

ETUDE DE L'ALGEBRE $L_\omega^1(G)$ AVEC G GROUPE DE LIE NILPOTENT ET ω POIDS POLYNOMIAL

Salma Mint Elhacen et Carine Molitor-Braun

Abstract: Let G be a connected, simply connected, nilpotent Lie group and let ω be a polynomial weight on G . In this paper we characterize the prime ideals and the maximal ideals of the weighted algebra $L_\omega^1(G)$. We prove the Wiener property for $L_\omega^1(G)$. We determine $\text{Prim}(L_\omega^1(G))$ and we characterize all the algebraically irreducible and all the topologically irreducible representations of $L_\omega^1(G)$.

0. Introduction

Une des préoccupations de l'analyse harmonique consiste à étudier différentes algèbres de fonctions, d'en caractériser certains idéaux (idéaux premiers, idéaux primitifs, idéaux maximaux) et d'en préciser les divers types de représentations (représentations algébriquement irréductibles, topologiquement irréductibles, unitaires irréductibles). Pour les groupes de Lie nilpotents, connexes, simplement connexes, cette tâche est déjà bien avancée en ce qui concerne l'algèbre de groupe $L^1(G)$ et l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(G)$. Le but de ce travail est de faire la même étude pour $L_\omega^1(G)$, où ω est un poids polynomial sur G . Un tel poids apparaît naturellement si on étudie l'appartenance des éléments du groupe G aux puissances successives d'un voisinage de l'unité (1.3).

Puisque $\mathcal{S}(G) \subset L_\omega^1(G) \subset L^1(G)$, chaque sous-espace étant dense dans le suivant pour la topologie respective, on peut espérer pouvoir transférer différentes propriétés de $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ à $L_\omega^1(G)$. A cet effet, il est essentiel de pouvoir comparer les noyaux $\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$, $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$ et $\ker(\pi)$ pour tout $\pi \in \hat{G}$. Or un résultat de Ludwig ([9], 2.1) montrant que $\overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \ker(\pi)$ peut être transposé afin de prouver qu'on a également $\overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} = \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. En combinant ce résultat avec l'existence d'idéaux minimaux (fermés dans $L_\omega^1(G)$), resp.

Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche
MEN/CUL/98/007

$L^1(G)$), d'enveloppe donnée $C \subset \hat{G}$ dans $\mathcal{S}(G)$, $L_\omega^1(G)$ et $L^1(G)$, ainsi qu'avec la relation entre ces différents idéaux minimaux, on obtient l'outil essentiel pour prouver les résultats suivants:

Les idéaux fermés propres premiers de $L_\omega^1(G)$ sont de la forme $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$, $\pi \in \hat{G}$. L'algèbre $(\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)) / \tilde{j}(\pi)$ est nilpotente si $\tilde{j}(\pi)$ désigne l'idéal minimal fermé de $L_\omega^1(G)$ d'enveloppe $\{\pi\}$ (ce qui est un résultat de synthèse spectrale généralisée). L'algèbre $L_\omega^1(G)$ possède la propriété de Wiener, c'est-à-dire pour tout idéal fermé propre I de $L_\omega^1(G)$, il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. Les idéaux fermés propres maximaux de $L_\omega^1(G)$ coïncident avec les idéaux fermés propres premiers. On en déduit également que $\text{Prim}(L_\omega^1(G)) = \{ \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \mid \pi \in \hat{G} \}$. Ensuite nous déterminons toutes les représentations algébriquement irréductibles de $L_\omega^1(G)$: Elles coïncident (à équivalence près) avec les représentations $(\pi|_{\mathcal{H}_\pi^0}, \mathcal{H}_\pi^0)$ où $\mathcal{H}_\pi^0 = \text{vect}\{ \pi(f)\xi \mid \xi \in \mathcal{H}_\pi, f \in L_\omega^1(G), \pi(f) \text{ de rang fini} \}$, $\mathcal{H}_\pi$ désignant l'espace de la représentation unitaire π . Les représentations topologiquement irréductibles de $L_\omega^1(G)$ sont alors obtenues en complétant les espaces $\mathcal{H}_\pi^0$ des représentations algébriquement irréductibles par rapport à des normes $\|\cdot\|$ appropriées.

1. L'algèbre $L_\omega^1(G)$

1.1. Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans ce cas l'application

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

est un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G . Par conséquent, on peut définir l'algèbre de Schwartz de G notée $\mathcal{S}(G)$, par

$$\mathcal{S}(G) = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \circ \exp \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \}$$

où $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathfrak{g}$. Muni du produit de convolution, $\mathcal{S}(G)$ devient une algèbre de Fréchet. Soit $\{ X_0, X_1, \dots, X_n \}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Alors les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow G \\ (t_0, t_1, \dots, t_n) &\longrightarrow \exp(t_0 X_0) \cdot \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow G \\ (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) &\longrightarrow \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\end{aligned}$$

sont des difféomorphismes. Les passages entre les "coordonnées" $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ et $(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n)$ se fait à l'aide de fonctions polynomiales. Donc la définition de $\mathcal{S}(G)$ peut également se baser sur la paramétrisation

$$(t_0, t_1, \dots, t_n) \longrightarrow \exp(t_0 X_0) \cdot \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

(voir [13] pour plus de details).

1.2. Définition: On appelle *poids* ω sur G toute application

$$\omega : G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

mesurable, localement bornée, continue en 0, vérifiant

$$\begin{aligned}\omega(x) &\geq 1, \quad \forall x \in G \\ \omega(x \cdot y) &\leq \omega(x)\omega(y) \quad \forall x, y \in G \\ \omega(x^{-1}) &= \omega(x) \quad \forall x \in G.\end{aligned}$$

Le poids ω est dit *polynomial* s'il existe un polynôme P en $n+1$ variables, à coefficients réels positifs, tel que

$$\omega\left(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\right) \leq P(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n)$$

quel que soit $(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. D'ailleurs, dans cette définition on peut également utiliser la paramétrisation

$$(t_0, t_1, \dots, t_n) \longrightarrow \exp(t_0 X_0) \cdot \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n).$$

De plus, la définition d'un poids polynomial est indépendante de la base de Jordan-Hölder choisie.

1.3. Exemple ([12], [13]): Pour $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)$, définissons

$$\|x\| = \sup_{i=0, \dots, n} |\tilde{t}_i|.$$

Soit U le voisinage compact symétrique de l'unité de G défini par

$$U = \{ x \in G \mid \|x\| \leq 1 \}.$$

Définissons pour tout $x \in G$,

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \min\{ n \in \mathbb{N}^* \mid x \in U^n \} \\ \omega(x) &= 1 + \tau(x).\end{aligned}$$

Alors ω est un poids polynomial sur G .

1.4. Tout poids ω permet de définir une nouvelle algèbre de fonctions par:

Définition: L'ensemble $L_\omega^1(G)$ est formé de toutes les classes d'équivalence de fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\|f\|_\omega = \int_G |f(x)|\omega(x)dx < \infty,$$

dx désignant la mesure de Haar sur G . Evidemment

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\omega \quad \forall f \in L_\omega^1(G),$$

et $L_\omega^1(G) \subset L^1(G)$. Muni de la convolution et de l'involution de $L^1(G)$, $L_\omega^1(G)$ devient une $*$ -algèbre de Banach.

1.5. Le dual de l'espace $L_\omega^1(G)$ est obtenu de la manière suivante:

Définition: L'ensemble $L_\omega^\infty(G)$ est formé de toutes les classes d'équivalence de fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f/\omega \in L^\infty(G)$.

On peut alors identifier l'espace dual de $L_\omega^1(G)$ à $L_\omega^\infty(G)$, les formes linéaires continues sur $L_\omega^1(G)$ étant toutes de la forme

$$\langle \Phi, f \rangle = \int_G f(x)\Phi(x)dx, \quad \Phi \in L_\omega^\infty(G).$$

Une telle fonction Φ peut évidemment s'écrire $\Phi = \phi \cdot \omega$ avec $\phi \in L^\infty(G)$.

1.6. Dans la suite de cet article nous supposons que le poids ω est polynomial. Par conséquent

$$\mathcal{S}(G) \subset L_\omega^1(G) \subset L^1(G).$$

De plus $\mathcal{S}(G)$ est dense dans $(L_\omega^1(G), \|\cdot\|_\omega)$ et dans $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$. La restriction de $\|\cdot\|_\omega$ à $\mathcal{S}(G)$ est une norme continue pour la topologie de l'espace de Schwartz.

2. Noyaux de représentations irréductibles

2.1. Notation: Dans ce travail nous noterons

$$\ker(\pi) = \{ f \in L^1(G) \mid \pi(f) = 0 \}, \pi \in \hat{G}$$

$$\text{Prim}_*(L^1(G)) = \{ \ker(\pi) \mid \pi \in \hat{G} \}$$

$$\text{Prim}(\mathcal{S}(G)) = \{ \ker(\rho) \mid \rho \text{ représentation algébriquement irréductible de } \mathcal{S}(G) \}$$

$$\text{Prim}(L_\omega^1(G)) = \{ \ker(\rho) \mid \rho \text{ représentation algébriquement irréductible de } L_\omega^1(G) \}$$

$$\mathfrak{K} = \{ \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \mid \pi \in \hat{G} \}.$$

Les ensembles $\text{Prim}_*(L^1(G))$, $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$, $\text{Prim}(L_\omega^1(G))$ et $\mathfrak{K}$ sont munis de la topologie enveloppe-noyau. $\text{Prim}(L_\omega^1(G))$ et $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$ sont appelés *espace des idéaux primitifs* de $\mathcal{S}(G)$, respectivement $L_\omega^1(G)$. Nous allons montrer dans ce travail que $\mathfrak{K} = \text{Prim}(L_\omega^1(G))$. Remarquons encore que les noyaux $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$ sont fermés dans $L_\omega^1(G)$.

2.2. Rappels: a) Soit π une représentation unitaire irréductible de G sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Alors la restriction de π à l'espace $\mathcal{H}_\pi^\infty$ des vecteurs C^∞ de $\mathcal{H}_\pi$ est une représentation algébriquement irréductible de $\mathcal{S}(G)$ ([5]). On définit de cette manière une bijection entre $\hat{G}$ et entre l'ensemble des classes d'équivalence des représentations algébriquement irréductibles de $\mathcal{S}(G)$. Pour tout $\pi \in \hat{G}$, notons $\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) = \ker(\pi|_{\mathcal{H}_\pi^\infty}) \cap \mathcal{S}(G)$ le noyau de la représentation algébriquement irréductible correspondante de $\mathcal{S}(G)$. On sait alors que l'application

$$\begin{aligned} \hat{G} &\longrightarrow \text{Prim}(\mathcal{S}(G)) \\ \pi &\longrightarrow \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme entre $\hat{G}$ (muni de la topologie de Fell) et $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$ (muni de la topologie enveloppe-noyau), par ([12]).

b) Puisque tout groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe est $*$ -régulier ([2]), l'application

$$\begin{aligned} \hat{G} &\longrightarrow \text{Prim}_*(L^1(G)) \\ \pi &\longrightarrow \ker(\pi) \end{aligned}$$

est également un homéomorphisme. On en déduit le résultat suivant:

2.3. Proposition: Les espaces $\text{Prim}_*(L^1(G))$, $\mathfrak{K}$, $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$ sont homéomorphes, les homéomorphismes en question étant donnés par

$$\begin{aligned}\text{Prim}_*(L^1(G)) &\longrightarrow \mathfrak{K} \longrightarrow \text{Prim}(\mathcal{S}(G)) \\ \ker(\pi) &\longrightarrow \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \longrightarrow \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G).\end{aligned}$$

En particulier, ces espaces sont homéomorphes à $\hat{G}$.

Preuve: Evidente d'après (2.2.). ■

Dans la suite nous identifierons $\hat{G}$, $\text{Prim}_*(L^1(G))$, $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$ et $\mathfrak{K}$.

2.4. La relation suivante entre les noyaux dans $\mathcal{S}(G)$, $L_\omega^1(G)$ et $L^1(G)$ est essentielle, si nous voulons transférer des résultats de $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ vers $L_\omega^1(G)$:

Théorème: Pour tout $\pi \in \hat{G}$, on a:

$$\begin{aligned}(1) \quad \ker(\pi) &= \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \overline{\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)}^{L^1(G)} \\ (2) \quad \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) &= \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)}.\end{aligned}$$

Preuve: (1) a été démontré par Ludwig en ([9], 2.1). D'ailleurs la même démonstration permet de prouver (2). En effet, dans ([9]) Ludwig montre que, pour toute distribution tempérée Ω sur $\mathcal{S}(G)$ qui annule $\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$ et quels que soient f_1, f_2 dans $\mathcal{S}(G)$, il existe une constante $c > 0$ (dépendante de f_1 et f_2) telle que

$$| \langle \Omega, f_1 * f * f_2 \rangle | \leq c \|\pi(f)\|_{op}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

Soit alors $\Phi \in L_\omega^1(G)' = L_\omega^\infty(G)$ tel que

$$\langle \Phi, \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \rangle \equiv 0.$$

On peut écrire $\Phi = \phi \cdot \omega$ avec $\phi \in L^\infty(G)$ et, puisque ω est un poids polynomial, Φ est une distribution tempérée sur $\mathcal{S}(G)$. Ainsi

$$| \langle \Phi, f_1 * f * f_2 \rangle | \leq c \|\pi(f)\|_{op}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ et même pour tout $f \in L_\omega^1(G)$ par continuité. Donc $\langle \Phi, f_1 * f * f_2 \rangle = 0$, de même que $\langle \Phi, f \rangle = 0$ pour tout $f \in \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. Le théorème de Hahn-Banach permet de conclure. ■

3. Idéaux minimaux

3.1. Les définitions et les notations suivantes sont bien connues:

Définition: a) Pour tout $C \subset \hat{G}$, notons $k(C)$ et appelons *noyau* de C dans $L_\omega^1(G)$ (resp. $\mathcal{S}(G)$ ou $L^1(G)$) l'ensemble

$$k(C) = \ker(C) = \bigcap_{\pi \in C} \left(\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \right)$$

(resp. $k(C) = \bigcap_{\pi \in C} \left(\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \right)$ ou $k(C) = \bigcap_{\pi \in C} \ker(\pi)$).

b) Pour tout idéal I de $L_\omega^1(G)$ (resp. $\mathcal{S}(G)$ ou $L^1(G)$), notons par $h(I)$ et appelons *enveloppe* de I l'ensemble

$$h(I) = \{ \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \mid \pi \in \hat{G} \text{ et } I \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \}$$

(resp. $h(I) = \{ \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \mid \pi \in \hat{G} \text{ et } I \subset \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \}$ ou $h(I) = \{ \ker(\pi) \mid \pi \in \hat{G} \text{ et } I \subset \ker(\pi) \}$). Puisque $\hat{G}$, $\text{Prim}_*(L^1(G))$, $\mathfrak{k}$ et $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$ sont homéomorphes, nous identifierons dans la suite les enveloppes dans $L^1(G)$, $L_\omega^1(G)$ et $\mathcal{S}(G)$ avec le sous-ensemble correspondant de $\hat{G}$.

Les résultats ci-dessous sur les idéaux minimaux dans $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ sont dus à Ludwig ([12], [8]) qui utilise à cet effet le calcul fonctionnel de Dixmier ([4]) et Hulanicki ([6]).

3.2. Théorème: Soit C un fermé de $\hat{G}$. Il existe un idéal minimal bilatère unique $j(C)$ dans $\mathcal{S}(G)$ tel que $h(j(C)) = C$, c'est-à-dire que tout idéal bilatère I de $\mathcal{S}(G)$ tel que $h(I) \subset C$ contient $j(C)$. De plus, cet idéal est engendré par les fonctions de la forme $\varphi\{f\}$, $f = f^* \in \ker(C)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ nulle dans un voisinage de 0. La notation $\varphi\{f\}$ désigne le calcul fonctionnel de Dixmier.

Preuve: Voir ([12]). ■

3.3. Notation: Soit C un fermé de $\hat{G}$. Posons

$$\tilde{j}(C) = \overline{j(C)}^{L^1(G)} \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{j}}(C) = \overline{j(C)}^{L_\omega^1(G)}.$$

Donc

$$j(C) \subset \tilde{\tilde{j}}(C) \subset \tilde{j}(C).$$

De plus $\tilde{\tilde{j}}(C)$ et $\tilde{j}(C)$ sont des idéaux bilatères fermés de $L_\omega^1(G)$ et $L^1(G)$ respectivement.

3.4. Le théorème suivant est bien connu pour $L^1(G)$ ([8]). Il reste valable pour $L_\omega^1(G)$, comme nous le montrons en esquisant une démonstration connue dans le cas de $L^1(G)$:

Théorème: Soit C un fermé de $\hat{G}$. Alors $\tilde{j}(C) = \overline{j(C)}^{L_\omega^1(G)}$ (resp. $\tilde{j}(C) = \overline{j(C)}^{L^1(G)}$) est l'idéal bilatère fermé minimal unique de $L_\omega^1(G)$ (resp. $L^1(G)$) tel que $h(\tilde{j}(C)) = C$ (resp. $h(j(C)) = C$). Il est contenu dans tout idéal bilatère fermé I de $L_\omega^1(G)$ (resp. $L^1(G)$) tel que $h(I) \subset C$.

Preuve (pour $L_\omega^1(G)$): Si $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \in h(\tilde{j}(C))$, alors

$$\overline{j(C)}^{L_\omega^1(G)} = \tilde{j}(C) \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \text{ et } \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \in h(j(C)).$$

Ainsi $\pi \in C$. Réciproquement, soit $\pi \in C$. Donc

$$j(C) \subset \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$$

et

$$\tilde{j}(C) = \overline{j(C)}^{L_\omega^1(G)} \subset \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} = \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G).$$

Par conséquent, $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \in h(\tilde{j}(C))$ et $h(\tilde{j}(C)) = C$. De plus, $\tilde{j}(C)$ est engendré par les mêmes fonctions que $j(C)$ (voir (3.2)). Soit $\varphi\{f\}$ un tel générateur. Choisissons $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, nulle dans un voisinage de 0 et identiquement 1 sur le support de φ . Alors

$$\psi \cdot \varphi = \varphi \cdot \psi = \varphi, \quad \psi\{f\} * \varphi\{f\} = \varphi\{f\} * \psi\{f\} = \varphi\{f\}$$

et l'enveloppe de l'ensemble des générateurs de $\tilde{j}(C)$ est contenue dans $h(\psi\{f\})$, puisque $\psi\{f\}$ est également un tel générateur. Par ([8], lemma 2), $\tilde{j}(C)$ est contenu dans tout idéal bilatère fermé I tel que $h(I) \subset h(\tilde{j}(C)) = C$. ■

3.5. Exemple: Dans ([1]) Alexander et Ludwig déterminent l'idéal minimal suivant de $L_\omega^1(G)$:

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\langle l, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \equiv 0 \rangle$. Soit χ_l le caractère unitaire de G défini par

$$\chi_l(x) = e^{-i\langle l, \log x \rangle}.$$

Soit P_ω l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur G contenues dans $L^\infty_\omega(G)$. Alors

$$\tilde{j}(\ker(\chi_l)) = \bigcap_{P \in P_\omega} \ker(P\chi_l)$$

où

$$\ker(P\chi_l) = \{f \in L^1_\omega(G) \mid \int_G f(x)P(x)\chi_l(x)dx = 0\}.$$

4. Applications

4.1. Dans ([12]) Ludwig introduit, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, une norme $\|\cdot\|_{M,M}$ sur $\mathcal{S}(G)$ vérifiant

$$\|f\|_\omega \leq \|f\|_{M,M} \quad \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

Il montre que pour tout fermé C de $\hat{G}$ et tout $M \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left(\ker(C) \cap \mathcal{S}(G)\right)^N \subset \overline{j(C)}^M$$

où $\overline{A}^M$ désigne l'adhérence de A dans l'ensemble des fonctions C^∞ bornées pour la norme $\|\cdot\|_{M,M}$. Comme $\overline{j(C)}^M \subset \overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)} = \tilde{j}(C)$, on a donc que, pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\ker(C) \cap \mathcal{S}(G)\right)^N \subset \overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)} = \tilde{j}(C).$$

On en déduit:

4.2. Théorème: Pour tout $\pi \in \hat{G}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left((\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)) / \tilde{j}(\pi)\right)^N = \{0\}.$$

Cela signifie que l'algèbre $(\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)) / \tilde{j}(\pi)$ est nilpotente .

Preuve: Par (2.4.) et (4.1.). ■

4.3. Remarque: Pour l'algèbre $L^1(G)$, le résultat (4.2.) est dû à Ludwig ([10]). C'est en fait un cas de "synthèse spectrale généralisée" (Si $N = 1$ était possible, ce qui n'est pas le cas en général, on aurait un vrai résultat de synthèse spectrale).

4.4. Lemme: Grâce aux identifications de $\mathfrak{K}$, $\text{Prim}(\mathcal{S}(G))$ et $\hat{G}$, l'enveloppe de tout idéal fermé I de $L_\omega^1(G)$ vérifie

$$h(I) = h(I \cap \mathcal{S}(G)).$$

Preuve: La démonstration de ([14], Lemme 5.2.) reste valable dans notre cas. ■

4.5. Corollaire: Soit $I \neq \{0\}$ un idéal fermé de $L_\omega^1(G)$. Alors $I \cap \mathcal{S}(G) \neq \{0\}$. De plus, $I \cap \mathcal{S}(G)$ est fermé dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$.

Preuve: Si $I \neq \{0\}$, $h(I \cap \mathcal{S}(G)) = h(I)$ est distinct de $\hat{G}$. Donc $I \cap \mathcal{S}(G) \neq \{0\}$. ■

4.6. Le résultat suivant est dû à Ludwig ([12]) pour $\mathcal{S}(G)$ et à Leptin ([7]) pour $L^1(G)$:

Théorème: L'algèbre $L_\omega^1(G)$ possède la propriété de Wiener: Pour tout idéal fermé propre I de $L_\omega^1(G)$, il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que

$$I \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G).$$

Preuve: Considérons l'idéal fermé propre $I_1 = I \cap \mathcal{S}(G)$ de $\mathcal{S}(G)$. Par ([12]) il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I \cap \mathcal{S}(G) \subset \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$. Donc $\pi \in h(I \cap \mathcal{S}(G)) = h(I)$ et $I \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. ■

4.7. Définition: Un idéal I de $L_\omega^1(G)$ (resp. $\mathcal{S}(G)$) est dit *premier* si et seulement si quels que soient les idéaux I_1, I_2 de $L_\omega^1(G)$ (resp. $\mathcal{S}(G)$) tels que $I_1 * I_2 \subset I$, on a $I_1 \subset I$ ou $I_2 \subset I$.

4.8. Le théorème suivant a été démontré par Ludwig pour l'algèbre $L^1(G)$ ([10]):

Théorème: Les idéaux fermés propres premiers de $L_\omega^1(G)$ coïncident avec les $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$, $\pi \in \hat{G}$.

Preuve: Puisque $\pi \in \hat{G}$ est topologiquement irréductible, tous les $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$ sont premiers. Réciproquement, soit I un idéal fermé propre premier de $L_\omega^1(G)$. Alors $I \cap \mathcal{S}(G)$ est un idéal propre de $\mathcal{S}(G)$ fermé pour la norme $\|\cdot\|_\omega$ de $\mathcal{S}(G)$. Montrons que $I \cap \mathcal{S}(G)$ est premier. Soient I_1, I_2 des idéaux de $\mathcal{S}(G)$ tels que $I_1 * I_2 \subset I \cap \mathcal{S}(G)$. Posons

$J_1 = \overline{I_1}^{L_\omega^1(G)}$ et $J_2 = \overline{I_2}^{L_\omega^1(G)}$. Alors J_1 et J_2 sont des idéaux de $L_\omega^1(G)$ tels que

$$J_1 * J_2 \subset \overline{I_1 * I_2}^{L_\omega^1(G)} \subset \overline{I \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} \subset I.$$

Donc, puisque I est premier, $J_1 \subset I$ ou $J_2 \subset I$. On en déduit que $I_1 \subset I \cap \mathcal{S}(G)$ ou $I_2 \subset I \cap \mathcal{S}(G)$. Par ([10], lemma 9 et [13], 6.3.) il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I \cap \mathcal{S}(G) = \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$. Donc

$$h(I) = h(I \cap \mathcal{S}(G)) = h(\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)) = h(\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G))$$

et $I \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. Réciproquement, par (2.4.),

$$\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) = \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} = \overline{I \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} \subset I.$$

■

4.9. Théorème: *Les idéaux fermés propres maximaux de $L_\omega^1(G)$ coïncident avec les noyaux $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$, $\pi \in \hat{G}$, c'est-à-dire avec les idéaux fermés propres premiers.*

Preuve: Soit M un idéal fermé propre maximal. Par (4.6.), il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $M \subset \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. Donc $M = \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$ par maximalité. Réciproquement, supposons $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$ non maximal. Alors il existe un idéal fermé propre M et $\pi_1 \in \hat{G}$ tels que

$$\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \subset M \subset \ker(\pi_1) \cap L_\omega^1(G) \quad \text{et} \quad \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \neq M. \quad (*)$$

On en déduit que

$$\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \subset \ker(\pi_1) \cap \mathcal{S}(G)$$

et que

$$\ker(\pi) = \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} \subset \overline{\ker(\pi_1) \cap \mathcal{S}(G)}^{L_\omega^1(G)} = \ker(\pi_1).$$

Donc $\pi_1 \in \overline{\{\pi\}} = \{\pi\}$, puisque G est nilpotent, $\pi = \pi_1$ et $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) = \ker(\pi_1) \cap L_\omega^1(G)$, ce qui contredit (*). ■

5. Représentations algébriquement irréductibles de $L_\omega^1(G)$

Rappelons la définition suivante d'une représentation algébriquement irréductible:

5.1. Définition: Soit A une algèbre de Banach. On dit que $(T, \mathfrak{U})$ est une *représentation algébriquement irréductible* de A , si $\mathfrak{U}$ est un espace vectoriel et

$$T : A \longrightarrow L(\mathfrak{U})$$

une application linéaire telle que:

- (1) $T(f * g) = T(f)T(g) \quad \forall f, g \in A$
- (2) Les seuls sous-espaces de $\mathfrak{U}$ A -invariants sont $\{0\}$ et $\mathfrak{U}$.

On dit encore que $(T, \mathfrak{U})$ est un *A -module algébriquement simple*. On montre que dans ce cas le noyau $\ker(T)$ de T dans A est un idéal fermé de A .

5.2. Soit $\pi \in \hat{G}$ agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Alors π définit une représentation topologiquement irréductible, unitaire de $L_\omega^1(G)$, par densité de $L_\omega^1(G)$ dans $L^1(G)$. Soit

$$\mathcal{H}_\pi^0 = \text{vect}\{\pi(f)\xi \mid \xi \in \mathcal{H}_\pi, f \in L_\omega^1(G), \pi(f) \text{ de rang fini}\}.$$

Puisque π est irréductible, $\mathcal{H}_\pi^0$ est dense dans $\mathcal{H}_\pi$. Par ([11], 4.2) la restriction de π à $\mathcal{H}_\pi^0$ est une représentation algébriquement irréductible de $L_\omega^1(G)$. Notons ρ cette restriction. Puisque $\ker(\rho) = \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$, on a donc que

$$\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \in \text{Prim}(L_\omega^1(G))$$

pour tout $\pi \in \hat{G}$.

5.3. Corollaire: *L'ensemble des idéaux primitifs de $L_\omega^1(G)$ est donné par*

$$\text{Prim}(L_\omega^1(G)) = \mathfrak{K} = \{ \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) \mid \pi \in \hat{G} \}.$$

Preuve: Par (5.2), $\mathfrak{K} \subset \text{Prim}(L_\omega^1(G))$. D'autre part, puisque le noyau de toute représentation algébriquement irréductible est premier et fermé, (4.8.) entraîne que

$$\text{Prim}(L_\omega^1(G)) \subset \mathfrak{K}.$$

■

5.4. Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire irréductible de G . Soit λ un vecteur unitaire C^∞ de $\mathcal{H}_\pi^\infty$. Prenons $p \in \mathcal{S}(G) \subset L_\omega^1(G)$ tel que $\pi(p) = P_{\lambda, \lambda}$, où $P_{\lambda, \lambda}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}\lambda$. Donc $p * p = p \bmod \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. Définissons l'espace

$$\mathcal{H}_\lambda^0 = \{ \pi(f)\lambda \mid f \in L_\omega^1(G) \}.$$

Alors $\mathcal{H}_\lambda^0$ est égal à $\mathcal{H}_\pi^0$, car $\mathcal{H}_\lambda^0$ est un sous-espace π -invariant de $\mathcal{H}_\pi^0$. On a le lemme suivant:

5.5. Lemme: Soit $(T, \mathfrak{U})$ une représentation algébriquement irréductible de $L_\omega^1(G)$. Soit $\pi \in \hat{G}$ tel que $\ker(T) = \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$. Soient $\lambda \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et $p \in L_\omega^1(G)$ choisis comme en (5.4.). Définissons l'idéal M_λ par $M_\lambda = \{ f \in L_\omega^1(G) \mid \pi(f)\lambda = 0 \}$. Soit ensuite $\eta \neq 0$ dans l'image de $T(p)$, donc en particulier $T(p)\eta = \eta$. Définissons $M_\eta = \{ f \in L_\omega^1(G) \mid T(f)\eta = 0 \}$. Alors M_λ est un idéal maximal modulaire de $L_\omega^1(G)$ et $M_\lambda = M_\eta$ pour tout choix de $\eta \neq 0$ dans l'image de $T(p)$.

Preuve: Il est clair que M_λ est un idéal maximal modulaire de $L_\omega^1(G)$ ([3], p.120, prop. 4). Montrons maintenant que $M_\lambda = M_\eta$. Or, puisque T est simple,

$$\begin{aligned} M_\eta &= \{ g \in L_\omega^1(G) \mid T(g)\eta = 0 \} \\ &= \{ g \in L_\omega^1(G) \mid T(h) \circ T(g)\eta = 0, \forall h \in L_\omega^1(G) \} \\ &= \{ g \in L_\omega^1(G) \mid T(p) \circ T(h) \circ T(g) \circ T(p)\eta = 0 \quad \forall h \in L_\omega^1(G) \} \\ &= \{ g \in L_\omega^1(G) \mid T(p * h * g * p)\eta = 0, \quad \forall h \in L_\omega^1(G) \} \\ &= \{ g \in L_\omega^1(G) \mid \langle \pi(h) \circ \pi(g)\lambda, \lambda \rangle \eta = 0, \quad \forall f \in L_\omega^1(G) \} \end{aligned}$$

car $p * h * g * p - \langle \pi(h) \circ \pi(g)\lambda, \lambda \rangle p \in \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) = \ker(T)$. Donc

$$M_\eta = \{ g \in L_\omega^1(G) \mid \pi(g)\lambda = 0 \} = M_\lambda.$$

■

5.6. Théorème: Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe simplement connexe. Soit ω un poids polynomial sur G . Soit $(T, \mathfrak{U})$ une représentation algébriquement irréductible de $L_\omega^1(G)$. Alors il existe, à équivalence près, une et une seule représentation unitaire topologiquement irréductible π de G telle que $(T, \mathfrak{U})$ soit équivalent à $(\pi|_{\mathcal{H}_\pi^0}, \mathcal{H}_\pi^0)$.

Preuve: Puisque $\ker(T)$ est un idéal propre fermé premier dans $L_\omega^1(G)$, il existe une représentation unitaire irréductible π de G telle que

$$\ker(T) = \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G),$$

(voir (4.8.)). Prenons $p \in \mathcal{S}(G) \subset L_\omega^1(G)$ tel que $\pi(p) = P_{\lambda,\lambda}$, où $P_{\lambda,\lambda}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}\lambda$. Donc $T(p) = T(p * p)$ est un projecteur non nul de l'espace de Banach $\mathfrak{U}$, car $p \notin \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) = \ker(T)$ et $p * p - p \in \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) = \ker(T)$. Définissons M_λ et M_η comme précédemment (5.5). Alors $(T, \mathfrak{U})$ est équivalent à $(\pi|_{\mathcal{H}_\pi^0}, \mathcal{H}_\pi^0)$, car ces deux modules sont équivalents à $L_\omega^1(G)/M_\eta$ et $L_\omega^1(G)/M_\lambda$ respectivement et $M_\lambda = M_\eta$ (voir (5.5.)). L'unicité, à équivalence près, est évidente. ■

6. Représentations topologiquement irréductibles de $L_\omega^1(G)$

6.1. Rappelons la définition suivante d'une représentation topologiquement irréductible.

Définition: Nous appelons *représentation topologiquement irréductible* (bornée) $(T, \mathfrak{U})$ de $L_\omega^1(G)$ sur un espace de Banach $\mathfrak{U}$ toute application linéaire

$$T : L_\omega^1(G) \longrightarrow L(\mathfrak{U})$$

vérifiant:

- (1) $T(f * g) = T(f)T(g) \quad \forall f, g \in L_\omega^1(G)$
- (2) $\|T(f)u\|_{\mathfrak{U}} \leq C_T \|f\|_\omega \|u\|_{\mathfrak{U}}, \quad \forall f \in L_\omega^1(G), \forall u \in \mathfrak{U},$
où C_T est une constante positive.
- (3) Les sous-espaces de $\mathfrak{U}$ fermés invariants sous l'action de T sont triviaux.

On dit encore que $(T, \mathfrak{U})$ est un $L_\omega^1(G)$ -module topologiquement simple.

Si $\pi \in \hat{G}$, alors $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est évidemment une représentation topologiquement irréductible de $L_\omega^1(G)$. Le but de ce chapitre est de déterminer toutes les représentations topologiquement irréductibles de $L_\omega^1(G)$, à équivalence près. La proposition suivante en est une première étape:

6.2. Proposition: *Pour tout $L_\omega^1(G)$ -module de Banach topologiquement simple $(T, \mathfrak{U})$, il existe une représentation $\pi_T \in \hat{G}$ unique (à équivalence près) telle que*

$$\ker(T) = \ker(\pi_T) \cap L_\omega^1(G).$$

Preuve: L'idéal $\ker(T)$ est un idéal bilatère fermé premier de $L_\omega^1(G)$ et on peut donc appliquer (4.8.). ■

6.3. Pour cette représentation $\pi_T \in \hat{G}$, choisissons alors λ et p comme en (5.4.). Puisque $\ker(T) = \ker(\pi_T) \cap L_\omega^1(G)$ on a

$$T(p * f * p) = \langle \pi_T(f)\lambda, \lambda \rangle T(p), \quad \forall f \in L_\omega^1(G),$$

avec $T(p) \neq 0$. Par construction de p , $T(p * p) = T(p)$. Choisissons alors $0 \neq u = T(p)u \in T(p)\mathfrak{U}$. Puisque $(T, \mathfrak{U})$ est topologiquement irréductible, $T(L_\omega^1(G))u = T(L_\omega^1(G) * p)u$ est dense dans $\mathfrak{U}$. De plus, pour tout $f \in L_\omega^1(G)$, on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} T(f)u = 0 &\iff T(p * L_\omega^1(G) * f * p)u \equiv 0 \\ &\iff \langle \pi_T(L_\omega^1(G))\pi_T(f)\lambda, \lambda \rangle T(p)u \equiv 0 \\ &\iff \langle \pi_T(f)\lambda, \pi_T(L_\omega^1(G))\lambda \rangle \equiv 0 \\ &\iff \pi_T(f * p)\lambda = \pi_T(f)\lambda = 0 \\ &\iff f * p \in \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G) = \ker(T). \end{aligned}$$

La dernière équivalence est due au fait que

$$\pi_T(f * p)\xi = \langle \xi, \lambda \rangle \pi_T(f)\lambda, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{\pi_T}.$$

6.4. Lemme: Soit $\mathcal{H}_{\pi_T}^0$ comme en (5.2., 5.4.). L'application

$$\begin{aligned} \Phi : T(L_\omega^1(G) * p)u &\longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_T}^0 \\ T(f)u = T(f * p)u &\longrightarrow \pi_T(f * p)\lambda = \pi_T(f)\lambda \end{aligned}$$

est une bijection linéaire qui vérifie

$$\pi_T(g) \circ \Phi = \Phi \circ T(g) = 0, \quad \forall g \in L_\omega^1(G).$$

Preuve: Puisque, par (6.3.),

$$T(f * p)u = 0 \iff \pi_T(f * p)\lambda = 0,$$

Φ est bien défini et c'est une bijection. La linéarité et la relation $\pi_T \circ \Phi = \Phi \circ T$ se vérifient facilement. ■

6.5. Proposition: Toute représentation topologiquement irréductible $(T, \mathfrak{U})$ de $L_\omega^1(G)$ est équivalente à une représentation $(\pi_T, \overline{\mathcal{H}_{\pi_T}^0}^{\|\cdot\|_T})$, où $\pi_T \in \hat{G}$ et où $\|\cdot\|_T$ est une norme appropriée sur $\mathcal{H}_{\pi_T}^0$. De plus

$$\|\pi_T(g)\xi\|_T \leq C_T \cdot \|g\|_\omega \cdot \|\xi\|_T, \quad \forall g \in L_\omega^1(G), \quad \forall \xi \in \overline{\mathcal{H}_{\pi_T}^0}^{\|\cdot\|_T}$$

pour une certaine constante $C_T > 0$. Les espaces $\mathfrak{U}$ et $\overline{\mathcal{H}_{\pi_T}^0}^{\|\cdot\|_T}$ sont isométriques.

Preuve: Par (6.4.), il suffit de poser

$$\|\pi_T(f)\lambda\|_T = \|T(f)u\|_{\mathfrak{U}}, \quad \forall f \in L_{\omega}^1(G),$$

et de compléter $\mathcal{H}_{\pi_T}^0$ pour cette norme. Alors les opérateurs $\pi_T(g)$, $g \in L_{\omega}^1(G)$, peuvent être prolongés en des opérateurs bornés sur $\overline{\mathcal{H}_{\pi_T}^0}^{\|\cdot\|_T}$, puisque

$$\begin{aligned} \|\pi_T(g)\pi_T(f)\lambda\|_T &= \|T(g * f)u\|_{\mathfrak{U}} \\ &\leq C_T \|g\|_{\omega} \|T(f)u\|_{\mathfrak{U}} \\ &= C_T \|g\|_{\omega} \|\pi_T(f)\lambda\|_T, \end{aligned}$$

relation qui peut être étendue à tout $\xi \in \overline{\mathcal{H}_{\pi_T}^0}^{\|\cdot\|_T}$. ■

6.6. Afin de caractériser toutes les représentations topologiquement irréductibles de noyau $\ker(\pi) \cap L_{\omega}^1(G)$ donné, il suffit donc de déterminer toutes les normes $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{H}_{\pi}^0$ pour lesquelles la représentation π est bornée et telles que $(\pi, \overline{\mathcal{H}_{\pi}^0}^{\|\cdot\|})$ soit topologiquement irréductible. D'où la définition suivante:

Définition: On appelle *norme d'extension* sur $\mathcal{H}_{\pi}^0$, toute norme $\|\cdot\|$ qui vérifie

$$\|\pi(g)\xi\| \leq C \|g\|_{\omega} \|\xi\|, \quad \forall g \in L_{\omega}^1(G), \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{\pi}^0,$$

où C est une constante strictement positive.

Par continuité on peut alors étendre l'action des opérateurs $\pi(g)$ au complété $\overline{\mathcal{H}_{\pi}^0}^{\|\cdot\|}$.

6.7. Exemples: 1) La norme $\|\cdot\|_T$ définie en (6.5.) est une norme d'extension.

2) La norme $\|\cdot\|_{\pi}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\pi}$ est une norme d'extension car

$$\|\pi(g)\xi\|_{\pi} \leq \|g\|_1 \|\xi\|_{\pi} \leq \|g\|_{\omega} \|\xi\|_{\pi}$$

quels que soient $g \in L_{\omega}^1(G)$ et $\xi \in \mathcal{H}_{\pi}$.

3) La norme $\|\cdot\|_{\min}$ définie par

$$\|\xi\|_{\min} = \sup_{\|a\|_{\omega} \leq 1} | \langle \xi, \pi(a)\lambda \rangle |, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{\pi}^0,$$

est une norme d'extension, car

$$\begin{aligned}
\|\pi(g)\xi\|_{\min} &= \sup_{\|a\|_{\omega} \leq 1} | \langle \pi(g)\xi, \pi(a)\lambda \rangle | \\
&= \|g\|_{\omega} \sup_{\|a\|_{\omega} \leq 1} | \langle \xi, \pi(\frac{g^*}{\|g^*\|_{\omega}} * a)\lambda \rangle | \\
&\leq \|g\|_{\omega} \sup_{\|a\|_{\omega} \leq 1} | \langle \xi, \pi(a)\lambda \rangle | \\
&= \|g\|_{\omega} \|\xi\|_{\min}
\end{aligned}$$

pour tout $g \in L_{\omega}^1(G)$, puisque $\|g\|_{\omega} = \|g^*\|_{\omega}$, le poids ω étant symétrique.

4) Soit $M_{\lambda} = \{f \in L_{\omega}^1(G) \mid \pi(f)\lambda = 0\}$ comme en (5.5.). Alors la norme $\|\cdot\|_{\max}$ définie sur $\mathcal{H}_{\pi}^0$ par

$$\|\pi(f)\lambda\|_{\max} = \inf_{m \in M_{\lambda}} \|f + m\|_{\omega} = \|f\|_{L_{\omega}^1(G)/M_{\lambda}}$$

est une norme d'extension, car

$$\begin{aligned}
\|\pi(g)\pi(f)\lambda\|_{\max} &= \inf_{m \in M_{\lambda}} \|g * f + m\|_{\omega} \\
&\leq \inf_{m \in M_{\lambda}} \|g * (f + m)\|_{\omega} \\
&\leq \|g\|_{\omega} \inf_{m \in M_{\lambda}} \|f + m\|_{\omega} \\
&= \|g\|_{\omega} \|\pi(f)\lambda\|_{\max}.
\end{aligned}$$

6.8. Proposition: Soit $\|\cdot\|$ une norme d'extension quelconque sur $\mathcal{H}_{\pi}^0$. Alors il existe des constantes C' et C'' strictement positives telles que

$$C' \|\xi\|_{\min} \leq \|\xi\| \leq C'' \|\xi\|_{\max}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{\pi}^0.$$

Preuve: Pour $\pi(f)\lambda \in \mathcal{H}_{\pi}^0$ quelconque,

$$\begin{aligned}
\|\pi(f)\lambda\| &= \|\pi(f + m)\lambda\| \\
&\leq C \cdot \|f + m\|_{\omega} \cdot \|\lambda\|, \quad \forall m \in M_{\lambda}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\pi(f)\lambda\| \leq (C \cdot \|\lambda\|) \cdot \|\pi(f)\lambda\|_{\max}.$$

D'autre part, pour $\|a\|_\omega \leq 1$,

$$\begin{aligned} |\langle \pi(f)\lambda, \pi(a)\lambda \rangle| &= \frac{1}{\|\lambda\|} \|\langle \pi(a^* * f)\lambda, \lambda \rangle \lambda\| \\ &= \frac{1}{\|\lambda\|} \|\pi(p * a^* * f * p)\lambda\| \\ &\leq \frac{1}{\|\lambda\|} \|p\|_\omega \|a^*\|_\omega \|\pi(f)\lambda\| \end{aligned}$$

et

$$\|\pi(f)\lambda\|_{\min} \leq \frac{1}{\|\lambda\|} \|p\|_\omega \|\pi(f)\lambda\|,$$

puisque $\|a^*\|_\omega = \|a\|_\omega \leq 1$. ■

6.9. Corollaire: Des normes $\|\cdot\|_{\min}$ définies à partir de vecteurs $\lambda \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ distincts sont équivalentes. De même pour les normes $\|\cdot\|_{\max}$.

6.10. Proposition: Soit $\|\cdot\|$ une norme d'extension quelconque sur $\mathcal{H}_\pi^0$. Alors le module $(\pi, \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|})$ est topologiquement simple.

Preuve: Remarquons d'abord que l'idéal

$$L_\omega^1(G) * p * L_\omega^1(G) + \ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$$

est dense dans $L_\omega^1(G)$, par maximalité de $\ker(\pi) \cap L_\omega^1(G)$ (4.9.). Donc, si W est un sous-espace fermé π -invariant de $\overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|}$, alors

$$\begin{aligned} \pi(p)W \equiv 0 &\iff \pi\left(L_\omega^1(G) * p * L_\omega^1(G)\right)W \equiv 0 \\ &\iff \pi(L_\omega^1(G))W \equiv 0 \\ &\iff W \equiv 0, \end{aligned}$$

puisque $L_\omega^1(G)$ possède des unités approchées bornées. D'autre part, comme

$$\pi(p)\pi(f)\lambda = \langle \pi(f)\lambda, \lambda \rangle \lambda \in \mathbb{C} \cdot \lambda, \quad \forall f \in L_\omega^1(G),$$

$\pi(p)\mathcal{H}_\pi^0 = \mathbb{C} \cdot \lambda = \pi(p) \cdot \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|}$. Ainsi, si $W \neq 0$ est un sous-espace fermé π -invariant de $\overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|}$, $0 \neq \pi(p)W \subset \mathbb{C} \cdot \lambda$ et $\pi(p)W = \mathbb{C} \cdot \lambda$, puisque W est un sous-espace. Finalement,

$$W \supset \pi(L_\omega^1(G) * p)W \supset \pi(L_\omega^1(G))\lambda = \mathcal{H}_\pi^0$$

et $W = \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|}$. ■

6.11. Nous pouvons résumer les résultats de ce chapitre dans le théorème suivant:

Théorème: Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent muni d'un poids polynomial ω . Les représentations topologiquement irréductibles de $L_\omega^1(G)$ coïncident, à équivalence près, avec les représentations $(\pi, \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|})$ où π est une représentation unitaire irréductible de G et où $\|\cdot\|$ est une norme d'extension sur $\mathcal{H}_\pi^0$. Les représentations $(\pi, \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|})$ et $(\pi_1, \overline{\mathcal{H}_{\pi_1}^0}^{\|\cdot\|_1})$ sont équivalentes si et seulement si π et π_1 sont des représentations unitairement équivalentes de G et $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ des normes d'extension équivalentes.

6.12. Remarques finales: 1) La norme $\|\cdot\|_\pi$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ est une norme d'extension, ce qui correspond au fait que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est une représentation topologiquement irréductible.

2) Puisque

$$C' \|\cdot\|_{\min} \leq \|\cdot\| \leq C'' \|\cdot\|_{\max}$$

pour toute norme d'extension $\|\cdot\|$, tous les modules topologiquement simples $(\pi, \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|})$ peuvent se réaliser comme des sous-modules de Banach du module universel $(\pi, \overline{\mathcal{H}_\pi^0}^{\|\cdot\|_{\min}})$.

3) En posant $\omega \equiv 1$, nous obtenons toutes les représentations topologiquement irréductibles de $L^1(G)$, si G est un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent.

Bibliographie

- [1] D. Alexandre, J. Ludwig, *Expression explicite d'idéaux minimaux d'algèbres de convolution*, preprint.
- [2] J. Boidol, H. Leptin, J. Schürman, D. Vahle, *Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren*, Math. Ann. **236** (1978), 1-13.
- [3] F. F. Bonsall, I. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Ergebnisse der Mathematik 80, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).

- [4] J. Dixmier, *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires*, Ins. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **6** (1960), 305-317.
- [5] R. Howe, *On a connection between nilpotent groups and oscillary integrals associated to singularities*, Pac. J. Math. **73** n.2 (1977), 329-363.
- [6] A. Hulanicki, *A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups*, Stud. Math. **78** (1984), 253-266.
- [7] H. Leptin, *Ideal Theory in Group Algebras of Locally Compact Groups*, Inventiones math. **31** (1976), 259-278.
- [8] J. Ludwig, *Polynomial growth and ideals in group algebras*, manuscripta math. **30** (1980), 215-221.
- [9] J. Ludwig, *On the spectral synthesis problem for points in the dual of a nilpotent Lie group*, Ark. Math. **21** (1983), 127-144.
- [10] J. Ludwig, *On Primary Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie group*, Math. Ann. **262** (1983), 287-304.
- [11] J. Ludwig, *Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels*, J. Reine Angew. Math. **339** (1983), 1-26.
- [12] J. Ludwig, *Minimal C^* -Dense Ideals and Algebraically Irreducible Representations of the Schwartz-Algebra of a Nilpotent Lie Group*, in *Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Math. **1359**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1987), 209-217.
- [13] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, *Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent*, Publ. Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques **VII** (1995), 25-67.
- [14] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, *Exponential actions, orbits and their kernels*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. **57** (1998), 497-513.
- [15] D. Poguntke, *Algebraically irreducible representations of L^1 -algebras of exponential Lie groups*, Duke Math. J. **50** (1983), 1077-1106.

Département de Mathématiques
 Université de Metz
 Ile de Saulcy
 F-57045 Metz cedex 01
 France

Séminaire de Mathématique
 Centre Universitaire de
 Luxembourg
 162A, Avenue de la Faïencerie
 L-1511 Luxembourg
 Luxembourg