\mu_{G,H}(x) = \mu_{G,H}(|\varphi|^2) < +\infty.$$

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pi$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant l'espace précédent pour le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{G/H} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\mu_{G,H}(x).$$

On définit alors la représentation induite notée $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ de G sur l'espace $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pi$ par

$$(\pi(x)\varphi)(y) = \varphi(x^{-1}y)$$

quels que soient $\varphi \in \mathcal{H}$, $x \in G$, pour presque tout $y \in G$ [1].

- 2.5. La construction précédente reste valable si \mathfrak{h} est seulement une sous-algèbre subordonnée à ℓ , c'est-à-dire si $\langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle \equiv 0$. Cependant si \mathfrak{h} est une polarisation vérifiant la condition de Pukanszky, alors la représentation induite $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ est une représentation unitaire topologiquement irréductible.
- 2.6. Souvent on rencontre la définition suivante, légèrement différente des représentations induites [5] : L'espace G/H peut être muni d'une mesure semi-invariante et la fonction Δ peut être étendue en un homomorphisme de G tout entier dans \mathbb{R}_+^* tels que si φ est une fonction continue à support compact dans G/H , alors

$$\int_{G/H} \varphi(x^{-1}y) dy = \Delta(x) \int_{G/H} \varphi(y) dy.$$

On considère alors l'espace des fonctions continues de G dans \mathbb{C} vérifiant

$$\varphi(x \exp h) = e^{i\langle \ell, h \rangle} \varphi(x)$$

quels que soient $x \in G$, $\exp h \in H$ et

$$\int_{G/H} |\varphi(\dot{x})|^2 d\dot{x} < +\infty$$

en notant par $d\dot{x}$ la mesure semi-invariante sur G/H . On prend pour \mathcal{H}_{π_1} l'espace de Hilbert obtenu en complétant l'espace précédent pour le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{G/H} \varphi(\dot{x}) \overline{\psi(\dot{x})} d\dot{x}$$

et on définit la représentation π_1 de G sur \mathcal{H}_{π_1} par

$$(\pi_1(x)\varphi)(y) = \Delta^{-1/2}(x)\varphi(x^{-1}y)$$

quels que soient $\varphi \in \mathcal{H}_{\pi_1}$, $x \in G$, pour presque tout $y \in G$. Les représentations π et π_1 sont équivalentes. Dans ce travail c'est π qui est la représentation la plus appropriée.

3. Représentations de l'algèbre de Lie et de l'algèbre enveloppante associées à la représentation $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$

3.1. Soit \mathcal{H}_∞ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans \mathcal{H} , c'est-à-dire l'espace des fonctions de \mathcal{H} dont toutes les dérivées vérifient

$$\int_{G/H} |D^\alpha \varphi(x)|^2 d\mu_{G,H}(x) < +\infty.$$

On munit l'espace \mathcal{H}_∞ de la topologie induite par les semi-normes

$$\varphi \mapsto \left(\int_{G/H} |D^\alpha \varphi(x)|^2 d\mu_{G,H}(x) \right)^{1/2}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial t_n^{\alpha_n}}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

$x = \exp t_1 x_1 \cdot \exp t_2 x_2 \cdots \exp t_n x_n$, une base (x_1, \dots, x_n) ayant été choisie.

3.2. Nécessairement, si $\varphi \in \mathcal{H}_\infty$ et si $h \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \varphi(x \cdot \exp th) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[e^{it\langle \ell, h \rangle} \cdot e^{\frac{1}{2}t \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \text{ad } h} \varphi(x) \right] \Big|_{t=0} \\ &= [i\langle \ell, h \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \text{ad } h] \cdot \varphi(x). \end{aligned}$$

3.3. Sur \mathcal{H}_∞ on définit la représentation $d\pi$ de \mathfrak{g} par

$$\begin{aligned} [d\pi(X)\varphi](y) &= \frac{d}{dt} [\pi(\exp tX)\varphi](y) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \varphi(\exp(-tX)y) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Cette représentation peut être étendue à $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ par

$$d\pi(X_1 + iX_2) = d\pi(X_1) + id\pi(X_2)$$

et elle peut être étendue univoquement à $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ par la propriété universelle des algèbres enveloppantes (1.3.). En effet, il suffit de remarquer que $d\pi$ est une représentation d'algèbres de Lie, c'est-à-dire que

$$d\pi([X, Y]) = d\pi(X)d\pi(Y) - d\pi(Y)d\pi(X)$$

quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

3.4. Notons $\mathcal{H}^\infty = (\mathcal{H}_\infty)^*$ l'espace des distributions sur \mathcal{H}_∞ , c'est-à-dire le dual de \mathcal{H}_∞ muni de sa famille de seminormes. Sur \mathcal{H}^∞ on définit la représentation $d\pi^*$ par

$$\langle d\pi^*(X)\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, d\pi(-X)\varphi \rangle$$

quels que soient $\mu \in \mathcal{H}^\infty$, $\varphi \in \mathcal{H}_\infty$, $X \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. D'ailleurs, pour $X \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle d\pi^*(X)\mu, \varphi \rangle &= \left\langle \mu, \frac{d}{dt}\pi(\exp(-tX))\varphi(\bullet) \Big|_{t=0} \right\rangle \\ &= \left\langle \mu, \frac{d}{dt}\varphi(\exp tX\bullet) \Big|_{t=0} \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\langle \mu, \varphi(\exp tX\bullet) \rangle \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

4. Identification de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ à un espace de distributions

4.1. Tout $X \in \mathfrak{g}$ peut être identifié à une distribution μ_X par

$$\langle \mu_X, \varphi \rangle = \frac{d}{dt}\varphi(\exp tX) \Big|_{t=0}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, espace des fonctions C^∞ à support compact. La distribution μ_X est à support $\{e\}$, e désignant l'élément neutre de G . D'ailleurs la définition précédente a un sens pour toute fonction C^∞ et en particulier pour toute fonction de l'espace \mathcal{H}_∞ .

4.2. Puisque toute distribution μ_X est à support ponctuel, on peut définir les produits de convolution avec une distribu-

tion μ quelconque par

$$\begin{aligned} \langle \mu_X * \mu, \varphi \rangle &= \langle \mu_X(x) \otimes \mu(y), \varphi(x \cdot y) \rangle && \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(G) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle \mu, \varphi(\exp tX \bullet) \rangle \right|_{t=0} \\ &= \langle d\pi^*(X)\mu, \varphi \rangle && \begin{array}{l} \text{pour } \varphi \in \mathcal{H}_\infty \\ \text{si } \mu \in \mathcal{H}^\infty \end{array} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mu_X * \mu = d\pi^*(X)\mu$ considérés comme distributions sur \mathcal{H}_∞ .

De même,

$$\begin{aligned} \langle \mu * \mu_X, \varphi \rangle &= \langle \mu(x) \otimes \mu_X(y), \varphi(x \cdot y) \rangle \\ &= \langle \mu, \left. \frac{d}{dt} \varphi(\bullet \exp tX) \right|_{t=0} \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \langle \mu, \varphi(\bullet \exp tX) \rangle \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Ce produit de convolution généralise la notion de produit de convolution de fonctions et de mesures.

4.3. Il est bien connu que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{D}^*(G) \\ X & \longmapsto & \mu_X \end{array}$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres, c'est-à-dire vérifie

$$\begin{aligned} \mu_{X+Y} &= \mu_X + \mu_Y \\ \mu_{[X,Y]} &= \mu_X * \mu_Y - \mu_Y * \mu_X = [\mu_X, \mu_Y] \end{aligned}$$

et qu'il peut être étendu de façon unique en un isomorphisme de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ sur l'espace des distributions de support $\{e\}$.

De même l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathcal{H}^\infty \\ X & \longmapsto & \mu_X \end{array}$$

μ_X étant considéré comme distribution sur \mathcal{H}_∞ , est un homomorphisme d'algèbres (non injectif) qui s'étend de façon

unique en un homomorphisme de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur l'espace des distributions sur \mathcal{H}_{∞} de support $\{e\}$.

Dans la suite on identifiera $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ à ces espaces de distributions en notant $X * \mu$, resp. $\mu * X$ au lieu de $\mu_X * \mu$, resp. $\mu * \mu_X$. La relation

$$\mu_X * \mu = d\pi^*(X)\mu$$

reste valable pour tout $X \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, μ_X et μ étant considérés comme distributions sur \mathcal{H}_{∞} .

4.4. L'espace \mathcal{H}^{∞} devient un $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module à gauche si on définit

$$X \cdot \mu = X * \mu = \mu_X * \mu$$

pour tout $\mu \in \mathcal{H}^{\infty}$ et tout $X \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

4.5. Quels que soient $h \in \mathfrak{h}$, $\mu \in \mathcal{H}^{\infty}$ et $\varphi \in \mathcal{H}_{\infty}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mu * h, \varphi \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \mu, \varphi(\bullet \exp th) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \mu, e^{it\langle \ell, h \rangle} \cdot e^{1/2 \operatorname{tr} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \operatorname{ad} h} \varphi \rangle \Big|_{t=0} \\ &= (i\langle \ell, h \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \operatorname{ad} h) \langle \mu, \varphi \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire, dans \mathcal{H}^{∞} ,

$$\mu * h = (i\langle \ell, h \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \operatorname{ad} h) \mu$$

pour tout $h \in \mathfrak{h}$, et même pour tout $h \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, par la propriété universelle de $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.

4.6. Précisons que l'homomorphisme $g \mapsto \mu_g$ envoie $g_1 \cdot g_2 \dots g_p \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur $\mu_{g_1} * \mu_{g_2} * \dots * \mu_{g_p}$ et que

$$\langle \mu_{g_1} * \mu_{g_2} * \dots * \mu_{g_p}, \varphi \rangle = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \frac{\partial}{\partial t_p} \varphi(\exp t_1 g_1 \cdot \exp t_2 g_2 \dots \exp t_p g_p) \Big|_{\substack{t_1=0 \\ t_2=0 \\ \vdots \\ t_p=0}} .$$

4.7. Le noyau K de l'application

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow \mathcal{H}^{\infty} \\ X &\longmapsto \mu_X, \end{aligned}$$

μ_X étant considéré comme distribution sur \mathcal{H}_{∞} , est l'idéal à gauche engendré par $\{h - \delta(h)1 \mid h \in \mathfrak{h}\}$ où $\delta(h) = i\langle \ell, h \rangle + \frac{1}{2}\text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \text{ad } h$.

Démonstration : D'une part, soit $g \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ quelconque. Dans \mathcal{H}^{∞} on a

$$g \cdot (h - \delta(h)1) = \mu_g * h - \delta(h)\mu_g * 1 = 0$$

pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et

$$g \cdot (h - \delta(h)1) \in K.$$

Réciproquement, supposons que $g = \mu_g \equiv 0$ dans \mathcal{H}^{∞} et montrons que g appartient à l'idéal en question. Dans un voisinage suffisamment petit du neutre, G peut être identifié à \mathfrak{g} et G/H à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Soient (h_1, \dots, h_n) une base de \mathfrak{h} et (b_1, \dots, b_k) une base supplémentaire de \mathfrak{g} choisies dans les voisinages en question de manière à ce que les éléments de la forme

$$b^{\alpha} h^{\beta} = b_1^{\alpha_1} \cdot b_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot b_k^{\alpha_k} \cdot h_1^{\beta_1} \cdot h_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot h_n^{\beta_n}$$

engendrent $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Il en est alors de même des éléments de la forme

$$b^{\alpha} (h - \delta(h)1)^{\beta} = b_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot b_k^{\alpha_k} \cdot (h_1 - \delta(h_1)1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (h_n - \delta(h_n)1)^{\beta_n}$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}^k$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$. En effet, pour passer de la première forme à la seconde, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} h_i &= (h_i - \delta(h_i)1) + \delta(h_i)1 \\ h_i^{\beta_i} &= (h_i - \delta(h_i)1)^{\beta_i} - \beta_i \delta(h_i) (h_i - \delta(h_i)1)^{\beta_i - 1} + \dots \end{aligned}$$

et que

$$1 = (h_i - \delta(h_i)1)^0.$$

L'élément g peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} b^\alpha (h - \delta(h)1)^\beta \\ &= \sum_{\substack{\alpha \\ \beta \neq 0}} a_{\alpha, \beta} b^\alpha (h - \delta(h)1)^\beta + \sum_{\alpha} a_{\alpha, 0} b^\alpha \end{aligned}$$

α et β étant des multiindices. Remarquons que

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \beta \neq 0}} a_{\alpha, \beta} b^\alpha (h - \delta(h)1)^\beta$$

appartient à l'idéal en question.

Il suffit donc de montrer que $\sum_{\alpha} a_{\alpha, 0} b^\alpha = 0$. Pour tout $\varphi \in$

\mathcal{H}_∞ on a par hypothèse $\langle \mu_g, \varphi \rangle = 0$. Puisque

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \beta \neq 0}} a_{\alpha, \beta} b^\alpha (h - \delta(h)1)^\beta \in K, \text{ cette expression annule } \varphi \text{ et}$$

on est donc amené à la condition

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{\alpha} a_{\alpha, 0} b^\alpha, \varphi \right\rangle &= \sum_{\alpha} a_{\alpha, 0} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial t_k^{\alpha_k}} \varphi(\exp t_1 b_1 \dots \exp t_k b_k) \Big|_{\substack{t_1=0 \\ \dots \\ t_k=0}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supposons pour commencer que $a_{0,0} \neq 0$. Définissons $\varphi \in \mathcal{H}_\infty$ par

$$\varphi(\exp t_1 b_1 \dots \exp t_k b_k \cdot \exp h) = C \cdot e^{\delta(h)}$$

où C est une constante non nulle, dans un voisinage suffisamment petit du neutre. Alors cette expression peut toujours être prolongée en une fonction de \mathcal{H}_∞ et

$$\left\langle \sum_{\alpha} a_{\alpha, 0} b^\alpha, \varphi \right\rangle = a_{0,0} \cdot C \neq 0$$

puisque toutes les dérivées à l'origine s'annulent. Ceci est une contradiction et par conséquent $a_{0,0} = 0$. Dans le cas

général, s'il existe α tel que $a_{\alpha,0} \neq 0$, il existe un polynôme $P(t_1, \dots, t_k)$ tel que

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha,0} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial t_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial t_k^{\alpha_k}} P(t_1, \dots, t_k) \Big|_{\substack{t_1=0 \\ \dots \\ t_k=0}} \neq 0.$$

On définit alors $\varphi \in \mathcal{H}_{\infty}$ par

$$\varphi(\exp t_1 b_1 \dots \exp t_k b_k \cdot \exp h) = e^{\delta(h)} P(t_1, \dots, t_k)$$

dans un voisinage suffisamment petit du neutre et on prolonge en une fonction de \mathcal{H}_{∞} . Par construction,

$$\langle \sum_{\alpha} a_{\alpha,0} b^{\alpha}, \varphi \rangle \neq 0$$

contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction prouve donc que $\sum_{\alpha} a_{\alpha,0} b^{\alpha} = 0$ et que g appartient à l'idéal en question.

- 4.8. Une manière équivalente de décrire le noyau K est la suivante : K est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ engendré par $\{h - \delta(h)1 \mid h \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}$.

Démonstration : Notons par K_1 l'idéal engendré par $\{h - \delta(h)1 \mid h \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}$. On a évidemment $K \subset K_1$.

D'autre part, pour $h = h_1 + ih_2 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et $g \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ quelconques, on a évidemment, par linéarité,

$$g * (h - \delta(h)1) = g * (h_1 - \delta(h_1)1) + ig * (h_2 - \delta(h_2)1) \in K$$

puisque $g * (h_1 - \delta(h_1)1) \in K$ et $g * (h_2 - \delta(h_2)1) \in K$. Soit à présent $h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_k \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Puisque δ est un homomorphisme sur $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$

$$\delta(h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_k) = \delta(h_1) \cdot \delta(h_2) \dots \delta(h_k).$$

D'autre part, pour $\varphi \in \mathcal{H}_{\infty}$ quelconque,

$$\begin{aligned}
& \langle \mu_{h_1 \dots h_k}, \varphi \rangle \\
= & \langle \mu_{h_1} * \mu_{h_2} * \dots * \mu_{h_k}, \varphi \rangle \\
= & \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \frac{\partial}{\partial t_k} \varphi(\exp t_1 h_1 \cdot \exp t_2 h_2 \dots \exp t_k h_k) \Big|_{t_1 = \dots = t_k = 0} \\
= & \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \frac{\partial}{\partial t_k} [e^{t_k \delta(h_k)} \varphi(\exp t_1 h_1 \cdot \exp t_{k-1} h_{k-1})] \Big|_{t_1 = \dots = t_k = 0} \\
= & \delta(h_k) \frac{\partial}{\partial t_1} \dots \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} [\varphi(\exp t_1 h_1 \dots \exp t_{k-1} h_{k-1})] \Big|_{t_1 = \dots = t_{k-1} = 0} \\
= & \dots \\
= & \delta(h_1) \delta(h_2) \dots \delta(h_k) \varphi(e) \\
= & \langle \delta(h_1) \delta(h_2) \dots \delta(h_k) 1, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle \mu_{(h_1 \dots h_k - \delta(h_1 \dots h_k) 1)}, \varphi \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$h_1 \cdot \dots \cdot h_k - \delta(h_1 \cdot \dots \cdot h_k) 1 \in K,$$

K étant le noyau de l'application $g \mapsto \mu_g$ de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans \mathcal{H}^{∞} . On en déduit que $\{h - \delta(h)1 \mid h \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\} \subset K$ et que $K_1 = K$.

4.9. On vient de prouver que

$$\begin{aligned}
U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/K & \longrightarrow \mathcal{H}^{\infty} \\
X + K & \longmapsto \mu_X,
\end{aligned}$$

μ_X étant considéré comme distribution sur \mathcal{H}_{∞} , est un homomorphisme injectif sur les éléments de \mathcal{H}^{∞} ayant $\{e\}$ comme support.

5. Définition des représentations induites pour $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$

5.1. Donnons d'abord quelques précisions sur la complexification des algèbres. Considérons

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g} & \equiv \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} & (\text{en identifiant } i\mathfrak{g} \text{ à} \\
& & g \otimes i = i(g \otimes 1))
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$$

et étendons ℓ à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par linéarité en posant

$$\langle \ell, g_1 + ig_2 \rangle = \langle \ell, g_1 \rangle + i\langle \ell, g_2 \rangle \text{ avec } g_1, g_2 \in \mathfrak{g}.$$

Il est alors facile à voir que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell) + i\mathfrak{g}(\ell)$. De plus,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} &= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} &= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\ell) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(\ell). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} + \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\ell)).$$

On voit également facilement que $\langle \ell, [\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}] \rangle \equiv 0$ et on en déduit que $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est une polarisation pour ℓ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

5.2. Rappelons la notation

$$\delta(h) = i\langle \ell, h \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h \text{ pour } h \in \mathfrak{h}.$$

Remarquons en plus que pour $h \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}} \operatorname{ad} h &= \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \operatorname{ad} h \\ \operatorname{tr}_{\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h &= \operatorname{tr}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \operatorname{ad} h, \end{aligned}$$

donc que

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \operatorname{ad} h.$$

Ceci permet d'étendre δ à $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. En effet, il suffit de poser

$$\delta(h_1 + ih_2) = \delta(h_1) + i\delta(h_2).$$

Comme

$$\langle \ell, h_1 + ih_2 \rangle = \langle \ell, h_1 \rangle + i\langle \ell, h_2 \rangle$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \operatorname{ad}(h_1 + ih_2) &= \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \operatorname{ad} h_1 + i \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \operatorname{ad} h_2 \\ &= \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h_1 + i \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{ad} h_2 \end{aligned}$$

on a encore

$$\delta(h) = i\langle \ell, h \rangle + \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \text{ad } h$$

pour tout $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Puisque δ est un homomorphisme d'algèbres, on peut alors étendre δ à $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.

5.3. Considérons les différentes structures de module suivantes :

(I) $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est un $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ -module à droite par

$$X \cdot h = X * h,$$

X et h étant identifiés à des distributions sur $\mathcal{D}(G)$.

(II) $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est un $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module à gauche par

$$g \cdot X = g * X,$$

X et g étant identifiés à des distributions sur $\mathcal{D}(G)$.

(III) $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$ est un $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module à gauche par

$$g \cdot (g_1 \otimes c) = (g * g_1) \otimes c,$$

g et g_1 étant identifiés à des distributions sur $\mathcal{D}(G)$.

5.4. Définition : Dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$ considérons le $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module à gauche M engendré par les

$$(g * h) \otimes c - g \otimes (\delta(h)c)$$

avec $g \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $h \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $c \in \mathbb{C}$. Définissons

$$\text{ind}(\tilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} \uparrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathbb{C} = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C} / M$$

et appelons $\text{ind}(\tilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} \uparrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ *module induit tordu*.

Alors $\text{ind}(\tilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} \uparrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est un $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module à gauche par

$$g \cdot (g_1 \otimes c) = (g * g_1) \otimes c.$$

On définit la *représentation induite tordue* $\tilde{\pi}$ de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur $\text{ind}(\tilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} \uparrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathbb{C}$ par

$$\tilde{\pi}(g)(g_1 \otimes c) = g \cdot (g_1 \otimes c) = (g * g_1) \otimes c.$$

5.5. Remarquons que pour $1, h \in U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$:

$$\delta(h) = \delta(h)\delta(1) = \delta(\delta(h)1).$$

Par conséquent :

$$(g * \delta(h)1) \otimes c - g \otimes (\delta(h)c) \in M$$

et

$$\begin{aligned} & [(g * h) \otimes c - g \otimes (\delta(h)c)] - [(g * \delta(h)1) \otimes c - g \otimes (\delta(h)c)] \\ &= (g * (h - \delta(h)1)) \otimes c \in M \end{aligned}$$

dans $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$. Puisque K est engendré par les $g * (h - \delta(h)1)$, on a donc $K \otimes \mathbb{C} \subset M$. Réciproquement,

$$\begin{aligned} & (g * h) \otimes c - g \otimes (\delta(h)c) \\ &= (g * h) \otimes c - \delta(h)(g \otimes c) \\ &= (g * h) \otimes c - (\delta(h)g) \otimes c \\ &= (g * h) \otimes c - (g * \delta(h)1) \otimes c \\ &= (g * (h - \delta(h)1)) \otimes c \end{aligned}$$

dans $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$. Par conséquent, $M = K \otimes \mathbb{C}$ et

$$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{C} = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} / K \otimes \mathbb{C}.$$

6. Equivalence de $d\pi^*$ et $\tilde{\pi}$

6.1. Définissons

$$\begin{aligned} f : U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{H}^\infty \\ (g, c) &\longmapsto c \cdot g = c \cdot \mu_g, \end{aligned}$$

μ_g étant considéré comme distribution sur \mathcal{H}_∞ . L'application f est une surjection bilinéaire sur l'ensemble des éléments de \mathcal{H}^∞ ayant $\{e\}$ comme support. Pour $h \in U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$ on a :

$$\begin{aligned} f(g * h, c) &= c \cdot (g * h) \\ &= c \cdot (\mu_g * \mu_h) \\ &= \delta(h)c\mu_g \\ &= (\delta(h)c) \cdot g \\ &= f(g, \delta(h)c) \end{aligned}$$

toutes les distributions étant des distributions sur \mathcal{H}_∞ .

6.2. Par la propriété universelle sur les produits tensoriels ([2], II.3.), il existe une application linéaire unique F vérifiant

$$F : U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}^\infty$$

$$F(g \otimes c) = f(g, c) = c \cdot g = c \cdot \mu_g.$$

Donc F est une surjection linéaire sur l'ensemble des éléments de \mathcal{H}^∞ ayant $\{e\}$ comme support.

6.3. Montrons que F est une injection. En effet :

$$\begin{aligned} F(g \otimes c) = 0 &\Leftrightarrow c \cdot g = 0 \text{ en tant que distribution sur } \mathcal{H}_\infty \\ &\Leftrightarrow c \cdot g \in K \\ &\Leftrightarrow (c \cdot g) \otimes 1 = g \otimes c \in K \otimes \mathbb{C} = M \\ &\Leftrightarrow g \otimes c = 0 \text{ dans } U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

6.4. Quels que soient $g \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $g_1 \otimes c \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (F \circ \tilde{\pi}(g))(g_1 \otimes c) &= F(\tilde{\pi}(g)(g_1 \otimes c)) \\ &= F((g * g_1) \otimes c) \\ &= c \cdot (g * g_1) \text{ en tant que distributions sur } \mathcal{H}_\infty \\ &= g * (cg_1) \\ &= d\pi^*(g)(cg_1) \\ &= d\pi^*(g)(F(g_1 \otimes c)) \\ &= (d\pi^*(g) \circ F)(g_1 \otimes c). \end{aligned}$$

Ainsi

$$F \circ \tilde{\pi}(g) = d\pi^*(g) \circ F \text{ pour tout } g \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$$

et les représentations $\tilde{\pi}$ sur $\text{ind}(\mathfrak{h}_\mathbb{C} \uparrow \mathfrak{g}_\mathbb{C}) = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \mathbb{C}$ et $d\pi^*$ sur le sous-espace de \mathcal{H}^∞ des distributions de support $\{e\}$, sont équivalentes.

7. Idéaux primitifs

- 7.1. Dans cette section nous ne ferons que rappeler les résultats de [3] et d'en tirer les conséquences pour l'application $d\pi^*$.
- 7.2. Définitions : Soit V un espace vectoriel. Une représentation de \mathfrak{g} dans V est dite *simple* ou *irréductible*, si $V \neq (0)$ et si les seuls sous-espaces vectoriels stables de V sont V et (0) . On dit encore que le \mathfrak{g} -module V est simple. On a évidemment les mêmes définitions pour $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Un idéal I de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est dit *primitif* s'il est l'annulateur d'un $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module à gauche simple, c'est-à-dire le noyau d'une représentation irréductible de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.
- 7.3. Si \mathfrak{h} est une polarisation de Vergne de \mathfrak{g} , le $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ -module $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathbb{C}$ est simple. Donc son annulateur, à savoir,

$$\text{Ker } \tilde{\pi} = \{g \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mid g \cdot (U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathbb{C}) \equiv 0\}$$

est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

- 7.4. Soient \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 deux polarisations distinctes pour ℓ . Soient $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ les représentations correspondantes sur $\text{ind}(\mathfrak{h}_{1\mathbb{C}} \uparrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et $\text{ind}(\mathfrak{h}_{2\mathbb{C}} \uparrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ respectivement. Alors leurs noyaux coïncident, c'est-à-dire

$$\text{Ker } \tilde{\pi}_1 = \text{Ker } \tilde{\pi}_2.$$

Donc, pour toute polarisation \mathfrak{h} pour ℓ , le noyau $\text{Ker } \tilde{\pi}$ est un idéal primitif.

- 7.5. Le noyau $\text{Ker } d\pi^*$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, puisque les représentations $\tilde{\pi}$ et $d\pi^*$ sont équivalentes et ont donc le même noyau.

8. Cas des groupes résolubles

Dans le cas d'un groupe résoluble, il faut apporter plus de soin au choix de la polarisation (polarisation positive) et à la définition des espaces \mathcal{H}_{π} , \mathcal{H}_{∞} et \mathcal{H}^{∞} , afin de garantir l'existence des calculs effectués ici [1].

Bibliographie

- [1] Bernat, P., Conze, N., Duflo, M., Lévy-Nahas, M., Rais, M., Renouard, P., Vergne, M., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod (1972), Paris.
- [2] Bourbaki, N., *Eléments de mathématique, Algèbre*, Chapitre II, Hermann (1970), Paris.
- [3] Dixmier, J., *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars (1974), Paris/Bruxelles/Montréal.
- [4] Duflo, M., Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 5, 1972, 71-120.
- [5] Pukanszky, L., On the theory of exponential groups, *Trans. Am. Math. Soc.* 126(1967), 487-507.

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg