Les groupes exponentiels

Carine Molitor-Braun

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, Avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg

1. Définition d'un groupe exponentiel et de son algèbre

1.1. <u>But</u> : Il s'agit de développer une théorie des groupes exponentiels analogue à celle établie par Pukanszky pour les groupes nilpotents [2], tout en insistant sur la cohérence de cette approche avec la théorie générale des groupes de Lie et des groupe de Lie exponentiels.

1.2. <u>Remarque</u> : Tous les groupes considérés seront supposés réels connexes simplement connexes.

1.3. <u>Fonction analytique</u> : Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Une application

$$A : V \to V$$
$$(\text{resp.: } A : V \times V \to V)$$

est dite analytique, s'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V et n applications $A_1, \ldots, A_n$ à valeurs réelles telles que

$$A(v) = \sum_{i=1}^{n} A_i(v)\, e_i$$

$$\left(\text{resp: } A(v,w) = \sum_{i=1}^{n} A_i(v,w)\, e_i \right)$$

et telles que chaque A_i soit une fonction analytique réelle des coordonnées de v (resp. v et w) dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Remarquons que si la condition précédente est vérifiée pour une

base, elle l'est pour toute autre base de V, étant donné que lors d'un changement de base, les nouvelles coordonnées sont des fonctions linéaires, donc analytiques, des anciennes coordonnées et réciproquement. Rappelons encore qu'une application est analytique réelle si et seulement si elle est développable en série absolument et uniformément convergeante au voisinage de chaque point de son domaine de définition.

1.4. <u>Définition</u> : Un groupe de Lie <u>exponentiel</u> est un espace vectoriel réel V de dimension finie, muni d'une application analytique A de V x V dans V telle que :

1) L'espace V, muni du produit défini par $x \cdot y = A(x,y)$ quels que soient $x,y \in V$, est un groupe.

2) Quel que soit $x \in V$, quels que soient $s,t \in \mathbb{R}$,

$$(sx) \cdot (tx) = (s+t)x$$

c.à.d. l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to V \\ s &\to sx \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes pour tout $x \in V$.

1.5. <u>Cas particulier</u> : Lorsque chacune des applications A_i est un polynôme, on dit que A est une application polynôme et que V, muni de la multiplication $x \cdot y = A(x,y)$ est un groupe de Lie <u>nilpotent</u>.

1.6. <u>Remarques</u> : 1) Dans la suite nous noterons $(V,\cdot)$ ou $(\mathbb{R}^n,\cdot)$ pour le groupe exponentiel.

2) Un groupe exponentiel est un cas particulier de groupe de Lie, la variété analytique sous-jacente étant l'espace $\mathbb{R}^n$.

3) Pour voir que certains groupes de Lie connus vérifient la définition précédente des groupes exponentiels, il faut parfois les

munir d'un paramétrage inhabituel comme le montre l'exemple suivant.

1.7. Exemple : Soit G la composante connexe de l'élément neutre du groupe affine de la droite (ou (ax+b)-groupe). Ce groupe peut être réalisé par les matrices de la forme

$$(x,y)=\begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x,y\in\mathbb{R}$$

On peut donc considérer qu'il s'agit de $\mathbb{R}^2$ muni du produit

$$(x,y)\cdot(z,t)=\begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^z & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{(x+z)} & t\cdot e^x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(x+z,t\cdot e^x+y)$$

Cette loi munit $\mathbb{R}^2$ d'une multiplication analytique. Cependant l'application

$$s \to s(x,y)=(sx,\ sy)$$

n'est pas un homomorphisme de groupe. En effet,

$$(s(x,y))\cdot(t(x,y)) = (sx,\ sy)\cdot(tx,\ ty)$$

$$= (sx+tx,\ ty\cdot e^{sx}+sy)$$

qui est distinct de $\quad (s+t)(x,y) = ((s+t)x,\ (s+t)y)$.

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (u,v) \end{array}$$

défini par

$$\begin{array}{ll} x=u & \\ y=\frac{v}{u}\cdot(e^u-1) & \text{si } u\neq 0 \\ y=v & \text{si } u=0 \end{array}$$

Ce changement de variables est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Etablissons les formules de la multiplication dans ce nouveau système de variables :

$$(u,v)\cdot(u',v')=\begin{pmatrix} e^{x(u,v)} & y(u,v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{x(u',v')} & y(u',v') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^u & \frac{v}{u}(e^u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{u'} & \frac{v'}{u'}(e^{u'}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{u+u'} & \frac{v'}{u'}(e^{u'}-1)\cdot e^u+\frac{v}{u}(e^u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{u''} & \frac{v''}{u''}(e^{u''}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(u'',v'')$$

où

$$\left.\begin{aligned} u'' &= u+u' \\ v'' &= \frac{u''}{e^{u''}-1}\cdot\left(\frac{v'}{u'}(e^{u'}-1)\cdot e^u+\frac{v}{u}(e^u-1)\right) \\ &= \frac{u+u'}{e^{u+u'}-1}\cdot\left(\frac{v'}{u'}(e^{u'}-1)\cdot e^u+\frac{v}{u}(e^u-1)\right) \end{aligned}\right\}\ \text{fonctions analytiques}$$

En particulier,

$$(s(u,v))\cdot(t(u,v))=(su,sv)\cdot(tu,tv)=(u'',v'')$$

avec

$$u'' = su+tu = (s+t)u$$

$$\frac{v''}{u''}\left(e^{u''}-1\right) = \frac{tv}{tu}\left(e^{tu}-1\right)\cdot e^{su} + \frac{sv}{su}\left(e^{su}-1\right)$$

$$= \frac{v}{u}\left(e^{(s+t)u}-1\right)$$

$$= \frac{(s+t)v}{(s+t)u}\left(e^{(s+t)u}-1\right)$$

Donc $v'' = (s+t)v$ et $(u'',v'') = (s+t)\,(u,v)$. Par conséquent

$$(s(u,v)) \cdot (t(u,v)) = (s+t)\ (u,v)$$

et l'application

$$s \rightarrow s(u,v)$$

est un homomorphisme de groupes quel que soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

<u>Remarques</u> : 1) Les calculs précédents restent valables si $u = 0$ ou $u' = 0$. Il suffit alors de remplacer $\frac{1}{u}\ (e^u - 1)$, resp. $\frac{1}{u'}\ (e^{u'} - 1)$ par 1.

2) La nouvelle paramétrisation peut être obtenue de la manière suivante :

On calcule les générateurs de l'algèbre de Lie :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{x=0,y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors un élément quelconque de l'algèbre de Lie est de la forme

$$uX_1 + vX_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et un élément quelconque du groupe de Lie peut être obtenu par

$$(u,v) = \exp(uX_1 + vX_2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

$$= \begin{pmatrix} e^u & \frac{v}{u}(e^u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8. <u>Neutre et inverse</u> : Soit $(V,\cdot)$ un groupe exponentiel.

Pout tout $x \in V$ on a :

$$0 \cdot x = (0x) \cdot (1x) = (0+1)x = 1x = x$$

De même,

$$x \cdot 0 = x$$

Donc 0 est élément neutre de $(V,\cdot)$.

Pour tout $x \in V$ on a également :

$$(-x)\cdot x = ((-1)x)\cdot(1x) = (-1+1)x = 0x = 0$$

et

$$x\cdot(-x) = (1x)\cdot((-1)x) = (1+(-1))x = 0x = 0$$

Donc $-x$ est l'inverse de x pout tout $x \in V$, c.à.d. $-x = x^{-1}$

1.9. <u>Remarques</u> : 1) L'application

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V \\ x &\rightarrow x^{-1} = -x \end{aligned}$$

est analytique.

2) En général la multiplication du groupe n'est pas commutative.

1.10. Forme locale de la multiplication : Dans un voisinage suffisamment petit de l'élément neutre 0 la multiplication $x \cdot y = A(x,y)$ admet le développement en série suivant :

$$A(x,y) = A(0,0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_j}(0,0)\, x_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, y_k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_k}(0,0)\, x_j x_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, x_j y_k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, y_j y_k + O(3)$$

la relation précédente étant vérifiée pour chaque coordonnée $A_i(x,y)$ de la fonction vectorielle $A(x,y)$.

1) $A(0,0) = 0 \cdot 0 = 0$

2) $A(x,0) = x \cdot 0 = x$ donne

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_j}(0,0)\, x_j + O(2) = x$$

c.à.d., pour chaque coordonnée

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(0,0)\, x_j + O(2) = x_i$$

En dérivant par rapport à x_k, en $x = 0$, on trouve :

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}(0,0) = 1 \qquad \text{si } k=i$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k}(0,0) = 0 \qquad \text{si } k \neq i$$

De même, $A(0,y) = 0 \cdot y = y$ donne

$$\frac{\partial A_i}{\partial y_i}(0,0) = 1 \qquad \text{si } k=i$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial y_k}(0,0) = 0 \qquad \text{si } k \neq i$$

On vient donc de trouver :

$$A(x,y) = x + y + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_k}(0,0)\, x_j x_k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, x_j y_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, y_j y_k + O(3)$$

3) $A(x,0) = x \cdot 0 = x$ s'écrit

$$x + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_k}(0,0)\, x_j x_k + O(3) = x$$

En applicatiquant $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_j} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\right|_{x=0}$ à la relation précédente, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_k}(0,0) = 0$$

quels que soient j,k

De même, $A(0,y) = y$ donne

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0) = 0$$

quels que soient j,k

et

$$A(x,y) = x + y + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, x_j y_k + O(3)$$

4) $A(x, -x) = x\cdot(-x) = 0$ donne

$$x + (-x) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, x_j(-x_k) + O(3) = 0$$

Alors, en appliquant $\left.\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial}{\partial x_r}\right|_{x=0}$ à la relation précédente on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial A}{\partial y_r}(0,0) = 0$$

De même, en appliquant $\left.\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial}{\partial x_s}\right|_{x=0}$, $r \neq s$, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial A}{\partial y_s}(0,0) + \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial A}{\partial y_r}(0,0) = 0$$

c.à.d.

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial A}{\partial y_r}(0,0) = -\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial A}{\partial y_s}(0,0)$$

Par conséquent, l'application

$$Q : V \times V \to V$$

$$(u,v) \to Q(u,v) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial A}{\partial y_k}(0,0)\, u_j v_k$$

est une application bilinéaire alternée, c.à.d. vérifiant $Q(v,u) = -Q(u,v)$ quels que soient $u, v \in V$. A l'aide de cette application bilinéaire alternée la multiplication s'écrit :

$$x \cdot y = A(x,y) = x + y + \frac{1}{2} Q(x,y) + O(3)$$

au voisinage de l'origine.

1.11. <u>Exemple</u> : Forme locale de la multiplication pour la composante connexe du groupe affine de la droite.

Rappelons que ce groupe peut être réalisé par $\mathbb{R}^2$ muni de la multiplication

$$(u,v) \cdot (u',v') = (u'',v'')$$

où

$$u'' = u + u'$$

$$v'' = \frac{u+u'}{e^{u+u'}-1}\left(\frac{v'}{u'}(e^{u'}-1)\cdot e^{u} + \frac{v}{u}(e^{u}-1)\right)$$

En utilisant les développements

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \dots$$

$$\frac{e^u-1}{u} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

on trouve

$$v'' = \frac{1}{1+\frac{u+u'}{2}+\dots}\left(v'\cdot\left(1+\frac{u'}{2}+\frac{u'^2}{6}+\dots\right)\cdot\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\dots\right) + v\cdot\left(1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{6}+\dots\right)\right)$$

$$= \left(1-\frac{u+u'}{2}+\dots\right)\cdot\left(v'\cdot\left(1+u+\frac{u'}{2}+\dots\right) + v\cdot\left(1+\frac{u}{2}+\dots\right)\right)$$

$$= \left(1-\frac{u+u'}{2}+\dots\right)\cdot\left(v'+v'u+\frac{v'u'}{2}+v+\frac{vu}{2}+\dots\right)$$

$$= v'+v'u+\frac{v'u'}{2}+v+\frac{vu}{2}-\frac{uv'}{2}-\frac{u'v'}{2}-\frac{uv}{2}-\frac{u'v}{2}+\dots$$

$$= v+v'+\frac{1}{2}(uv'-u'v)+\dots$$

Donc

$$(u,v)\cdot(u',v') = (u,v) + (u',v') + \frac{1}{2}(0, uv'-u'v) + \dots$$

et

$$Q((u,v),(u',v')) = (0, uv' - u'v)$$

1.12. Si $(V,\cdot)$ est un groupe exponentiel, on sait que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to V \\ t &\to tx\ , \quad x \in V \text{ fixé} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes. Voici la réciproque :

<u>Proposition</u> : Soit $(V,\cdot)$ un groupe exponentiel et soit

$$\varphi : \mathbb{R} \to V$$

un homomorphisme analytique de groupes. Alors il existe $x \in V$ tel que φ soit donné par $\varphi(t) = tx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : Posons $x = \left.\dfrac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{t=0}$. Comme φ est un homomorphisme de groupes, $\varphi(0)=0$, élément neutre de V, et

$$\varphi(s) = sx + s^2\, r(s)$$

au voisinage de $s = 0$, où r est une fonction analytique de s au voisinage de s=0. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(t+s) = \varphi(t)\cdot\varphi(s) = A(\varphi(t),\ \varphi(s)) &= A(\varphi(t),\ sx + s^2\, r(s)) \\ &= A(\varphi(t),\ sx) + O(s^2) \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, dans le développement en série on a pour tout produit de coordonnées

$$\varphi_{p_1}(t)\cdot\varphi_{p_2}(t)\cdots\varphi_{p_k}(t)\cdot (sx+s^2\, r(s))_{q_1}\cdot(sx+s^2\, r(s))_{q_2}\cdots(sx+s^2\, r(s))_{q_l}$$

$$= \varphi_{p_1}(t)\cdot\varphi_{p_2}(t)\cdots\varphi_{p_k}(t)\cdot s\,x_{q_1}\cdot s\,x_{q_2}\cdots s\,x_{q_l} + O(s^2)$$

Par conséquent

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(t)\cdot\varphi(s) - \varphi(t)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{A(\varphi(t),sx) - A(\varphi(t),0)}{s}$$

$$= \left.\frac{d}{ds}A(\varphi(t),sx)\right|_{s=0}$$

Posons

$$R(u) = \left.\frac{d}{ds}A(u,sx)\right|_{s=0}$$

La fonction φ vérifie donc le système différentiel d'ordre 1

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = R(\varphi(t))$$

$$\varphi(0) = 0$$

Soit à présent la fonction ψ définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\to V \\ t &\to tx \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \lim_{s\to 0} \frac{(t+s)x - tx}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(tx)\cdot(sx) - tx}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{A(tx,sx) - A(tx,0)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{A(\psi(t),sx) - A(\psi(t),0)}{s}$$

$$= \frac{d}{ds} A(\psi(t),sx)\Big|_{s=0}$$

$$= R(\psi(t))$$

Donc la fonction Ψ vérifie le même système différentiel d'ordre 1 avec les mêmes conditions initales :

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = R(\psi(t))$$

$$\psi(0) = 0$$

Par unicité des solutions d'un tel système :

$$\varphi(t) = \Psi(t) = tx \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Remarques : 1) La démonstration précédente utilise uniquement le fait que φ soit de classe C^2. En effet, sous l'hypothèse φ de classe C^2 on peut écrire

$$\varphi(s) = sx + s^2\, r(s)$$

au voisinage de $s = 0$, r étant une fonction continue de s au voisinage de 0, ce qui est suffisant pour la démonstration précédente.

2) On peut même montrer que le résultat précédent reste vrai sous l'hypothèse plus faible que φ est un homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $(V,\cdot)$.

Par conséquent tout homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $(V,\cdot)$ est nécessairement analytique.

3) La démonstration précédente reste vraie pour un groupe de Lie quelconque à condition de supposer t suffisamment petit.

4) Un homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $(V,\cdot)$ est encore appelé sous-groupe à un paramètre.

1.13. Rappels : 1) Soit G un groupe de Lie quelconque d'élément neutre e. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être identifiée avec l'espace tangent en e $T_e(G)$, c.à.d. avec l'ensemble des dérivations en e. Rappelons encore que les dérivations en e coïncident avec les opérateurs différentiels d'ordre 1 en e. Dans la suite nous allons introduire ces notions avec tous les détails.

2) Soit $X \in \mathfrak{g} \equiv T_e(G)$. Alors il existe un et un seul sous-groupe à un paramètre ρ de $\mathbb{R}$ dans G tel que

$$(d\rho)_0\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = X$$

c.à.d. tel que pour tout $f \in C^\infty$ dans un voisinage de 0

$$X(f) = (d\rho)_0\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right)(f) = \frac{d}{dt}(f\circ\rho(t))\Big|_{t=0} = \frac{df}{dt}(\rho(t))\Big|_{t=0}$$

Par définition, $\exp X = \rho(1)$. Alors

$$\exp tX = \rho(t)$$

et

$$X(f) = \frac{df}{dt}(\exp tX)\Big|_{t=0}$$

L'application exp ainsi définie est une application analytique de $\mathfrak{g}$ dans G. Nous allons voir que dans notre cas l'application exp est particulièrement simple.

1.14. Définition : Soit $(V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Une dérivation (au point 0) est une application linéaire Z définie sur $C^\infty(V)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$Z(f\cdot g) = Z(f)\cdot g(0) + f(0)\cdot Z(g)$$

quels que soient $f, g \in C^\infty(V)$.

1.15 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Soit Z une dérivation et soit $f \in C^\infty(V)$. On peut écrire :

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\, x_i + \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(x)\, x_k x_l \qquad , g_{kl} \in C^\infty(V)$$

à condition de noter $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors

$$Z(f) = f(0) \cdot Z(1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot Z(x_i) + \sum_{k,l=1}^{n} Z(g_{kl}(x)\, x_k x_l)$$

Remarquons que

$$Z(1) = Z(1 \cdot 1) = Z(1) \cdot 1 \;+\; 1 \cdot Z(1) = 2 \cdot Z(1)$$

donc que $Z(1) = 0$. De même

$$Z(g_{kl}(x)\, x_k x_l) = Z(g_{kl}) \cdot 0 \;+\; g_{kl}(0) \cdot Z(x_k x_l)$$

$$= g_{kl}(0) \cdot \big(Z(x_k) \cdot 0 \;+\; 0 \cdot Z(x_l)\big)$$

$$= 0$$

Par conséquent

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{n} Z(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

et

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x=0} \qquad \text{où } z_i = Z(x_i) \in \mathbb{R}$$

c.à.d. la dérivation est un opérateur différentiel d'ordre 1.

1.16 Posons

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \in V$$

Alors pour tout $f \in C^\infty(V)$,

$$\frac{df}{dt}(tz)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = Z(f)$$

Soit alors ρ le sous-groupe à un paramètre défini par

$$\rho : \mathbb{R} \to V$$
$$t \to tz$$

Le calcul précédent montre

$$Z(f) = \frac{df}{dt}(\rho(t))\Big|_{t=0}$$

et pour être cohérent avec la théorie générale, il faut donc poser

$$\exp Z = \rho(1) = z \quad \text{où } z_i = Z(x_i),$$

x_i désignant la ième fonction coordonnée. Remarquons qu'avec cette définition, $\exp tZ = tz = t\exp Z$ et

$$Z(f) = \frac{df}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0}$$

1.17. <u>Définition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Soit $\mathfrak{g}$ l'ensemble des dérivations de V en 0. L'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans $G = (V,\cdot)$ est définie de la manière suivante : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de V. Alors les éléments de $\mathfrak{g}$ coïncident avec les opérateurs différentiels d'ordre 1 en 0 et on définit

$$\exp : \mathfrak{g} \to G = (V,\cdot)$$
$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 \to z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i = \exp Z$$

1.18. <u>Remarques</u> : 1) La définition précédente ne dépend pas de la base choisie. En effet, effectuons un changement de base donnée par les relations suivantes :

$$x'_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j \qquad k=1,\dots,n$$

Alors

$$Z = \sum_{l=1}^{n} z_l \frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_0$$

$$= \sum_{l=1}^{n} z_l \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x'_k}\Big|_0 \cdot a_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, z_l\right) \frac{\partial}{\partial x'_k}\Big|_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z'_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\Big|_0$$

Donc les coefficients de Z dans $\mathfrak{g}$ se transforment de la même manière que les coordonnées d'un vecteur dans V.

2) On peut identifier $\mathfrak{g}$ et V (avec $\mathbb{R}^n$), en identifiant la dérivation $Z = \sum_{l=1}^{n} z_l \frac{\partial}{\partial x_l}\Big|_0$ avec le vecteur $z = \sum_{l=1}^{n} z_l\, e_l$.
Grâce à cette identification on peut dire que l'application exponentielle est l'application identique.

1.19. <u>Rappel</u> : Soit G un groupe de Lie quelconque. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est munie d'une multiplication notée [,] définie de la manière suivante : Si X, Y ∈ $\mathfrak{g}$ sont considérés comme champs de vecteurs tangents invariants à gauche, on définit [X,Y] = XY - YX. Si on identifie $\mathfrak{g}$ avec Te(G), on confond [X,Y] avec sa valeur en e qui est donnée par

$$[X,Y](f) = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f(\exp sX \cdot \exp tY)\Big|_{s=0,t=0} - \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(\exp tY \cdot \exp sX)\Big|_{s=0,t=0}$$

$$= X(Yf(x \cdot y)) - Y(Xf(y \cdot x))$$

pour f C^∞ au voisinage des points en question. C'est cette formule qui servira de définition du crochet de Lie dans notre cas.

1.20. <u>Définition</u> : Soit G = (V,·) un groupe exponentiel. On munit $\mathfrak{g}$ = Te(G) d'une multiplication, appelée crochet de Lie, notée [,], définie de la manière suivante : Si X,Y ∈ $\mathfrak{g}$ = Te(G) et si f ∈ $C^\infty(V)$,

$$[X,Y](f) = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f(\exp sX \cdot \exp tY)\Big|_{s=0,t=0} - \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f(\exp tY \cdot \exp sX)\Big|_{s=0,t=0}$$

$$= X(Yf(x \cdot y)) - Y(Xf(y \cdot x))$$

1.21. <u>Définition</u> : On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une multiplication bilinéaire

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

telle que

1) [X,Y] = - [Y,X] quels que soient X,Y ∈ $\mathfrak{g}$
2) [X, [Y,Z]] + [Y, [Z,X]] + [Z, [X,Y]] = 0 quels que soient X,Y,Z ∈ $\mathfrak{g}$ identité de Jacobi

1.22. <u>Proposition</u> : Soit G = (V,·) un groupe exponentiel. Alors $\mathfrak{g}$ = Te(G) muni de la multiplication définie en 1.20. est une algèbre de Lie.

<u>Démonstration</u> :
1) [X,Y] est une dérivation. En effet

$$[X,Y](fg) = X(Y(fg)(x \cdot y)) - Y(X(fg)(y \cdot x))$$

$$= X(Y(f)(x \cdot y) \cdot g(x) + f(x) \cdot Y(g)(x \cdot y)) - Y(X(f)(y \cdot x) \cdot g(y) + f(y) \cdot X(g)(y \cdot x))$$

$$= (XY(f)(x \cdot y)) \cdot g(0) + Y(f)(y) \cdot X(g)(x) + X(f)(x) \cdot Y(g)(y) + f(0) \cdot (XY(g)(x \cdot y))$$
$$- (YX(f)(y \cdot x)) \cdot g(0) - X(f)(x) \cdot Y(g)(y) - Y(f)(y) \cdot X(g)(x) - f(0) \cdot (YX(g)(y \cdot x))$$

$$= \left(XY(f)(x\cdot y) - YX(f)(y\cdot x)\right)\cdot g(0) + f(0)\cdot\left(XY(g)(x\cdot y) - YX(g)(y\cdot x)\right)$$

$$= [X,Y](f)\cdot g(0) + f(0)\cdot [X,Y](g)$$

2) La bilinéarité est évidente.

3) $[X,Y] = -[Y,X]$ est évident.

4) Montrons l'identité de Jacobi :

$$[X,[Y,Z]](f) + [Y,[Z,X]](f) + [Z,[X,Y]](f)$$

$$= X\cdot [Y,Z](f)(xu) - [Y,Z]\cdot X(f)(ux) + Y\cdot [Z,X](f)(yv) - [Z,X]\cdot Y(f)(vy) + Z\cdot [X,Y](f)(zw) - [X,Y]\cdot Z(f)(wz)$$

$$\begin{aligned} = {} & XYZ(f)(xyz) - XZY(f)(xzy) - YZX(f)(yzx) + ZYX(f)(zyx) \\ & + YZX(f)(yzx) - YXZ(f)(yxz) - ZXY(f)(zxy) + XZY(f)(xzy) \\ & + ZXY(f)(zxy) - ZYX(f)(zyx) - XYZ(f)(xyz) + YXZ(f)(yxz) \end{aligned}$$

$$= 0$$

1.23. <u>Crochet de Lie et forme locale de la multiplication</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe de Lie exponentiel. Rappelons qu'au voisinage de 0 la multiplication est donnée par

$$x\cdot y = A(x,y) = x + y + \frac{1}{2}\mathcal{Q}(x,y) + O(3)$$

$\mathcal{Q}$ étant une application bilinéaire alternée donnant les termes du 2^{nd} degré (au facteur $\frac{1}{2}$ près) dans le développement du produit. Quels que soient $X,Y \in \mathfrak{g}$ on a alors

$$\exp([X,Y]) = \mathcal{Q}(\exp X, \exp Y) .$$

<u>Démonstration</u> : Rappelons que

$$\exp Z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i \qquad \text{si } z_i = Z(u_i),$$

u_i désignant la $i^{ème}$ fonction coordonnée. D'où

$(\exp([X,Y]))_i = [X,Y](u_i)$ $\qquad$ u_i = ième fonction coordonnée

$$= \frac{d}{ds}\frac{du_i}{dt}(\exp sX\cdot\exp tY)\Big|_{s,t=0} - \frac{d}{dt}\frac{du_i}{ds}(\exp tY\cdot\exp sX)\Big|_{s,t=0}$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\left(sx_i + ty_i + \frac{1}{2}\mathcal{Q}_i(sx,ty) + O(3)\right)\Big|_{s,t=0} - \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left(ty_i + sx_i + \frac{1}{2}\mathcal{Q}_i(ty,sx) + O(3)\right)\Big|_{s,t=0}$$

où $x = \exp X$, $y = \exp Y$, $sx = \exp sX = s\exp X$, $ty = \exp tY = t\exp Y$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\left(sx_i + ty_i + \frac{1}{2}st\mathcal{Q}_i(x,y) + O(3)\right)\Big|_{s,t=0} - \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\left(ty_i + sx_i + \frac{1}{2}ts\mathcal{Q}_i(y,x) + O(3)\right)\Big|_{s,t=0}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_i(x,y) - \mathcal{Q}_i(y,x))$$

$$= \mathcal{Q}_i(x,y) \qquad \text{car } \mathcal{Q}_i(y,x) = -\mathcal{Q}_i(x,y)$$

$$= (\mathcal{Q}(\exp X, \exp Y))_i$$

1.24. <u>Remarques</u> :

1) Le résultat précédent rappelle la formule de Campbell-Baker-Hausdorff pour un groupe de Lie quelconque :

$$\log(\exp X\cdot\exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + O(3)$$

dans un voisinage suffisamment petit de 0 dans $\mathfrak{g}$, log désignant la fonction $\exp^{-1}$ au voisinage de l'élément neutre.

2) Si $G = (V,\cdot)$ est un groupe exponentiel,

$$\exp(sX) = s\exp X \qquad \text{quel que soit } s \in \mathbb{R}$$

$$\exp(X+Y) = \exp X + \exp Y \quad \text{quels que soient } X,Y \in \mathfrak{g}$$

par construction.

3) D'après 1.23., si $G = (V,\cdot)$ est un groupe exponentiel,

$$x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}\mathcal{Q}(x,y) + O(3)$$

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp X + \exp Y + \frac{1}{2}\exp([X,Y]) + O(3)$$

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + O(3)\right)$$

$$\log(\exp X \cdot \exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + O(3)$$

1.25. <u>Identification des éléments de l'algèbre et du groupe</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, l'application exponentielle est définie par

$$\exp : \mathfrak{g} \to G = (V,\cdot)$$
$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 \to \sum_{i=1}^{n} z_i e_i = z$$

On voit donc que l'application exponentielle ainsi définie est un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui permet d'identifier les éléments de $\mathfrak{g}$ avec ceux de V. Sous cette identification, l'espace vectoriel V est muni de deux structures :

$G = (V,\cdot)$ groupe de Lie exponentiel
$\mathfrak{g} = (V, [\ ,\ ])$ algèbre de Lie de G

L'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G coïncide alors avec l'application identique de V dans V et la formule de Campbell-Baker-Hausdorff s'écrit

$$x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + O(3)$$

2. Représentation du groupe exponentiel et de son algèbre

2.1. <u>Définition</u> : Soit G un groupe de Lie. On appelle <u>représentation</u> de G tout homomorphisme C^∞ de G dans un groupe linéaire GL(W), W désignant un espace vectoriel réel de dimension finie.

2.2. <u>Rappel</u> : L'algèbre de Lie de GL(W), notée $\mathfrak{gl}(W)$, peut être identifiée à $\mathfrak{end}(W)$, ensemble des endomorphismes de W, muni du crochet de Lie donné par

$$[A,B] = AB - BA$$

2.3. <u>Différentielle d'une représentation de groupe</u> : Soit

$$h : G \to GL(W)$$

une représentation de groupe. Sa différentielle dh est définie par

$$dh : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$$
$$Z \to dh(Z)$$

tel que, pour tout $f \in C^\infty(GL(W))$:

$$dh(Z)(f) = Z(f \circ h)$$

$f \circ h$ appartenant à $C^\infty(G)$.

2.4. <u>Expression de la différentielle</u> : Rappelons que pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ et tout $g \in C^\infty(G)$,

$$Z(g) = \frac{dg}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0} = \frac{dg}{dt}(tz)\Big|_{t=0}$$

où $z = \exp Z$. Par conséquent, pour tout $f \in C^\infty(GL(W))$,

$$dh(Z)(f) = Z(f \circ h)$$
$$= \frac{d\, f \circ h}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{df}{dt}(h(tz))\Big|_{t=0} \qquad \text{où } z = \exp Z$$

$$= \sum_{k,l=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_{kl}}(Id) \cdot \frac{dh_{kl}}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0} \qquad , Id = h(0)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{N} \left(\frac{dh}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0}\right)_{kl} \frac{\partial f}{\partial x_{kl}}(Id)$$

en désignant par h_{kl} l'élément matriciel k,l de h, une base étant fixée dans W. Donc

$$(dh(Z))_{kl} = \frac{dh_{kl}}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0}$$

(dérivation de chaque élément matriciel de h(exptZ)). On note

$$dh(Z) = \frac{dh}{dt}(\exp tZ)\Big|_{t=0}$$

2.5. <u>Notation</u> : Pour exprimer que $Z \in \mathfrak{g}$ agit sur $f \in C^\infty(G)$ considérée comme fonction de u p.ex. on notera $Z_u f(u)$.Avec cette convention

$$(dh(Z))_u\, f(u) = Z_u\, f(h(u))$$

ce qu'on notera simplement, en omettant la fonction f,

$$dh(Z) = Z_u h(u)$$

2.6. <u>Proposition</u> : Soit h une représentation du groupe G. Alors

$$dh : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$$

vérifie

$$\begin{aligned} dh([X,Y]) &= [dh(X),\ dh(Y)] \\ &= (dh(X)) \circ (dh(Y)) - (dh(Y)) \circ (dn(X)) \end{aligned}$$

quels que soient $X, Y, \in \mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in C^\infty(GL(W))$. Alors

$$\begin{aligned} (dh([X,Y]))(f) &= [X,Y]_u\, f(h(u)) \\ &= X_v\, Y_w\, f(h(vw)) - Y_v\, X_w\, f(h(vw)) \\ &= X_v\, Y_w\, f(h(v)\, h(w)) - Y_v\, X_w\, f(h(v)\, h(w)) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} [dh(X), dh(Y)](f) &= dh(X)_r\, dh(Y)_s\, f(rs) - dh(Y)_r\, dh(X)_s\, f(rs) \\ &= X_v\, Y_w\, f(h(v)\, h(w)) - Y_v\, X_w\, f(h(v)\, h(w)) \end{aligned}$$

D'où l'égalité en question.

2.7. <u>Remarque</u> : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle <u>représentation</u> de $\mathfrak{g}$ toute application linéaire

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathit{end}\,(W)$$

$\mathit{end}(W)$ désignant l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel réel W de dimension finie, telle que

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X),\ \varphi(Y)] = \varphi(X)\, \varphi(Y) - \varphi(Y)\, \varphi(X).$$

D'après 2.6. on voit donc que si h est une représentation du groupe G, dh est une représentation de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

2.8. <u>Proposition</u> : Soit h une représentation du groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ et tout $t \in \mathbb{R}$

$$h(\exp tZ) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, dh(Z)^k = \exp(t\ dh(Z))$$

c.à.d. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h} & GL(W) \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[dh]{} & \mathfrak{gl}(W) \equiv \mathfrak{end}(W) \end{array}$$

(au sens de l'exponentielle d'une matrice)

Démonstration : Posons $g(t) = \exp(t\, dh(Z))$ et $\varphi(t) = h(\exp tZ)$. L'égalité de ces deux expressions sera prouvée en montrant qu'elles vérifient une même équation différentielle avec les mêmes conditions initiales. Or

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} dh(Z)^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} dh(Z)^k$$

$$= \exp(t\, dh(Z)) \cdot dh(Z)$$

$$= g(t) \cdot dh(Z)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \left.\frac{d\varphi(t+s)}{ds}\right|_{s=0}$$

$$= \left.\frac{d\left(h(\exp tZ) \cdot h(\exp sZ)\right)}{ds}\right|_{s=0}$$

$$= h(\exp tZ) \cdot \left.\frac{dh(\exp sZ)}{ds}\right|_{s=0}$$

$$= \varphi(t) \cdot dh(Z)$$

Donc g et φ vérifient la même équation différentielle. De plus, $\varphi(0) = h(0) = g(0) = Id$. D'où la conclusion.

2.9. Exemple (cf. 1.7. et 1.11.) : Soit le groupe $G = (\mathbb{R}^2, \cdot)$, la multiplication étant définie par

$$(u,v) \cdot (u',v') = (u'', v'')$$

où

$$u'' = u + u'$$

$$v'' = \frac{u+u'}{e^{u+u'}-1}\left(\frac{v'}{u'}(e^{u'}-1) \cdot e^{u} + \frac{v}{u}(e^{u}-1)\right)$$

Alors l'application

$$h : G \to GL(\mathbb{R},2)$$

$$(u,v) \to \begin{pmatrix} e^u & \frac{v}{u}(e^u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une représentation du groupe G.

On peut identifier l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G avec $\mathbb{R}^2$ muni du crochet

$$[(u,v), (u',v')] = Q((u,v), (u',v')) = (0, uv' - u'v)$$

Grâce à cette identification, l'application exponentielle coïncide avec l'application identique dans $\mathbb{R}^2$. La différentielle dh de h est obtenue par

$$dh : \mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{gl}(\mathbb{R},2) = Mn(\mathbb{R},2)$$

avec

$$dh((u,v)) = \left.\frac{dh}{dt}(\exp t(u,v))\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{dh}{dt}((tu,tv))\right|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^{tu} & \frac{v}{u}(e^{tu}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{t=0}$$

$$= \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions que dh est une représentation de l'algèbre de Lie, c.à.d. que

$$dh([(u,v), (u',v')]) = [dh(u,v), dh(u',v')]$$

En effet

$$dh([(u,v),(u',v')]) = dh((0,uv'-u'v)) = \begin{pmatrix} 0 & uv'-u'v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[dh(u,v), dh(u',v')] = dh(u,v)\, dh(u',v') - dh(u',v')\, dh(u,v)$$

$$= \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} uu' & uv' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u'u & u'v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & uv'-u'v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.10. <u>Définition de la représentation Ad de G</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. On définit une représentation

$$\begin{aligned} Ad : \ & G \to GL(\mathfrak{g}) \\ & u \to Ad(u) \end{aligned}$$

par : Soit $X \in \mathfrak{g}$ donné. Il faut définir $Ad(u)(X) \in \mathfrak{g}$. Or, considérons

$$\begin{aligned} \varphi : \ & \mathbb{R} \to G \\ & s \to u \cdot \exp sX \cdot u^{-1} \end{aligned}$$

Alors φ est un homomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}$ dans G car

$$\varphi(s+t) = u \cdot \exp(s+t)X \cdot u^{-1} = u \cdot ((s+t)x) \cdot u^{-1}$$

$$= u \cdot sx \cdot tx \cdot u^{-1} = u \cdot \exp sX \cdot u^{-1} \cdot u \cdot \exp tX \cdot u^{-1}$$

$$= \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

Donc, par 1.12., il existe un et un seul $x' = \exp X'$ (X' unique puisque exp est une bijection), tel que

$$u \cdot \exp sX \cdot u^{-1} = sx' = \exp sX'.$$

Par définition,

$$X' = Ad(u)(X)$$

c.à.d.

$$\exp(s\, Ad(u)(X)) = u \cdot \exp sX \cdot u^{-1} \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}$$

Or, pour tout f C^∞ au voisinage du neutre 0

$$X'(f) = \frac{df}{ds}(\exp sX')_{s=0}$$

Donc

$$Ad(u)(X)(f) = \frac{df}{ds}(u \cdot \exp sX \cdot u^{-1})_{s=0}$$

$$Ad(u)(X)(f) = X_x f(u \cdot x \cdot u^{-1})$$

Pour $u = \exp tY$ on trouve :

$$Ad(\exp tY)(X)(f) = \frac{df}{ds}(\exp tY \cdot \exp sX \cdot \exp(-tY))_{s=0}$$

2.11. <u>Proposition</u> : Pour tout $u \in G$, $Ad(u) \in GL(\mathfrak{g})$.

Démonstration :

a) Quels que soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$

$$Ad(u)(X_1+X_2)(f) = (X_1+X_2)_x\, f(uxu^{-1})$$
$$= (X_1)_x\, f(uxu^{-1}) + (X_2)_x\, f(uxu^{-1})$$
$$= Ad(u)(X_1)(f) + Ad(u)(X_2)(f)$$

Donc $Ad(u)(X_1 + X_2) = Ad(u)(X_1) + Ad(u)(X_2)$.

De même, $Ad(u)(\mu X) = \mu\, Ad(u)(X)$.

b) L'opérateur Ad(u) est bijectif. Puisque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, il suffit de montrer que Ad(u) est injectif, c.à.d. que son noyau se réduit à 0. Supposons $Ad(u)(X) = 0$. Alors

$$u \cdot \exp sX \cdot u^{-1} = \exp(\, s\, Ad(u)(X)) = \exp 0 = 0$$
$$\exp sX = 0 \quad \text{pour tout } s$$
$$sX = 0 \quad \text{pour tout } s \qquad \text{puisque exp est bijectif}$$
$$X = 0$$

Donc Ad(u) est injectif.

2.12. <u>Proposition</u> : Soit $G = (V,\cdot)$ un groupe exponentiel. Alors l'application

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$$
$$u \to Ad(u)$$

est une représentation de G.

Démonstration :

a) $Ad(uu')(X)(f) = X_x\, f(uu'x(uu')^{-1})$
$= X_x\, f(uu'xu'^{-1}u^{-1})$

et

$$[Ad(u)\circ Ad(u')](X)(f) = Ad(u)[Ad(u')(X)](f)$$
$$= [Ad(u')(X)]_x\, f(uxu^{-1})$$
$$= X_x\, f(uu'xu'^{-1}u^{-1})$$

Donc $Ad(uu') = Ad(u)\circ Ad(u')$

b) La représentation Ad est C^∞. En effet, puisque exp ainsi que la multiplication dans G sont C^∞,

$$u \to \exp Ad(u)(X) = u \cdot \exp X \cdot u^{-1}$$

est C^∞ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Puisque exp est un difféomorphisme C^∞

$$u \to Ad(u)(X)$$

est C^∞ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, de même que

$$u \to Ad(u).$$

2.13. <u>Définition de la représentation ad de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$</u> : La représentation ad de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est définie par

$$ad : \mathfrak{g} \to end(\mathfrak{g}) = gl(\mathfrak{g})$$
$$X \to adX$$

où $adX(Y) = [X,Y]$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2.14. <u>Proposition</u> : L'application ad est une représentation de $\mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u> : La bilinéarité du crochet de Lie entraîne que $ad(X) \in end(\mathfrak{g})$ et que l'application envoyant X sur adX est linéaire. Il s'agit d'une représentation d'algèbre car

$$(ad[X,Y])(Z) = [[X,Y], Z]$$
$$= -[[Y,Z], X] - [[Z,X], Y] \qquad \text{Jacobi}$$

$$= [X, [Y,Z]] - [Y, [X,Z]]$$
$$= (adX \circ adY - adY \circ adX)(Z)$$
$$= [adX, adY](Z)$$

Donc $ad[X, Y] = [adX, adY]$

2.15 Proposition : La représentation ad de $\mathfrak{g}$ est la différentielle de la représentation Ad de G, c.à.d. d(Ad) = ad

Démonstration : Par 2.4. on a, pour tout f C^∞ au voisinage de 0, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $Y \in \mathfrak{g}$,

$$d(Ad)(X) = \frac{d\,Ad}{dt}(exptX)\Big|_{t=0}$$

$$d(Ad)(X)(Y) = \frac{d}{dt}\big(Ad(exptX)(Y)\big)\Big|_{t=0}$$

$$d(Ad)(X)(Y)(f) = \frac{d}{dt}\big(Ad(exptX)(Y)(f)\big)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f\big(exptX \cdot expsY \cdot exp(-tX)\big)\Big|_{s,t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f\big(exptX \cdot expsY\big)\Big|_{s,t=0} + \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f\big(expsY \cdot exp(-tX)\big)\Big|_{s,t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds} f\big(exptX \cdot expsY\big)\Big|_{s,t=0} - \frac{d}{ds}\frac{d}{dt} f\big(expsY \cdot exptX\big)\Big|_{s,t=0}$$

$$= [X,Y](f)$$

$$= adX(Y)(f)$$

Donc d(Ad)(X)= adX.

2.16. Corollaire : Quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$Ad(exptX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} ad^k(X) = exp(t\, adX)$$

$$Ad(expX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k(X) = exp(adX)$$

Démonstration : Par 2.8. et 2.15.

2.17. Remarques : a) Soit une représentation de groupe

$$h : G \to GL(W)$$

Alors la relation

$$h(exptX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} dh(X)^k$$

donne par dérivations successives

$$\frac{d^N}{dt^N} h(exptX)\Big|_{t=0} = dh(X)^N = \left(\frac{d}{dt} h(exptX)\Big|_{t=0}\right)^N$$

c.à.d. pour tout $x \in G$

$$\frac{d^N}{dt^N} h(tx)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} h(tx)\Big|_{t=0}\right)^N$$

b) En particulier, pour h = Ad, on trouve

$$\frac{d^N}{dt^N} Ad(exptX)\Big|_{t=0} = (ad(X))^N$$

2.18 Identification de $\mathfrak{g}$ et G : a) Soit G = (V,•) un groupe exponentiel. Dans ce cas on peut identifier $\mathfrak{g}$ et V, c.à.d. $\mathfrak{g}$ = (V, [,]) et alors l'application exponentielle est l'application identique de V dans V.

Sous cette identification on a :

$$\mathrm{Ad}(u)(x) = uxu^{-1}$$

b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe exponentiel $G = (V,\cdot)$ aurait aussi pu être introduite de la manière suivante : Par définition,

$$\mathrm{Ad}(u)(x) = uxu^{-1}$$

$$\mathrm{ad}(x) \doteq d(\mathrm{Ad})(x) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(tx)\Big|_{t=0}$$

$$[x,y] = \mathrm{ad}(x)(y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(tx)(y)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big((tx)\cdot y\cdot(-tx)\Big)\Big|_{t=0}$$

On montre alors :

Si $x\cdot y = x + y + \frac{1}{2}Q(x,y) + O(3)$, alors $[x,y] = Q(x,y)$.

Si on définit $\mathfrak{g} = (V,[\ ,\ ])$, alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, c.à.d.

$[\ ,\ ]$ est bilinéaire
$[x,y] = -[y,x]$
$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ Jacobi

En particulier, l'identité de Jacobi découle du fait que $\mathrm{ad} = d(\mathrm{Ad})$ vérifie

$$\mathrm{ad}[x,y] = \mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y\,\mathrm{ad}x = [\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]$$

Cette approche sera développée en détail au chapitre 3.

La suite de l'article paraîtra au prochain numéro.