Les polarisations de Vergne dans une algèbre de Lie exponentielle

Carine Molitor-Braun*

1. Rappels (voir [1], Chapitre IV)

1.1. Soit B une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel réel V de dimension finie.

a) On appelle *noyau* de B et on note $N(B)$ l'ensemble

$$N(B) = \{x \in V | B(x,y) = 0 \quad \forall y \in V\}.$$

b) Un sous-espace W de V est dit *totalement isotrope* si

$$B(x,y) = 0 \quad \text{quels que soient } x, y \in W.$$

c) La dimension d'un sous-espace *totalement isotrope maximal* W est donnée par

$$\dim W = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B)).$$

1.2. Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et soit $\ell \in \mathbf{g}^*$ non nul.

---

*Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN|CUL|90|009

a) L'application

$$(x, y) \longmapsto \langle \ell, [x, y] \rangle$$

définit une forme bilinéaire alternée sur $\mathbf{g}$. Le noyau de cette forme est noté $\mathbf{g}(\ell)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\ell) &= \{x \in \mathbf{g} | \langle \ell, [x, y] \rangle = 0 \ \ \forall y \in \mathbf{g}\} \\ &= \{x \in \mathbf{g} | \mathrm{ad}^* x(\ell) \equiv 0\}. \end{aligned}$$

b) On appelle *polarisation* au point ℓ de $\mathbf{g}^*$ toute sous-algèbre $\mathbf{h}$ de $\mathbf{g}$ qui est en même temps un sous-espace totalement isotrope maximal, c'est-à-dire toute sous-algèbre $\mathbf{h}$ telle que

$$\langle \ell, [\mathbf{h}, \mathbf{h}] \rangle \equiv 0$$

$$\dim \mathbf{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{g} + \dim \mathbf{g}(\ell)).$$

c) Pour un sous-espace $\mathbf{k}$ de $\mathbf{g}$ on définit $\mathbf{k}^\perp$ par

$$\mathbf{k}^\perp = \{p \in \mathbf{g}^* | \langle p, \mathbf{k} \rangle \equiv 0\}.$$

On montre alors facilement par des considérations sur les dimensions que

$$(\mathrm{ad}^* \mathbf{g})(\ell) = \mathbf{g}(\ell)^\perp.$$

d) Soit $\mathbf{d}$ une algèbre de Lie de dérivations agissant sur $\mathbf{g}$. On appelle *annihilateur* de ℓ et on note $\mathbf{d}(\ell)$ le sous-espace

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\ell) &= \{d \in \mathbf{d} | d^*(\ell) \equiv 0\} \\ &= \{d \in \mathbf{d} | \langle \ell, d(\mathbf{g}) \rangle \equiv 0\}. \end{aligned}$$

1.3. a) Dans une algèbre de Lie réelle $\mathbf{g}$ de dimension finie on appelle *bonne suite de sous-algèbres* toute suite décroissante de sous-algèbres

$$\{0\} = \mathbf{g}_n \subset \mathbf{g}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathbf{g}_{i+1} \subset \mathbf{g}_i \subset \ldots \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}$$

telle que

(i) $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 1$ pour tout i

(ii) Si $\mathbf{g}_i$ n'est pas un idéal de $\mathbf{g}$, alors $\mathbf{g}_{i-1}$ et $\mathbf{g}_{i+1}$ sont des idéaux de $\mathbf{g}$ et la représentation adjointe de $\mathbf{g}$ dans $\mathbf{g}_{i-1}/\mathbf{g}_{i+1}$ est irréductible.

b) Toute algèbre de Lie résoluble réelle, en particulier toute algèbre exponentielle réelle admet de bonnes suites de sous-algèbres.

c) Pour une bonne suite de sous-algèbres d'une algèbre résoluble $\mathbf{g}$ on montre facilement que

(i) $\mathbf{g}_1$ est un idéal de $\mathbf{g}$

(ii) Si $\mathbf{g}_i$ n'est pas un idéal,

$$[\mathbf{g}_{i-1}, \mathbf{g}_{i-1}] \subset \mathbf{g}_{i+1}.$$

En particulier, $[\mathbf{g}_{i-1}, \mathbf{g}_i] \subset \mathbf{g}_{i+1} \subset \mathbf{g}_i$ et $\mathbf{g}_i$ est un idéal dans $\mathbf{g}_{i-1}$.

2. But du travail

2.1. Dans la suite $\mathbf{g}$ désignera une algèbre de Lie exponentielle réelle et $\mathbf{d}$ désignera une algèbre de Lie exponentielle de dérivations de $\mathbf{g}$, contenant ad $\mathbf{g}$ et faisant de $\mathbf{g}$ un $\mathbf{d}$-module de type exponentiel. Ceci signifie que si $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ est l'algèbre complexifiée correspondante et si

$$\mathbf{g}_{\mathbb{C}} = \mathbf{g}_0 \triangleright \mathbf{g}_1 \triangleright \ldots \triangleright \mathbf{g}_n = \{0\}$$

est une suite de Jordan-Hölder pour l'action de $\mathbf{d}$, alors $\mathbf{d}$ agit sur les quotients $\mathbf{g}_k/\mathbf{g}_{k+1} = \mathbb{C}\bar{x}_k$ (qui sont tous de dimension 1) par

$$d(\bar{x}_k) = \varphi_k(d)(1 + i w_k)\bar{x}_k$$

φ_k étant une forme réelle sur $\mathbf{d}$.
([1], Chapitre I).

2.2. Dans ([1], Chapitre IV), Vergne démontre le résultat suivant : Si $\mathbf{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle réelle, si $\ell \in \mathbf{g}^*$ et si

$$\{0\} = \mathbf{g}_n \subset \mathbf{g}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}$$

est une bonne suite de sous-algèbres, alors

$$\mathbf{h} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i)$$

est une polarisation au point ℓ de $\mathbf{g}^*$ ([1], IV.4.3.5. et IV.4.3.7.)

2.3. Le but du présent travail consiste à raffiner les méthodes de Vergne afin de construire une polarisation $\mathbf{d}(\ell)$-invariante, en partant d'une suite de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$ pour l'action de $\mathbf{d}$.

3. Sous-espace isotrope maximal dans un espace vectoriel

3.1. Dans ce paragraphe V désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, B une forme bilinéaire alternée sur V et

$$\{0\} = V_n \subset V_{n-1} \subset \ldots \subset V_{i+1} \subset V_i \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

une suite de sous-espaces de V telle que

$$\dim V_i/V_{i+1} = 1 \quad \text{ou} \quad \dim V_i/V_{i+1} = 2.$$

Notons par B_i la restriction de B à V_i et par $N_i(B_i)$ le noyau de B_i dans V_i.

3.2. **Théorème :** Si le cas $\dim V_i/V_{i+1} = 2$ et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$ est exclu pour tout i, alors

$$H = \sum_{i=0}^{n} N_i(B_i)$$

est un sous-espace isotrope maximal de V.

Démonstration : Les $N_i(B_i)$ étant des sous-espaces vectoriels, il en est de même de H. De plus, soit $x \in N_i(B_i)$ et soit $y \in N_j(B_j)$ avec $i \leq j$. Comme $V_j \subset V_i$, $y \in V_i$ et $B(x,y) = 0$ vu que $x \in N_i(B_i)$. On en déduit que $B(H,H) \equiv 0$, c'est-à-dire que H est isotrope. Démontrons par récurrence que

$$\dim H = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B)).$$

Notons par H_i le sous-espace $\sum_{j=i}^{n} N_j(B_j)$. Evidemment $B(H_i, H_i) \equiv 0$ pour tout i.
Pour $i = n$ on a $V_n = N_n(B_n) = H_n = \{0\}$ et on a bien

$$\dim H_n = \frac{1}{2}(\dim V_n + \dim N_n(B_n)).$$

Pour $i = n-1$, il faut distinguer deux cas :
Si $\dim V_{n-1} = 1$, alors $V_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1}$ et $B(x_{n-1}, x_{n-1}) = 0$, la forme B étant alternée.
Donc $H_{n-1} = N_{n-1}(B_{n-1}) + \{0\} = \mathbb{R}x_{n-1} = V_{n-1}$ et

$$\dim H_{n-1} = 1 = \frac{1}{2}(\dim V_{n-1} + \dim N_{n-1}(B_{n-1})).$$

Si $\dim V_{n-1} = 2$, alors $V_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1} \oplus \mathbb{R}x'_{n-1}$. Supposons d'abord $B(x_{n-1}, x'_{n-1}) = 0$.
Alors $H_{n-1} = N_{n-1}(B_{n-1}) + \{0\} = V_{n-1}$ et

$$\dim H_{n-1} = 2 = \frac{1}{2}(\dim V_{n-1} + \dim N_{n-1}(B_{n-1})).$$

Si $B(x_{n-1}, x'_{n-1}) \neq 0$, alors $N_{n-1}(B_{n-1}) = \{0\} = N_n(B_n)$ et $\dim V_{n-1}/V_n = 2$. Or ce cas est à exclure par hypothèse.
Supposons à présent

$$\dim H_{i+1} = \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + \dim N_{i+1}(B_{i+1}))$$

et démontrons la même formule pour l'indice i.

a) Supposons d'abord que $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$, donc que $N_i(B_i) \subset N_{i+1}(B_{i+1})$. Alors

$$H_i = \sum_{j=i}^{n} N_j(B_j) = \sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j) = H_{i+1}$$

et $\dim H_i = \dim H_{i+1}$. Distinguons deux cas.

a1) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 1$, c'est-à-dire si $V_i = \mathbf{R}x_i \oplus V_{i+1}$, on a : $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \qquad \text{(I)},$$

condition qui se réduit à un nombre fini d'équations linéaires, si on remplace V_{i+1} par une base de V_{i+1}.
$N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ (comme $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$) tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(II)}.$$

Les rangs des systèmes linéaires (I) et (II) vérifient donc

$$\mathrm{rg(I)} \leq \mathrm{rg(II)} \leq \mathrm{rg(I)} + 1.$$

Deux cas sont alors possibles.
Soit rg(I) = rg(II). Les systèmes (I) et (II) sont équivalents et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 1 + \dim N_{i+1}(B_{i+1})) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\dim H_{i+1} \end{aligned}$$

ce qui est impossible, puisque $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$ est un nombre entier. Donc ce cas est à exclure.
Soit rg(II) = rg(I) + 1.
Alors $\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim N_i(B_i) + 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 1 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) - 1) \\ &= \dim H_{i+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \dim H_i \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule est vraie pour l'indice i.

a2) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 2$, c'est-à-dire si $V_i = \mathbf{R}x_i \oplus \mathbf{R}x_i' \oplus V_{i+1}$, on a : $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \qquad \text{(I)},$$

condition qui se réduit à un nombre fini d'équations linéaires.
$N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ (comme $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$) tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \\ B(x, x_i') = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(II)}.$$

Les rangs des systèmes linéaires (I) et (II) vérifient donc

$$\mathrm{rg(I)} \leq \mathrm{rg(II)} \leq \mathrm{rg(I)} + 2.$$

Trois cas sont possibles.
Soit rg(I) = rg(II). Les systèmes (I) et (II) sont équivalents et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$ avec $\dim V_i/V_{i+1} = 2$. Ce cas a été exclu d'avance par hypothèse.
Soit rg(II) = rg(I) + 1.
Alors $\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim N_i(B_i) + 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 2 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) - 1) \\ &= \frac{1}{2} + \dim H_{i+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Ceci est impossible, comme $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$ doit être entier.

Soit $\mathrm{rg(II)} = \mathrm{rg(I)} + 2$.
Alors $\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim N_i(B_i) + 2$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 2 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) - 2) \\
&= \dim H_{i+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \dim H_i
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule est vraie pour l'indice i.

b) Supposons ensuite $N_i(B_i) \not\subset V_{i+1}$, c'est-à-dire $N_i(B_i) \not\subset N_{i+1}(B_{i+1})$. Montrons d'abord que

$$\begin{aligned}
N_i(B_i) \cap H_{i+1} &= N_i(B_i) \cap (\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)) \\
&= N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1}).
\end{aligned}$$

En effet, d'une part

$$N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i) \cap (\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)).$$

D'autre part, soit

$$\sum_{j=i+1}^{n} x_j \in \sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j) \subset \sum_{j=i+1}^{n} V_j \subset V_{i+1} \subset V_i.$$

Supposons en plus que $\sum_{j=i+1}^{n} x_j \in N_i(B_i)$. En particulier

$$B(\sum_{j=i+1}^{n} x_j, V_i) \equiv 0$$

et forcément

$$B(\sum_{j=i+1}^{n} x_j, V_{i+1}) \equiv 0.$$

Donc $\sum_{j=i+1}^{n} x_j \in N_{i+1}(B_{i+1})$ et

$$N_i(B_i) \cap (\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)) \subset N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1}),$$

c'est-à-dire les deux expressions sont en fait égales. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\dim H_i &= \dim(\sum_{j=i}^{n} N_j(B_j)) \\
&= \dim(N_i(B_i) + \sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)) \\
&= \dim N_i(B_i) + \dim(\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)) \\
&\qquad - \dim[N_i(B_i) \cap (\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j))] \\
&= \dim H_{i+1} + \dim N_i(B_i) - \dim(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})).
\end{aligned}$$

Distinguons maintenant deux cas.

b1) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 1$, il existe $x_i \in N_i(B_i)$ tel que $x_i \notin V_{i+1}$ et donc tel que $V_i = \mathbb{R}x_i \oplus V_{i+1}$, puisque $N_i(B_i) \not\subset V_{i+1}$. On a : $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad \text{(I)},$$

condition qui se réduit à un nombre fini d'équations.
$N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_i$ tels que

$$\begin{cases} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad \text{(II)}$$

puisque $x_i \in N_i(B_i)$, donc que $B(x, x_i) = 0$ pour tout $x \in V_i$. On en déduit immédiatement que

$$N_i(B_i) \cap V_{i+1} = N_{i+1}(B_{i+1}) = N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})$$

c'est-à-dire que $N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i)$.
Remarquons encore que (I) et (II) ont même rang dans V_{i+1}, resp. V_i. En effet, soit $e_1, \ldots, e_p$ une base de V_{i+1}. Les systèmes (I) et (II) définissent les noyaux des applications linéaires de V_{i+1}, resp. V_i dans $\mathbf{R}^p$ données par

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} B(x,e_1) \\ B(x,e_2) \\ \vdots \\ B(x,e_p) \end{pmatrix} := V(x)$$

Le rang du système (I) est donc égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1),\ldots,V(e_p)$. Le rang du système (II) est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1), \ldots, V(e_p)$, $V(x_i)$. Or

$$V(x_i) = \begin{pmatrix} B(x_i,e_1) \\ B(x_i,e_2) \\ \vdots \\ B(x_i,e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque $x_i \in N_i(B_i)$ et les systèmes (I) et (II) ont même rang ρ. Par conséquent

$$\begin{aligned} \dim N_{i+1}(B_{i+1}) &= \dim V_{i+1} - \rho \\ \dim N_i(B_i) &= \dim V_i - \rho \end{aligned}$$

et

$$\dim N_i(B_i) = \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 1.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \dim H_i &= \dim H_{i+1} + \dim N_i(B_i) - \dim N_{i+1}(B_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2}(\dim N_{i+1}(B_{i+1}) + \dim V_{i+1}) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule sur les dimensions est vérifiée pour l'indice i.

b2) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 2$, on a
$\dim N_i(B_i) \leq \dim[N_i(B_i) \cap V_{i+1}] + 2$. Supposons d'abord $\dim N_i(B_i) = \dim[N_i(B_i) \cap V_{i+1}] + 2$. Alors il existe $x_i, x_i' \in N_i(B_i)$, n'appartenant pas à V_{i+1} tels que

$$V_i = \mathbf{R}x_i \oplus \mathbf{R}x_i' \oplus V_{i+1}.$$

Le raisonnement est alors analogue au cas $\dim V_i/V_{i+1} = 1$. $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad \text{(I)}.$$

$N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_i$ tels que

$$\begin{cases} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \\ B(x, x_i') = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad \text{(II)}$$

comme $x_i, x_i' \in N_i(B_i)$, donc que $B(x, x_i) = B(x, x_i') = 0$ pour tout $x \in V_i$. On en déduit immédiatement que

$$N_i(B_i) \cap V_{i+1} = N_{i+1}(B_{i+1}) = N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})$$

c'est-à-dire que $N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i)$. Avec les mêmes définitions que dans le cas $\dim V_i/V_{i+1} = 1$, le rang du système (I) est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1), \ldots, V(e_p)$. Le rang du système (II) est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1),\ldots,V(e_p),V(x_i),V(x_i')$.

Or

$$V(x_i) = \begin{pmatrix} B(x_i, e_1) \\ B(x_i, e_2) \\ \vdots \\ B(x_i, e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } V(x_i') = \begin{pmatrix} B(x_i', e_1) \\ B(x_i', e_2) \\ \vdots \\ B(x_i', e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque $x_i, x_i' \in N_i(B_i)$. Donc les systèmes (I) et (II) ont même rang ρ. Par conséquent

$$\begin{aligned} \dim N_{i+1}(B_{i+1}) &= \dim V_{i+1} - \rho \\ \dim N_i(B_i) &= \dim V_i - \rho \end{aligned}$$

et

$$\dim N_i(B_i) = \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 2.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \dim H_i &= \dim H_{i+1} + \dim N_i(B_i) - \dim N_{i+1}(B_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + \dim N_{i+1}(B_{i+1})) + 2 \\ &= \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule sur les dimensions est vérifiée pour l'indice i. Supposons ensuite que
$\dim N_i(B_i) = \dim(N_i(B_i) \cap V_{i+1}) + 1 = \dim(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})) + 1.$
Donc il existe $x_i \in N_i(B_i)$, $x_i \notin V_{i+1}$, $x_i \notin N_{i+1}(B_{i+1})$ tel que

$$N_i(B_i) = \mathbb{R}x_i \oplus (N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})).$$

Deux cas peuvent alors se présenter :
Soit $N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i)$. Alors $N_i(B_i) = \mathbb{R}x_i \oplus N_{i+1}(B_{i+1})$, $\dim N_i(B_i) = \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 2 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 1) \\ &= \frac{3}{2} + \dim H_{i+1} \end{aligned}$$

ce qui est à exclure comme $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$ est un entier. Soit $N_{i+1}(B_{i+1}) \not\subset N_i(B_i)$. Il existe alors $x_{i+1} \in N_{i+1}(B_{i+1})$ tel que $x_{i+1} \notin N_i(B_i)$. Par conséquent

$$(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})) \oplus \mathbb{R}x_{i+1} \subset N_{i+1}(B_{i+1})$$

et

$$\begin{aligned} \dim N_{i+1}(B_{i+1}) &\geq \dim(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})) + 1 \\ &= \dim N_i(B_i). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &\leq \frac{1}{2}(2 + \dim V_{i+1} + \dim N_{i+1}(B_{i+1})) \\ &= 1 + \dim H_{i+1}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} H_i = \sum_{j=i}^{n} N_j(B_j) &= N_i(B_i) + (\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)) \\ &= Rx_i \oplus (\sum_{j=i+1}^{n} N_j(B_j)) \\ &\quad \text{car } x_i \notin V_{i+1} \\ &\quad \text{donc } x_i \notin N_j(B_j), j \geq i+1 \\ &= Rx_i \oplus H_{i+1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\dim H_i = \dim H_{i+1} + 1$ et

$$\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) \leq \dim H_i.$$

Comme H_i est un sous-espace isotrope, sa dimension ne peut dépasser $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$. Il faut donc avoir égalité et la formule sur les dimensions est vérifiée pour l'indice i. Supposons finalement que $\dim N_i(B_i) = \dim(N_i(B_i) \cap V_{i+1})$. Donc $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$ contrairement à notre hypothèse.
La discussion de cas est maintenant achevée et le théorème est démontré.

3.3. Le fait d'exclure dès le départ le cas $\dim V_i/V_{i+1} = 2$ et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$ est bien une restriction nécessaire comme nous allons le voir dans la section suivante.

4. Sous-espace isotrope maximal dans une algèbre exponentielle $\mathfrak{g}$ soumise à une action exponentielle $\mathfrak{d}$

4.1. Dans la suite $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre exponentielle, $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ (par exemple le radical nilpotent), $\mathfrak{d}$ une algèbre exponentielle de dérivations de $\mathfrak{g}$, contenant ad $\mathfrak{g}$, faisant de $\mathfrak{g}$ un $\mathfrak{d}$-module de type exponentiel et tel que $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ est un idéal $\mathfrak{d}$-invariant. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$.

4.2. **Exemples :** a) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre exponentielle et $\mathfrak{d} =$ ad $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent, donc $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, radical nilpotent de $\mathfrak{g}$.
b) Soit $\mathfrak{k}$ une algèbre exponentielle. Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(\ell) + [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Alors $\mathfrak{g}$ est un idéal dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{d} = \text{ad}\, \mathfrak{k}|_{\mathfrak{g}}$ convient car $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{k}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ qui est nilpotent, donc inclus dans le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$.

4.3. Comme $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{d}$-module de type exponentiel, il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{d}$-invariants, tels que

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \triangleright \mathfrak{g}_1 \triangleright \ldots \triangleright \mathfrak{g}_i \triangleright \mathfrak{g}_{i+1} \triangleright \ldots \triangleright \mathfrak{g}_n = \{0\}$

$\mathfrak{g}_p = \mathfrak{n}$ pour un certain $p < n$

$\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ ou $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$.

Le quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $\mathfrak{d}$. Ceci signifie :

Si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$, il existe $\varphi_i \in \mathfrak{d}^*$, $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$d(x_i) = \varphi_i(d)x_i \bmod \mathfrak{g}_{i+1}, \text{ pour tout } d \in \mathfrak{d}.$$

Si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$, il existe $\varphi_i \in \mathfrak{d}^*$, $w_i \in \mathbb{R}^*$, $x_i, x_i' \in \mathfrak{g}_i$, $x_i, x_i' \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$d\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \varphi_i(d)\begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{g}_{i+1},$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$.

4.4. Comme $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{n}$, il faut avoir $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ pour $i < p$. En effet, supposons $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$. Puisque $d(x_i) \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ et que $d(x_i') \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, $\varphi_i \equiv 0$. Or alors le quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ n'est plus irréductible, contrairement à l'hypothèse. Donc $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$, $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$, $d(x_i) = 0 \bmod \mathfrak{g}_{i+1}$ pour tout $d \in \mathfrak{d}$ étant donné que $d(x_i) \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_{i+1}$.

4.5. **Remarque :** Dans tous les cas, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. En effet, comme $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal, $[\mathfrak{g}_{i+1}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. De plus $\varphi_i(\text{ad}\, x_i) = \varphi_i(\text{ad}\, x_i') = 0$, donc $[x_i, x_i'] \in \mathfrak{g}_{i+1}$.

4.6. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ non nul. La forme bilinéaire utilisée sera

$$(x, y) \longmapsto \langle \ell, [x, y] \rangle.$$

On notera $\ell_i = \ell|_{\mathfrak{g}_i}$ et les noyaux correspondants seront notés $\mathfrak{g}_i(\ell_i)$.

4.7. **Condition suffisante pour exclure le cas $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$**

a) Dans cette section nous montrerons le résultat suivant : Si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$, alors il existe $x_i, x_i' \in \mathfrak{g}_i$, $x_i, x_i' \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x_i' \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$$
$$\langle \ell, [x_i, x_i'] \rangle \neq 0$$
$$\langle \ell, [x_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv \langle \ell, [x_i', \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0$$
$$d\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \varphi_i(d)\begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{g}_{i+1}.$$

On en déduit que

$$\langle \ell, d([x_i, x_i']) \rangle = 2\varphi_i(d)\langle \ell, [x_i, x_i'] \rangle.$$

Donc s'il existe $d \in \mathfrak{d}$ tel que $\varphi_i(d) \neq 0$ et tel que $\langle \ell, d([x_i, x_i']) \rangle = 0$ (par exemple si $\langle \ell, d(\mathfrak{n}) \rangle = 0$), on a une contradiction et le cas $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ est exclu. Démontrons les résultats précédents.

b) Supposons $\mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. Comme $\mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbf{g}_{i+1}$, on a $\mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i} \subset \mathbf{g}_i(\ell_i)^{\perp}|_{\mathbf{g}_i} = (\mathrm{ad}^*\mathbf{g}_i)(\ell_i)$. Soit $0 \neq p \in \mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i}$. Il existe donc $x_i \in \mathbf{g}_i$ tel que $p = (\mathrm{ad}^* x_i)(\ell_i)$. Supposons $x_i \in \mathbf{g}_{i+1}$. Comme $(\mathrm{ad}^* x_i)(\ell_i) \in \mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i}$, ceci signifie que $x_i \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) = \mathbf{g}_i(\ell_i)$ et $p = (\mathrm{ad}^* x_i)(\ell_i) \equiv 0$, contrairement à notre hypothèse. Donc $x_i \notin \mathbf{g}_{i+1}$, c'est-à-dire

$$x_i \in \mathbf{g}_i, x_i \notin \mathbf{g}_{i+1}$$

$$p = (\mathrm{ad}^* x_i)(\ell_i) \in \mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i} \Longleftrightarrow \langle \ell, [x_i, \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0.$$

c) Supposons en plus $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 2$. Alors

$$\dim(\mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i}) = \dim \mathbf{g}_i - \dim \mathbf{g}_{i+1} = 2.$$

Donc il existe $p' \in \mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i}$ tel que p et p' forment une base de $\mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i}$. Comme en b) il existe x_i' tel que

$$x_i' \in \mathbf{g}_i, x_i' \notin \mathbf{g}_{i+1}$$

$$p' = (\mathrm{ad}^* x_i')(\ell_i) \in \mathbf{g}_{i+1}^{\perp}|_{\mathbf{g}_i} \Longleftrightarrow \langle \ell, [x_i', \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0.$$

Montrons que x_i et x_i' sont indépendants modulo $\mathbf{g}_{i+1}$. En effet, supposons $x_i - \lambda x_i' = g_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}$. De plus $\langle \ell, [x_i - \lambda x_i', \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0$. Donc $x_i - \lambda x_i' \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) = \mathbf{g}_i(\ell_i)$, c'est-à-dire $\mathrm{ad}^*(x_i - \lambda x_i')(\ell_i) \equiv 0$ et $p = (\mathrm{ad}^* x_i)(\ell_i) = \lambda(\mathrm{ad}^* x_i')(\ell_i) = \lambda p'$, contrairement à notre hypothèse. Donc x_i et x_i' sont indépendants modulo $\mathbf{g}_{i+1}$ et

$$\mathbf{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x_i' \oplus \mathbf{g}_{i+1}.$$

D'ailleurs x_i, x_i' peuvent être choisis tels que

$$d\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \varphi_i(d)\begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \bmod \mathbf{g}_{i+1}$$

pour tout $d \in \mathbf{d}$, $0 \neq \varphi_i \in \mathbf{d}^*$. En effet, si $\langle \ell, [x_i, \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0$ et $\langle \ell, [x_i', \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0$, il en est de même de toutes les combinaisons linéaires $\tilde{x}_i$ et $\tilde{x}_i'$ de x_i et x_i' et, pour des combinaisons linéaires appropriées, on a la formule précédente. De plus, $\langle \ell, [\tilde{x}_i, \mathbf{g}_i]\rangle \not\equiv 0$ ou $\langle \ell, [\tilde{x}_i', \mathbf{g}_i]\rangle \not\equiv 0$. En effet, $\langle \ell, [\tilde{x}_i, \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$ et $\langle \ell, [\tilde{x}_i', \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$ entraîne $\langle \ell, [x_i, \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$ et $\langle \ell, [x_i', \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$, contrairement à notre hypothèse de départ $p \not\equiv 0$ et $p' \not\equiv 0$.

Supposons à présent $\langle \ell, [x_i, x_i']\rangle = 0$, resp. $\langle \ell, [\tilde{x}_i, \tilde{x}_i']\rangle = 0$ si on a dû remplacer x_i et x_i' par des combinaisons linéaires $\tilde{x}_i$ et $\tilde{x}_i'$. Alors

$$\langle \ell, [x_i, \lambda x_i + \mu x_i' + \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0 \quad \text{quels que soient} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\langle \ell, [x_i, \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$$

et $p = \mathrm{ad}^* x_i(\ell_i) \equiv 0$, contrairement à l'hypothèse. On montre de même que $\langle \ell, [\tilde{x}_i, \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$ et $\langle \ell, [\tilde{x}_i', \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$ dans le second cas, contrairement à notre hypothèse. Donc $\langle \ell, [x_i, x_i']\rangle \neq 0$, resp. $\langle \ell, [\tilde{x}_i, \tilde{x}_i']\rangle \neq 0$. Notons x_i et x_i' à la place de $\tilde{x}_i$ et $\tilde{x}_i'$ dans la suite.

d) Soit $d \in \mathbf{d}$. Il existe $g_{i+1}, g_{i+1}' \in \mathbf{g}_{i+1}$ tels que

$$\begin{aligned} d(x_i) &= \varphi_i(d)x_i - \varphi_i(d)w_i x_i' + g_{i+1} \\ d(x_i') &= \varphi_i(d)w_i x_i + \varphi_i(d)x_i' + g_{i+1}' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \ell, d([x_i, x_i'])\rangle &= \langle \ell, [d(x_i), x_i']\rangle + \langle \ell, [x_i, d(x_i')]\rangle \\ &= \langle \ell, [\varphi_i(d)x_i - \varphi_i(d)w_i x_i' + g_{i+1}, x_i']\rangle \\ &\quad + \langle \ell, [x_i, \varphi_i(d)w_i x_i + \varphi_i(d)x_i' + g_{i+1}']\rangle \\ &= 2\varphi_i(d)\langle \ell, [x_i, x_i']\rangle. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration des résultats de a).

4.8. **Contre-exemple :** L'exemple suivant montre que $\sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i)$ n'est pas nécessairement un sous-espace isotrope maximal, donc n'est pas nécessairement une polarisation.

Soit $\mathfrak{g} = \mathbb{R}t + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}y$ avec

$$\begin{array}{ll} [t,y] = y & [u,y] = 0 \\ [t,u] = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv & [u,v] = y \\ [t,v] = \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v & [v,y] = 0. \end{array}$$

Soit $\ell = y^* \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\mathbf{d} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

a) Vérifions d'abord que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, c'est-à-dire que l'identité de Jacobi est vérifiée. En effet :

$$\begin{array}{ll} & [u,[v,y]] = [u,0] = 0 \\ & -[v,[y,u]] - [y,[u,v]] = -[v,0] - [y,y] = 0 \\ \text{et} & [u,[v,y]] = -[v,[y,u]] - [y,[u,v]] \\ & [t,[v,y]] = [t,0] = 0 \\ & -[v,[y,t]] - [y,[t,v]] = [v,y] - [y,\frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v] = 0 \\ \text{et} & [t,[v,y]] = -[v,[y,t]] - [y,[t,v]] \\ & [t,[u,y]] = [t,0] = 0 \\ & -[u,[y,t]] - [y,[t,u]] = [u,y] - [y,\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv] = 0 \\ \text{et} & [t,[u,y]] = -[u,[y,t]] - [y,[t,u]] \\ & [t,[u,v]] = [t,y] = y \\ & -[u,[v,t]] - [v,[t,u]] = [u,\frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v] - [v,\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv] \\ & = [u,v] = y \\ \text{et} & [t,[u,v]] = -[u,[v,t]] - [v,[t,u]]. \end{array}$$

Comme l'inégalité de Jacobi reste vérifiée si on modifie l'ordre des éléments et si deux éléments sont égaux, $\mathfrak{g}$ est bien une algèbre de Lie.

b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est exponentielle comme nous le verrons en déterminant ses racines. En effet, soit :

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g} = & \mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}t + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}y \\ & \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}y \\ & \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}y \\ & \mathfrak{g}_3 = \{0\}. \end{array}$$

Donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \rhd \mathfrak{g}_1 \rhd \mathfrak{g}_2 \rhd \mathfrak{g}_3 = \{0\}.$$

Les racines sont données par :

(i) pour $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_1$: $(\mathrm{ad}\,x)(t) = 0 \bmod \mathfrak{g}_1$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$

(ii) pour $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2$: $(\mathrm{ad}\,x)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \psi(x)\begin{pmatrix} 1 & -w \\ w & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mod $\mathfrak{g}_2$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ avec

$$\begin{array}{l} \psi(t) = \frac{1}{2} \\ \psi(u) = 0 \\ \psi(v) = 0 \\ \psi(y) = 0 \end{array}$$

(iii) pour $\mathfrak{g}_2/\mathfrak{g}_3$: $(\mathrm{ad}\,x)(y) = \varphi(x)y$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ avec

$$\begin{array}{ll} \varphi(t) = 1 & \varphi(v) = 0 \\ \varphi(u) = 0 & \varphi(y) = 0. \end{array}$$

La forme des racines montre donc que $\mathfrak{g}$ est une algèbre exponentielle.

c) Déterminons à présent $\sum_{i=0}^{2} \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ et montrons que ce n'est pas un sous-espace isotrope maximal.

(i) Soit $w = \alpha t + \beta u + \gamma v + \delta y \in \mathfrak{g}_0(\ell_0)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle \ell, [w,t] \rangle = \beta\langle \ell, [u,t] \rangle + \gamma\langle \ell, [v,t] \rangle + \delta\langle \ell, [y,t] \rangle \\ & = & -\beta\langle \ell, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv \rangle - \gamma\langle \ell, \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v \rangle - \delta\langle \ell, y \rangle = -\delta. \end{array}$$

Donc $\delta = 0$.

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle \ell, [w,u] \rangle = \alpha\langle \ell, [t,u] \rangle + \gamma\langle \ell, [v,u] \rangle + \delta\langle \ell, [y,u] \rangle \\ & = & \alpha\langle \ell, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv \rangle - \gamma\langle \ell, y \rangle = -\gamma. \end{array}$$

Donc $\gamma = 0$.

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \langle \ell, [w,v] \rangle = \alpha\langle \ell, [t,v] \rangle + \beta\langle \ell, [u,v] \rangle + \delta\langle \ell, [y,v] \rangle \\ & = & \alpha\langle \ell, \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v \rangle + \beta\langle \ell, y \rangle = \beta. \end{array}$$

Donc $\beta = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w,y] \rangle = \alpha\langle \ell, [t,y]\rangle + \beta\langle \ell, [u,y]\rangle + \gamma\langle \ell, [v,y]\rangle \\ &= \alpha\langle \ell, y\rangle = \alpha. \end{aligned}$$

Donc $\alpha = 0$.
Par conséquent $\mathbf{g}_0(\ell_0) = \{0\}$.

(ii) Soit $w = \beta u + \gamma v + \delta y \in \mathbf{g}_1(\ell_1)$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w,u] \rangle = \gamma\langle \ell, [v,u]\rangle + \delta\langle \ell, [y,u]\rangle \\ &= -\gamma\langle \ell, y\rangle = -\gamma. \end{aligned}$$

Donc $\gamma = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w,v] \rangle = \beta\langle \ell, [u,v]\rangle + \delta\langle \ell, [y,v]\rangle \\ &= \beta\langle \ell, y\rangle = \beta. \end{aligned}$$

Donc $\beta = 0$.

$$P = \langle \ell, [w,y]\rangle = \beta\langle \ell, [u,y]\rangle + \gamma\langle \ell, [v,y]\rangle = 0.$$

Par conséquent $\mathbf{g}_1(\ell_1) = \mathbb{R}y$.

(iii) Comme $\mathbf{g}_2$ est abélien, on a $\mathbf{g}_2(\ell_2) = \mathbf{g}_2 = \mathbb{R}y$.

(iv) Nous remarquons en particulier que $\dim \mathbf{g}_1/\mathbf{g}_2 = 2$ et $\mathbf{g}_1(\ell_1) = \mathbf{g}_2(\ell_2)$, cas que nous avons dû exclure dans la théorie générale.

(v) On a

$$\sum_{i=0}^{2} \mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbb{R}y.$$

d) Remarquons finalement que $\sum_{i=0}^{2} \mathbf{g}_i(\ell_i)$ n'est pas un sous-espace isotrope maximal, donc n'est pas une polarisation. En effet, la dimension de tout sous-espace isotrope maximal, et donc de toute polarisation, est donnée par

$$\frac{1}{2}(\dim \mathbf{g} + \dim \mathbf{g}(\ell)) = \frac{1}{2}(4+0) = 2.$$

Une polarisation de $\mathbf{g}$ est par exemple donnée par $\mathbf{h} = \mathbb{R}v + \mathbb{R}y$. En effet, $\dim \mathbf{h} = 2$, $[\mathbf{h},\mathbf{h}] = 0$ et donc $\langle \ell, [\mathbf{h},\mathbf{h}]\rangle = 0$.

4.9. Si le cas $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 2$ et $\mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ se présente, il faut donc intercaler un sous-espace de manière à se ramener à des quotients de dimension 1, tout en tenant compte le mieux possible de l'action de $\mathbf{d}$.

4.10. **Construction d'un sous-espace isotrope maximal :** Soit la situation présentée en 4.3. et 4.4. Considérons la sous-algèbre $\mathbf{n}$ soumise à l'action de $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}}) +$ ad $\mathbf{n}$. Remarquons d'abord que $\mathbf{d}_1$ est une sous-algèbre de dérivations de $\mathbf{n}$. En effet, $[\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}}), \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})] \subset \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$ puisque $\mathbf{d}(\mathbf{n}) \subset \mathbf{n}$, $[\mathrm{ad}\,\mathbf{n}, \mathrm{ad}\,\mathbf{n}] \subset \mathrm{ad}\,\mathbf{n}$ et quels que soient $d \in \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$, $n, n' \in \mathbf{n}$,

$$\begin{aligned} [d, \mathrm{ad}\, n](n') &= (d \circ \mathrm{ad}\, n - \mathrm{ad}\, n \circ d)(n') \\ &= d([n,n']) - [n, d(n')] \\ &= [d(n), n'] \\ &= \mathrm{ad}\, d(n)(n') \end{aligned}$$

avec $\mathrm{ad}\ d(n) \in \mathrm{ad}\ \mathbf{n}$, puisque $d(n) \in \mathbf{n}$. Donc $[d, \mathrm{ad}\, n] \in \mathrm{ad}\ \mathbf{n}$. Remarquons que la suite

$$\mathbf{n} = \mathbf{g}_p \triangleright \mathbf{g}_{p+1} \triangleright \ldots \triangleright \mathbf{g}_n = \{0\}$$

est évidemment $(\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}}) +$ ad $\mathbf{n})$-invariante, puisque $(\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}}) +$ ad $\mathbf{n}) \subset \mathbf{d}|_{\mathbf{n}}$. Rappelons que si $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 2$ il existe x_i, x_i' tels que $x_i, x_i' \in \mathbf{g}_i$, $x_i, x_i' \notin \mathbf{g}_{i+1}$ et

$$d\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \varphi_i(d)\begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \bmod \mathbf{g}_{i+1}.$$

Rappelons encore que si $\mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$, on peut choisir x_i, x_i' tels que $\langle \ell, [x_i, x_i']\rangle \neq 0$. Remarquons finalement que $\varphi_i(\mathrm{ad}\ \mathbf{n}) = 0$ puisque ad $\mathbf{n}$ est nilpotent.
Supposons d'abord le quotient $\mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1}$ irréductible pour

l'action de $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})+$ ad $\mathbf{n}$. Il existe donc $d \in \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$ tel que $\varphi_i(d) \neq 0$. Alors

$$0 = -\langle d^*\ell, [x_i, x_i']\rangle = \langle \ell, d([x_i, x_i'])\rangle.$$

Or, dans le cas où $\mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$, on peut choisir x_i, x_i' tels que $\langle \ell, d([x_i, x_i'])\rangle = 2\varphi_i(d)\langle \ell, [x_i, x_i']\rangle$ et $\langle \ell, [x_i, x_i']\rangle \neq 0$. Ceci est une contradiction. Donc si $\mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})+$ ad $\mathbf{n}$, le cas $\mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ ne peut pas se présenter.
Supposons ensuite $\mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1}$ réductible pour l'action de $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})+$ ad $\mathbf{n}$. Donc il existe $\mathbf{g}_i'$ (par exemple $\mathbf{g}_i' = \mathbb{R}x_i' + \mathbf{g}_{i+1}$) $(\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})+$ ad $\mathbf{n})$-invariant tel que $\mathbf{g}_{i+1} \subset \mathbf{g}_i' \subset \mathbf{g}_i$ et $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_i' = \dim \mathbf{g}_i'/\mathbf{g}_{i+1} = 1$. Comme $\mathbf{g}_i'$ est ad $\mathbf{n}$-invariant, $\mathbf{g}_i'$ est un idéal dans $\mathbf{n}$. De cette manière on intercale à certains endroits des $\mathbf{g}_i'$ entre $\mathbf{g}_i$ et $\mathbf{g}_{i+1}$ de manière à exclure le cas $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 2$ et $\mathbf{g}_i(\ell_i) = \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. Soit J l'ensemble des indices i pour lesquels on intercale un tel $\mathbf{g}_i'$. Dans ce cas (3.2.) montre que

$$\sum_{i=p}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i\in J} \mathbf{g}_i'(\ell_i)$$

est un sous-espace isotrope maximal de $\mathbf{n}$ et

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i\in J} \mathbf{g}_i'(\ell_i)$$

est un sous-espace isotrope maximal de $\mathbf{g}$.

4.11. Par construction dans 4.10., $\mathbf{g}_i'$ est un idéal dans $\mathbf{n}$, donc dans $\mathbf{g}_i$. De plus, $\mathbf{g}_{i+1}$ est un idéal dans $\mathbf{g}$, donc également dans $\mathbf{g}_i'$.

5. Polarisation $\mathbf{d}(\ell)$-invariante

5.1. **Théorème :** Le sous-espace isotrope maximal construit en 4.10. est en fait une polarisation $\mathbf{d}(\ell)$-invariante.

Démonstration : Dans tous les cas où $\mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 2$ on peut en fait intercaler un sous-espace $\mathbf{g}_i'$ qui est une sous-algèbre (par exemple $\mathbf{g}_i' = \mathbb{R}x_i' + \mathbf{g}_{i+1}$), étant donné que $\varphi_i(\text{ad}\,\mathbf{n}) = 0$. De cette manière on obtient une bonne suite de sous-algèbres. Soit K l'ensemble des indices parcouru par les indices des $\mathbf{g}_i'$ de cette bonne suite de sous-algèbres et J celui de 4.10. On a évidemment $J \subset K$ et

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i\in J} \mathbf{g}_i'(\ell_i) \subset \sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i\in K} \mathbf{g}_i'(\ell_i).$$

Par le théorème de Vergne (2.2.) on sait que $\sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i\in K} \mathbf{g}_i'(\ell_i)$ est une polarisation. Or d'après 4.10., $\sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i\in J} \mathbf{g}_i'(\ell_i)$ est un sous-espace isotrope maximal. Donc les deux coïncident et le sous-espace isotrope construit en 4.10. est en fait une polarisation. Les $\mathbf{g}_i(\ell_i)$ sont $\mathbf{d}(\ell)$-invariants. En effet, soient $g_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$, $g_i' \in \mathbf{g}_i$ et $d \in \mathbf{d}(\ell)$. Alors

$$\langle \ell, [d(g_i), g_i']\rangle = \langle \ell, d[g_i, g_i']\rangle - \langle \ell, [g_i, d(g_i')]\rangle = 0$$

puisque $d \in \mathbf{d}(\ell)$, $d(g_i') \in \mathbf{g}_i$ et $g_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$. Donc $d(g_i) \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$. Les $\mathbf{g}_i'(\ell_i)$, $i \in J$, sont également $\mathbf{d}(\ell)$-invariants. En effet, le raisonnement précédent reste valable, étant donné que les $\mathbf{g}_i'$, $i \in J$ sont $\mathbf{d}(\ell)$-invariants par hypothèse.

5.2. **Remarques :** a) En fait le raisonnement précédent montre que la polarisation est même $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariante, c'est-à-dire invariante sous l'action des $d \in \mathbf{d}$ tels que $\langle \ell, d(\mathbf{n})\rangle \equiv 0$. En effet, la seule propriété utilisée est le fait que $\langle \ell, d([g_i, g_i'])\rangle = 0$ et ceci est le cas pour $d \in \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$ étant donné que $[g_i, g_i'] \in \mathbf{n}$.

b) Notons $\mathbf{g}(\ell') = \{u \in \mathbf{g} | \langle \ell, [u, \mathbf{n}]\rangle \equiv 0\}$. Donc $\text{ad}(\mathbf{g}(\ell')) \subset \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$ et la remarque précédente montre que la polarisation de Vergne est $\text{ad}(\mathbf{g}(\ell'))$-invariante.

c) Pour tout k

$$\mathbf{h}_k = \sum_{i\geq k} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{\substack{i\in J\\ i\geq k}} \mathbf{g}'_i(\ell_i) = \sum_{i\geq k} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{\substack{i\in K\\ i\geq k}} \mathbf{g}'_i(\ell_i)$$

est une polarisation $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariante, et donc $\mathbf{d}(\ell)$-invariante, au point $\ell_k = \ell|_{\mathbf{g}_k}$ de $\mathbf{g}_k^*$.
De même, si $k \in J$,

$$\mathbf{h}'_k = \mathbf{g}'_k(\ell_k) + \sum_{i>k} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{\substack{i\in J\\ i>k}} \mathbf{g}'_i(\ell_i) = \mathbf{g}'_k(\ell_k) + \sum_{i>k} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{\substack{i\in K\\ i>k}} \mathbf{g}'_i(\ell_i)$$

est une polarisation $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariante, et donc $\mathbf{d}(\ell)$-invariante, au point $\ell_k = \ell|_{\mathbf{g}'_k}$ de $\mathbf{g}'^*_k$.
En effet, dans la construction par récurrence, on obtient une polarisation à chaque étape.
D'ailleurs, si $k \in K$, $k \notin J$,

$$\mathbf{h}'_k = \mathbf{g}'_k(\ell_k) + \sum_{i>k} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{\substack{i\in K\\ i>k}} \mathbf{g}'_i(\ell_i)$$

est également une polarisation au point $\ell_k = \ell|_{\mathbf{g}'_k}$ de $\mathbf{g}'^*_k$, non $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariante, car $\mathbf{g}'_k$ n'est pas $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariant.

d) Les polarisations $\mathbf{h}_k$ et $\mathbf{h}'_k$ précédentes sont données par

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{h} \cap \mathbf{g}_k, \text{ resp. } \mathbf{h}'_k = \mathbf{h} \cap \mathbf{g}'_k.$$

En effet, dans le cas de $\mathbf{g}_k$ par exemple, il est évident que $\mathbf{h}_k \subset \mathbf{h} \cap \mathbf{g}_k$. D'autre part, soit

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} g_i + \sum_{i\in J} g'_i\Big) \in \mathbf{h} \cap \mathbf{g}_k$$

avec $g_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$ et $g'_i \in \mathbf{g}'_i(\ell_i)$. Pour $i \geq k$, $g_i, g'_i \in \mathbf{g}_k$. Donc

$$g_1 = \sum_{i<k} g_i + \sum_{\substack{i\in J\\ i<k}} g'_i \in \mathbf{g}_k$$

et $\langle \ell, [g_1, \mathbf{g}_k]\rangle \equiv 0$, étant donné que $\langle \ell, [g_i, \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0$, $\langle \ell, [g'_i, \mathbf{g}'_i]\rangle \equiv 0$ et que $\mathbf{g}_k \subset \mathbf{g}_i$, resp. $\mathbf{g}_k \subset \mathbf{g}'_i$. Ainsi $g_1 \in \mathbf{g}_k(\ell_k)$ et

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} g_i + \sum_{i\in J} g'_i\Big) \in \mathbf{h}_k.$$

On fait une démonstration analogue dans le cas de $\mathbf{g}'_k$.

e) En particulier, on en déduit que $\mathbf{h}\cap\mathbf{n}$ est une polarisation au point $\ell|_{\mathbf{n}}$ de $\mathbf{n}^*$ qui est $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariante.

f) De même, si $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \supset \mathbf{g}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{g}_n = \{0\}$ est une bonne suite de sous-algèbres, si $\mathbf{h} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i)$ est la polarisation de Vergne correspondante, alors, pour tout k,

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{h} \cap \mathbf{g}_k = \sum_{i\geq k} \mathbf{g}_i(\ell_i)$$

est la polarisation de Vergne au point $\ell_k = \ell|_{\mathbf{g}_k}$ de $\mathbf{g}_k^*$.

5.3. **Critère de Pukanszky :** Soit G un groupe de Lie connexe simplement connexe exponentiel d'algèbre de Lie $\mathbf{g}$. Soit $\ell \in \mathbf{g}^*$ et soit $\mathbf{h}$ une sous-algèbre de $\mathbf{g}$ telle que $\langle \ell, [\mathbf{h}, \mathbf{h}]\rangle = 0$. Soit $H = \exp \mathbf{h}$. Dans ce cas $\mathbf{h}$ est une polarisation au point ℓ de $\mathbf{g}^*$ telle que $\Pi = \mathrm{ind}_H^G \xi_\ell$ soit une représentation unitaire irréductible de G ssi

$$\ell + \mathbf{h}^\perp = \{\mathrm{Ad}^*(\exp h)\ell | h \in \mathbf{h}\} = \mathrm{Ad}^* H(\ell)$$

([3]). Nous allons montrer que les polarisations de Vergne satisfont au critère de Pukanszky et permettent donc de construire des représentations irréductibles.

5.4. **Théorème :** Soit $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \supset \mathbf{g}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{g}_n = \{0\}$ une bonne suite de sous-algèbres. Alors la polarisation de Vergne $\mathbf{h} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i)$ vérifie le critère de Pukanszky.

Démonstration : Faisons une démonstration par récurrence. Comme $\mathbf{g}_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1}$ est abélien, $\mathbf{h}_{n-1} = \mathbf{g}_{n-1}$, $\Pi_{n-1} = \chi_\ell|_{G_{n-1}}$ est un caractère, donc irréductible, et $\ell_{n-1} + \mathbf{h}_{n-1}^\perp = \ell_{n-1} = \mathrm{Ad}^*(H_{n-1})(\ell_{n-1})$. Supposons à présent le critère démontré pour $\mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_{i+1}$ et démontrons-le pour $\mathbf{h}_i$ dans $\mathbf{g}_i$. Rappelons d'abord que pour toute bonne suite de sous-algèbres, $\mathbf{g}_{i+1}$ est un idéal dans $\mathbf{g}_i$. Soit $p_i = \ell_i + \varphi_i \in \ell_i + \mathbf{h}_i^\perp$. Alors $p_{i+1} = p_i|_{\mathbf{g}_{i+1}} = \ell_{i+1} + \varphi_{i+1}$ avec $\varphi_{i+1} = \varphi_i|_{\mathbf{g}_{i+1}} \in \mathbf{h}_{i+1}^\perp$. Par hypothèse de récurrence, il existe $h_{i+1} \in \mathbf{h}_{i+1}$ tel que $p_{i+1} = p_i|_{\mathbf{g}_{i+1}} = \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_{i+1})$. Supposons d'abord que $\mathbf{g}_i(\ell_i) \not\subset \mathbf{g}_{i+1}$. Donc il existe $b_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$ tel que $b_i \notin \mathbf{g}_{i+1}$ et $\mathbf{g}_i = \mathbb{R}b_i \oplus \mathbf{g}_{i+1}$. Alors

$$\langle p_i, b_i\rangle = \langle \ell_i, b_i\rangle + \langle \varphi_i, b_i\rangle = \langle \ell_i, b_i\rangle$$

puisque $b_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbf{h}_i$ et que $\varphi_i \in \mathbf{h}_i^\perp$. D'autre part

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_i), b_i\rangle &= \langle \ell_i, \mathrm{Ad}(\exp h_{i+1}^{-1})(b_i)\rangle\\ &= \langle \ell_i, b_i\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\langle \ell, \mathrm{ad}^k(-h_{i+1})(b_i)\rangle\\ &= \langle \ell_i, b_i\rangle\end{aligned}$$

étant donné que $\mathrm{ad}^k(-h_{i+1})(b_i) \in [\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i]$ et que $\langle \ell, [\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i]\rangle \equiv 0$. Comme de plus $p_i|_{\mathbf{g}_{i+1}} = \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_i)|_{\mathbf{g}_{i+1}}$, on a évidemment $p_i = \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_i)$ dans $\mathbf{g}_i^*$.
Supposons à présent que $\mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbf{g}_{i+1}$. Donc $\mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ et $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}_{i+1}$. Soit $\mathbf{g}_i = \mathbb{R}x_i + \mathbf{g}_{i+1}$. Comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dim \mathbf{g}_i + \dim \mathbf{g}_i(\ell_i)) &= \dim \mathbf{h}_i = \dim \mathbf{h}_{i+1}\\ &= \frac{1}{2}(\dim \mathbf{g}_{i+1} + \dim \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})),\end{aligned}$$

$\dim \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) = \dim \mathbf{g}_i(\ell_i) + 1$ et il existe $u_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ tel que $u_{i+1} \notin \mathbf{g}_i(\ell_i)$. Puisque $u_{i+1} \in \mathbf{g}_i$ on a donc $\langle \ell, [u_{i+1}, x_i]\rangle \neq 0$ et on peut par exemple supposer que $\langle \ell, [u_{i+1}, x_i]\rangle = 1$. D'ailleurs $u_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \subset \mathbf{h}_{i+1}$ et $\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1} \in H_{i+1} \subset H_i$. On a pour tout $g_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}$

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}), g_{i+1}\rangle\\ =\ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}), g_{i+1}\rangle\\ =\ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}), \mathrm{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(g_{i+1})\rangle\\ =\ &\langle \ell_{i+1}, \mathrm{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(g_{i+1})\rangle\\ =\ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_{i+1}), g_{i+1}\rangle\\ =\ &\langle p_{i+1}, g_{i+1}\rangle \quad \text{avec } p_{i+1} = p_i|_{\mathbf{g}_{i+1}}\end{aligned}$$

étant donné que $\mathrm{Ad}(\exp(-h_{i+1})(g_{i+1})) \in \mathbf{g}_{i+1}$ et que $u_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. D'autre part,

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i\rangle\\ =\ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i\rangle\\ =\ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), \mathrm{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(x_i)\rangle\\ =\ &\langle \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i\rangle\\ &+\langle \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), \mathrm{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(x_i) - x_i\rangle\\ =\ &\langle \ell_i, x_i\rangle - t\langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i]\rangle + \langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1})\\ &\mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i - \mathrm{Ad}(\exp h_{i+1})(x_i)\rangle\\ =\ &\langle \ell_i, x_i\rangle - t\langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i]\rangle + \langle p_i, x_i - \mathrm{Ad}(\exp h_{i+1})(x_i)\rangle.\end{aligned}$$

En effet, $[u_{i+1}, x_i] \in \mathbf{g}_{i+1}$ et $u_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. Donc $\langle \ell, \mathrm{ad}^2(u_{i+1})(x_i)\rangle = 0$ de même que $\langle \ell, \mathrm{ad}^k(u_{i+1})(x_i)\rangle$ pour $k \geq 2$. De plus,

$$x_i - \mathrm{Ad}(\exp h_{i+1})(x_i) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{ad}^k(h_{i+1})(x_i) \in \mathbf{g}_{i+1}$$

étant donné que $h_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}$ et que $\mathbf{g}_{i+1}$ est un idéal dans $\mathbf{g}_i$. Or sur $\mathbf{g}_{i+1}$, $\mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \mathrm{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}) = p_{i+1} = p_i|_{\mathbf{g}_{i+1}}$. Puisque $\langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i]\rangle \neq 0$ on peut alors déterminer univoquement t tel que

$$\langle \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i\rangle = \langle p_i, x_i\rangle.$$

Par conséquent, $p_i = \mathrm{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t\, u_{i+1})(\ell_i) \in \mathrm{Ad}^* H_i(\ell_i)$.
Ceci prouve que $\ell + \mathbf{h}^\perp \subset \mathrm{Ad}^*(H)(\ell)$.
L'inclusion $\mathrm{Ad}^*(H)(\ell) \subset \ell + \mathbf{h}^\perp$ est également vérifiée étant donné que pour $h \in \mathbf{h}$, $\mathrm{Ad}^*(\exp h)(\ell) = \ell + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{ad}^{*k}(h)(\ell)$ et que pour $h_1 \in \mathbf{h}$ quelconque,

$$\langle \mathrm{ad}^{*k}(h)(\ell), h_1\rangle = \langle \ell, \mathrm{ad}^k(-h)(h_1)\rangle = 0 \quad \text{pour } k \geq 1$$

puisque $\mathrm{ad}^k(-h)(h_1) \in [\mathbf{h},\mathbf{h}]$ et que $\langle \ell, [\mathbf{h},\mathbf{h}]\rangle = 0$. Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{ad}^{*k}(h)(\ell) \in \mathbf{h}^\perp$.

5.5. **Corollaire :** Les polarisations $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$-invariantes construites dans ce travail vérifient le critère de Pukanszky, étant donné que ces polarisations peuvent également être obtenues à partir d'une bonne suite de sous-algèbres (5.1.).

6. Base coexponentielle

6.1. **Rappel** ([4]) : Soit $\mathbf{h}$ une sous-algèbre de l'algèbre exponentielle $\mathbf{g}$ et soit $G = \exp \mathbf{g}$. Il existe $b_1, \ldots, b_r \in \mathbf{g}$ tels que

$$\mathbf{g} = (\oplus_{i=1}^r \mathbb{R} b_i) \oplus \mathbf{h}$$

et tels que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^r \times \mathbf{h} & \rightarrow & G \\ (s_1, \ldots, s_r, h) & \mapsto & \exp s_1 b_1 \cdot \exp s_2 b_2 \cdot \ldots \cdot \exp s_r b_r \cdot \exp h \end{array}$$

soit un difféomorphisme. Il est équivalent d'exiger que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{h} \times \mathbb{R}^r & \rightarrow & G \\ (h, s_1, \ldots, s_r) & \mapsto & \exp h \cdot \exp s_r b_r \cdot \ldots \cdot \exp s_2 b_2 \cdot \exp s_1 b_1 \end{array}$$

soit un difféomorphisme.

Définition : On dit que $(b_1, \ldots, b_r)$ est une *base coexponentielle* à $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{g}$.

6.2. **Remarques :** a) Soient $\mathbf{h}$ et $\mathbf{h}'$ deux sous-algèbres de $\mathbf{g}$ telles que $\mathbf{h} \subset \mathbf{h}' \subset \mathbf{g}$. Soient $(b_1, \ldots, b_r)$ une base coexponentielle à $\mathbf{h}'$ dans $\mathbf{g}$ et $(c_1, \ldots, c_s)$ une base coexponentielle à $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{h}'$. Alors $(b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_s)$ est une base coexponentielle à $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{g}$.
b) Si $\mathbf{h}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}$ et si $\mathbf{g} = \mathbb{R}x \oplus \mathbf{h}$, alors $\{x\}$ est une base coexponentielle à $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{g}$.

6.3. **Construction d'une base coexponentielle à la polarisation obtenue en 4.10 :** Soient $\mathbf{g}_i$ et $\mathbf{g}_i'$ les sous-algèbres, resp. idéaux utilisés en 4.10. dans la construction de la polarisation $\mathbf{h} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} \mathbf{g}_i'(\ell_i)$. Construisons une base coexponentielle à $\mathbf{h}$ par récurrence.
Si $\mathbf{g}_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1}$, $\mathbf{g}_{n-1} = \mathbf{h}_{n-1}$ et la base coexponentielle à $\mathbf{h}_{n-1}$ dans $\mathbf{g}_{n-1}$ est vide. De même si $n-1 \in J$ et $\mathbf{g}_{n-1}' = \mathbb{R}x_{n-1}'$.
Si $\mathbf{g}_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1} \oplus \mathbb{R}x_{n-1}'$, on peut donc supposer que $\mathbf{g}_{n-1}$ est $(\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}}) + \mathrm{ad}\, \mathbf{n})$-irréductible. En particulier, $\mathbf{g}_{n-1}(\ell_{n-1}) \neq \mathbf{g}_n(\ell_n) = \{0\}$. Donc le cas $\langle \ell, [x_n, x_{n-1}']\rangle \neq 0$ est à exclure, car alors $\mathbf{g}_{n-1}(\ell_{n-1}) = \{0\}$. Ainsi, $\langle \ell, [x_n, x_n']\rangle = 0$ et $\mathbf{h}_{n-1} = \mathbf{g}_{n-1}(\ell_{n-1}) = \mathbf{g}_{n-1}$. La base coexponentielle à $\mathbf{h}_{n-1}$ dans $\mathbf{g}_{n-1}$ est vide.
Supposons à présent que $(b_1, \ldots, b_r)$, resp. ϕ soit une base coexponentielle à $\mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_{i+1}$ et construisons une base coexponentielle à $\mathbf{h}_i$ dans $\mathbf{g}_i$.

a) Supposons $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 1$. La démonstration qui suit reste valable pour les quotients $\mathbf{g}_i/\mathbf{g}_i'$ et $\mathbf{g}_i'/\mathbf{g}_{i+1}$ si $i \in J$.

a1) Si $\mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbf{g}_{i+1}$, $\mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ et $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}_{i+1}$. Soit $\mathbf{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbf{g}_{i+1}$. Comme $\mathbf{g}_{i+1}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}_i$, $\{x_i\}$ est une base coexponentielle à $\mathbf{g}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_i$. Soit $(b_1, \ldots, b_r)$ une base coexponentielle à $\mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_{i+1}$. Alors $(x_i, b_1, \ldots, b_r)$ est une base coexponentielle à

$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$ dans $\mathfrak{g}_i$.

a2) Si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \not\subset \mathfrak{g}_{i+1}$, il existe $x_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ tel que $x_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$. Alors $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$ et $\mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \mathfrak{h}_{i+1} = \sum_{j=i}^{n} \mathfrak{g}_j(\ell_j) = \mathfrak{h}_i$. Pour montrer qu'on a en fait égalité, il suffit de montrer que $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$. En effet, soit $u_i = \lambda x_i + g_{i+1} \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$. Donc

$$\begin{aligned}
\langle \ell, [u_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda \langle \ell, [x_i, \mathfrak{g}_i] \rangle + \langle \ell, [g_{i+1}, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle \ell, [g_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle = 0 \quad \text{car } x_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i) \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i \\
&\Rightarrow \quad g_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \\
&\Rightarrow \quad u_i \in \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \subset \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{h}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$. D'ailleurs $\mathfrak{h}_{i+1}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{h}_i$ et $\{x_i\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_{i+1}$ dans $\mathfrak{h}_i$. En effet

$$[x_i, \mathfrak{h}_{i+1}] \subset \mathfrak{h}_i \cap [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i+1}] = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_{i+1} = \mathfrak{h}_{i+1}.$$

Par conséquent l'application

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{i+1} \times \mathbb{R} \quad &\to \quad H_i = \exp \mathfrak{h}_i \\
(h_{i+1}, t) \quad &\mapsto \quad \exp h_{i+1} \cdot \exp t\, x_i
\end{aligned}$$

est un difféomorphisme, de même que l'application

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{i+1} \times \mathbb{R} \quad &\to \quad G_i = \exp \mathfrak{g}_i \\
(g_{i+1}, t) \quad &\mapsto \quad \exp g_{i+1} \cdot \exp t\, x_i
\end{aligned}$$

puisque $\{x_i\}$ est également une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_{i+1}$ dans $\mathfrak{g}_i$. Soit $(b_1, \ldots, b_r)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_{i+1}$ dans $\mathfrak{g}_{i+1}$. Montrons que c'est également une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_i$ dans $\mathfrak{g}_i$. Par hypothèse l'application

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_{i+1} \quad &\to \quad G_{i+1} = \exp \mathfrak{g}_{i+1} \\
(s_1, \ldots, s_r, h_{i+1}) \quad &\mapsto \quad \exp s_1 b_1 \ldots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1}
\end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Donc l'application composée

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} \mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_i \\ (s_1, \cdots, s_r, h_i) \end{matrix} \arrow[r] \arrow[ddrr] & \begin{matrix} \mathbb{R}^r \times H_i \\ (s_1, \cdots, s_r, \exp h_i) \end{matrix} \arrow[r, dashed, "\text{si } \exp h_i = \exp h_{i+1} \cdot \exp t x_i"'] & \begin{matrix} \mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_{i+1} \times \mathbb{R} \\ (s_1, \cdots, s_r, h_{i+1}, t) \end{matrix} \arrow[d] \\
& & \begin{matrix} G_{i+1} \times \mathbb{R} \\ (\exp s_1 b_1 \cdots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1}, t) \end{matrix} \arrow[d] \\
& & \begin{matrix} G_i \\ \exp s_1 b_1 \cdots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1} \cdot \exp t x_i \\ \| \\ \exp s_1 b_1 \cdots \exp s_r b_r \cdot \exp h_i \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

est un difféomorphisme, puisqu'il en est ainsi de l'application exponentielle entre une algèbre de Lie exponentielle et le groupe de Lie connexe simplement connexe associé. Ceci prouve que $(b_1, \ldots, b_r)$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_i$ dans $\mathfrak{g}_i$.

b) Supposons ensuite $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$. Par a) on peut supposer que $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $\mathbf{d}(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \operatorname{ad} \mathfrak{n}$ et donc que le cas $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ est exclu.

b1) Si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ et $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$. Soit $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x_i' \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$ tel que

$$d \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{g}_{i+1}$$

pour tout $d \in \mathbf{d}$ avec $\varphi_i(\operatorname{ad} x_i) = \varphi_i(\operatorname{ad} x_i') = 0$ et $\varphi_i(\operatorname{ad} \mathfrak{g}_{i+1}) \equiv 0$. Par conséquent, $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}'_i = \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{g}_{i+1}$ et $\{x'_i\}$ est une base coexponentielle à $\mathbf{g}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}'_i$. De même $\mathbf{g}'_i$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}_i$ et $\{x_i\}$ est une base coexponentielle à $\mathbf{g}'_i$ dans $\mathbf{g}_i$. Si $(b_1, \ldots, b_r)$ est une base coexponentielle à $\mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_{i+1}$, on en déduit donc que $(x_i, x'_i, b_1, \ldots, b_r)$ est une base coexponentielle à $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_i$.

b2) Si $\mathbf{g}_i(\ell_i) \not\subset \mathbf{g}_{i+1}$, il faut, par 3.2., distinguer les deux cas $\dim \mathbf{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathbf{g}_i(\ell_i) \cap \mathbf{g}_{i+1}] + 2$ et $\dim \mathbf{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathbf{g}_i(\ell_i) \cap \mathbf{g}_{i+1}] + 1$. Si $\dim \mathbf{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathbf{g}_i(\ell_i) \cap \mathbf{g}_{i+1}] + 2$, il existe $x_i, x'_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$ tels que $\mathbf{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{g}_{i+1}$. Donc $x_i, x'_i \in \mathbf{h}_i$, $x_i, x'_i \notin \mathbf{h}_{i+1}$ et $\mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{h}_{i+1} \subset \mathbf{h}_i$. Montrons qu'on a égalité. Soit $u_i = \lambda x_i + \mu x'_i + g_{i+1} \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$. Donc

$$\begin{aligned}
\langle \ell, [u_i, \mathbf{g}_i] \rangle \equiv 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda\langle \ell, [x_i, \mathbf{g}_i]\rangle + \mu\langle \ell, [x'_i, \mathbf{g}_i]\rangle \\
&\qquad + \langle \ell, [g_{i+1}, \mathbf{g}_i]\rangle \equiv 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle \ell, [g_{i+1}, \mathbf{g}_{i+1}]\rangle \equiv 0 \text{ car } x_i, x'_i \in \mathbf{g}_i(\ell_i) \\
&\qquad\qquad \text{et } \mathbf{g}_{i+1} \subset \mathbf{g}_i \\
&\Rightarrow \quad g_{i+1} \in \mathbf{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \subset \mathbf{h}_{i+1} \\
&\Rightarrow \quad u_i \in \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{h}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbf{g}_i(\ell_i) \subset \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{h}_{i+1}$ et, par conséquent, $\mathbf{h}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{h}_{i+1}$. D'ailleurs,

$$[x_i, \mathbf{h}_{i+1}] \subset \mathbf{h}_i \cap [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_{i+1}] \subset \mathbf{h}_i \cap \mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{h}_{i+1}.$$

De même pour x'_i. On en déduit que $\mathbf{h}_{i+1}$ est un idéal dans $\mathbf{h}_i$ et dans $\mathbf{h}'_i = \mathbb{R}x'_i \oplus \mathbf{h}_{i+1}$ et que $\mathbf{h}'_i$ est un idéal dans $\mathbf{h}_i$, puisque $[x_i, x'_i] \in \mathbf{h}_i \cap \mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{h}_{i+1}$ (4.5.). Par conséquent (x_i, x'_i) est une base coexponentielle à $\mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{h}_i$ et l'application

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 \quad &\to \quad H_i = \exp \mathbf{h}_i \\
(h_{i+1}, s, t) \quad &\mapsto \quad \exp h_{i+1} \cdot \exp s\, x'_i \cdot \exp t\, x_i
\end{aligned}$$

est un difféomorphisme, de même que l'application

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 \quad &\to \quad G_i = \exp \mathbf{g}_i \\
(g_{i+1}, s, t) \quad &\mapsto \quad \exp g_{i+1} \cdot \exp s\, x'_i \cdot \exp t\, x_i
\end{aligned}$$

puisque (x_i, x'_i) est également une base coexponentielle à $\mathbf{g}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}_{i+1}$ étant un idéal dans $\mathbf{g}_i$ (4.5.). Soit $(b_1, \ldots, b_r)$ une base coexponentielle à $\mathbf{h}_{i+1}$ dans $\mathbf{g}_{i+1}$ et montrons que c'est également une base coexponentielle à $\mathbf{h}_i$ dans $\mathbf{g}_i$. Par hypothèse l'application

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^r \times \mathbf{h}_{i+1} \quad &\to \quad G_{i+1} = \exp \mathbf{g}_{i+1} \\
(s_1, \ldots, s_r, h_{i+1}) \quad &\mapsto \quad \exp s_1 b_1 \ldots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1}
\end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Donc l'application composée

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\mathbb{R}^r \times \mathbf{h}_i \\ (s_1, \cdots, s_r, h_i)\end{array} \arrow[r] \arrow[ddrr] & \begin{array}{c}\mathbb{R}^r \times H_i \\ (s_1, \cdots, s_r, \exp h_i) \\ \text{si } \exp h_i = \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\mathbb{R}^r \times \mathbf{h}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 \\ (s_1, \cdots, s_r, h_{i+1}, s, t)\end{array} \arrow[d] \\
& & \begin{array}{c}G_{i+1} \times \mathbb{R}^2 \\ (\exp s_1 b_1 \cdots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1}, s, t)\end{array} \arrow[d] \\
& & \begin{array}{c}G_i \\ \exp s_1 b_1 \cdots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i \\ \| \\ \exp s_1 b_1 \cdots \exp s_r b_r \cdot \exp h_i\end{array}
\end{tikzcd}$$

est un difféomorphisme, puisqu'il en est ainsi de l'application exponentielle dans notre cas. Ceci prouve que $(b_1, \ldots, b_r)$ est une base coexponentielle à $\mathbf{h}_i$ dans $\mathbf{g}_i$.
Remarquons qu'en fait le cas $\dim \mathbf{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathbf{g}_i(\ell_i) \cap \mathbf{g}_{i+1}] + 1$ ne peut pas se présenter.
En effet, soient $x_i, x'_i \in \mathbf{g}_i$ tels que

$$d\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} = \varphi_i(d)\begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix} \bmod \mathbf{g}_{i+1}$$

pour tout $d \in \mathbf{d}$

et montrons que pour tout $x \in \mathbf{g}_i$, $x \notin \mathbf{g}_{i+1}$, x et $d(x)$ sont indépendants modulo $\mathbf{g}_{i+1}$ si $\varphi_i(d) \neq 0$. Soit $x = \lambda x_i + \mu x_i'$ mod $\mathbf{g}_{i+1}$. Alors

$$\begin{aligned} d(x) &= \lambda d(x_i) + \mu d(x_i') \\ &= \lambda\varphi_i(d)(x_i - w_i x_i') + \mu\varphi_i(d)(w_i x_i + x_i') \bmod \mathbf{g}_{i+1} \\ &= \varphi_i(d)(\lambda + \mu w_i)x_i + \varphi_i(d)(-\lambda w_i + \mu)x_i' \bmod \mathbf{g}_{i+1}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda + \mu w_i & -\lambda w_i + \mu \end{vmatrix} &= -\lambda^2 w_i + \lambda\mu - \lambda\mu - \mu^2 w_i \\ &= -(\lambda^2 + \mu^2)w_i \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

x et $d(x)$ sont indépendants modulo $\mathbf{g}_{i+1}$ si $\varphi_i(d) \neq 0$. Par hypothèse le quotient $\mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $\mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})+$ ad $\mathbf{n}$. Il existe donc $d \in \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$ tel que $\varphi_i(d) \neq 0$. Prenons un tel d, soit $x \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$ tel que $x \notin \mathbf{g}_{i+1}$ et montrons que $d(x) \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$. En effet,

$$\begin{aligned} \langle \ell, [d(x), g_i] \rangle &= \langle \ell, d([x, g_i]) \rangle - \langle \ell, [x, d(g_i)] \rangle \\ &= 0 \qquad \text{pour tout } g_i \in \mathbf{g}_i \end{aligned}$$

puisque $[x, g_i] \in \mathbf{n}$ et que $d \in \mathbf{d}(\ell|_{\mathbf{n}})$, que $d(g_i) \in \mathbf{g}_i$ et que $x \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$. Ainsi $x, d(x)$ sont deux éléments de $\mathbf{g}_i(\ell_i)$ indépendants modulo $\mathbf{g}_{i+1}$, donc
$\dim \mathbf{g}_i(\ell_i) \geq \dim[\mathbf{g}_i(\ell_i) \cap \mathbf{g}_{i+1}] + 2$.

7. Autre construction de la polarisation de Vergne pour une algèbre nilpotente

7.1. Dans toute cette section $\mathbf{g}$ désignera une algèbre de Lie nilpotente.

a) Soit $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbf{g}$. Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ notons $\mathbf{g}_i = \sum_{k>i} \mathbb{R} b_k = \mathrm{Vec}(b_{i+1}, \ldots, b_n)$ et posons $\mathbf{g}_n = \{0\}$. En particulier, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}$. On dit que la base B est une *base de Jordan-Hölder* de $\mathbf{g}$ si $[b_i, b_j] \in \mathbf{g}_r = \mathrm{Vec}(b_{r+1}, \ldots, b_n)$ avec $r = \max(i, j)$ si $i, j < n$ et $[b_i, b_j] = 0$ si $i = n$ ou $j = n$. Il est équivalent de dire que $[\mathbf{g}, b_j] \subset \mathrm{Vec}(b_{j+1}, \ldots, b_n)$.

b) Toute sous-algèbre de codimension 1 dans une algèbre nilpotente est un idéal.

c) Toute algèbre de Lie nilpotente possède une base de Jordan-Hölder.

7.2. Soit $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$ et posons $\mathbf{g}_i = \sum_{k>i} \mathbb{R} b_k$. Alors, pour tout i, $\mathbf{g}_i$ est un idéal de $\mathbf{g}$ et la suite $(\mathbf{g}_i)_i$ est une bonne suite de sous-algèbres telle que $\dim \mathbf{g}_i/\mathbf{g}_{i+1} = 1$ pour tout i.
Soit $\ell \in \mathbf{g}^*$. On en déduit que le sous-espace isotrope maximal $V^B(\mathbf{g}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{g}_i(\ell_i)$ est une polarisation de Vergne au point ℓ de $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}_0^*$ et que $V^B(\mathbf{g}_k) = \sum_{i \geq k} \mathbf{g}_i(\ell_i)$ est une polarisation de Vergne au point $\ell_k = \ell|_{\mathbf{g}_k}$ de $\mathbf{g}_k^*$.

7.3. Soit $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$. Soit $\tilde{\mathbf{g}}$ une sous-algèbre de codimension 1 (donc un idéal) de $\mathbf{g}$ et soit i tel que $b_i \notin \tilde{\mathbf{g}}$. Par conséquent, $\mathbf{g} = \mathbb{R} b_i \oplus \tilde{\mathbf{g}}$.

a) Pour tout $k \neq i$, il existe α_k unique dans $\mathbb{R}$ tel que $b_k - \alpha_k b_i \in \tilde{\mathbf{g}}$. En effet, $b_k \in \mathbf{g} = \mathbb{R} b_i \oplus \tilde{\mathbf{g}}$. Donc b_k admet une décomposition unique de la forme $b_k = \alpha_k b_i + g_k$ avec $g_k \in \tilde{\mathbf{g}}$.

b) Si $b_k \in \tilde{\mathbf{g}}$, l'unicité de la décomposition entraîne $\alpha_k = 0$.

c) Soit i le plus grand indice tel que $b_i \notin \tilde{\mathbf{g}}$. Posons

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= b_k - \alpha_k b_i & \text{si } k < i \\ \tilde{b}_k &= b_{k+1} - \alpha_{k+1} b_i & \text{si } k \geq i. \end{aligned}$$

Or si $k \geq i$, $b_{k+1} \in \tilde{\mathbf{g}}$, par maximalité de i, $\alpha_{k+1} = 0$ et $\tilde{b}_k = b_{k+1}$. Alors $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\tilde{\mathbf{g}}$. En effet, montrons d'abord l'indépendance linéaire. Soit

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \tilde{b}_k = 0$$
$$\sum_{k<i} \lambda_k b_k + \sum_{k \geq i} \lambda_k b_{k+1} - (\sum_{k<i} \lambda_k \alpha_k) b_i = 0.$$

Par indépendance linéaire des b_k, $\lambda_k = 0$ pour tout k. Puisque $\dim \tilde{\mathbf{g}} = n-1$, on en déduit que $\tilde{B}$ est une base de $\tilde{\mathbf{g}}$. Il reste à montrer que $[\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] \in \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$ où $r = \sup(k, m)$. Distinguons plusieurs cas :
Si $k, m \geq i$,

$$\begin{aligned} [\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] = [b_{k+1}, b_{m+1}] &\in \mathrm{Vec}(b_{r+2}, \ldots, b_n) \\ &= \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

Si $m < i \leq k$,

$$\begin{aligned} [\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] &= [b_{k+1}, b_m - \alpha_m b_i] \\ &= [b_{k+1}, b_m] - \alpha_m [b_{k+1}, b_i] \\ &\in \mathrm{Vec}(b_{k+2}, \ldots, b_n) = \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{k+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-1}) \\ &\qquad = \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

De même si $k < i \leq m$.
Si $k, m < i$,

$$\begin{aligned} [\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] &= [b_k, b_m] - \alpha_k [b_i, b_m] - \alpha_m [b_k, b_i] \\ &\in \mathrm{Vec}(b_{r+1}, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

car $[b_i, b_m] \in \mathrm{Vec}(b_{i+1}, \ldots, b_n) \subset \mathrm{Vec}(b_{r+1}, \ldots, b_n)$ et, de même, $[b_k, b_i] \in \mathrm{Vec}(b_{r+1}, \ldots, b_n)$. D'autre part, puisque $\tilde{B}$ est une base de $\tilde{\mathbf{g}}$,

$$\begin{aligned} [\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] &= \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \tilde{b}_j \\ &= \sum_{j<i} \mu_j (b_j - \alpha_j b_i) + \sum_{j \geq i} \mu_j b_{j+1}. \end{aligned}$$

Comme $[\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] \in \mathrm{Vec}(b_{r+1}, \ldots, b_n)$, on en déduit que $\mu_j = 0$ si $j < r+1$ et que $[\tilde{b}_k, \tilde{b}_m] \in \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$.

d) $\tilde{\tilde{B}} = (b_i, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$. En effet, si $k \geq i$

$$[b_i, \tilde{b}_k] = [b_i, b_{k+1}] \in \mathrm{Vec}(b_{k+2}, \ldots, b_n) = \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{k+1}, \ldots, \tilde{b}_n).$$

Si $k < i$,

$$\begin{aligned} [b_i, \tilde{b}_k] = [b_i, b_k] \in \mathrm{Vec}(b_{i+1}, \ldots, b_n) &= \mathrm{Vec}(\tilde{b}_i, \ldots, \tilde{b}_{n-1}) \\ &\subset \mathrm{Vec}(\tilde{b}_{k+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

En tenant compte de c), on voit donc que $\tilde{\tilde{B}}$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$.

7.4. Soient $\mathbf{g}$ une algèbre nilpotente, $\ell \in \mathbf{g}^*$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$.

a) Si $\langle \ell, [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \rangle = 0$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\ell)$ est une polarisation qui coïncide forcément avec la polarisation de Vergne et $\chi_\ell(\exp x) = e^{-i\langle \ell, x \rangle}$ définit un caractère sur $G = \exp \mathbf{g}$.

b) Supposons $\langle \ell, [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \rangle \neq 0$. Donc $\langle \ell, [B, \mathbf{g}] \rangle \neq 0$. Soit j le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b_j, \mathbf{g}] \rangle \neq 0$. Donc $\langle \ell, [B, b_j] \rangle \neq 0$. Soit $i = i(j)$ le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b_i, b_j] \rangle \neq 0$ et soit $\tilde{\mathbf{g}} = \{u \in \mathbf{g} | \langle \ell, [u, b_j] \rangle = 0\}$. Donc i est le plus grand indice tel que $b_i \notin \tilde{\mathbf{g}}$. De plus $b_j \in \tilde{\mathbf{g}}$. Montrons que $\tilde{\mathbf{g}}$ est un idéal, forcément de codimension 1. En effet, soit $u \in \tilde{\mathbf{g}}$ et soit $g \in \mathbf{g}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \ell, [[u, g], b_j] \rangle &= -\langle \ell, [[g, b_j], u] \rangle - \langle \ell, [[b_j, u], g] \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $[g, b_j], [b_j, u] \in \mathrm{Vec}(b_{j+1}, \ldots, b_n) \subset \mathbf{g}(\ell)$, par maximalité de l'indice j. Donc $\tilde{\mathbf{g}}$ est un idéal de codimension 1 admettant (b_i) comme base coexponentielle.

c) Construisons la base de Jordan-Hölder $\tilde{B}$ de $\tilde{\mathbf{g}}$ comme en 7.3. Ici

$$\begin{aligned} b_k - \alpha_k b_i \in \tilde{\mathbf{g}} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle \ell, [b_k - \alpha_k b_i, b_j] \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_k = \frac{\langle \ell, [b_k, b_j] \rangle}{\langle \ell, [b_i, b_j] \rangle}. \end{aligned}$$

On sait qu'alors $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\tilde{\mathbf{g}}$ et que $\tilde{\tilde{B}} = (b_i, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$.

d) Montrons que $\mathbf{g}(\ell) \subset \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\ell})$ où $\tilde{\ell} = \ell|_{\tilde{\mathbf{g}}}$. En effet, soit $\lambda b_i + g \in \mathbf{g} = \mathbb{R} b_i \oplus \tilde{\mathbf{g}}$ avec $g \in \tilde{\mathbf{g}}$ et supposons que $\lambda b_i + g \in \mathbf{g}(\ell)$. En particulier, $0 = \langle \ell, [\lambda b_i + g, b_j] \rangle = \lambda \langle \ell, [b_i, b_j] \rangle$ puisque $g \in \tilde{\mathbf{g}}$, donc que $\langle \ell, [g, b_j] \rangle = 0$. Ceci implique que $\lambda = 0$ et que $\mathbf{g}(\ell) \subset \tilde{\mathbf{g}}$ et $\mathbf{g}(\ell) \subset \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\ell})$.

e) Notons par $V^B(\mathbf{g})$, $V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g})$ et $V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathbf{g}})$ les polarisations dans $\mathbf{g}$, resp. $\tilde{\mathbf{g}}$, construites à partir des bases de Jordan-Hölder B, $\tilde{\tilde{B}}$ et $\tilde{B}$. Comme $\mathbf{g}(\ell) \subset \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\ell})$ et que $\tilde{\tilde{B}} = (b_i, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$ avec $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1})$, on a évidemment $V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g}) = V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathbf{g}})$. Montrons que $V^B(\mathbf{g}) = V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g})$. Soient $B = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\tilde{\tilde{B}} = (b_i, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-1}) = (\tilde{\tilde{b}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{b}}_n)$ avec $\tilde{\tilde{b}}_1 = b_i$ et $\tilde{\tilde{b}}_k = \tilde{b}_{k-1}$ pour $k > 1$. On a $\mathbf{g}_k = \sum_{m>k} \mathbb{R} b_m$, $\tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_k = \sum_{m>k} \mathbb{R} \tilde{\tilde{b}}_m$,

$$V^B(\mathbf{g}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{g}_k(\ell_k) \text{ et } V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g}) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_k(\tilde{\tilde{\ell}}_k) \text{ avec } \tilde{\tilde{\ell}}_k = \ell|_{\tilde{\tilde{\mathbf{g}}}^k}.$$

Remarquons que pour $m > i$, $\tilde{\tilde{b}}_m = \tilde{b}_{m-1} = b_m$ et pour $1 < m \leq i$, $\tilde{\tilde{b}}_m = \tilde{b}_{m-1} = b_{m-1} - \alpha_{m-1} b_i$. Pour $k = 0$ on a $\mathbf{g}_0 = \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_0 = \mathbf{g}$ et $\mathbf{g}_0(\ell_0) = \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_0(\tilde{\tilde{\ell}}_0) = \mathbf{g}(\ell)$. De même, pour $k \geq i$, $\mathbf{g}_k = \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_k$ et $\mathbf{g}_k(\ell_k) = \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_k(\tilde{\tilde{\ell}}_k)$. Pour $0 < k < i$, soit

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k<a\leq i} \lambda_a \tilde{\tilde{b}}_a + \sum_{a>i} \lambda_a \tilde{\tilde{b}}_a \\ &= \sum_{k<a\leq i} \lambda_a (b_{a-1} - \alpha_{a-1} b_i) + \sum_{a>i} \lambda_a b_a \\ &\in \tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_k(\tilde{\tilde{\ell}}_k). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle \ell, [x, \tilde{\tilde{b}}_a] \rangle &= \langle \ell, [x, b_a] \rangle = 0 \quad \text{pour } a > i \\ \langle \ell, [x, \tilde{\tilde{b}}_a] \rangle &= \langle \ell, [x, b_{a-1} - \alpha_{a-1} b_i] \rangle = 0 \text{ pour } k < a \leq i. \end{aligned}$$

Si en plus $\langle \ell, [x, b_i] \rangle = 0$, alors

$$x \in \mathbf{g}_{k-1} = \sum_{k<a\leq i} \mathbb{R}(b_{a-1} - \alpha_{a-1} b_i) + \mathbb{R} b_i + \sum_{a>i} \mathbb{R} b_a$$

tel que $x \in \mathbf{g}_{k-1}(\ell_{k-1})$.
Si $\langle \ell, [x, b_i] \rangle \neq 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ unique tel que

$$\langle \ell, [x + \mu b_j, b_i] \rangle = 0$$

à savoir

$$\mu = \frac{\langle \ell, [x, b_i] \rangle}{\langle \ell, [b_i, b_j] \rangle}.$$

De plus, par maximalité de i, $\langle \ell, [b_j, b_m] \rangle = 0$ pour tout $m > i$. Par conséquent

$$\langle \ell, [x + \mu b_j, b_a] \rangle = 0 \quad \text{pour tout } a \geq i.$$

Pour $m < i$, $b_m - \alpha_m b_i \in \tilde{\mathbf{g}}$ par construction et donc $\langle \ell, [b_j, b_m - \alpha_m b_i] \rangle = 0$ par définition de $\tilde{\mathbf{g}}$. Ainsi

$$\langle \ell, [x + \mu b_j, b_a - \alpha_a b_i] \rangle = 0 \quad \text{pour } k \leq a < i$$

c'est-à-dire $x + \mu b_j$ annule $\mathbf{g}_{k-1}$. D'autre part, $x + \mu b_j \in \mathbf{g}_{k-1}$ puisque $j > i$ et $x + \mu b_j \in \mathbf{g}_{k-1}(\ell_{k-1})$. De plus

$b_j \in \mathbf{g}_i(\ell_i)$ comme $\langle \ell, [b_j, b_m] \rangle = 0$ pour tout $m > i$. On en déduit que $x \in \mathbf{g}_{k-1}(\ell_{k-1}) + \mathbf{g}_i(\ell_i)$. Par conséquent $V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g}) \subset V^B(\mathbf{g})$. Puisque $V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g})$ et $V^B(\mathbf{g})$ sont des polarisations, il faut que $V^{\tilde{\tilde{B}}}(\mathbf{g}) = V^B(\mathbf{g})$.

7.5. a) Faisons une construction par récurrence pour obtenir la polarisation de Vergne. Soient $\mathbf{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}$. Si $\langle \ell, [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \rangle \neq 0$, reprenons la construction faite en 7.4. et posons

$\mathbf{g}_1 = \tilde{\mathbf{g}} = \{u \in \mathbf{g} | \langle \ell, [u, b_j] \rangle = 0\}$

$y_1 = b_j \in \mathbf{g}_1$

$b'_1 = k\, b_i$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\langle \ell, [b'_1, y_1] \rangle = 1$

$b^1_1 = \tilde{b}_1, b^1_2 = \tilde{b}_2, \ldots, b^1_{n-1} = \tilde{b}_{n-1}$

(nouvelle signification de $\mathbf{g}_1$!). Alors (b'_1) est une base coexponentielle à $\mathbf{g}_1$ dans $\mathbf{g}$ et $B_1 = (b^1_1, \ldots, b^1_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}_1$. Par 7.4.e), $V^B(\mathbf{g}) = V^{B_1}(\mathbf{g}_1)$.

b) Si $\langle \ell, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1] \rangle \neq 0$, on refait un raisonnement analogue pour $\mathbf{g}_1$.

c) Pour faire le raisonnement par récurrence, supposons

$\mathbf{g} \supset \mathbf{g}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{g}_r$

$y_1, \ldots, y_r \in \mathbf{g}_r$

$(b'_1, \ldots, b'_r)$ une base coexponentielle à $\mathbf{g}_r$ dans $\mathbf{g}$ telle que

$\mathbf{g}_k = \mathbb{R} b'_{k+1} \oplus \mathbf{g}_{k+1}$ pour tout k

$\mathbf{g}_k = \{u \in \mathbf{g}_{k-1} | \langle \ell, [u, y_k] \rangle = 0\}$ pour $1 \leq k \leq r$

$B_k = (b^k_1, \ldots, b^k_{n-k})$ une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}_k$ pour $1 \leq k \leq r$ telle que

$$V^B(\mathbf{g}) = V^{B_1}(\mathbf{g}_1) = \ldots = V^{B_k}(\mathbf{g}_k) = \ldots = V^{B_r}(\mathbf{g}_r).$$

Supposons de plus que

$$\langle \ell, [b'_k, y_k] \rangle = 1 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq r \text{ par construction}$$
$$\langle \ell, [y_j, y_k] \rangle = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j, k \leq r$$

car si par exemple $j < k$, $y_k \in \mathbf{g}_j = \{u \in \mathbf{g}_{j-1} | \langle \ell, [u, y_j] \rangle = 0\}$ et

$$\langle \ell, [b'_k, y_j] \rangle = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j < k \leq r$$

car alors $b'_k \in \mathbf{g}_{k-1} \subset \mathbf{g}_j = \{u \in \mathbf{g}_{j-1} | \langle \ell, [u, y_j] \rangle = 0\}$. Par construction, chaque $\mathbf{g}_k$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}_{k-1}$.

d) Si $\langle \ell, [\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_r] \rangle = 0$, $V^{B_r}(\mathbf{g}_r) = \mathbf{g}_r$ est la polarisation de Vergne de $\mathbf{g}_r$ par 7.4.a) et $V^B(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_r$ est également la polarisation de Vergne de $\mathbf{g}$ par 7.5.c). De plus $(b'_1, \ldots, b'_r)$ est une base coexponentielle à $V^B(\mathbf{g})$ dans $\mathbf{g}$.

e) Si $\langle \ell, [\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_r] \rangle \neq 0$, soit j le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b^r_j, \mathbf{g}_r] \rangle \neq 0$ et soit $i = i(j)$ le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b^r_i, b^r_j] \rangle \neq 0$. Posons

$y_{r+1} = b^r_j$

$\mathbf{g}_{r+1} = \{u \in \mathbf{g}_r | \langle \ell, [u, y_{r+1}] \rangle = 0\}$

$b'_{r+1} = k\, b^r_i$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\langle \ell, [b'_{r+1}, y_{r+1}] \rangle = 1$

$b^{r+1}_k = b^r_k - \frac{\langle \ell, [b^r_k, b^r_j] \rangle}{\langle \ell, [b^r_i, b^r_j] \rangle} b^r_i$ si $k < i$

$b^{r+1}_k = b^r_{k+1}$ si $k \geq i$.

Par 7.4., $B_{r+1} = (b^{r+1}_1, \ldots, b^{r+1}_{n-r-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathbf{g}_{r+1}$ telle que $V^{B_r}(\mathbf{g}_r) = V^{B_{r+1}}(\mathbf{g}_{r+1})$. Par construction,

$\mathbf{g}_r = \mathbb{R} b'_{r+1} \oplus \mathbf{g}_{r+1}$

$b'_{r+1} \in \mathbf{g}_r \subset \mathbf{g}_{r-1} \subset \ldots \subset \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}$.

Donc $\langle \ell, [b'_{r+1}, y_k] \rangle = 0$ pour $k < r+1$, c'est-à-dire $k \leq r$. De plus,

$$y_{r+1} \in \mathbf{g}_{r+1} \subset \mathbf{g}_r \subset \ldots \subset \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}$$

et $\mathbf{g}_j = \{u \in \mathbf{g}_{j-1} | \langle \ell, [u, y_j] \rangle = 0\}$. Donc $\langle \ell, [y_{r+1}, y_j] \rangle = 0$ pour tout j, $j \leq r+1$ et $y_1, \ldots, y_r, y_{r+1} \in \mathbf{g}_{r+1}$, puisqu'on sait déjà que $y_1, \ldots, y_r \in \mathbf{g}_r$. Par construction, $\mathbf{g}_{r+1}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}_r$ et (b'_{r+1}) est une base coexponentielle à $\mathbf{g}_{r+1}$ dans $\mathbf{g}_r$.

f) **Conclusion :** On construit donc $\mathbf{g} \supset \mathbf{g}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{g}_p$ jusqu'à ce que $\langle \ell, [\mathbf{g}_p, \mathbf{g}_p] \rangle = 0$. Alors $V^B(\mathbf{g}) = V^{B_1}(\mathbf{g}_1) = \ldots = V^{B_p}(\mathbf{g}_p) = \mathbf{g}_p$ est la polarisation de Vergne associée à la base de Jordan-Hölder de départ B. Par construction chaque $\mathbf{g}_r$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathbf{g}_{r-1}$. La construction donne une base coexponentielle $(b'_1, \ldots, b'_p)$ à $\mathbf{g}_p$ dans $\mathbf{g}$ telle que $\mathbf{g}_{r-1} = \mathbb{R}b'_r \oplus \mathbf{g}_r$ pour tout r et des éléments $y_1, \ldots, y_p$ de $\mathbf{g}_p$ tels que

$$\begin{aligned} &\langle \ell, [b'_r, y_r] \rangle = 1 && \text{pour } 1 \leq r \leq p \\ &\langle \ell, [y_r, y_s] \rangle = 0 && \text{pour } 1 \leq r, s \leq p \\ &\langle \ell, [b'_s, y_r] \rangle = 0 && \text{pour } 1 \leq r < s \leq p \end{aligned}$$

7.6. a) Dans cette section on montre qu'on peut modifier les b'_j, y_j obtenus en 7.5. de manière à vérifier

$$\begin{aligned} &\langle \ell, [b'_i, b'_j] \rangle = 0 \\ &\langle \ell, [b'_i, y_j] \rangle = \delta_{ij} && \text{quels que soient } i, j \\ &\langle \ell, [y_i, y_j] \rangle = 0. \end{aligned}$$

b) Remplaçons chaque y_j par un $y'_j = y_j + \sum_{s<j} \lambda_s y_s$ en choisissant les λ_s de manière à avoir $\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = \delta_{ij}$. Ceci est possible. En effet, remarquons d'abord que pour $i > j > s$ on a $\langle \ell, [b'_i, y_j] \rangle = 0$ et $\langle \ell, [b'_i, y_s] \rangle = 0$. Donc, pour $i > j$ on a également $\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = 0$ et $\langle \ell, [b'_i, y'_i] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y_i] \rangle = 1$. Pour $i < j$ on obtient

$$\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y_j] \rangle + \sum_{i<s<j} \lambda_s \langle \ell, [b'_i, y_s] \rangle + \lambda_i.$$

Pour j fixé on obtient le système suivant en annulant les $\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle$, $i < j$,

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad & \lambda_1 + \lambda_2 \langle \ell, [b'_1, y_2] \rangle + \ldots + \lambda_{j-1} \langle \ell, [b'_1, y_{j-1}] \rangle \\ & = -\langle \ell, [b'_1, y_j] \rangle \\ i = 2 : \quad & \lambda_2 + \lambda_3 \langle \ell, [b'_2, y_3] \rangle + \ldots + \lambda_{j-1} \langle \ell, [b'_2, y_{j-1}] \rangle \\ & = -\langle \ell, [b'_2, y_j] \rangle \\ & \vdots \\ i = j-1 : \quad & \lambda_{j-1} = -\langle \ell, [b'_{j-1}, y_j] \rangle. \end{aligned}$$

Ce système admet donc une solution unique pour les λ_s. Remarquons que les y'_j construits appartiennent toujours à $\mathbf{g}_p$ et vérifient également $\langle \ell, [y'_i, y'_j] \rangle = 0$ quels que soient i, j.

c) Remplaçons chaque b'_i par un $b''_i = b'_i + \sum_{s<i} \mu_s y'_s$ en choisissant les μ_s de manière à avoir $\langle \ell, [b''_i, b''_j] \rangle = 0$ quels que soient i, j. Faisons cette construction par récurrence. En effet, remarquons d'abord que $\langle \ell, [b''_i, y'_i] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y'_i] \rangle + 0 = 1$ pour tout i et $\langle \ell, [b''_i, y'_j] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = 0$ pour i, j distincts.
Pour $i = 1$, prenons $b''_1 = b'_1$.
Pour $i = 2$, posons

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [b''_2, b''_1] \rangle \\ &= \langle \ell, [b''_2, b'_1] \rangle \\ &= \langle \ell, [b'_2, b'_1] \rangle - \mu_1. \end{aligned}$$

Donc $\mu_1 = \langle \ell, [b'_2, b'_1] \rangle$ et b''_2 est déterminé.
Supposons $b''_1, \ldots, b''_{i-1}$ construits tels que $\langle \ell, [b''_r, b''_s] \rangle = 0$ pour $r, s \leq i-1$ et déterminons b''_i. Pour $k < i$ on exige

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [b''_i, b''_k] \rangle \\ &= \langle \ell, [b'_i, b''_k] \rangle - \mu_k. \end{aligned}$$

Donc $\mu_k = \langle \ell, [b'_i, b''_k] \rangle$ et b''_i est déterminé.
On construit ainsi de proche en proche les b''_i tels que $\langle \ell, [b''_i, b''_j] \rangle = 0$ quels que soient i, j.

Remarquons finalement que $(b''_1, \ldots, b''_p)$ est toujours une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_p$ dans $\mathfrak{g}$. En effet, comme $y'_s \in \mathfrak{g}_p$ pour tout s, on a encore $\mathfrak{g}_k = \mathbb{R}b''_{k+1} \oplus \mathfrak{g}_{k+1}$, et, puisque $\mathfrak{g}_{k+1}$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_k$, (b''_{k+1}) est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_{k+1}$ dans $\mathfrak{g}_k$. On obtient alors de proche en proche une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_p$ dans $\mathfrak{g}$.

d) Les constructions précédentes auraient pu être intégrées dans le raisonnement par récurrence donnant la polarisation et la première base coexponentielle.

Bibliographie

[1] Bernat, P., Conze, N., Duflo, M., Lévy-Nahas, M., Rais, M., Renouard, P., Vergne, M., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod (1972), Paris.

[2] Jasper, G., *Eine Fouriertransformation auf nilpotenten Lie-gruppen*, Diplomarbeit, Universität Bielefeld, 1985.

[3] Pukanszky, L., On the theory of exponential groups, *Trans. Am. Math. Soc.* 126 (1967), 487-507.

[4] Pukanszky, L., On the Unitary Representations of Exponential Groups, *J. of Functional Anal.* 2 (1968), 73-113.

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg