Les groupes exponentiels

Deuxième partie

Carine Molitor-Braun

3. Autre définition de l'algèbre de Lie

3.1. Soit $(V,\cdot)$ un groupe exponentiel. On supposera V muni d'une base de sorte que V pourra être identifié à $\mathbb{R}^n$ pour un certain n. L'introduction suivante de l'algèbre de Lie de $G = (V,\cdot)$ se base uniquement sur les résultats de 1.1. à 1.12.

3.2. Définition : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Quels que soient $x,y \in V$ définissons $Ad(x)(y)$ par

$$Ad(x)(y) = xyx^{-1}$$

3.3. Proposition : L'application

$$\varphi : \mathbb{R} \to G = (V,\cdot)$$

$$t \to \varphi(t) = Ad(x)(ty) = x\cdot(ty)\cdot x^{-1}$$

est un homomorphisme analytique de groupes de $\mathbb{R}$ dans G.

Démonstration : $\varphi(t)\cdot\varphi(s) = [x\cdot(ty)\cdot x^{-1}]\cdot[x\cdot(sy)\cdot x^{-1}]$
$= x\cdot[(ty)\cdot(sy)]\cdot x^{-1}$
$= x\cdot(t+s)y\cdot x^{-1}$
$= \varphi(t+s)$

quels que soient $s,t \in \mathbb{R}$. L'application φ est analytique, comme il en est ainsi de la multiplication dans G.

3.4. <u>Corollaire</u> : Quels que soient $x,y \in V$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Ad(x)(ty) &= t \cdot Ad(x)(y) \\ x \cdot (ty) \cdot x^{-1} &= t \cdot (x \cdot y \cdot x^{-1}) \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> : Par 1.12. il existe $u \in V$ tel que

$$x \cdot (ty) \cdot x^{-1} = \varphi(t) = t \cdot u \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors $t = 1$ donne $x \cdot y \cdot x^{-1} = u$, c.à.d.

$$x \cdot (ty) \cdot x^{-1} = t \cdot (x \cdot y \cdot x^{-1})$$

3.5. <u>Proposition</u> : Quels que soient $x,y,z \in V$:

$$Ad(x)(y+z) = Ad(x)(y) + Ad(x)(z)$$

<u>Démonstration</u> : Supposons $x \in V$ fixé et identifions V à $\mathbb{R}^n$. Alors

$$Ad(x)(y) = x \cdot y \cdot x^{-1} = (A_1(y), A_2(y), \ldots A_n(y)),$$

les A_i étant des fonctions analytiques de y. De plus,

$$Ad(x)(ty) = tAd(x)(y)$$

entraîne

$$A_i(ty) = tA_i(y) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Montrons que ceci implique que A_i est nécessairement de la forme

$$A_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad \text{où } y = (y_1, \ldots, y_n)$$

En effet, au voisinage de 0 on peut écrire

$$A_i(y) = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} y_j y_k + O(3)$$

Or $A_i(0) = A_i(0 \cdot y) = 0 \cdot A_i(y)$ donne $a_i = 0$. Par conséquent, pour tout $y \in V$ et pour t suffisamment petit on a :

$$t \cdot A_i(y) = A_i(ty) = t \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + t^2 \cdot \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} y_j y_k + O(t^3)$$

et

$$A_i(y) = \frac{d}{dt}\left(t \cdot A_i(y) \right)_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

Par conséquent, $A_i(y+z) = A_i(y) + A_i(z)$ pour tout i et

$$Ad(x)(y+z) = Ad(x)(y) + Ad(x)(z)$$

3.6. <u>Proposition</u> : L'application

$$\begin{aligned} Ad : G = (V,\cdot) &\to GL(V) \\ x &\to Ad(x) \end{aligned}$$

est une représentation de groupe.

<u>Démonstration</u> : Par 3.4. et 3.5., Ad(x) est une application linéaire de V dans V.Elle est bijective, car

$$\begin{aligned} Ad(x)(y) = Ad(x)(z) \quad &\text{ssi} \quad xyx^{-1} = xzx^{-1} \\ &\text{ssi} \quad y = z \end{aligned}$$

Ceci prouve l'injectivité. Comme V est de dimension finie, Ad(x) est également surjective. Donc $Ad(x) \in GL(V)$.
Quels que soient $x, x' \in V$ on a $Ad(xx') = Ad(x)\,Ad(x')$. En effet,

$$\begin{aligned} Ad(xx')(y) &= (xx') \cdot y \cdot (xx')^{-1} \\ &= x \cdot (x' \cdot y \cdot x'^{-1}) \cdot x^{-1} \\ &= Ad(x)\,(Ad(x')(y)) \end{aligned}$$

Comme l'application $x \to Ad(x)(y)$ est analytique pour tout y, l'application $x \to Ad(x)$ est une représentation C^∞ du groupe $G = (V,\cdot)$.

3.7. Définition : Par définition, ad(x) est la différentielle de Ad(x), c.à.d.

$$ad(x) = d(Ad)(x) = \frac{d}{dt}\left(Ad(tx) \right)_{t=0}$$

à savoir, pour tout $y \in V$,

$$ad(x)(y) = \frac{d}{dt}\left(Ad(tx)(y) \right)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left((tx)\cdot y \cdot (tx)^{-1} \right)_{t=0}$$

3.8. Remarque : Comme $Ad(tx)\,(\lambda y+\mu z) = \lambda Ad(tx)(y) + \mu Ad(tx)(z)$, on a également $ad(x)(\lambda y+\mu z) = \lambda ad(x)(y) + \mu ad(x)(z)$, c.à.d. $ad(x) \in \mathcal{end}(V)$.

3.9. Proposition : Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, z \in V$,

$$ad(\lambda x + \mu z) = \lambda ad(x) + \mu ad(z)$$

Démonstration : Remarquons d'abord que

$$ad(\lambda x)(y) = \frac{d}{dt} Ad(t\lambda x)(y)_{t=0}$$

$$= \lambda \frac{d}{ds} Ad(sx)(y)_{s=0} \qquad \text{en posant } s = \lambda t \text{ si } \lambda \neq 0$$

$$= \lambda\, ad(x)(y)$$

Notons ensuite que pour y fixé on peut écrire

$$Ad(x)(y) = (B_1(x), B_2(x), \ldots, B_n(x)) = B(x),$$

les B_i étant des fonctions analytiques de x. Alors

$$ad(x)(y) = \frac{d}{dt} Ad(tx)(y)_{t=0} = \frac{d}{dt} B(tx)_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial x_i}(0)\cdot x_i$$

et

$$ad(x+z)(y) = \frac{d}{dt} B(\, t(x+z))_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial x_i}(0)\cdot (x_i+z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial x_i}(0)\cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial x_i}(0)\cdot z_i$$

$$= ad(x)(y) + ad(z)(y)$$

$$= (\, ad(x) + ad(z)\,)(y)$$

3.10. Définition : On définit le crochet de Lie dans V par

$$[\,,\,] : V \times V \to V$$

où

$$[x,y] = ad(x)(y) = \frac{d}{dt} Ad(tx)(y)_{t=0}$$

3.11. Remarque : Par 3.8. et 3.9., le crochet de Lie est bilinéaire.

3.12. Lemme : Quels que soient $x, y \in V$,

$$(tx)\cdot(sy)\cdot(tx)^{-1}$$
$$= (tx)\cdot(sy)\cdot(-tx)$$
$$= sy + stQ(x,y) + st^2 A(t) \qquad \text{pour s,t suffisamment petits}$$

A(t) étant une fonction analytique en t, dépendant de x, y.

Démonstration : Dans un voisinage de 0, la forme locale de la multiplication s'écrit :

$$x\cdot y = x + y + \tfrac{1}{2}Q(x,y) + O(3)$$

où Q(x,y) est bilinéaire et alternée. Donc, pour s,t suffisamment petits

$$(tx)\cdot(sy) = tx + sy + \tfrac{1}{2}stQ(x,y) + O(3)$$

et

$$(tx)\cdot(sy)\cdot(-tx) = tx + sy + \frac{1}{2}\, st\, Q(x,y) + O(3) + (-tx)$$
$$+ \frac{1}{2} Q\left(tx + sy + \frac{1}{2}\, st\, Q(x,y) + O(3), -tx \right) + O(3)$$

$$= sy + \frac{1}{2} st\, Q(x,y) - \frac{1}{2} t^2 Q(x,x) - \frac{1}{2} st\, Q(y,x)$$

$$- \frac{1}{4} st^2 Q(Q(x,y),x) + O(4) + O(3)$$

$$= sy + st\, Q(x,y) + O(3) \qquad \text{car } Q(y,x) = -Q(x,y)$$

$$= sy + st\, Q(x,y) + st^2 A(t)$$

car le terme restant O(3) doit être linéaire en s.

3.13. <u>Remarque</u> : Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour t suffisamment petit on a

$$Ad(tx)(sy) = sy + st\, Q(x,y) + st^2 A(t).$$

En effet, l'égalité est vraie pour s suffisamment petit. Comme les deux membres sont linéaires en s, l'égalité reste vraie pour tout $s \in \mathbb{R}$. En particulier, pour s = 1,

$$Ad(tx)(y) = y + t\, Q(x,y) + t^2 A(t) \quad \text{pour t suffisamment petit}$$

3.14 <u>Corollaire</u> : Quels que soient $x, y \in V$

$$[x,y] = ad(x)(y) = Q(x,y)$$

<u>Démonstration</u> :

$$ad(x)(y) = \frac{d}{dt} Ad(tx)(y)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(y + t\, Q(x,y) + t^2 A(t)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= Q(x,y)$$

3.15. <u>Remarque</u> : La forme locale de la multiplication s'écrit donc

$$x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + O(3)$$

pour x,y suffisamment petits.

3.16 <u>Corollaire</u> : Quels que soient $x,y \in V$

$$[x,y] = -[y,x]$$

<u>Démonstration</u> : On sait que $Q(x,y) = -Q(y,x)$

3.17 <u>Proposition</u> : L'application

$$ad : (V, [\ ,\ ]) \to (\mathit{end}V, [\ ,\ ])$$

est un homomorphisme d'algèbres où le crochet est défini dans *end*V par [A,B] = AB - BA. En particulier,

$$ad([x,z]) = [adx, adz] = adx\, adz - adz\, adx$$

<u>Démonstration</u> : Dérivons la relation

$$Ad\big((tx)\cdot(sz)\cdot(-tx)\big) = Ad(tx)\, Ad(sz)\, Ad(-tx)$$

c.à.d.

$$Ad(s(z + t[x,z] + t^2 A(t))) = Ad(tx)\, Ad(sz)\, Ad(-tx)$$

Donc

$$\frac{d}{ds} Ad\big(s(z + t[x,z] + t^2A(t))\big)\Big|_{s=0} = Ad(tx) \cdot \frac{d}{ds} Ad(sz)\Big|_{s=0} \cdot Ad(-tx)$$

$$ad\big(z + t[x,z] + t^2A(t)\big) = Ad(tx) \cdot ad(z) \cdot Ad(-tx)$$

$$adz + t\, ad([x,z]) + t^2\, adA(t) = Ad(tx) \cdot adz \cdot Ad(-tx)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(adz + t\, ad([x,z]) + t^2\, adA(t)\Big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(Ad(tx) \cdot adz \cdot Ad(-tx)\Big)\Big|_{t=0}$$

$$ad([x,z]) = \frac{d}{dt} Ad(tx)\Big|_{t=0} \cdot adz \cdot Ad(0) + Ad(0) \cdot adz \cdot \frac{d}{dt} Ad(-tx)\Big|_{t=0}$$

$$ad([x,z]) = \frac{d}{dt} Ad(tx)\Big|_{t=0} \cdot adz - adz \cdot \frac{d}{dt} Ad(tx)\Big|_{t=0}$$

$$ad([x,z]) = adx \cdot adz - adz \cdot adx$$

$$ad([x,z]) = [adx, adz]$$

3.18 <u>Remarque</u> : Dans les calculs précédents on a utilisé la propriété suivante :

Si $A(t) \in \mathit{end}(V)$, $B(t) \in \mathit{end}(V)$ sont dérivables termes à termes,

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right)_{t=t_0} = \frac{d}{dt}A(t)_{t=t_0} \cdot B(t_0) + A(t_0)\cdot \frac{d}{dt}B(t)_{t=t_0}$$

c.à.d. on a les règles habituelles de dérivation. Ceci provient de la distributivité du produit d'endomorphismes pour l'addition et la soustraction d'endomorphismes.

3.19. <u>Corollaire</u> : Quels que soient $x,y,z \in V$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0 \qquad \text{identité de Jacobi}$$

<u>Démonstration</u> :
$$\begin{aligned}[[x,y],z] &= ad([x,y])(z)\\ &= (adx\, ady - ady\, adx)(z)\\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]]\\ &= -[[y,z],x] - [[z,x],y]\end{aligned}$$

3.20. <u>Définition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. L'espace vectoriel V muni du crochet de Lie [,] est appelé <u>algèbre de Lie</u> du groupe G et est notée $\mathfrak{g}$, c.à.d. $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$.

3.21. <u>Remarque</u> : $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ vérifie les propriétés caractéristiques des algèbres de Lie, à savoir :

(I) [,] est bilinéaire
(II) $[x,y] = -[y,x]$ quels que soient $x,y \in V$
(III) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ quels que soient $x,y,z \in V$

3.22. <u>Proposition</u> : Soit

$$h : G \equiv (V,\cdot) \to GL(W)$$

un homomorphisme C^∞ de groupes. Alors, pour tout $x \in V$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^N}{dt^N}h(tx)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}h(tx)_{t=0}\right)^N$$

<u>Démonstration</u> : par récurrence

La relation est vraie pour N = 1. Supposons le résultat vrai pour 1, 2, ..., N-1. On a :

$$\frac{d^N}{dt^N}h(tx) = \frac{d^N}{dt^N}h\left(N\cdot\left(\frac{t}{N}x\right)\right) = \frac{d^N}{dt^N}\left(h\left(\frac{t}{N}x\right)\right)^N = \frac{1}{N^N}\frac{d^N}{dt^N}\left(h(tx)\right)^N$$

en remplaçant t par Nt. Evaluons

$$\frac{d^N}{dt^N}\left(h(tx)\right)^N = \frac{d^N}{dt^N}\left(\underbrace{h(tx)\cdot h(tx)\cdots h(tx)}_{\text{N facteurs}}\right)$$

Il y a N possibilités pour faire agir la première dérivée. Dans chacun de ces cas il y a N possibilités pour faire agir la deuxième dérivée, etc. On obtient donc N^N produits de la forme

$$\left(\frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}}h(tx)\right)\cdot\left(\frac{d^{\alpha_2}}{dt^{\alpha_2}}h(tx)\right)\cdots\left(\frac{d^{\alpha_N}}{dt^{\alpha_N}}h(tx)\right) \qquad \text{avec } \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N = N$$

Parmi tous ces produits il y en a N où une dérivée n-ième intervient, à savoir

$$\left(\frac{d^N}{dt^N}h(tx)\right)\cdot h(tx)\cdots h(tx)$$

$$h(tx)\cdot\left(\frac{d^N}{dt^N}h(tx)\right)\cdots h(tx)$$

...
...
...

$$h(tx)\cdot h(tx)\cdots\left(\frac{d^N}{dt^N}h(tx)\right)$$

En t=0 on trouve :

$$h(tx)_{t=0} = h(0) = id$$

Pour $\alpha_i < N$:

$$\frac{d^{\alpha_i}}{dt^{\alpha_i}} h(tx)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} h(tx)\Big|_{t=0}\right)^{\alpha_i}$$

par hypothèse de récurrence. D'où

$$\frac{d^N}{dt^N} h(tx)\Big|_{t=0} = \frac{1}{N^N}\frac{d^N}{dt^N}(h(tx))^N\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{N^N}\left[N\cdot \frac{d^N}{dt^N} h(tx)\Big|_{t=0} + (N^N - N)\cdot \left(\frac{d}{dt} h(tx)\Big|_{t=0}\right)^N\right]$$

Ainsi

$$(N^N - N)\cdot \frac{d^N}{dt^N} h(tx)\Big|_{t=0} = (N^N - N)\cdot \left(\frac{d}{dt} h(tx)\Big|_{t=0}\right)^N$$

et

$$\frac{d^N}{dt^N} h(tx)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} h(tx)\Big|_{t=0}\right)^N$$

3.23 <u>Cas particulier</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Pour tout $x \in V$,

$$\frac{d^N}{dt^N} Ad(tx)\Big|_{t=0} = (adx)^N$$

En effet,

$$\frac{d}{dt} Ad(tx)\Big|_{t=0} = ad(x)$$

3.24 <u>Corollaire</u> : Soit $G= (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Quel que soit $x \in V$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$Ad(tx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(adx)^k = \exp(t\ adx)$$

En particulier,

$$Adx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(adx)^k = \exp(adx)$$

<u>Démonstration</u> : Vu 3.23., cette relation est vraie pour t suffisamment petit. Comme le membre droit converge absolument pour tout t, et que les deux membres sont des fonctions analytiques de t, on a égalité partout.

3.25. <u>Remarque</u> : **Soit h un homomorphisme analytique de groupes de** $G = (V,\cdot)$ dans $GL(W)$. En posant

$$dh(x) = \frac{d}{dt} h(tx)\Big|_{t=0}$$

on trouve de même

$$h(tx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(dh(x))^k = \exp(t\ dh(x))$$

pour tout $x \in G$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

3.26 <u>Remarque</u> : Par 2.18., on voit que l'approche de la section 3 est équivalente à l'introduction traditionnelle de l'algèbre de Lie, présentée dans la section 2.

4. Centre. Sous-groupes

4.1. <u>Définitions</u> : Soit $(\mathfrak{g}[\ ,\ ])$ une algèbre de Lie.
Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une <u>sous-algèbre</u> de $\mathfrak{g}$ si

$$x,y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [x,y] \in \mathfrak{h} \text{ quels que soient } x,y.$$

Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ est un <u>idéal</u> de $\mathfrak{g}$ si

$$x \in \mathfrak{i},\ y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [x,y] \in \mathfrak{i} \text{ quels que soient } x,y.$$

Comme $[y,x] = -[x,y]$ on a alors également

$$x \in \mathfrak{g},\ y \in \mathfrak{i} \Rightarrow [x,y] \in \mathfrak{i}$$

On appelle <u>centre</u> de $\mathfrak{g}$ et on note $Z(\mathfrak{g})$ l'ensemble

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

4.2. <u>Remarque</u> : Le centre de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En effet, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ vu la bilinéarité du crochet de Lie. De plus, pour $x \in Z(\mathfrak{g})$, $y \in \mathfrak{g}$, $[x,y] = 0 \in Z(\mathfrak{g})$.

4.3. <u>Définition</u> : Soit G un groupe quelconque. On appelle <u>centre</u> de G et on note Z(G) l'ensemble

$$\begin{aligned} Z(G) &= \{x \in G \mid x\cdot y = y\cdot x \qquad \forall y \in G\} \\ &= \{x \in G \mid x\cdot y\cdot x^{-1} = y \qquad \forall y \in G\} \end{aligned}$$

4.4. <u>Remarque</u> : Le centre de G est un sous-groupe distingué de G (au sens de la théorie des groupes). En effet, si $x,z \in Z(G)$, alors

$$(x\cdot z)\cdot y = x\cdot(z\cdot y) = x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z = (y\cdot x)\cdot z = y\cdot(x\cdot z)$$

pour tout $y \in G$, c.à.d. $x\cdot z \in Z(G)$. De même,

$$x\cdot y = y\cdot x \Rightarrow y\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot y \quad \text{pour tout } y \in G$$

et $x^{-1} \in Z(G)$. Donc Z(G) est un sous-groupe. De plus quels que soient $x \in Z(G)$, $a \in G$, $y \in G$,

$$(a\cdot x\cdot a^{-1})\cdot y = (a\cdot a^{-1}\cdot x)\cdot y = x\cdot y = y\cdot x = y\cdot(x\cdot a\cdot a^{-1}) = y\cdot(a\cdot x\cdot a^{-1})$$

et $a\cdot x\cdot a^{-1} \in Z(G)$. Donc Z(G) est un sous-groupe distingué.

4.5. <u>Définition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. On appelle <u>sous-groupe</u> de $G = (V,\cdot)$ un sous-espace vectoriel H de V stable pour la multiplication.

4.6. <u>Remarque</u> : Soient H et $G = (V,\cdot)$ comme en 4.5. Alors H est bien un sous-groupe (au sens de la théorie des groupes) de G car :

$$\begin{aligned} x,y \in H &\Rightarrow x\cdot y \in H \\ x \in H &\Rightarrow x^{-1} = -x \in H \end{aligned}$$

4.7. <u>Lemme</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Soient $x,y \in G$. Alors

$$x\cdot y = y\cdot x \Leftrightarrow (sx)\cdot(ty) = (ty)\cdot(sx) \quad \text{quels que soient } s,t \in \mathbb{R}.$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer $\Rightarrow$.
Supposons $x\cdot y = y\cdot x$ et montrons $x\cdot(ty) = (ty)\cdot x$, ou, de manière équivalente, $x\cdot(ty)\cdot x^{-1} = ty$. Or, par 3.4., $x\cdot(ty)\cdot x^{-1} = t\cdot(x\cdot y\cdot x^{-1})$. D'autre part, $x\cdot y = y\cdot x$ entraîne $x\cdot y\cdot x^{-1} = y$, donc $x\cdot(ty)\cdot x^{-1} = ty$ et $x\cdot(ty) = (ty)\cdot x$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ensuite un raisonnement analogue montre que $(sx)\cdot(ty) = (ty)\cdot(sx)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

4.8. <u>Proposition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Alors

$$xy = yx \Leftrightarrow [x,y] = 0$$

De plus, si $xy = yx$, alors $x\cdot y = x+y$.

<u>Démonstration</u> : $\Leftarrow$ Par hypothèse, $ad(x)(y) = [x,y] = 0$. Alors

$$x\cdot y\cdot x^{-1} = Ad(x)(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(adx)^k(y) = y$$

et $xy = yx$.

$\Rightarrow$ Supposons $xy = yx$. Par 4.7., $(sx)\cdot(ty) = (ty)\cdot(sx)$ quels que soient $s,t \in \mathbb{R}$. Définissions

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to G \\ t &\to \varphi(t) = (tx)\cdot(ty) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi(t)\cdot\varphi(s) &= (tx)\cdot(ty)\cdot(sx)\cdot(sy) = (tx)\cdot(sx)\cdot(ty)\cdot(sy) \\ &= ((t+s)x)\cdot((t+s)y) = \varphi(t+s), \end{aligned}$$

c.à.d. φ est un homomorphisme analytique de groupes. Par 1.12., il existe $u \in G$ tel que

$$\varphi(t) = (tx)\cdot(ty) = t\cdot u \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Alors $t = 1$ donne $x\cdot y = u$ et

$$(tx)\cdot(ty) = t\cdot(x\cdot y) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons encore que la forme locale de la multiplication donne

$$(tx)\cdot(ty) = tx + ty + \frac{1}{2}t^2[x,y] + O(t^3)$$

pour t suffisamment petit, par 3.15. D'où

$$x\cdot y = \frac{d}{dt}\Big(t(x\cdot y)\Big)_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big((tx)\cdot(ty)\Big)_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(tx + ty + \frac{1}{2}t^2[x,y] + O(t^3)\Big)_{t=0} = x+y$$

En remplaçant dans le raisonnement précédent x et y par sx et sy respectivement, on trouve donc que

$$(sx)(sy) = sx + sy = s(x+y) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la forme locale de la multiplication donne, pour t suffisamment petit,

$$t\cdot(x+y) = (tx)\cdot(ty) = tx + ty + \tfrac{1}{2}t^2\,[x,y] + O(t^3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}t(x+y)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\Big(tx + ty + \frac{1}{2}t^2[x,y] + O(t^3)\Big)_{t=0}$$

$$0 = [x,y]$$

4.9. Corollaire : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Le centre $Z(G)$ de G est un sous-groupe distingué de $G = (V,\cdot)$.

Démonstration : Par 4.4. on sait déjà que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué au sens de la théorie des groupes. Par 4.7., on voit que si $x \in Z(G)$, alors $\lambda x \in Z(G)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Par 4.8., on voit que si $x,y \in Z(G)$, alors $x+y = x\cdot y \in Z(G)$. Donc $Z(G)$ est

également un sous-espace vectoriel et $Z(G)$ est un sous-groupe au sens de 4.5.

4.10 Corollaire : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Alors le centre du groupe $Z(G)$ coïncide avec le centre de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$.

Démonstration : $xy = yx \quad \forall y \in V \Leftrightarrow [x,y] = 0 \quad \forall y \in V$

4.11. Exemple : Déterminons le centre du groupe $G = (\mathbb{R}^2,\cdot)$ représentant la composante connexe de l'élément neutre du groupe affine de la droite (1.7., 1.11. et 2.9.). Il suffit de déterminer le centre de son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^2,[\ ,\ ])$ avec

$$[(u,v),(u',v')] = (0,uv'-u'v)$$

Or $(u,v) \in Z(\mathfrak{g})$ ssi

$$[\,(u,v),(x,y)\,] = (0,uy-xv) = 0 \quad \forall\, x,y$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u & x \\ v & y \end{vmatrix} = 0 \quad \forall\, x,y$$

$$\Leftrightarrow u = v = 0$$

En effet, si $(u,v) \neq (0,0)$, il existe toujours un vecteur indépendant de (u,v) dans $\mathbb{R}^2$.
Donc $Z(\mathfrak{g}) = \{(0,0)\}$ et $Z(G) = \{(0,0)\}$.

4.12. Corollaire : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Les homomorphismes de groupes continus de $\mathbb{R}$ dans G sont tous de la forme

$$t \to tx, \qquad x \in G.$$

En particulier, tout homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans G est analytique.

Démonstration : Soit

$$\varphi : \mathbb{R} \to G$$

un homomorphisme continu de groupes. Quels que soient t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2) = \varphi(t_1+t_2) = \varphi(t_2+t_1) = \varphi(t_2)\cdot\varphi(t_1)$$

D'après 4.8.,

$$\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2) = \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$$

donc

$$\varphi(t_1+t_2) = \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$$

quels que soient t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x \in V$ tel que $\varphi(t) = t\cdot x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, en se limitant à la i-ème coordonnée p.ex. on a

$$\varphi_i(t_1+t_2) = \varphi_i(t_1) + \varphi_i(t_2) \quad \text{quels que soient } t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc φ_i est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ et est donc nécessairement de la forme $\varphi_i(t) = x_i t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $x_i \in \mathbb{R}$.

4.13. Proposition : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Soit $H \subset V$ tel que $(H,\cdot)$ soit un sous-groupe du groupe exponentiel $G = (V,\cdot)$. Alors $(H,[\ ,\ ])$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$, c.à.d. tout sous-groupe de G coïncide avec une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Démonstration : Par (4.5.), H est un sous-espace vectoriel de V. D'ailleurs H est fermé dans V, étant donné que V est de dimension finie. Soient $x,y \in H$. Alors

$$[x,y] = \mathrm{ad}(x)(y) = \frac{d}{dt}\Big((tx)\cdot y\cdot(-tx)\Big)_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{(tx)\cdot y\cdot(-tx) - y}{t}$$

Comme H est un sous-groupe et un sous-espace vectoriel,

$$\frac{(tx)\cdot y\cdot(-tx) - y}{t} \in H \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*$$

Donc $[x,y] \in H$, H étant fermé, et H est une sous-algèbre.

4.14. Formule de Campbell-Baker-Hausdorff : Soit G un groupe de Lie quelconque d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour X,Y dans un voisinage suffisamment petit de 0 dans $\mathfrak{g}$ on a

$$\log\big(\exp X\cdot \exp Y\big) = X + \int_0^1 \psi\big[\big(\exp(\mathrm{ad}X)\big)\big(\exp(t\,\mathrm{ad}Y)\big)\big](Y)\,dt$$

$$\text{où } \psi(z) = \frac{z \log z}{z-1}$$

La fonction $\psi(z)$ est analytique au voisinage de $z = 1$ où elle admet le développement en série

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z(z-1)^k$$

$$= z - \frac{z(z-1)}{2} + \frac{z(z-1)^2}{3} - \frac{z(z-1)^3}{4} + \cdots$$

Pour la démonstration, voir [1].

Soit à présent $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Puisque l'application exp est alors l'application identique, la formule de Campbell-Baker-Hausdorff s'écrit :

$$x \cdot y = x + \int_0^1 \psi[(\exp(\mathrm{ad}x))(\exp(t\,\mathrm{ad}y))](y)\,dt$$

pour x,y suffisamment près de 0.

4.15. <u>Proposition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{h} \subset V$ tel que $(\mathfrak{h},[\ ,\ ])$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$. Alors $(\mathfrak{h},\cdot)$ est un sous-groupe de $G = (V,\cdot)$, c.à.d. toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ coïncide avec un sous-groupe de $G = (V,\cdot)$.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de V. Soient à présent $x,y \in \mathfrak{h}$ suffisamment près de 0 de manière à avoir la formule de Campbell-Baker-Hausdorff et le développement en série de $\psi[(\exp(\mathrm{ad}x))\ (\exp(t\mathrm{ad}y))](y)$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(\exp(\mathrm{ad}x))\ (\exp(t\mathrm{ad}y))[\ (\exp(\mathrm{ad}x))\ (\exp(t\mathrm{ad}y) - 1]^k(y) \in \mathfrak{h}.$$

En effet, pour tout $z \in \mathfrak{h}$,

$$\exp(\mathrm{ad}x)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^k(z) \in \mathfrak{h}$$

puisque $(\mathrm{ad}x)^k(z) \in \mathfrak{h}$ et que $\mathfrak{h}$ est fermé, comme sous-espace vectoriel de dimension finie de V. De même,

$$\exp(t\,\mathrm{ad}y)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(\mathrm{ad}y)^k(z) \in \mathfrak{h}$$

On en déduit que :

$$(\exp(\mathrm{ad}x))\ (\exp(t\mathrm{ad}y))\ [\ (\exp(\mathrm{ad}x))\ (\exp(t\mathrm{ad}y))-1]^k(y) \in \mathfrak{h}$$

$$\psi[\ (\exp(\mathrm{ad}x))(\exp(t\mathrm{ad}y))\ ](y) \in \mathfrak{h} \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Alors

$$x \cdot y = \int_0^1 \psi[(\exp(\mathrm{ad}x))\cdot(\exp(t\,\mathrm{ad}y))](y)\,dt \in \mathfrak{h}$$

étant donné que l'intégrale peut être approchée par des sommes finies d'éléments de $\mathfrak{h}$ et que $\mathfrak{h}$ est fermé. Donc $x \cdot y \in \mathfrak{h}$ pour x,y dans un voisinage suffisamment petit de 0.
Soient à présent $x,y \in \mathfrak{h}$ quelconques. Définissions

$$F : \mathbb{R}^2 \to G = (V,\cdot)$$
$$(s,t) \to F(s,t) = (sx)\cdot(ty).$$

La fonction F est analytique puisqu'il en est ainsi du produit. Considérons alors la décomposition $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de $\mathfrak{h}$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{k}$. Pour tout $z \in V$ posons $p_i(z) = z_i$, z_i désignant la i-ème coordonnée de z dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Les fonctions de p_i sont des fonctions analytiques, étant donné que tout changement de base est linéaire, donc analytique. De plus,

$$z \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow p_i(z) = 0 \quad \text{pour } i \in \{p+1,\ldots,n\}$$

Remarquons alors que pour s,t suffisamment près de 0,

$$p_i \circ F(s,t) = [(sx)\cdot(ty)]_i = 0 \ \text{ pour } i \in \{p+1, \ldots, n\}$$

étant donné qu'alors $(sx)\cdot(ty) \in \mathfrak{h}$. Puisque $p_i \circ F$ est une fonction analytique, on en déduit que quels que soient $s,t \in \mathbb{R}$,

$$p_i \circ F(s,t) = [(sx)\cdot(ty)]_i = 0 \text{ pour } i \in \{p+1, \ldots, n\}.$$

Donc $(sx)(ty) \in \mathfrak{h}$ quels que soient $s,t \in \mathbb{R}$. En particulier, $x \cdot y \in \mathfrak{h}$. Comme de plus $x^{-1} = -x \in \mathfrak{h}$, $(\mathfrak{h},\cdot)$ est un sous-groupe.

4.16. <u>Proposition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{i} \subset V$ tel que $(\mathfrak{i},[\ ,\ ])$ soit un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors $(\mathfrak{i},\cdot)$ est un sous-groupe distingué de $G = (V,\cdot)$, c.à.d. tout idéal de $\mathfrak{g}$ coïncide avec un sous-groupe distingué.

Démonstration : Par 4.15., $(\mathfrak{i},\cdot)$ est un sous-groupe de G. Soit $y \in \mathfrak{i}$ et soit $x \in G$. Alors

$$x \cdot y \cdot x^{-1} = \mathrm{Ad}(x)(y) = \exp(\mathrm{ad}x)(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}x)^k(y)$$

Comme $\mathfrak{i}$ est un idéal, $(\mathrm{ad}x)^k(y) \in \mathfrak{i}$. De plus, $\mathfrak{i}$ est fermé en tant que sous-espace de dimension finie de V. Donc $x \cdot y\, x^{-1} \in \mathfrak{i}$ et $(\mathfrak{i},\cdot)$ est distingué.

4.17. Proposition : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ son algèbre de Lie. Soit $I \subset V$ tel que $(I,\cdot)$ soit un sous-groupe distingué de G. Alors $(I,[\ ,\ ])$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, c.à.d. tout sous-groupe distingué coïncide avec un idéal.

Démonstration : Par 4.13., $(I,[\ ,\ ])$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Soit $y \in I$ et soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors

$$[x,y] = \mathrm{ad}x(y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(tx)(y)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{(tx)\cdot y \cdot (-tx) - y}{t}$$

Comme I est un sous-groupe distingué, $(tx)\cdot y\cdot(-tx) \in I$ de même que

$$\frac{(tx)\cdot y(-tx) - y}{t} \in I \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*$$

De plus, I est fermé et par conséquent $[x,y] \in I$. Donc I est un idéal.

4.18. Proposition : Soient $G = (V,\cdot)$ et $G_1 = (V_1,\cdot)$ deux groupes exponentiels. Tout homomorphisme continu du groupe G dans le groupe G_1 est une application linéaire de l'espace vectoriel V dans l'espace vectoriel V_1.

Démonstration : Soit

$$\varphi : G = (V,\cdot) \to G_1 = (V_1,\cdot)$$

un homomorphisme continu. Définissions, pour $x \in V$ quelconque,

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R} &\to G_1 = (V_1,\cdot)\\ t &\to \Psi(t) = \varphi(tx).\end{aligned}$$

Alors Ψ est un homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $G_1 = (V_1,\cdot)$ car

$$\Psi(s+t) = \varphi((s+t)x) = \varphi(sx\cdot tx) = \varphi(sx)\cdot\varphi(tx) = \Psi(s)\cdot\Psi(t).$$

Par 4.12., il existe $x' \in G_1$ tel que $\varphi(tx) = \Psi(t) = t\cdot x'$. Pour $t = 1$ on trouve $x' = \varphi(x)$ et

$$\varphi(tx) = t\cdot\varphi(x) \quad \text{quel que soit } t \in \mathbb{R}, \text{ quel que soit } x \in G.$$

On en déduit que $\varphi(0)=0$ et que la dérivée de φ en 0 dans la direction x existe pour tout x et vaut $\varphi(x)$. En particulier, les dérivées partielles de φ existent, une base de V étant fixée. De plus

$$\varphi(x) = \frac{d}{dt}\big(t\cdot\varphi(x)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(tx)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)\cdot x_i$$

si x_i désigne la i-ème coordonnée de x dans la base en question. On en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi(y+z) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)\cdot(y_i+z_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)\cdot y_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)\cdot z_i\\ &= \varphi(y)+\varphi(z) \qquad \text{quels que soient } y,z \in V\end{aligned}$$

et

$$\varphi(\lambda x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)(\lambda x_i) = \lambda\,\varphi(x)$$

quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, quel que soit $x \in V$.

4.19. <u>Remarque</u> : En fait, la différentielle de φ est donnée par

$$(d\varphi)(x) = \frac{d}{dt}\varphi(tx)\Big|_{t=0}$$

La démonstration précédente montre que si φ est un homomorphisme continu entre deux groupes exponentiels $G = (V,\cdot)$ et $G_1 = (V_1,\cdot)$, alors

$$d\varphi = \varphi$$

à condition d'identifier les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_1$ avec $(V,[\ ,\ ])$ et $(V_1,[\ ,\ ])$ respectivement.

4.20. <u>Proposition</u> : Tout homomorphisme continu entre les groupes exponentiels $G = (V,\cdot)$ et $G_1 = (V_1,\cdot)$ est un homomorphisme d'algèbres entre les algèbres de Lie $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ et $\mathfrak{g}_1 = (V_1,[\ ,\ ])$. En particulier, si $G = (V,\cdot)$ et $G_1 = (V_1,\cdot)$ sont isomorphes, il en est de même de $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$ et $\mathfrak{g}_1 = (V_1,[\ ,\ ])$.

<u>Démonstration</u> : Soit φ un tel homomorphisme de groupes. Par 4.18. on sait que φ est également un homomorphisme d'espaces vectoriels. De plus,

$$\varphi([x,y]) = \varphi(\mathrm{ad}x(y))$$

$$= \varphi\left(\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(tx)(y)\Big|_{t=0}\right)$$

$$= \varphi\left(\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Ad}(tx)(y) - y}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(\mathrm{Ad}(tx)(y)) - \varphi(y)}{t} \quad \text{par continuité et linéarité de } \varphi$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(tx)\cdot\varphi(y)\cdot\varphi(-tx) - \varphi(y)}{t} \quad \varphi \text{ homomorphisme}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t\,\varphi(x))\cdot\varphi(y)\cdot(-t\,\varphi(x)) - \varphi(y)}{t} \quad \text{par linéarité de } \varphi$$

$$= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(t\,\varphi(x))\,\varphi(y)\Big|_{t=0}$$

$$= \mathrm{ad}(\varphi(x))(\varphi(y))$$

$$= [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Donc φ est également un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Bibliographie

[1] M. Hausner and J. Schwartz, Lie Groups. Lie Algebras, Gordon and Breach, 1968

[2] L. Pukanszky, Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, 1967

Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN/CUL/90/009

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, Avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg