La propriété de Wiener

Carine Molitor-Braun

1. Les précurseurs : les théorèmes taubériens

1.1. En 1897, *Tauber* [14] démontre le résultat suivant :

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $0 < x < 1$ avec $a_n = o(\frac{1}{n})$ et

si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = s$, alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = s$.

1.2. Littlewood a remplacé la condition $a_n = o(\frac{1}{n})$ par $a_n = O(\frac{1}{n})$.

1.3. Vaguement on peut appeler théorème taubérien tout résultat de la forme : Si certaines moyennes d'une suite ou d'une fonction convergent et si certaines conditions supplémentaires sont vérifiées, alors on peut conclure à l'existence d'autres limites ou moyennes, comme c'est par exemple le cas dans le théorème de Tauber.

1.4. Le *théorème taubérien de Wiener* est un exemple de théorème taubérien continu. Dans [15] Wiener démontre :

Soit $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ et soit $K_1 \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{K}_1$ (transformée de Fourier de K_1) ne s'annule pas. Si

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x-y) f(y)\, dy = \lim_{x \to +\infty} K_1 * f(x) = A \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x)\, dx$$

A étant une constante, alors, pour tout $K_2 \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x-y)f(y)dy = \lim_{x \to +\infty} K_2 * f(x) = A \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x)dx. \qquad (1)$$

Remarquons que le produit de convolution peut être considéré comme moyenne pondérée de la fonction f.

2. Les sous-espaces invariants par translations : introduction à la propriété de Wiener

2.1. On voit facilement qu'en général l'ensemble des fonctions K de $L^1(\mathbb{R})$ vérifiant (1) forme un sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$ invariant par translations, la translatée d'une fonction K étant définie par ${}_aK(x) = K(x-a)$.

2.2. Ce sont sans doute des considérations de ce genre qui amènent Wiener à constater que les étapes essentielles de la démonstration de 1.4. servent aussi à prouver le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de Wiener* :

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est tel que $\hat{f}$ ne s'annule pas, alors le sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$ engendré par les translatées de f (qui coïncide avec l'idéal fermé de $L^1(\mathbb{R})$ engendré par f) n'est rien d'autre que l'espace $L^1(\mathbb{R})$ tout entier et réciproquement. De manière équivalente, l'idéal fermé engendré par f est distinct de $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{f}(u) = 0$.

2.3. Wiener remarque déjà que le résultat précédent reste vrai si on remplace la fonction f par toute une classe de fonctions, ce qui nous amène à la forme suivante du *théorème général de Wiener* :

Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R})$. Si $I \neq L^1(\mathbb{R})$, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{f}(u) = 0$ pour tout $f \in I$ et réciproquement.

2.4. Le théorème général de Wiener implique le théorème taubérien de Wiener (pour $I = \{K \in L^1(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \to +\infty} K * f(x) = A \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx\}$) et les méthodes qui servent à démontrer le théorème taubérien de Wiener entrent également dans la démonstration du théorème général de Wiener.

3. Les groupes localement compacts abéliens : analogie avec le groupe $\mathbb{R}$

3.1. Rappelons que dans le cas d'un groupe localement compact abélien G on définit le groupe des caractères $\hat{G}$ comme étant l'ensemble des homomorphismes continus de G dans le tore $\mathbb{T}$ des nombres complexes de module 1, $\hat{G}$ étant muni de la topologie de la convergence compacte. Dans ce cas les représentations unitaires (topologiquement) irréductibles de G, resp. $L^1(G)$ sont de dimension 1 et peuvent être identifiées avec les caractères du groupe par

$$\pi_\chi(x) = \chi(x).\mathbb{1}_{\mathbb{C}} \qquad \text{pour } x \in G, \chi \in \hat{G}$$

$$\pi_\chi(f) = \int_G f(x)\pi_\chi(x)dx = \int_G f(x)\chi(x)dx.\mathbb{1}_{\mathbb{C}} = \hat{f}(\overline{\chi}).\mathbb{1}_{\mathbb{C}}$$

$$\text{pour } f \in L^1(G)$$

à condition de définir la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx.$$

Donc $\hat{f}(\chi) = 0$ si et seulement si $f \in \operatorname{Ker} \pi_{\overline{\chi}}$, noyau de la représentation unitaire irréductible $\pi_{\overline{\chi}}$.

3.2. Rappelons encore que dans le cas d'un groupe localement compact abélien G les ensembles suivants coïncident, à savoir :

$\mathrm{Prim}_* L^1(G)$ = ensemble des noyaux des représentations unitaires topologiquement irréductibles de $L^1(G)$

$\mathrm{Prim}\, L^1(G)$ = ensemble des noyaux des représentations algébriquement irréductibles de $L^1(G)$

$\mathrm{Max}\, L^1(G)$ = ensemble des idéaux réguliers maximaux de $L^1(G)$.

3.3. Le *théorème général de Wiener*, pour groupes localement compacts abéliens, démontré indépendamment par Godement [2] et Segal [12] s'énonce alors

Si I est un idéal fermé de $L^1(G)$, distinct de $L^1(G)$, alors il existe $\chi \in \hat{G}$ tel que $\hat{f}(\chi) = 0$ pour tout $f \in I$, ou, de manière équivalente, I est contenu dans un élément de $\mathrm{Prim}_* L^1(G) \equiv \mathrm{Prim}\, L^1(G) \equiv \mathrm{Max}\, L^1(G)$.

3.4. Les ingrédients essentiels de la démonstration de 3.3. sont les suivants :

a) $L^1(G)$ est une algèbre régulière, c'est-à-dire si F est un fermé de $\hat{G}$ et si $\chi_0 \in \hat{G} \setminus F$, alors il existe $f \in L^1(G)$ tel que $\hat{f}(\chi_0) = 1$ et $\hat{f}\,|_F \equiv 0$.

b) L'ensemble $\{f \in L^1(G) | \hat{f}$ est à support compact$\}$ est dense dans $L^1(G)$.

4. Les groupes non abéliens : différentes définitions possibles

4.1. Si G est un groupe localement compact non abélien, les ensembles $\mathrm{Prim}_* L^1(G)$, $\mathrm{Prim}\, L^1(G)$ et $\mathrm{Max}\, L^1(G)$ sont en général distincts. Cela nous amène à considérer trois généralisations possibles de la propriété de Wiener.

4.2. Si tout idéal bilatère fermé de $L^1(G)$, distinct de $L^1(G)$, est contenu dans un élément de

a) $\mathrm{Prim}_* L^1(G)$ on dit que le groupe possède la *propriété de Wiener* ou qu'il appartient à la classe [W]

b) $\mathrm{Prim}\, L^1(G)$ on dit que le groupe possède la *propriété faible de Wiener* ou qu'il appartient à la classe [WW] (weakly Wiener)

c) $\mathrm{Max}\, L^1(G)$ on dit que le groupe possède la *propriété de Tauber* ou qu'il appartient à la classe [Taub].

4.3. Dans le cas de [W] il suffit de supposer que tout idéal bilatère fermé propre de $L^1(G)$ soit annulé par une représentation unitaire quelconque de $L^1(G)$.

4.4. Beaucoup de groupes ne possèdent pas les propriétés précédentes et les classes [W], [WW] et [Taub] sont distinctes.

5. Quelques exemples et contre-exemples

5.1. Les groupes localement compacts abéliens possèdent la propriété de Wiener ([2] et [12]).

5.2. Les groupes compacts possèdent la propriété de Wiener [12].

5.3. Tout produit direct d'un groupe localement compact abélien et d'un groupe compact possède la propriété de Wiener [16]. Dans ce cas on généralise les idées essentielles de la démonstration du cas abélien.

5.4. Tout produit semi-direct de groupes de Lie abéliens (par exemple le groupe affine de la droite) possède la propriété de Wiener. En effet, si A et B sont des groupes de Lie abéliens, soient $G = A \ltimes B$ (produit semi-direct) et $H = A \times B$ (produit direct). Alors tout idéal bilatère fermé I de $L^1(G)$ est également un idéal bilatère fermé de $L^1(H)$. Comme H est abélien, il existe $\chi \in \hat{H}$ tel que $\hat{f}(\chi) = 0$ pour tout $f \in I$. Dans ce cas χ définit un caractère sur un certain sous-groupe G_1 de G. La représentation induite $\pi = \mathrm{ind}_{G_1}^{G}\chi$ est telle que $I \subset \mathrm{Ker}\ \pi$ ([11]).

5.5. Il existe quelques résultats généraux comme par exemple le suivant: Tout groupe symétrique possédant la propriété faible de Wiener possède également la propriété de Wiener. Ce résultat est utilisé pour démontrer que tout groupe à croissance polynomiale et à génération compacte possède la propriété de Wiener ([3], [7]).

5.6. Pour les groupes discrets il n'existe que quelques résultats isolés. Ainsi sait-on que tout groupe discret résoluble possède la propriété de Wiener [7]. Par contre le problème n'est pas encore résolu pour le groupe libre à deux générateurs.

5.7. Soit $G_{4,9}(0)$ le groupe de Lie connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{4,9}(0) = \langle T,X,Y,Z \rangle$ telle que $[T,X] = -X$, $[T,Y] = Y$, $[X,Y] = Z$. Alors $G_{4,9}(0)$ est un groupe de Lie exponentiel ne possédant pas la propriété de Wiener. En effet, dans ce cas il existe $R = R^*$ central dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{4,9}(0))$ et une représentation π_p irréductible de $G_{4,9}(0)$ sur $L^p(\mathbb{R})$ telle que $d\pi_p(R) = \mathrm{ik}.\mathbb{1}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. Supposons qu'il existe une représentation unitaire irréductible ζ telle que $\mathrm{Ker}\ \pi_p \subset \mathrm{Ker}\ \zeta$. Alors $d\zeta(R) = \mathrm{ik}.\mathbb{1}$ et $d\zeta(R^*) = (d\zeta(R))^* = -\mathrm{ik}.\mathbb{1}$. Ceci est une contradiction étant donné que $R = R^*$.

5.8. Un raisonnement du même genre montre que les groupes de Lie semi-simples non compacts ne possèdent pas la propriété de Wiener.

6. La méthode de Leptin : les L^1-algèbres généralisées

6.1. Le but de cette méthode développée par Leptin ([4], [5], [6]) est d'étudier la symétrie et la propriété de Wiener pour des produits semi-directs. Pour mieux comprendre l'idée essentielle de cette

méthode, choisissons deux groupes abéliens A et B. Le théorème de Fubini permet d'écrire, pour tout $f \in L^1(A \times B)$

$$\int_{A\times B} |f(x,y)|dxdy = \int_A \left[\int_B |f(x,y)|dy\right]dx = \int_A \|f(x,.)\|_{L^1(B)}dx$$

c'est-à-dire les fonctions de $L^1(A \times B)$ peuvent être identifiées avec des fonctions mesurables f, définies sur A et à valeurs dans $L^1(B)$ telles que $x \longmapsto \|f(x,.)\|_{L^1(B)}$ soit intégrable.

6.2. Pour le produit semi-direct $A \ltimes B$ de deux groupes A et B quelconques, on peut encore identifier $L^1(A \ltimes B)$ avec une L^1-algèbre généralisée notée $\mathfrak{L}^1(A,L^1(B))$ formée des fonctions mesurables f définies sur A et à valeurs dans $L^1(B)$ telles que $x \longmapsto \|f(x,.)\|_{L^1(B)}$ soit intégrable. Cependant dans ce cas il faut munir $\mathfrak{L}^1(A,L^1(B))$ d'une nouvelle involution et d'un nouveau produit de convolution pour tenir compte de l'action de A sur B. D'ailleurs si G est un groupe agissant sur une algèbre de Banach involutive $\mathcal{A}$, la définition de $\mathfrak{L}^1(G,\mathcal{A})$ est également possible.

6.3. Dans le cas $L^1(A \ltimes B) \equiv \mathfrak{L}^1(A,L^1(B))$ Leptin [6] montre que, sous certaines conditions supplémentaires, si B possède la propriété de Wiener, $\mathfrak{L}^1(A,L^1(B))$ est une algèbre de Wiener, c'est-à-dire $A \ltimes B$ possède la propriété de Wiener. Il démontre en particulier les résultats suivants :

6.4. Si A et B sont des groupes abéliens, si B est séparable et si l'action de A sur B est continue, alors $A \ltimes B$ possède la propriété de Wiener.

6.5. Si G est un groupe de Lie connexe nilpotent, alors G possède la propriété de Wiener. En effet, après s'être ramené à des groupes simplement connexes, on peut utiliser le lemme de Kirillov pour écrire G comme produit semi-direct. Il est alors possible de faire une récurrence sur la dimension du groupe G.

6.6. Soit H_n le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$. Soit $G = \mathbb{R} \ltimes H_n$. Si le centre de G est trivial, alors $G \in$ [W].

6.7. Le résultat de 6.6. est utilisé pour montrer que tous les groupes de Lie connexes résolubles de dimension inférieure ou égale à 4, à l'exception du groupe $G_{4,9}(0)$, possèdent la propriété de Wiener.

7. L'approche de Müller-Römer : les contractions

7.1. Soit G un groupe localement compact séparable possédant un sous-groupe normal N. Les automorphismes intérieurs de G, $\varphi_g(x) = g\,x\,g^{-1}$, définissent par restriction à N des automorphismes de N. On dit qu'un sous-ensemble H de tels automorphismes possède suffisamment de *contractions* si et seulement si pour tout compact $K \subset N$ et tout voisinage W du neutre dans N il existe $\varphi_g \in H$ tel que $\varphi_g(K) \subset W$. Supposons que tel soit le cas. Supposons de plus qu'il existe une suite de contractions $\varphi_{g_k} \in H$ telles que $\lim_k \varphi_{g_k}(x) = \lim_k (g_k\,x\,g_k^{-1})$ existe localement pour presque tout $x \in G$. Müller-Römer [9] montre que sous ces conditions G possède la propriété de Wiener si et seulement s'il en est ainsi de G/N.

7.2. Dans [10] Poguntke a déterminé une liste de groupes de Lie résolubles connexes simplement connexes non symétriques. On peut utiliser la méthode des contractions pour montrer que les groupes B_5 et $G_{6,8}$ de cette liste possèdent la propriété de Wiener bien qu'ils ne soient pas symétriques.

8. L'idée de Ludwig : l'étude des orbites

8.1. Dans cette section soit G un groupe de Lie connexe simplement connexe exponentiel (c'est-à-dire pour lequel l'application exp est

un difféomorphisme) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$. Posons $\mathfrak{g}(\ell) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \langle \ell,[x,u]\rangle = 0\ \forall u \in \mathfrak{g}\}$ et $\mathfrak{m}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Définissons $\mathfrak{m}^1(\ell) = \mathfrak{m}(\ell)$, $\mathfrak{m}^2(\ell) = [\mathfrak{m}(\ell),\mathfrak{m}^1(\ell)]$, $\mathfrak{m}^3(\ell) = [\mathfrak{m}(\ell), \mathfrak{m}^2(\ell)], \dots, \mathfrak{m}^\infty(\ell) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^r(\ell)$. On dit que $\ell \in \mathfrak{g}^*$ est *$*$-régulier* si et seulement si $\ell|_{\mathfrak{m}^\infty(\ell)} \equiv 0$ ([1]).

8.2. Rappelons encore que le groupe G agit sur $\mathfrak{g}^*$ par l'action coadjointe Ad^*. On définit l'orbite de $\ell \in \mathfrak{g}^*$ par $\Omega_\ell = G.\ell = Ad^*(G)(\ell)$.

8.3. Dans [8] *Ludwig* a démontré le critère suivant :

Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ non $*$-régulier et supposons que la G-orbite $G.(\ell|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]})$ dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^*$ soit un sous-ensemble fermé de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^*$. Alors G ne possède pas la propriété de Wiener.

En effet, dans ce cas on peut construire une représentation irréductible π_p telle que son noyau Ker π_p ne soit contenu dans aucun noyau d'une représentation unitaire.

8.4. Le critère de Ludwig peut par exemple être utilisé pour montrer que les groupes $G_{6,4}$ et $G_{6,3}(0)$ de la liste de Poguntke ne possèdent pas la propriété de Wiener.

8.5. Considérons à présent $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}(\ell)$ et $G_1 = \exp \mathfrak{m}(\ell)$. On montre facilement que $\ell \in \mathfrak{g}^*$ est $*$-régulier si et seulement si $\ell|_{\mathfrak{m}(\ell)} \in \mathfrak{m}(\ell)^*$ est $*$-régulier. On remarque de plus que

$$\exp(\mathfrak{m}(\ell)).(\ell|_{[\mathfrak{m}(\ell),\mathfrak{m}(\ell)]}) = \exp[\mathfrak{g},\mathfrak{g}].(\ell|_{[\mathfrak{m}(\ell),\mathfrak{m}(\ell)]})$$

est un sous-ensemble fermé de $[\mathfrak{m}(\ell),\mathfrak{m}(\ell)]^*$, étant donné que $\exp[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent, G étant exponentiel. Par conséquent si $\ell \in \mathfrak{g}^*$ est non $*$-régulier, le groupe $\exp \mathfrak{m}(\ell)$ ne possède pas la propriété de Wiener.

8.6. En particulier si $\ell \in \mathfrak{g}^*$ est non $*$-régulier et si $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}(\ell)$, le groupe G ne possède pas la propriété de Wiener.

8.7. Le résultat de 8.6. peut être utilisé pour montrer que les groupes $G_{4,9}(0)$, G_5, $G_5(\alpha)$, $\tilde{G}_5$, $G_{5,4}$, $G_{6,5}$, $G_{6,6}$, $G_{6,1}(\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$, $G_{6,3}(\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ et $G_{6,3}$ de la liste de Poguntke ne possèdent pas la propriété de Wiener.

9. Le groupe $G_{6,7}$: exemple critique de la liste de Poguntke

9.1. Le groupe $G_{6,7}$ est le seul groupe exponentiel de la liste de Poguntke qui ne peut pas être traité par les méthodes précédentes. Rappelons que son algèbre de Lie est donnée par $\mathfrak{g} = \langle e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 \rangle$ avec $[e_2,e_3] = e_4$, $[e_1,e_2] = -e_2$, $[e_1,e_3] = e_3$, $[e_0,e_1] = e_4$, $[e_0,e_5] = e_5$. L'élément $\ell = e_4^* + e_5^*$ de $\mathfrak{g}^*$ est non $*$-régulier. L'orbite de ℓ, $\Omega_\ell = G.\ell$, est fermée dans $\mathfrak{g}^*$, mais sa restriction à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^*$, c'est-à-dire $G.(\ell|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]})$ n'est pas fermée dans $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^*$. Ceci provient du fait que l'orbite Ω_ℓ possède une direction asymptotique.

9.2. On peut alors montrer que $G_{6,7}$ ne possède pas la propriété de Wiener de la manière suivante : Soit $G_1 = \exp \mathfrak{m}(\ell)$ et $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{m}(\ell)}$. Soit $\mathfrak{h}_1$ une polarisation de ℓ_1 dans $\mathfrak{m}(\ell)$ et soit $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$. On définit le caractère χ_{ℓ_1} de H_1 et on construit la représentation irréductible $\zeta_p = \mathrm{ind}_{H_1}^{G_1}(\chi_{\ell_1},p)$ sur un espace L^p. Alors $I = \bigcap_{r\in G}(\mathrm{Ker}\ \zeta_p)^r$ est un idéal G-invariant de $L^1(G_1)$. Soit J l'idéal fermé propre de $L^1(G_{6,7})$ engendré par $L^1(G_{6,7})*I*L^1(G_{6,7})$. On montre que I ne peut pas être annulé par une représentation unitaire irréductible de $L^1(G_1)$ et on en déduit que J ne peut pas l'être par une représentation unitaire de $L^1(G_{6,7})$. Par conséquent $G_{6,7}$ ne possède pas la propriété de Wiener.

10. Conclusion : beaucoup de questions ouvertes

10.1. Les groupes de Lie semi-simples non compacts ne possèdent pas la propriété de Wiener.

10.2. Les groupes de Lie connexes nilpotents ont la propriété de Wiener. Par contre il y a des groupes exponentiels qui possèdent cette propriété et d'autres qui ne la possèdent pas. Il n'existe pas encore de caractérisation des groupes exponentiels appartenant à la classe de Wiener.

10.3. Les relations entre les propriétés de l'orbite et la propriété de Wiener sont encore mal connues.

10.4. Il existe peu de résultats connus pour les groupes discrets.

10.5. Cet exposé n'a pu traiter que quelques aspects de la propriété de Wiener. La bibliographie est loin d'être exhaustive.

Bibliographie

[1] Boidol, J., *$*$-Regularity of Exponential Lie Groups*, Inventiones Math. **56**, 231-238 (1980).

[2] Godement, R., *Théorèmes taubériens et théorie spectrale*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **64**, 119-138 (1947).

[3] Hulanicki, A., Jenkins, J., Leptin, H., Pytlik, T., *Remarks on Wiener's Tauberian theorems for groups with polynomial growth*, Colloq. Math. **35**, 293-304 (1976).

[4] Leptin, H., *Verallgemeinerte L^1-Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen*, Inventiones Math. **3**, 257-281, **4**, 68-86 (1967).

[5] Leptin, H., *Darstellungen verallgemeinerter L^1-Algebren*, Inventiones Math. **5**, 192-215 (1968).

[6] Leptin, H., *Ideal Theory in Group Algebras of Locally Compact Groups*. Inventiones Math. **31**, 259-278 (1976).

[7] Ludwig, J., *A Class of Symmetric and a Class of Wiener Group Algebras*, J. Funct. Anal. 31, 187-194 (1979).

[8] Ludwig, J., *Irreducible Representations of Exponential Solvable Lie Groups and Operators with Smooth Kernels*, J. Reine und Angew Math. **339**, 1-26 (1983).

[9] Müller-Römer, P., *Kontrahierende Erweiterungen und kontrahierbare Gruppen*, J. Reine und Angew. Math. **283/284**, 238-264 (1976).

[10] Poguntke, D., *Nichtsymmetrische sechsdimensionale Liesche Gruppen*, J. Reine und Angew. Math. **306**, 154-176 (1979).

[11] Pytlik, T., *L^1-Harmonic Analysis and Semi-direct Products of Abelian Groups*, Mh. Math. **93**, 309-328 (1982).

[12] Segal, I.E., *The Group Algebra of a Locally Compact Group*, Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 69-105 (1947).

[13] Singh, A.I., *Modern Wiener-Tauberian Theorems and Applications in Spectral Synthesis*.

[14] Tauber, A., *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen*, Monatsch. Math. **81**, 273-277 (1897).

[15] Wiener, N., *The Fourier Integral and certain of its Applications*, Cambridge University Press (1933), Cambridge. Reprinted by Dover Publ., Inc., New York (1958).

[16] Willcox, A.B., *Note on certain Group Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 7, 874-879 (1956).

Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN/CUL/90/009.

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg