Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent

Jean Ludwig et Carine Molitor-Braun*

1 Groupes et algèbres de Lie nilpotents

1.1. Définition : Soit g une algèbre de Lie. On définit

$$\mathrm{g}_0 = \mathrm{g}, \mathrm{g}_1 = [\mathrm{g}, \mathrm{g}_0], \mathrm{g}_2 = [\mathrm{g}, \mathrm{g}_1], ..., \mathrm{g}_k = [\mathrm{g}, \mathrm{g}_{k-1}], ...$$

L'*algèbre* g est dite *nilpotente* si et seulement s'il existe k tel que $\mathrm{g}_k = 0$.

1.2. Lemme : Soit g une algèbre de Lie nilpotente. Il existe une suite finie d'idéaux $(\mathrm{h}_i)_{i=0}^{n+1}$ telle que

$$\mathrm{g} = \mathrm{h}_0 \rhd \mathrm{h}_1 \rhd ... \rhd \mathrm{h}_n \rhd \mathrm{h}_{n+1} = 0$$

avec

$$\dim(\mathrm{h}_i/\mathrm{h}_{i+1}) = 1$$
$$[\mathrm{g}, \mathrm{h}_i] \subset \mathrm{h}_{i+1}$$

pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Démonstration : Voir ([5], 1.7.).

1.3. Définition : Choisissons

$$X_0 \in \mathrm{h}_0 \backslash \mathrm{h}_1, X_1 \in \mathrm{h}_1 \backslash \mathrm{h}_2, ..., X_i \in \mathrm{h}_i \backslash \mathrm{h}_{i+1}, ...$$

Alors $\{X_0, X_1, ..., X_n\}$ est une base de g appelée *base de Jordan-Hölder* de g. Remarquons que $[\mathrm{g}, X_i] \subset \mathrm{h}_{i+1}$ pour tout i. Toute base considérée dans la suite sera une base de Jordan-Hölder.

*Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN|CUL|95|05

1.4. Définition : Un *groupe* de Lie G est dit *nilpotent* si son algèbre de Lie $\mathbf{g}$ est nilpotente. Dans la suite tout groupe de Lie G sera supposé être nilpotent *connexe, simplement connexe.*

1.5. Théorème : Pour tout groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe l'application

$$\exp : \mathbf{g} \longrightarrow G$$

est un difféomorphisme entre $\mathbf{g}$ et G.

Démonstration : Voir ([8], IV.1.4.).

1.6. La formule de Campbell-Baker-Hausdorff

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp\Big(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + ...\Big)$$

se simplifie dans le cas d'un groupe nilpotent. Dans ce cas la série du membre de droite se réduit à une somme finie. La convergence a lieu quels que soient $X, Y \in \mathbf{g}$. La formule est donc de la forme

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp P(X,Y)$$

et est valable dans $\mathbf{g}$ tout entier. Ici $P(X,Y)$ désigne une fonction polynomiale en X, Y, c'est-à-dire en les coordonnées de X, Y dans une base quelconque.

1.7. La base de Jordan-Hölder $\{X_0, X_1, ..., X_n\}$ étant fixée, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & G \\ (t_0, t_1, ..., t_n) & \longmapsto & \exp t_0X_0 \cdot \exp t_1X_1 ... \exp t_nX_n \end{array}$$

est un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^{n+1}$ et G, par ([5], 2.4). D'autre part, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & G \\ (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_n) & \longmapsto & \exp(\tilde{t}_0X_0 + \tilde{t}_1X_1 + ... + \tilde{t}_nX_n) \end{array}$$

est également un difféomorphisme. Vu la formule de Campbell-Baker-Hausdorff et vu les propriétés des bases de Jordan-Hölder, les "changements de type de coordonnées" sont de la forme

$$\begin{aligned} t_i &= \tilde{t}_i + P_i(\tilde{t}_0, ..., \tilde{t}_{i-1}) \\ \tilde{t}_i &= t_i + Q_i(t_0, ..., t_{i-1}) \end{aligned}$$

P_i et Q_i désignant des fonctions polynômes.

1.8. Le groupe G est unimodulaire. La mesure de Haar sur G est donnée par

$$\begin{aligned}\int_G f(g)dg &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(\exp t_0X_0 \cdot \exp t_1X_1 ... \exp t_nX_n)dt_0dt_1...dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(\exp(\tilde{t}_0X_0 + \tilde{t}_1X_1 + ... + \tilde{t}_nX_n))d\tilde{t}_0d\tilde{t}_1...d\tilde{t}_n.\end{aligned}$$

Voir ([5], 2.5.).

2 Définition de l'algèbre de Schwartz

2.1. Une fonction F définie sur G peut être considérée de deux manières différentes comme fonction sur $\mathbb{R}^{n+1}$, à savoir

$$\begin{aligned}f(t_0, t_1, ..., t_n) &= F(\exp t_0X_0 \exp t_1X_1 ... \exp t_nX_n) \\ \tilde{f}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_n) &= F(\exp(\tilde{t}_0X_0 + \tilde{t}_1X_1 + ... + \tilde{t}_nX_n)).\end{aligned}$$

D'où également la notion de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur G. Vu les changements de variables donnés en 1.7., tout opérateur différentiel de la forme

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ \beta}} C_{\alpha,\beta} t^\beta \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^\alpha$$

se transforme en un opérateur différentiel du même type

$$\sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leq N \\ \tilde{\beta}}} \tilde{C}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}}$$

et réciproquement, les notations utilisées étant les suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, \quad |\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i \\ \beta &= (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ t^\beta &= t_0^{\beta_0} t_1^{\beta_1} ... t_n^{\beta_n} \\ \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^\alpha &= \Big(\frac{\partial}{\partial t_0}\Big)^{\alpha_0} \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)^{\alpha_1} ... \Big(\frac{\partial}{\partial t_n}\Big)^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

De même pour $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. D'où la définition suivante.

2.2. Définition : Une fonction F de G dans $\mathbb{C}$ est une *fonction de Schwartz* si et seulement si

$$\begin{aligned}
||F||_{\alpha,\beta} &= \int |t^{\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{\alpha} F(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 ... \exp t_n X_n)| dt_0 dt_1 ... dt_n \\
&= \int |t^{\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{\alpha} f(t_0, t_1, ..., t_n)| dt_0 dt_1 ... dt_n \\
&< +\infty \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}.
\end{aligned}$$

D'après 2.1. il est équivalent de dire que

$$\begin{aligned}
||F||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} &= \int |\tilde{t}^{\tilde{\beta}}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}} F(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + ... + \tilde{t}_n X_n))| d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 ... d\tilde{t}_n \\
&< +\infty \qquad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^{n+1}
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
||F||_{P,D} &= \int |P(t) D(t) F(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 ... \exp t_n X_n)| dt_0 dt_1 ... dt_n \\
&< +\infty \qquad \forall P, D
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
||F||^{\sim}_{\tilde{P},\tilde{D}} &= \int |\tilde{P}(t) \tilde{D}(t) F(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + ... + \tilde{t}_n X_n))| d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 ... d\tilde{t}_n \\
&< +\infty \qquad \forall \tilde{P}, \tilde{D}.
\end{aligned}$$

Ici P, $\tilde{P}$ désignent des fonctions polynômes et D, $\tilde{D}$ désignent des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Notons par $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des fonctions de Schwartz sur G.

2.3. Convention : Dans la suite nous ne ferons plus de différence entre $F, f, \tilde{f}$ et nous noterons indifféremment

$$\begin{aligned}
&f(t_0, t_1, ..., t_n), f(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_n), f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 ... \exp t_n X_n), \\
&f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + ... + \tilde{t}_n X_n))
\end{aligned}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$.

2.4. Proposition : $\mathcal{S}(G)$ est une algèbre pour le produit de convolution, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}(G) * \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(G).$$

Démonstration : Voir ([5], 7.).

3 Topologie sur l'algèbre $\mathcal{S}(G)$

3.1. Définition : Munissons $\mathcal{S}(G)$ de la topologie définie par la famille de semi-normes $||f||_{\alpha,\beta}$. On dit que $f_\nu \to f$ dans $\mathcal{S}(G)$ si et seulement si

$$||f_\nu - f||_{\alpha,\beta} \to 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}.$$

Un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{S}(G)$ est obtenu par

$$V(\alpha, \beta, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{S}(G) \Big| ||f||_{\alpha,\beta} < \varepsilon\}.$$

3.2. La même topologie est obtenue en prenant les semi-normes $||f||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ et les voisinages correspondants. D'ailleurs les familles de semi-normes $||f||_{P,D}$, resp. $||f||^{\sim}_{\tilde{P},\tilde{D}}$ engendrent également la même topologie sur $\mathcal{S}(G)$.

3.3. Puisque, pour tout polynôme P de degré r,

$$\begin{aligned} |P(t)| &\leq C \cdot (1 + t_0^2 + t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{r/2} \\ &\leq C \cdot (1 + t_0^2 + t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{r} \end{aligned}$$

la topologie de $\mathcal{S}(G)$ est également engendrée par la famille de semi-normes

$$\begin{aligned} ||f||_N &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \Big|(1 + t_0^2 + t_1^2 + \ldots + t_n^2)^N \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^\alpha f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \ldots \\ &\qquad \exp t_n X_n)\Big| dt_0 dt_1 \ldots dt_n \end{aligned}$$

resp. par la famille

$$\begin{aligned} ||f||^{\sim}_N &= \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq N} \int \Big|(1 + \tilde{t}_0^2 + \tilde{t}_1^2 + \ldots + \tilde{t}_n^2)^N \Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}} f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \\ &\qquad \ldots + \tilde{t}_n X_n))\Big| d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 \ldots d\tilde{t}_n. \end{aligned}$$

De plus, vu les résultats correspondants sur $\mathbb{R}^{n+1}$, la topologie de $\mathcal{S}(G)$ est encore engendrée par l'une quelconque des familles de semi-normes suivantes :

$$||f||_{\infty,\alpha,\beta} = \sup_{t \in \mathbb{R}^{n+1}} \Big|t^\beta \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^\alpha f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \ldots \exp t_n X_n)\Big|$$

resp.

$$||f||^{\sim}_{\infty,\tilde\alpha,\tilde\beta} = \sup_{\tilde t\in\mathbb{R}^{n+1}} \Big|\tilde t^{\tilde\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde t}\Big)^{\tilde\alpha} f(\exp \tilde t_0X_0 + \tilde t_1X_1 + ... + \tilde t_nX_n))\Big|$$

resp.

$$\begin{aligned} ||f||_{\infty,N} &= \sup_{t\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{|\alpha|\le N} \Big|(1+t_0^2+t_1^2+...+t_n^2)^N\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{\alpha} f(\exp t_0X_0\cdot \exp t_1X_1 \\ &\qquad ... \exp t_nX_n)\Big| \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} ||f||^{\sim}_{\infty,N} &= \sup_{\tilde t\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{|\tilde\alpha|\le N} \Big|(1+\tilde t_0^2+\tilde t_1^2+...+\tilde t_n^2)^N\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde t}\Big)^{\tilde\alpha} f(\exp(\tilde t_0X_0 + \tilde t_1X_1 + \\ &\qquad ... + \tilde t_nX_n))\Big|. \end{aligned}$$

3.4. Rappelons les définitions

$$(D_X * f)(y) = \frac{d}{ds} f(\exp(-sX)y)\Big|_{s=0}$$

$$(f * D_X)(y) = \frac{d}{ds} f(y\exp(-sX))\Big|_{s=0}$$

pour $X \in \mathfrak{g}$. Ainsi on définit de proche en proche $D^\alpha * f$ et $f * D^\alpha$ où $D^\alpha = D^{\alpha_0}_{X_0} * D^{\alpha_1}_{X_1} * ... * D^{\alpha_n}_{X_n}$ si $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ et où $D^N_X = D_X * D_X * ... * D_X$, le nombre d'opérateurs D_X étant N. Plus généralement on considérera des opérateurs de ce type où les D_{X_i} sont pris dans un ordre quelconque. Remarquons que

$$\begin{aligned} & (D_{X_i} * f)(\exp t_0X_0 \cdot \exp t_1X_1 ... \exp t_nX_n) \\ = \ & \frac{d}{ds} f(\exp(-sX_i)\exp t_0X_0\cdot \exp t_1X_1 ... \exp t_nX_n)\Big|_{s=0} \\ = \ & \frac{d}{ds} f(\exp t_0X_0 ... \exp t_iX_i \cdot [\exp(-t_iX_i) ... \exp(-t_0X_0)\exp(-sX_i)\exp t_0X_0 \\ & \qquad ... \exp t_iX_i]\exp t_{i+1}X_{i+1} ... \exp t_nX_n)\Big|_{s=0} \\ = \ & \frac{d}{ds} f(\exp t_0X_0 ... \exp t_{i-1}X_{i-1}\exp(t_i - s)X_i \exp(t_{i+1} + f_{i+1}(s, t_0, ..., t_i))X_{i+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \dots \exp(t_n + f_n(s, t_0, \dots, t_{n-1}))X_n)\Big|_{s=0} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t_i} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \dots \exp t_n X_n) \\
&\qquad + \sum_{j=i+1}^{n} P_j(t_0, \dots, t_{j-1}) \frac{\partial}{\partial t_j} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_j X_j \dots \exp t_n X_n).
\end{aligned}
$$

Dans ces expressions $f_j(s, t_0, ..., t_{j-1})$ désigne un polynôme en $s, t_0, ..., t_{j-1}$ tel que $f_j(0, t_0, ..., t_{j-1}) = 0$ et $P_j(t_0, ..., t_{j-1})$ désigne un polynôme en $t_0, ..., t_{j-1}$. De proche en proche on montre que

$$
\begin{aligned}
&D^\alpha * f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \\
&= \sum_\gamma P'_\gamma(t) D^\gamma f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n).
\end{aligned}
$$

Réciproquement,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_i} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \dots \exp t_n X_n) \\
&= -\frac{d}{ds} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp(t_i - s) X_i \dots \exp t_n X_n)\Big|_{s=0} \\
&= -\frac{d}{ds} f(\exp(-sX_i) \exp sX_i [\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i] \exp(-sX_i) \exp t_{i+1} X_{i+1} \\
&\qquad \dots \exp t_n X_n)\Big|_{s=0} \\
&= -\frac{d}{ds} f(\exp(-sX_i) \exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \exp P_{i+1}(s, t_0, \dots, t_{i+1}) X_{i+1} \dots \\
&\qquad \exp P_n(s, t_0, \dots, t_n) X_n)\Big|_{s=0} \\
&\qquad \text{avec } P_j(s, t_0, \dots, t_j) \text{ polynôme tel que} \\
&\qquad\quad P_j(0, t_0, \dots, t_j) = t_j \\
&= -D_{X_i} * f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n) - \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\partial}{\partial s} P_k(s, t_0, \dots, t_k)\Big|_{s=0} \cdot \\
&\qquad \frac{\partial}{\partial t_k} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_k X_k \dots \exp t_n X_n) \\
&= -D_{X_i} * f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n) - \sum_{k=i+1}^{n} Q_k(t_0, \dots, t_k) \frac{\partial}{\partial t_k} f(\exp t_0 X_0 \dots \\
&\qquad \exp t_k X_k \dots \exp t_n X_n).
\end{aligned}
$$

En répétant le même raisonnement on trouve des expressions de la forme

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t_i} f(\exp t_0 X_0 ... \exp t_i X_i ... \exp t_n X_n) \\
= \quad & -D_{X_i} * f(\exp t_0 X_0 ... \exp t_n X_n) - \sum_{k=i+1}^{n} R_k(t_0, ..., t_k) D_{X_k} * f(\exp t_0 X_0 \\
& \qquad ... \exp t_n X_n)
\end{aligned}$$

les R_k désignant des fonctions polynômes. Finalement, $(\frac{\partial}{\partial t})^\alpha f$ est de la forme $\sum_\beta P_\beta D^\beta * f$.
En majorant les polynômes par des $C \cdot (1 + t_0^2 + ... + t_n^2)^N$ on voit donc que la topologie de $\mathcal{S}(G)$ peut également être engendrée par la famille de semi-normes

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int |(1 + t_0^2 + ... + t_n^2)^N D^\alpha * f(\exp t_0 X_0 ... \exp t_n X_n)| dt_0 ... dt_n.$$

On montre de même que la famille de semi-normes

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int |(1 + t_0^2 + ... + t_n^2)^N f * D^\alpha(\exp t_0 X_0 ... \exp t_n X_n)| dt_0 ... dt_n$$

engendre la topologie de $\mathcal{S}(G)$.

3.5. Poids polynomial : a) Pour $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + ... + \tilde{t}_n X_n)$ définissons

$$||x|| = \sup_{i=0,...,n} |\tilde{t}_i|.$$

Soit U le voisinage compact de l'unité 1 de G défini par

$$U = \{x \in G \big| ||x|| \leq 1\}.$$

Dans ([1], Lemme 2) Dixmier montre qu'il existe $C > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in U^m} ||x|| \leq C \cdot m^N \qquad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*.$$

La démonstration se fait par récurrence et utilise le caractère polynomial de la formule de Campbell-Baker-Hausdorff.

b) Pour tout $x \in G$, définissons

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \min\{n \in \mathbb{N}^* | x \in U^n\} \\
\omega(x) &= 1 + \tau(x).
\end{aligned}$$

Par construction la fonction $\omega(x)$ est mesurable, localement bornée et vérifie $\omega(x) \geq 1$. De plus

$$\begin{aligned} x \in U^m, y \in U^n &\Rightarrow x \cdot y \in U^{m+n} \\ &\Rightarrow \tau(x \cdot y) \leq m+n. \end{aligned}$$

En passant au minimum sur m et n on a donc

$$\tau(x \cdot y) \leq \tau(x) + \tau(y)$$

et

$$\begin{aligned} \omega(x) \cdot \omega(y) &= (1+\tau(x)) \cdot (1+\tau(y)) \\ &= 1+\tau(x)+\tau(y)+\tau(x)\cdot\tau(y) \\ &\geq 1+\tau(x)+\tau(y) \\ &\geq 1+\tau(x \cdot y) \\ &= \omega(x \cdot y) \qquad \text{quels que soient } x, y \in G. \end{aligned}$$

c) Le raisonnement suivant, tiré de ([3], 1.5.) montre que la fonction ω peut être comparée à des fonctions polynômes. En effet, pour tout $X \in \mathbf{g}$, $\exp mX = (\exp X)^m$. Donc si $m-1 \leq ||\exp Y|| \leq m$, $1-\frac{1}{m} \leq ||\exp(\frac{Y}{m})|| \leq 1$, c'est-à-dire $\exp \frac{Y}{m} \in U$ et $\exp Y \in U^m$. Ainsi $\omega(\exp Y) \leq m \leq 1 + ||\exp Y||$ et, si $Y = \tilde{y}_0 X_0 + \tilde{y}_1 X_1 + \ldots + \tilde{y}_n X_n$,

$$\begin{aligned} ||\exp Y|| &= \sup |\tilde{y}_i| \\ &\leq \sup(1+\tilde{y}_i^2) \\ &\leq 1+\tilde{y}_0^2+\tilde{y}_1^2+\ldots+\tilde{y}_n^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\omega(\exp Y) \leq 2+\tilde{y}_0^2+\tilde{y}_1^2+\ldots+\tilde{y}_n^2.$$

D'autre part, on sait que

$$\sup_{x \in U^m} ||x|| \leq C \cdot m^N$$

Supposons à présent qu'il existe m tel que

$$C \cdot m^N < ||\exp Y|| \leq C \cdot (m+1)^N.$$

Alors $\exp Y \notin U^m$ et $\omega(\exp Y) \geq m+1$. Ainsi

$$|\tilde{y}_i| \leq ||\exp Y|| \leq C \cdot \omega(\exp Y)^N \qquad \text{pour tout } i.$$

On en déduit que pour tout polynôme $\tilde{P}$ il existe $C > 0$, $M > 0$ tels que

$$\tilde{P}(\tilde{t}_0, ..., \tilde{t}_n) \leq C \cdot \omega(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + ... + \tilde{t}_n X_n))^M.$$

Finalement, puisque le passage entre les deux systèmes de coordonnées $(t_0, t_1, ..., t_n)$ et $(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_n)$ se fait à l'aide de fonctions polynomiales, on a une majoration analogue pour tout polynôme P en $t_0, t_1, ..., t_n$

$$P(t_0, ..., t_n) \leq C_1 \cdot \omega(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 ... \exp t_n X_n)^{M_1}.$$

De plus

$$\omega(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 ... \exp t_n X_n) \leq Q(t_0, t_1, ..., t_n)$$

Q étant également une fonction polynôme. Dans la suite nous noterons simplement $\omega(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ pour $x \in G$ quel que soit le système de coordonnées utilisé.

d) La fonction ω est appelée poids polynomial.

3.6. Les majorations précédentes montrent que la topologie de $\mathcal{S}(G)$ peut également être engendrée par la famille de semi-normes

$$_N q(f) = \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega(x)^N |D^\alpha * f(x)| dx$$

ou par la famille de semi-normes

$$q_N(f) = \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega(x)^N |f * D^\alpha(x)| dx.$$

Ici x peut être exprimé dans l'un quelconque des deux systèmes de coordonnées.

3.7. Notons encore que $D^\alpha * f$, $f * D^\alpha \in \mathcal{S}(G)$ pour $f \in \mathcal{S}(G)$ et que les notations $D^\alpha * f$ et $f * D^\alpha$ sont bien choisies. En effet,

$$D^\alpha * (f * g) = (D^\alpha * f) * g$$

et

$$(f * g) * D^\alpha = f * (g * D^\alpha).$$

3.8. Définissons encore les semi-normes

$$p_N(f) = \int \omega(x)^N |f(x)| dx.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
{}_Nq(f * g) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(D^\alpha * f) * g(x)| dx \\
&= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) \Big| \int (D^\alpha * f)(y) g(y^{-1}x) dy \Big| dx \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \int \int \omega^N(y \cdot y^{-1}x) |(D^\alpha * f)(y) g(y^{-1}x)| dy\, dx \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(y) |D^\alpha * f(y)| \Big[\int \omega^N(y^{-1}x) |g(y^{-1}x)| dx \Big] dy \\
&= {}_Nq(f) \cdot p_N(g).
\end{aligned}$$

On montre de même que

$$q_N(f * g) \leq p_N(f) q_N(g)$$

quels que soient $f, g \in \mathcal{S}(G)$.

3.9. Remarques : a) Selon le problème à étudier, on travaillera dans la suite avec l'une ou l'autre famille de semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{S}(G)$. De plus, les éléments $x \in G$ seront soit considérés sous la forme $x = \exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 ... \exp t_n X_n$, soit sous la forme $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + ... + \tilde{t}_n X_n)$.

b) Si $N \leq N_1$, alors $q_N(f) \leq q_{N_1}(f)$ et ${}_Nq(f) \leq {}_{N_1}q(f)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$. En effet, $\omega(x) \geq 1$ entraîne $\omega^N(x) \leq \omega^{N_1}(x)$.

c) On pourrait encore utiliser la famille de semi-normes

$${}_Nq'(f) = \sup_{x \in G} \sum_{|\alpha| \leq N} |\omega^N(x) (D^\alpha * f)(x)|$$

resp. la famille de semi-normes

$$q'_N(f) = \sup_{x \in G} \sum_{|\alpha| \leq N} |\omega^N(x) (f * D^\alpha)(x)|$$

pour définir la topologie de $\mathcal{S}(G)$.
d) Finalement, la topologie de $\mathcal{S}(G)$ peut être engendrée par la distance

$$d(f,g) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{q_N(f-g)}{1+q_N(f-g)}.$$

Ainsi $\mathcal{S}(G)$ devient un espace de Fréchet.

4 Translations dans $\mathcal{S}(G)$

4.1. Définition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ et tout $a \in G$, définissons ${}_af$ et f_a par

$$({}_af)(x) = f(a^{-1}x) \quad \text{et} \quad (f_a)(x) = f(xa).$$

4.2. Lemme : Quels que soient $f, g \in \mathcal{S}(G)$, $a \in G$, on a

$${}_a(f * g) = ({}_af) * g \quad \text{et} \quad (f * g)_a = f * (g_a).$$

Démonstration : Evident.

4.3. Lemme : Quels que soient $f \in \mathcal{S}(G)$, $a \in G$, α, on a

$$({}_af) * D^\alpha = {}_a(f * D^\alpha) \quad \text{et} \quad D^\alpha * (f_a) = (D^\alpha * f)_a.$$

Démonstration : Evident.

4.4. Soit $f \in \mathcal{S}(G)$ fixé. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe $C_M > 0$ tel que

$$|f * D^\alpha(x)| \leq \frac{C_M}{\omega(x)^M}$$

par 3.9.c). On en déduit que

$$\begin{aligned} |({}_af) * D^\alpha(x)| &= |f * D^\alpha(a^{-1}x)| \\ &\leq \frac{C_M}{\omega(a^{-1}x)^M}. \end{aligned}$$

Or

$$\omega(a^{-1}x) = \frac{\omega(a)\omega(a^{-1}x)}{\omega(a)} \geq \frac{\omega(x)}{\omega(a)}$$

et

$$|({}_af) * D^\alpha(x)| \leq \frac{C_M \cdot \omega(a)^M}{\omega(x)^M}.$$

4.5. Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$

$$\lim_{a \longrightarrow e} ({}_af) = f$$

dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières, e désignant l'unité du groupe.

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$\int \omega^N(x) |({}_af) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)| dx \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que

$$\int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| dx \longrightarrow 0.$$

Par continuité on a

$$\lim_{a \longrightarrow e} \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} & \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| \\ \leq \;& \omega^N(x) |f * D^\alpha(a^{-1}x)| + \omega^N(\bar{x}) |f * D^\alpha(x)| \\ \leq \;& C_M \cdot \omega(a)^M \cdot \Big(\frac{1}{\omega(x)}\Big)^{M-N} + \omega^N(x) |f * D^\alpha(x)| \end{aligned}$$

avec

$$\Big(\frac{1}{\omega(x)}\Big)^{M-N} \in L^1(G)$$

pour M suffisamment élevé. De plus, puisque $a \rightarrow e$, on peut supposer que a parcourt un compact et que $\omega(a)^M$ est borné par C, étant donné que la fonction ω est localement bornée. D'où

$$\begin{aligned} & \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| \\ \leq \;& C_M \cdot C \cdot \Big(\frac{1}{\omega(x)}\Big)^{M-N} + \omega^N(x) |f * D^\alpha(x)| \in L^1(G). \end{aligned}$$

Le théorème de Lebesgue permet de conclure.

4.6. Corollaire : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$, tout $a_0 \in G$

$$\lim_{a \to a_0} ({}_a f) = {}_{a_0} f$$

dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration : On écrit

$${}_a f = {}_{(aa_0^{-1})}({}_{a_0} f)$$

avec $\lim(aa_0^{-1}) = e$.

4.7. On démontre de même

$$\lim_{a \to e}(f_a) = f$$
$$\lim_{a \to a_0}(f_a) = f_{a_0}$$

dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

4.8. Calculons

$$\begin{aligned}
q_N({}_a f) &= \sum_{|\alpha| \le N} \int \omega^N(x) |({}_a f) * D^\alpha(x)| dx \\
&= \sum_{|\alpha| \le N} \int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x)| dx \\
&= \sum_{|\alpha| \le N} \int \omega^N(ax) |(f * D^\alpha)(x)| dx \\
&\le \omega^N(a) \sum_{|\alpha| \le N} \int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(x)| dx \\
&= \omega^N(a) q_N(f).
\end{aligned}$$

On montre de même

$${}_N q(f_a) \le \omega^N(a^{-1}) {}_N q(f).$$

4.9. Définition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$, $a \in G$ définissons ${}^a f$ par

$$({}^a f)(x) = f(a^{-1}xa) = ({}_a f_a)(x).$$

4.10. Corollaire : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$, tout $a_0 \in G$

$$\lim_{a \to a_0} ({}^a f) = {}^{a_0} f$$

dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration :

$$\begin{aligned} q_N({}^a f - {}^{a_0} f) &= q_N({}_a f_a - {}_{a_0} f_{a_0}) \\ &\leq q_N({}_a f_a - {}_a f_{a_0}) + q_N({}_a f_{a_0} - {}_{a_0} f_{a_0}) \\ &\leq \omega^N(a) q_N(f_a - f_{a_0}) + q_N({}_a(f_{a_0}) - {}_{a_0}(f_{a_0})). \end{aligned}$$

Par 4.6. et 4.7., le membre de droite tend vers 0.

4.11. Corollaire : Si $\lim_\nu q_N(f_\nu - f) = 0$, alors $\lim_\nu q_N({}_a(f_\nu) - {}_a f) = 0$ pour tout $a \in G$. Si $\lim_\nu {}_N q(f_\nu - f) = 0$, alors $\lim_\nu {}_N q((f_\nu)_a - f_a) = 0$ pour tout $a \in G$. En particulier, si $\lim_\nu f_\nu = f$ dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$, alors $\lim_\nu {}_a(f_\nu) = {}_a f$ et $\lim_\nu (f_\nu)_a = f_a$ dans la même topologie.

5 Unités approchées dans $\mathcal{S}(G)$

5.1. Proposition : Soit (φ_ε) une famille de fonctions de $\mathcal{S}(G)$ telle que

$$\varphi_\varepsilon \geq 0, \quad \int \varphi_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = K_\varepsilon \subset V_\varepsilon$$

les K_ε étant des compacts et les V_ε formant une base de voisinages emboîtés de 1. Alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * f = f = \lim_{\varepsilon \to 0} f * \varphi_\varepsilon \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(G)$$

dans la topologie de $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration :

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(\varphi_\varepsilon * f) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)| dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha|\leq N} \int \omega^N(x)|\varphi_\varepsilon * (f * D^\alpha(x)) - f * D^\alpha(x)|dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq N} \int \omega^N(x)| \int \varphi_\varepsilon(y)(f * D^\alpha)(y^{-1}x)dy - \int \varphi_\varepsilon(y)dy \cdot f * D^\alpha(x)|dx \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq N} \int \varphi_\varepsilon(y) \int \omega^N(x)|({}_yf) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)|dx\, dy \\
&= \int \varphi_\varepsilon(y) \cdot q_N({}_yf - f)dy.
\end{aligned}
$$

Par 4.6., il existe pour tout $\zeta > 0$, un voisinage V_ζ de 1 tel que

$$y \in V_\zeta \Rightarrow q_N({}_yf - f) < \zeta.$$

D'où, pour $\varepsilon \leq \zeta$, supp $\varphi_\varepsilon \subset V_\varepsilon \subset V_\zeta$ et

$$\sum_{|\alpha|\leq N} \int \omega^N(x)|(\varphi_\varepsilon * f) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)|dx \leq \zeta \cdot \int \varphi_\varepsilon(y)dy = \zeta.$$

Ceci prouve la première limite, la deuxième se démontrant de même.

5.2. Pour construire la famille (φ_ε) il suffit de choisir une fonction positive $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ telle que $\int \varphi(x)dx = 1$, supp φ étant un voisinage compact de 1. Il suffit alors de définir φ_ε par

$$
\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \ldots + \tilde{t}_n X_n)) \\
&= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} \varphi\left(\exp(\frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} X_0 + \frac{\tilde{t}_1}{\varepsilon} X_1 + \ldots + \frac{\tilde{t}_n}{\varepsilon} X_n)\right).
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{S}(G)$ possède des unités approchées.

6 Idéaux fermés de $\mathcal{S}(G)$

6.1. Proposition : Soit I un idéal de $\mathcal{S}(G)$ fermé pour la topologie de $\mathcal{S}(G)$, respectivement pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz. Alors

$$f \in I \Rightarrow {}_af \in I \quad \text{et} \quad f_a \in I \quad \text{pour tout } a \in G.$$

Démonstration : Soit $|||.|||$ une semi-norme de Schwartz quelconque. Il existe alors N tel que

$$|||f||| \leq q_N(f) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(G)$$

étant donné que les q_N sont des semi-normes croissantes avec N qui engendrent la topologie de Schwartz. Soit (φ_ε) une unité approchée et soit $f \in I$. Puisque I est un idéal

$$_a(\varphi_\varepsilon * f) = (_a(\varphi_\varepsilon)) * f \in I$$

et

$$\begin{aligned} _af &= \lim_{\varepsilon \to 0} {}_a(\varphi_\varepsilon * f) \quad \text{dans } q_N, \text{ donc dans } |||.||| \text{ par 4.11.} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} (_a(\varphi_\varepsilon)) * f \\ &\in I \end{aligned}$$

l'idéal I étant fermé pour la ou les semi-normes en question. De même $f_a \in I$.

6.2. Proposition : Soit I un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(G)$, fermé pour la topologie de $\mathcal{S}(G)$, resp. fermé pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz. Alors I est un idéal si et seulement si I est stable par translations à droite et à gauche.

Démonstration : Une des implications a été démontrée en 6.1. Supposons à présent I stable par translations à droite et à gauche. Soit $f \in \mathcal{S}(G)$ et soit $g \in I$. Montrons que $f*g$ peut être approché arbitrairement dans $\mathcal{S}(G)$ (donc aussi dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz) par des sommes finies de la forme $\sum_i f(y_i)(_{y_i}g)(.)$ mes K_i, les K_i étant des ensembles de Borel tels que $y_i \in K_i$. Puisque $_{y_i}g \in I$ par hypothèse, on en déduira que $f * g \in I$, l'espace I étant fermé. Soit V un voisinage arbitraire de 0 dans $\mathcal{S}(G)$ et soit W un voisinage de 0 dans $\mathcal{S}(G)$ tel que $W + W \subset V$. Puisque les q_N sont des semi-normes croissantes engendrant la topologie de $\mathcal{S}(G)$ on peut par exemple supposer que

$$W = \{f \in \mathcal{S}(G) | q_N(f) < \varepsilon\}.$$

Remarquons d'abord qu'il existe un compact C de G tel que l'application

$$\left(x \mapsto \int_{G \setminus C} f(y)(_yg)(x)dy\right) \in W.$$

En effet, puisque

$$\int_G\Big[\int_G \sum_{|\alpha|\le N} \omega^N(x)|f(y)({}_yg) * D^\alpha(x)|dx\Big]dy$$
$$= \sum_{|\alpha|\le N}\int_G \omega^N(x)|f| * |g * D^\alpha|(x)dx < +\infty$$

il existe un compact C de G suffisamment grand tel que

$$\begin{aligned}
&\int_{G\backslash C}\Big[\int_G \sum_{|\alpha|\le N} \omega^N(x)|f(y)({}_yg) * D^\alpha(x)|dx\Big]dy < \varepsilon \\
\Longleftrightarrow\ & \sum_{|\alpha|\le N}\int \omega^N(x)\Big[\int_{G\backslash C} |f(y)({}_yg) * D^\alpha(x)|dy\Big]dx < \varepsilon \\
\Rightarrow\ & \sum_{|\alpha|\le N}\int \omega^N(x)\Big|\int_{G\backslash C} f(y)({}_yg) * D^\alpha(x)dy\Big|dx < \varepsilon \\
\Longleftrightarrow\ & \sum_{|\alpha|\le N}\int \omega^N(x)\Big|\Big[\int_{G\backslash C} f(y)({}_yg)(\,)dy\Big] * D^\alpha(x)\Big|dx < \varepsilon \\
\Longleftrightarrow\ & q_N\Big(\int_{G\backslash C} f(y)({}_yg)(\,)dy\Big) < \varepsilon \\
\Longleftrightarrow\ & \int_{G\backslash C} f(y)({}_yg)(\,)dy \in W.
\end{aligned}$$

Puisque l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ y &\longmapsto f(y)({}_yg) \end{aligned}$$

est continue, par continuité des translations, il suffit d'appliquer ([6], ex. 23 p. 85) pour conclure à l'existence d'une somme finie $\sum_i f(y_i)({}_{y_i}g)(\,)\text{mes } K_i$ telle que

$$\int_C f(y)({}_yg)(\,)dy - \sum_i f(y_i)({}_{y_i}g)(\,)\text{mes } K_i \in W.$$

D'où

$$\begin{aligned}
& f * g - \sum_i f(y_i)({}_{y_i}g)\text{mes } K_i \\
=\ & \int_{G\backslash C} f(y)({}_yg)(\,)dy + \int_C f(y)({}_yg)(\,)dy - \sum_i f(y_i)({}_{y_i}g)(\,)\text{mes } K_i \\
\in\ & W + W \\
\subset\ & V
\end{aligned}$$

ce qui prouve notre affirmation. Ainsi $f * g \in I$. On montre de même que $g * f \in I$ et donc que I est un idéal.

6.3. Proposition : Soit I un idéal de $\mathcal{S}(G)$ fermé pour la topologie de $\mathcal{S}(G)$, resp. fermé pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz. Alors I est fermé pour l'action de l'algèbre enveloppante, c'est-à-dire

$$f \in I, \quad D^\alpha \in U(\mathrm{g}) \Rightarrow f * D^\alpha \in I \quad \text{et} \quad D^\alpha * f \in I.$$

Démonstration : Soit (φ_ε) une unité approchée. On sait que $f*\varphi_\varepsilon$ tend vers f dans toute semi-norme de Schwartz. Montrons que $(f*\varphi_\varepsilon)*D^\alpha = f*(\varphi_\varepsilon*D^\alpha)$ tend vers $f*D^\alpha$ dans toute semi-norme q_N, donc aussi dans toute autre semi-norme de Schwartz. Puisque de plus $f * (\varphi_\varepsilon * D^\alpha) \in I$ on en déduira que $f * D^\alpha \in I$. Or

$$\begin{aligned} & q_N((f * \varphi_\varepsilon) * D^\alpha - f * D^\alpha) \\ = & \sum_{|\beta| \leq N} \int \omega^N(x) |(f * \varphi_\varepsilon - f) * D^\alpha * D^\beta(x)| dx \\ = & q_1(f * \varphi_\varepsilon - f) \end{aligned}$$

où q_1 est une nouvelle semi-norme de Schwartz définie par la ligne précédente. Par conséquent $q_1(f * \varphi_\varepsilon - f)$ tend vers 0, ce qui prouve que $f * D^\alpha \in I$. On montre de même que $D^\alpha * f \in I$.

7 Semi-groupe d'opérateurs engendré par le laplacien

7.1. Définition : Soit $(X_0, X_1, ..., X_n)$ une base de Jordan-Hölder. Définissons les opérateurs $X_i = D_{X_i}$ et Δ sur $\mathcal{S}(G)$ par

$$X_i(f) = f * X_i = f * D_{X_i}$$

$$\Delta = -\sum_{i=0}^{n} X_i^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta(f) = f * \Delta = -\sum_{i=0}^{n} f * D_{X_i}^2.$$

L'opérateur Δ est appelé *laplacien*.

7.2. Propriétés : Dans la suite $\mathcal{S}(G)$ sera considéré comme sous-espace dense de $L^2(G)$. Le produit scalaire et la norme seront ceux de $L^2(G)$. On a les propriétés suivantes pour $f, g \in \mathcal{S}(G)$:

a) $\quad (f * X_i, g) = -(f, g * X_i)$

b) $\quad (f * \Delta, g) = (f, g * \Delta)$, c'est-à-dire l'opérateur Δ est formellement auto-adjoint

c) $\quad (f * \Delta, f) = \sum_{i=0}^{n} ||f * X_i||_2^2 \geq 0$, c'est-à-dire l'opérateur Δ est positif.

Démonstration : a)

$$\begin{aligned}
(f * X_i, g) &= \int f * X_i(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int \frac{d}{ds} f(x\exp(-sX_i))\Big|_{s=0}\overline{g(x)}dx \\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int f(x\exp(-sX_i))\overline{g(x)}dx\Big]_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int f(x)\overline{g(x\exp(sX_i))}dx\Big]_{s=0} \\
&= -(f, g * X_i).
\end{aligned}$$

Les propriétés b) et c) sont alors évidentes.

7.3. On définit une distribution T sur $\mathcal{D} = C_c^\infty(G)$, ensemble des fonctions C^∞ à support compact, par

$$\langle T, f\rangle = f * (-\Delta)(e)$$

e désignant le neutre du groupe. La distribution T est un *laplacien généralisé*, c'est-à-dire vérifie

$$f \in \mathcal{D}, f \text{ réelle}, f(e) = \sup_{x\in G} f(x) > 0 \Rightarrow \langle T, f\rangle \leq 0.$$

Remarquons encore que l'opérateur $T(f)$ défini par $T(f) = f * T$ au sens des distributions, est donné par $T(f) = f * (-\Delta)$.

7.4. Proposition : L'opérateur $T = -\Delta$ engendre un semi-groupe d'opérateurs H_t sur $C_\infty(G)$, ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. Ce semi-groupe d'opérateurs est borné par 1, d'opérateur infinitésimal $-\Delta$. Il est défini par un semi-groupe de mesures positives μ_t, bornées par 1, telles que

$$\begin{array}{ll} H_t(f) = f * \mu_t & \text{pour } f \in C_\infty(G) \\ H_tH_s(f) = H_{t+s}(f), & \text{c'est-à-dire } \mu_s * \mu_t = \mu_{s+t} \\ \mu_t \geq 0, \mu_t(G) \leq 1. & \end{array}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(H_t(f) - f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(f * \mu_t - f) = f * (-\Delta) \text{ dans } C_c^\infty(G).$$

Démonstration : La démonstration de ([4], 4.2.) reste valable. Il suffit de remplacer les actions à gauche par des actions à droite. Les mesures μ_t sont définies sur $C_c^\infty(G)$ par $\mu_t(f) = H_t(\check{f})(e)$ avec $\check{f}(x) = f(x^{-1})$. Elles sont ensuite étendues à $C_c(G)$, ensemble des fonctions continues à support compact, tout entier.

7.5. Proposition : Les mesures μ_t sont en fait des fonctions positives h_t, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times G$, vérifiant

$$\begin{array}{l} \int_G h_t(x)dx \leq 1 \\ h_t * h_s = h_{t+s} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)h_t = 0 \end{array}$$

c'est-à-dire les fonctions h_t sont solutions de l'équation de diffusion de la chaleur.

Suggestion : Comme en ([2], p. 56) on définit la distribution h par

$$\langle h, u \otimes v \rangle = \int_0^\infty \int_G u(x)v(t)d\mu_t(x)dt.$$

On montre qu'au sens des distributions on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)h = 0.$$

Puisque l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$ est hypoelliptique, h est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times G$. On note $h_t(x) = h(t, x)$. On a $h_t \geq 0$ et $d\mu_t(x) = h_t(x)dx$.

7.6. Puisque $(-\Delta)$ est l'opérateur infinitésimal associé à H_t on a

$$\begin{aligned} & H_t(f*(-\Delta)) = (H_t(f))*(-\Delta) \\ \Longleftrightarrow \quad & f*(-\Delta)*h_t = f*h_t*(-\Delta) \qquad \forall f \in C_c^\infty(G). \end{aligned}$$

Par continuité, la dernière ligne reste valable pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$.

7.7. D'après ([8], IV.4.2. et IV.5.8.), les fonctions h_t admettent les majorations suivantes :

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m [h_t * D^\alpha(x)]\right| \leq C \cdot t^{-m-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} \cdot e^{-||x||^2/4(1+a)t}$$

pour tout $x \in G$ et tout $t > 0$. Le nombre d est une constante dépendant de la dimension de l'espace. En particulier,

$$|h_t * D^\alpha(x)| \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} e^{-||x||^2/4(1+a)t}$$

$$|h_t(x)| \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \cdot e^{-||x||^2/4(1+a)t}.$$

Remarques : a) Si $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n)$, alors $||x||^2 = \sum_{i=0}^n (\tilde{t}_i)^2$. Dans ([8], IV.4.2.), $||x||$ est remplacé par $\zeta(x)$ où $\zeta(x)$ désigne la distance de Carnot-Carathéodory. Etant donné que nous sommes partis d'une base de Jordan-Hölder, nous pouvons utiliser $||.||$. De plus, $a > 0$ est un nombre fixé arbitrairement et C est une constante qui dépend de a.
b) Dans ([8], IV.4.2.) intervient l'expression $V(\sqrt{t})$, désignant le volume de la boule de rayon $\sqrt{t}$. Dans ([8], IV.5.8.) on montre que $V(t) \approx t^d$ si $0 \leq t \leq 1$ et $V(t) \approx t^D$ si $t \geq 1$. Puisque nous sommes partis d'une base de Jordan-Hölder, $d = D$.

7.8. Extension à $L^2(G)$: a) Par continuité les opérateurs H_t peuvent être étendus à $L^2(G)$ tout entier. Il suffit de poser

$$\begin{aligned} H_t : L^2(G) &\longrightarrow L^2(G) \\ f &\longmapsto f * h_t. \end{aligned}$$

On obtient un semi-groupe d'opérateurs sur $L^2(G)$.
b) Pour tout $f \in L^2(G)$ et tout $t > 0$,

$$||f * h_t||_2 \leq C^{1/2} \cdot t^{-\frac{1}{4}d} \cdot ||f||_2$$

c'est-à-dire

$$||H_t||_{op} \leq C^{1/2} \cdot t^{-\frac{1}{4}d}.$$

c) Pour tout $f \in L^2(G)$ et tout $t > 0$,

$$||f * h_t||_2 \leq ||f||_2$$

c'est-à-dire

$$||H_t||_{op} \leq 1.$$

d) Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ et tout $t > 0$,

$$f * (-\Delta) * h_t = f * h_t * (-\Delta)$$

et

$$f * (1+\Delta)^N * h_t = f * h_t * (1+\Delta)^N \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

e) Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$

$$\lim_{t \downarrow 0} ||f * h_t - f||_\infty = 0$$

et

$$\lim_{t \downarrow 0} ||f * h_t - f||_2 = 0.$$

<u>Démonstration</u> : b)

$$||H_t||^2_{op} \leq ||h_t||^2_2 \leq ||h_t||_1 \cdot ||h_t||_\infty \leq ||h_t||_\infty \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}d}.$$

c) découle du fait que $||h_t||_1 \leq 1$ pour tout t.
d) découle du fait que $(-\Delta)$ est l'opérateur infinitésimal de H_t, voir ([9], p. 239).
e) Il suffit d'évaluer

$$||f * h_t - f||_\infty \leq t \cdot \Big|\Big|\frac{f * h_t - f}{t} - f * (-\Delta)\Big|\Big|_\infty + t \cdot ||f * (-\Delta)||_\infty.$$

Le membre de droite tend vers 0 pour tout $f \in C_c^\infty(G)$ par 7.4. Donc, par continuité,

$$\lim_{t \downarrow 0} ||f * h_t - f||_\infty = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

De plus

$$\begin{aligned} ||f * h_t - f||_2^2 &\leq ||f * h_t - f||_1 \cdot ||f * h_t - f||_\infty \\ &\leq 2||f||_1 ||f * h_t - f||_\infty \end{aligned}$$

puisque $||h_t||_1 \leq 1$. D'où la deuxième limite.

8 Solutions E_N de l'équation $(1+\Delta)^N * E_N = E_N * (1+\Delta)^N = \delta$

8.1. Définition : Posons

$$E_N(x) = \frac{1}{(N-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{N-1}h_t(x)dt.$$

8.2. On a :

$$x^\beta E_N * D^\alpha(x) = \frac{1}{(N-1)!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{N-1}x^\beta(h_t * D^\alpha)(x)dx$$

avec

$$\begin{aligned}&|e^{-t}t^{N-1}x^\beta(h_t * D^\alpha)(x)| \\ &\qquad \leq C\cdot e^{-t}t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d}e^{-||x||^2/4(1+a)t}|x^\beta|.\end{aligned}$$

Pour N tel que $N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d \geq 0$, la fonction est intégrable au voisinage de 0. Lorsque t tend vers $+\infty$ l'existence de l'intégrale est due à la présence de e^{-t}. Calculons

$$\begin{aligned}\int_G |x^\beta E_N * D^\alpha(x)|dx &\leq \frac{1}{(N-1)!}\int_G\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{N-1}|x^\beta(h_t * D^\alpha)(x)|dt\,dx \\ &\leq \frac{1}{(N-1)!}\int_G\int_0^1 C\cdot e^{-t}\cdot t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d}|x^\beta|\cdot e^{-||x||^2/4(1+a)}dt\,dx \\ &+\frac{1}{(N-1)!}\int_G\int_1^{+\infty} C\cdot e^{-t}t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d}\cdot|x^\beta|\cdot e^{-||x||^2/4(1+a)t}dt\,dx.\end{aligned}$$

En effet, $t \leq 1$ entraîne

$$\begin{aligned}4(1+a)t &\leq 4(1+a) \\ \frac{1}{4(1+a)t} &\geq \frac{1}{4(1+a)} \\ e^{-||x||^2/4(1+a)t} &\leq e^{-||x||^2/4(1+a)}.\end{aligned}$$

La première intégrale s'écrit

$$\frac{1}{(N-1)!}\int_G |x^\beta|e^{-||x||^2/4(1+a)}dx\cdot\int_0^1 C\cdot e^{-t}t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d}dt$$

et converge pour N suffisamment élevé, c'est-à-dire pour

$$|\alpha| \leq 2N - 2 - d.$$

Dans la deuxième intégrale, effectuons le changement de variables suivant : Si $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + ... + \tilde{t}_n X_n)$, posons $\tilde{t}_i = t\tilde{s}_i$ pour tout i. Remarquons que

$$\begin{aligned} dx &= d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 ... d\tilde{t}_n = t^{n+1} d\tilde{s}_0 d\tilde{s}_1 ... d\tilde{s}_n \\ x^\beta &= \tilde{t}_0^{\beta_0} \tilde{t}_1^{\beta_1} ... \tilde{t}_n^{\beta_n} = t^{|\beta|} \tilde{s}_0^{\beta_0} \tilde{s}_1^{\beta_1} ... \tilde{s}_n^{\beta_n} \\ ||x||^2 &= \tilde{t}_0^2 + \tilde{t}_1^2 + ... + \tilde{t}_n^2 = t^2(\tilde{s}_0^2 + \tilde{s}_1^2 + ... + \tilde{s}_n^2). \end{aligned}$$

Donc la deuxième intégrale s'écrit

$$\frac{1}{(N-1)!} \int \int_1^{+\infty} C \cdot e^{-t} t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} \cdot t^{|\beta|} \tilde{s}_0^{\beta_0} \tilde{s}_1^{\beta_1} ... \tilde{s}_n^{\beta_n} \cdot$$
$$e^{-t(\tilde{s}_0^2+\tilde{s}_1^2+...+\tilde{s}_n^2)/4(1+a)} t^{n+1} dt\, d\tilde{s}_0 d\tilde{s}_1 ... d\tilde{s}_n.$$

Puisque $t \geq 1$,

$$e^{-t(\tilde{s}_0^2+\tilde{s}_1^2+...+\tilde{s}_n^2)/4(1+a)} \leq e^{-(\tilde{s}_0^2+\tilde{s}_1^2+...+\tilde{s}_n^2)/4(1+a)}$$

et la deuxième intégrale est majorée par

$$\frac{1}{(N-1)!} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{s}_0^{\beta_0} \tilde{s}_1^{\beta_1} ... \tilde{s}_n^{\beta_n} \cdot e^{-(\tilde{s}_0^2+\tilde{s}_1^2+...+\tilde{s}_n^2)/4(1+a)} d\tilde{s}_0 d\tilde{s}_1 ... d\tilde{s}_n \cdot$$
$$\int_1^{+\infty} C \cdot e^{-t} t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d+|\beta|+n+1} dt < +\infty.$$

Ceci prouve donc la convergence de

$$\int_G |x^\beta E_N * D^\alpha(x)| dx$$

pour $|\alpha| \leq 2N - 2 - d$, c'est-à-dire pour N suffisamment élevé, pour β quelconque.

8.3. Pour N suffisamment élevé, E_N est donc dérivable un certain nombre de fois. Les dérivées admettent la même décroissance à l'infini que les fonctions de Schwartz. En particulier, pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$, $E_N * f \in \mathcal{S}(G)$ et $f * E_N \in \mathcal{S}(G)$. En effet, les dérivations peuvent être toutes mises sur la fonction f. De plus E_N et $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f$ admettent la bonne décroissance à l'infini. D'ailleurs, pour toute fonction g à décroissance rapide et tout $f \in \mathcal{S}(G)$ on a $g * f \in \mathcal{S}(G)$ et $f * g \in \mathcal{S}(G)$ par le même raisonnement.

8.4. Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$

$f * (1+\Delta)^N * E_N = f * E_N * (1+\Delta)^N = f$ pour N suffisamment élevé.

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
& f * E_N * (1+\Delta)^N(x) \\
&= \frac{1}{(N-1)!}\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x)dt \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!}\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x)dt.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
& \|\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x)dt\|_2^2 \\
= \; & \|\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{N-1}[f * (1+\Delta)^N] * h_t(x)dt\|_2^2 \quad \text{par 7.8.} \\
= \; & \int_G \Big|\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{N-1}[f * (1+\Delta)^N] * h_t(x)dt\Big|^2 dx \\
= \; & \int_G \Big|\int_0^\varepsilon [e^{-t}t^{\frac{1}{2}(N-1)}][t^{\frac{1}{2}(N-1)} f * (1+\Delta)^N * h_t(x)]dt\Big|^2 dx \\
\le \; & \int_G \Big[\int_0^\varepsilon e^{-2t}t^{N-1}dt\Big]\cdot\Big[\int_0^\varepsilon t^{N-1}|f * (1+\Delta)^N * h_t(x)|^2 dt\Big]dx \\
\le \; & \varepsilon^N \cdot \int_G \int_0^\varepsilon t^{N-1}|f * (1+\Delta)^N * h_t(\bar{x})|^2 dt\, dx \\
= \; & \varepsilon^N \cdot \int_0^\varepsilon t^{N-1}\|f * (1+\Delta)^N * h_t\|_2^2 dt \\
\le \; & \varepsilon^N \int_0^\varepsilon t^{N-1}\|f * (1+\Delta)^N\|_2^2 dt \\
\le \; & \varepsilon^{2N} \cdot \|f * (1+\Delta)^N\|_2^2.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(N-1)!}\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x)dt = 0$$

dans $L^2(G)$. Il reste à évaluer

$$\frac{1}{(N-1)!}\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * [h_t * \Delta] * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&\quad - \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * \frac{\partial h_t}{\partial t} * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&\quad - \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} \frac{\partial}{\partial t}[f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}](x)dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&\quad - \frac{1}{(N-1)!}[e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} [-e^{-t}t^{N-1} + (N-1)e^{-t}t^{N-2}][f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)]dt \\
&= \frac{1}{(N-2)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-2} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} e^{-\varepsilon}\varepsilon^{N-1} f * h_\varepsilon * (1+\Delta)^{N-1}(x) \\
&= \frac{1}{(N-2)!}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t}t^{N-2} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)dt + F_{N-1}(x,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

en posant $F_{N-1}(x,\varepsilon) = \frac{1}{(N-1)!} e^{-\varepsilon}\varepsilon^{N-1} f * h_\varepsilon * (1+\Delta)^{N-1}(x)$.
En effet

$$
\begin{aligned}
& |e^{-t}t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x)| \\
\leq\ & e^{-t}t^{N-1}\int |f(xy^{-1})| \cdot |h_t * (1+\Delta)^{N-1}(y)|dy \\
\leq\ & C_1 \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1} \cdot t^{-\frac{1}{2}d}\int |f(xy^{-1})| \cdot e^{-\|y\|^2/4(1+a)t}dy \quad \text{pour } t \geq 1 \\
& \hfill \text{par 7.7.} \\
\leq\ & C_1 \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1-\frac{1}{2}d}\int |f(xy^{-1})|dy \quad \text{pour } t \geq 1 \\
\leq\ & C_1 \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1-\frac{1}{2}d}\|f\|_1 \quad \text{pour } t \geq 1
\end{aligned}
$$

avec une nouvelle constante C_1. Donc

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x) = 0$$

pour tout $x \in G$. Montrons encore que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{N-1}(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(N-1)!} e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-1} f * h_\varepsilon * (1+\Delta)^{N-1}(x) = 0$$

dans $L^2(G)$. En effet

$$\begin{aligned} & \left|\left| \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{N-1} f * h_\varepsilon * (1+\Delta)^{N-1} \right|\right|_2 \\ = \; & \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{N-1} ||f * (1+\Delta)^{N-1} * h_\varepsilon||_2 \quad \text{par 7.8.} \\ \leq \; & \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{N-1} ||f * (1+\Delta)^{N-1}||_2 \qquad \text{par 7.8.} \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend bien vers 0 avec ε pour $N-1 \geq 1$. Nos calculs montrent que

$$\begin{aligned} & f * E_N * (1+\Delta)^N(x) \\ = \; & \frac{1}{(N-2)!} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} t^{N-2} f * h_t * (1+\Delta)^{N-1}(x) dt + F_{N-1}(x, \varepsilon) \\ & + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x) dt \\ = \; & \frac{1}{(N-3)!} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} t^{N-3} f * h_t * (1+\Delta)^{N-2}(x) dt + F_{N-2}(x, \varepsilon) \\ & + F_{N-1}(x, \varepsilon) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x) dt \\ = \; & \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t * (1+\Delta)(x) dt + F_1(x, \varepsilon) + F_2(x, \varepsilon) + \ldots + F_{N-2}(x, \varepsilon) \\ & + F_{N-1}(x, \varepsilon) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x) dt. \end{aligned}$$

Tous les termes à l'exception du premier tendent vers 0 dans $L^2(G)$. Montrons finalement que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t * (1+\Delta)(x) dt = f(x)$$

dans $L^2(G)$. En effet

$$\begin{aligned}
& \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t * (1+\Delta)(x)dt \\
= & \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t(x)dt - \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * \frac{\partial h_t}{\partial t}(x)dt \\
= & \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t(x)dt - \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial}{\partial t}[f * h_t(x)]dt \\
= & \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t(x)dt - [e^{-t} f * h_t(x)]_\varepsilon^{+\infty} + \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-t}\right) f * h_t(x)dt \\
= & e^{-\varepsilon} f * h_\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

étant donné que

$$\begin{aligned}
|e^{-t} f * h_t(x)| &= |e^{-t} \int f(xy^{-1}) h_t(y) dy| \\
&\leq e^{-t} \cdot C \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \int |f(xy^{-1})| \cdot e^{-||y||^2/4(1+a)t} dy \\
&\leq C \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \int |f(xy^{-1})| dy \\
&= C \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}d} ||f||_1.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 si t tend vers $+\infty$. Finalement

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||f * h_\varepsilon - f||_2 = 0 \qquad \text{par 7.8.}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon} f * h_\varepsilon = f \qquad \text{dans } L^2(G).$$

Ceci prouve que

$$f * E_N * (1+\Delta)^N = f$$

dans $L^2(G)$, donc dans $\mathcal{S}(G)$ étant donné que les deux membres appartiennent à $\mathcal{S}(G)$. Pour terminer, remarquons que

$$\begin{aligned}
& f * (1+\Delta)^N * E_N(x) \\
= & \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * (1+\Delta)^N * h_t(x) dt \\
= & \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1+\Delta)^N(x) dt \quad \text{par 7.8.} \\
= & f * E_N * (1+\Delta)^N(x) \\
= & f(x).
\end{aligned}$$

8.5. Corollaire : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$

$$E_N * (1+\Delta)^N * f = (1+\Delta)^N * E_N * f = f \quad \text{pour } N \text{ suffisamment élevé.}$$

<u>Démonstration</u> : Soit (φ_ε) une unité approchée dans $\mathcal{S}(G)$. Par 8.4.

$$\varphi_\varepsilon * [E_N * (1+\Delta)^N * f] = [\varphi_\varepsilon * E_N * (1+\Delta)^N] * f = \varphi_\varepsilon * f.$$

D'où, en passant à la limite dans $\mathcal{S}(G)$,

$$E_N * (1+\Delta)^N * f = f.$$

On montre de même que

$$(1+\Delta)^N * E_N * f = f.$$

8.6. Proposition : Soit I un idéal de $\mathcal{S}(G)$ fermé pour la topologie de $\mathcal{S}(G)$, respectivement pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières. Pour toute fonction g à décroissance rapide,

$$f \in I \Rightarrow g * f \in I \quad \text{et} \quad f * g \in I.$$

En particulier,

$$f \in I \Rightarrow E_N * f \in I \quad \text{et} \quad f * E_N \in I \quad \text{pour } N \text{ suffisamment élevé.}$$

<u>Démonstration</u> : Par 8.3. on sait que $g * f \in \mathcal{S}(G)$ et $f * g \in \mathcal{S}(G)$. Soit (φ_ε) une unité approchée. Alors

$$\varphi_\varepsilon * (g * f) = (\varphi_\varepsilon * g) * f \in I$$

puisque $f \in I$ et $\varphi_\varepsilon * g \in \mathcal{S}(G)$ par 8.3. Comme

$$\lim_\varepsilon [\varphi_\varepsilon * (g * f)] = g * f$$

on a $g * f \in I$. De même $f * g$.

9 Actions sur $\mathcal{S}(G)$

9.1. Définitions : a) Soit d une dérivation de g. Définissons $D = \exp d$ sur g par

$$D(X) = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} d^k(X).$$

b) Comme d est une application linéaire sur un espace de dimension finie on peut définir $||d||$ par

$$||d|| = \sup_{||X|| \leq 1} ||d(X)||$$

où $||X||$ désigne la norme euclidienne sur g identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors

$$||D|| \leq \sum_0^\infty \frac{1}{k!} ||d^k|| \leq e^{||d||}.$$

De même on considère $\exp td$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$||\exp td|| \leq e^{||td||} = e^{|t|\,||d||}.$$

c) On fait agir D sur le groupe G par

$$^D(\exp X) = \exp(D(X)) \quad \text{pour tout } X \in \mathrm{g}.$$

Comme d est une dérivation, D définit un homomorphisme de groupe.
d) L'action de D sur $L^1(G)$ est définie par

$$(^D f)(x) = \Delta(D) f(^D x)$$

où $\Delta(D)$ définit une fonction modulaire telle que

$$||^D f||_1 = ||f||_1.$$

En effet l'application

$$f \longmapsto \int f(^D x) dx$$

définit une intégrale de Haar puisque

$$\begin{aligned} \int ({}_a f)(^D x) dx &= \int f(a^{-1}\, ^D x) dx = \int f(^D(^{D^{-1}}(a^{-1}) x)) dx \\ &= \int f(^D x) dx \quad \text{par} \quad x \mapsto {}^{D^{-1}} a \cdot x. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante C telle que

$$\int f(^D x)dx = C \cdot \int f(x)dx, \qquad C > 0.$$

Posons $\Delta(D) = \frac{1}{C}$. D'où

$$\int {}^D f(x)dx = \Delta(D) \int f(^D x)dx = \int f(x)dx.$$

En remplaçant f par $|f|$ on a donc $||^D f||_1 = ||f||_1$.

9.2. Proposition : Si $f \in \mathcal{S}(G)$, alors $^D f \in \mathcal{S}(G)$.

Démonstration :

$$||^D f||_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}^{\sim} = \int \Big| \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}} f\Big(^D (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n))\Big) \Delta(D) \Big| d\tilde{t}_0 \ldots d\tilde{t}_n.$$

Or comme l'action de D sur g est linéaire, il existe une matrice $A(D)$ telle que l'action de D sur g soit donnée par

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}'_0 \\ \vdots \\ \tilde{t}'_n \end{pmatrix} = A(D) \begin{pmatrix} \tilde{t}_0 \\ \vdots \\ \tilde{t}_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\tilde{t}'_j| &\leq ||\tilde{t}'_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}'_n X_n|| \\ &\leq ||A(D)|| \Big(\sum_0^n \tilde{t}_i^2\Big)^{1/2} \\ &\leq e^{||d||} \Big(\sum_0^n \tilde{t}_i^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_j} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'_i} \cdot A(D)_{ij}.$$

On continue de proche en proche pour déterminer $(\frac{\partial}{\partial t})^{\tilde{\alpha}}$.
De plus, $D^{-1} = \exp(-d)$ existe et $A(D^{-1}) = A(D)^{-1}$. D'où

$$|\tilde{t}_j| \leq ||\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n||$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ ||A(D^{-1})||\Big(\sum_0^n \tilde{t}_i'^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \ e^{||d||}\Big(\sum_0^n \tilde{t}_i'^2\Big)^{1/2} \leq e^{||d||}\Big(1+\sum_0^n \tilde{t}_i'^2\Big)
\end{aligned}
$$

car $||-d|| = ||d||$. Remarquons encore que

$$|A(D)_{ij}| \leq ||A(D)|| \leq e^{||d||}$$

et que

$$d\tilde{t}_0 ... d\tilde{t}_n = |\text{dét}\, A(D^{-1})| d\tilde{t}_0' ... d\tilde{t}_n'$$

avec

$$|\text{dét}\, A(D^{-1})| \leq C_1 \cdot e^{(n+1)||d||}$$

puisque $|A(D^{-1})_{ij}| \leq e^{||d||}$ quels que soient i, j. Finalement on trouve une majoration de la forme

$$
\begin{aligned}
||^D f||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \ &\leq \ C \cdot e^{M||d||} \sum_{|\tilde{\gamma}|=|\tilde{\alpha}|} \int \Big| \Big(1+\sum_0^n \tilde{t}_i'^2\Big)^{|\tilde{\beta}|} \Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}'}\Big)^{\tilde{\gamma}} \\
&\qquad\qquad f(\exp(\tilde{t}_0' X_0 + ... + \tilde{t}_n' X_n)) \Big| d\tilde{t}_0' ... d\tilde{t}_n' \\
&\leq \ C \cdot e^{M||d||} |||f|||^{\sim} < +\infty
\end{aligned}
$$

où $|||.|||^{\sim}$ désigne une nouvelle norme de Schwärtz. Donc ${}^D f \in \mathcal{S}(G)$.

9.3. Corollaire : Si $\lim f_\nu = f$ dans $\mathcal{S}(G)$, alors $\lim {}^D f_\nu = {}^D f$ dans $\mathcal{S}(G)$.

9.4. Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ et toute dérivation d fixée, notons

$${}^u f = {}^{\exp ud} f.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\lim_{u \to 0} {}^u f \ &= \ f \\
\lim_{u \to a} {}^u f \ &= \ {}^a f
\end{aligned}
$$

dans $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration : Montrons que

$$\lim_{u\to 0} ||^u f - f||^{\sim}_{\tilde\alpha,\tilde\beta} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} ||^u f - f||^{\sim}_{\tilde\alpha,\tilde\beta} &= \int \Big|\tilde t^{\tilde\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde t}\Big)^{\tilde\alpha}\Big[f\Big({}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))\Big)\Delta(u) \\ &\qquad -f(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))\Big]\Big| d\tilde t_0 \ldots d\tilde t_n. \end{aligned}$$

Par continuité

$$\begin{aligned} \lim_{u\to 0} |\tilde t^{\tilde\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde t}\Big)^{\tilde\alpha}\Big[f\Big({}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))\Big)\Delta(u) \\ - f(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))\Big] = 0 \quad \text{pour tout } \tilde t. \end{aligned}$$

Notons par D_j la dérivée d'une fonction par rapport à la j^{me} coordonnée. Alors

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \tilde t_j} f[{}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))] \\ &= \sum_{k=0}^{n} D_k f[{}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))] \cdot A(u)_{kj} \end{aligned}$$

avec $|A(u)|_{kj} \leq ||A(\exp ud)|| \leq e^{|u|\,||d||}$. Donc

$$\begin{aligned} &\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde t}\Big)^{\tilde\alpha}\Big[f\Big({}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))\Big)\Big]\Big| \\ &\leq C \cdot e^{|\tilde\alpha|\,|u|\,||d||} \sum_{|\tilde\gamma|=|\tilde\alpha|} \Big|(D^{\tilde\gamma} f)\Big({}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))\Big)\Big| \end{aligned}$$

où $D^{\tilde\gamma}$ désigne à nouveau les dérivées de f par rapport aux coordonnées correspondantes, dérivées qui sont ensuite évaluées en ${}^u(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))$. Puisque f est une fonction de Schwartz, il existe C_M, M tels que

$$|D^{\tilde\gamma} f(\exp(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n))| \leq C_M \cdot \Big(\frac{1}{1 + ||(\tilde t_0 X_0 + \ldots + \tilde t_n X_n)||^2}\Big)^M$$

$$\text{pour tout } \tilde\gamma \text{ tel que } |\tilde\gamma| = |\tilde\alpha|.$$

Donc

$$\Big|D^{\tilde\gamma}f\Big({}^{u}(\exp(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n))\Big)\Big|\leq C_M\cdot\Big(\frac{1}{1+||A(u)(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n)||^2}\Big)^M.$$

Remarquons que $A(u)=\mathrm{Id}+B(u)$ avec $\lim_{u\to 0}||B(u)||=0$, puisque $A(u)$ est la matrice de $\exp(ud)=\sum_0^\infty\frac{1}{k!}u^kd^k$ et

$$||B(u)||=\Big|\Big|\sum_1^\infty\frac{1}{k!}u^kd^k\Big|\Big|\leq\sum_1^\infty\frac{1}{k!}|u|^k||d||^k=e^{|u|\,||d||}-1.$$

Pour $\varepsilon>0$, il existe donc ζ tel que

$$\begin{aligned}
|u|<\zeta \;&\Rightarrow\; ||B(u)||\leq\varepsilon\\
&\Rightarrow\; ||B(u)(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n)||\leq\varepsilon||\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n||\\
&\Rightarrow\; ||A(u)(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n)||\\
&\qquad\geq\Big|||\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n||-||B(u)(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n)||\Big|\\
&\qquad\quad\geq(1-\varepsilon)||\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n||.
\end{aligned}$$

De plus, par continuité de $\Delta(u)$,

$$|u|<\zeta\Rightarrow|\Delta(u)|\leq C_1.$$

Soit en plus N le nombre de $\tilde\gamma$ tels que $|\tilde\gamma|=|\tilde\alpha|$. Alors

$$\begin{aligned}
&\Big|\tilde t^{\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial\tilde t}\Big)^{\tilde\alpha}[f(\exp(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n)^u)\Delta(u)-f(\exp(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n)]\Big|\\
\leq\;& C\cdot C_1\cdot C_M\cdot N\cdot e^{|\tilde\alpha|\zeta||d||}\Big(\frac{1}{1+(1-\varepsilon)^2||\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n||^2}\Big)^M\cdot|\tilde t^{\beta}|\\
&+\Big|\tilde t^{\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial\tilde t}\Big)^{\tilde\alpha}f(\exp(\tilde t_0X_0+\ldots+\tilde t_nX_n))\Big|
\end{aligned}$$

ce qui représente une fonction intégrable pour M suffisamment grand. Le théorème de Lebesgue permet alors de conclure que

$$\lim_{u\to 0}||{}^uf-f||^{\sim}_{\tilde\alpha,\tilde\beta}=0.$$

Puisque les normes $||.||^{\sim}_{\tilde\alpha,\tilde\beta}$ engendrent la topologie de $\mathcal{S}(G)$, on a la même limite dans $\mathcal{S}(G)$.

La deuxième limite se calcule par

$$\lim_{u\to a}{}^uf=\lim_{u\to a}{}^{(u-a)}[{}^af]=\lim_{v\to 0}{}^v[{}^af]={}^af.$$

9.5. Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ et toute dérivation d

$$\lim_{(u,b)\to(t,a)} {}^{u}({}_{b}f) = {}^{t}({}_{a}f)$$

dans $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières. Ici ${}^{u}({}_{b}f)$ signifie

$$\begin{aligned} {}^{u}({}_{b}f)(x) &= ({}_{b}f)({}^{u}x)\Delta(u) \\ &= f(b^{-1}\,{}^{u}x)\Delta(u) \end{aligned}$$

avec $u \in \mathbb{R}$, $b \in G$.

<u>Démonstration</u> : Par 4.6. et 9.4.

9.6. De même

$$\lim_{(u,b)\to(t,a)} {}^{u}(f_b) = {}^{t}(f_a).$$

9.7. D'ailleurs, si $d_1, d_2, ..., d_k$ sont différentes dérivations,

$$\lim_{\substack{(u_1,...,u_k,b)\\ \to(t_1,...,t_k,a)}} {}^{\exp u_1 d_1 \cdot \exp u_2 d_2 ... \exp u_k d_k}(f_b) = {}^{\exp t_1 d_1 ... \exp t_k d_k}(f_a)$$

dans $\mathcal{S}(G)$, donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

9.8. Définition : a) Soit H un sous-groupe de G. Considérons l'ensemble des fonctions

$$\alpha : \mathbb{R}^k \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(s_1, ..., s_k; b) \longmapsto \alpha(s_1, ..., s_k; b)$$

telles que quels que soient $a_1, ..., a_k$ dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$(s_1, ..., s_k; b) \longmapsto e^{a_1 s_1 + ... + a_k s_k}\alpha(s_1, ..., s_k; b)$$

soit une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}^k \times H$. Notons l'ensemble de ces fonctions par $E\mathcal{S}(\mathbb{R}^k \times H)$.

b) Soient $d_1, ..., d_k$ des dérivations de g. Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ définissons $\alpha(f)$ par

$$\alpha(f)(x) = \int_H \int_{\mathbb{R}^k} {}^{\exp s_1 d_1 ... \exp s_k d_k}(f_b)(x)\alpha(s_1, ..., s_k; b) ds_1 ... ds_k db.$$

9.9. Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$, $\alpha(f) \in \mathcal{S}(G)$. Pour toute semi-norme de Schwartz $|||.|||$ sur $\mathcal{S}(G)$, il existe une semi-norme de Schwartz $|||.|||^{\sim}$ sur $\mathcal{S}(G)$ et une semi-norme $|||.|||^{\approx}$ sur $E\mathcal{S}(\mathbb{R}^k \times H)$ telles que

$$|||\alpha(f)||| \leq |||\alpha|||^{\approx} \cdot |||f|||^{\sim}.$$

Démonstration : Nous pouvons supposer que $|||.|||$ est de la forme $|||.|||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$, puisque toute semi-norme de Schwartz est majorée par une combinaison linéaire de telles semi-normes. Donc

$$\begin{aligned}
|||\alpha(f)||| &= \int \Big|\tilde{t}^{\tilde{\beta}}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}} \alpha(f)(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n))\Big| d\tilde{t}_0 \ldots d\tilde{t}_n \\
&\leq \int\int_H \int_{\mathbb{R}^k} \Big|\alpha(s_1, \ldots, s_k; b)\tilde{t}^{\tilde{\beta}}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}} \\
&\qquad {}^{\exp s_1 d_1 \ldots \exp s_k d_k}(f_b)(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n))\Big| ds_1 \ldots ds_k db\, d\tilde{t}_0 \ldots d\tilde{t}_n \\
&= \int\int_H \int_{\mathbb{R}^k} \Big|\alpha(s_1, \ldots, s_k; b)\tilde{t}^{\tilde{\beta}}\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}}(f_b)\Big[{}^{\exp s_1 d_1 \ldots \exp s_k d_k}\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \\
&\qquad \ldots + \tilde{t}_n X_n)\Big]\Big|\Delta_1(s_1) \ldots \Delta_k(s_k) ds_1 \ldots ds_k db\, d\tilde{t}_0 \ldots d\tilde{t}_n
\end{aligned}$$

en notant $\Delta_i(s_i) = \Delta(\exp s_i d_i)$. Effectuons à présent la même évaluation de $(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}})^{\tilde{\alpha}}$ qu'en 9.2. en considérant successivement les actions de $\exp s_1 d_1, \ldots,$ $\exp s_k d_k$. On trouve une majoration de la forme

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\Big)^{\tilde{\alpha}}(f_b)[{}^{\exp s_1 d_1 \ldots \exp s_k d_k}\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n)]\Big| \\
&\leq C_1 \cdot e^{|\alpha|(|s_1|\,||d_1||+\ldots+|s_k|\,||d_k||)} \\
&\quad \cdot \sum_{|\tilde{\gamma}|=|\tilde{\alpha}|} \Big|D^{\tilde{\gamma}}(f_b)[{}^{\exp s_1 d_1 \ldots \exp s_k d_k}\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n)]\Big|
\end{aligned}$$

où $D^{\tilde{\gamma}}$ désigne simplement les dérivées par rapport aux coordonnées correspondantes de la fonction f_b. Introduisons cette expression dans la majoration de $|||\alpha(f)|||$ et effectuons le changement de coordonnées

$$\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n) \longmapsto {}^{\exp(-s_k d_k) \ldots \exp(-s_1 d_1)}\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n) .$$

Les majorations des nouvelles coordonnées calculées en 9.2. montrent que lors de ce changement de coordonnées l'ancienne expression $|\tilde{t}^{\tilde{\beta}}|$ admet une majoration de la forme

$$e^{|\tilde{\beta}|(|s_1|\,||d_1||+\ldots+|s_k|\,||d_k||)} \cdot (1 + ||\tilde{t}||^2)^{|\tilde{\beta}|}.$$

Le jacobien du changement de coordonnées est lui aussi majoré par

$$C_2 \cdot e^{(n+1)(|s_1|\,||d_1||+\ldots+|s_k|\,||d_k||)}.$$

Finalement, il existe des entiers positifs $M_1, ..., M_k$ tels que

$$\begin{aligned}
|||\alpha(f)||| &\leq C \int_H \int_{\mathbb{R}^k} |\alpha(s_1, ..., s_k; b) e^{M_1|s_1|+\ldots+M_k|s_k|} \cdot \\
&\qquad \Big(\sum_{|\tilde{\gamma}|=|\tilde{\alpha}|} \int |(1+||\tilde{t}||^2)^{|\tilde{\beta}|} \cdot D^{\tilde{\gamma}}(f_b)(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \ldots + \tilde{t}_n X_n)| \\
&\qquad\qquad d\tilde{t}_0 ... d\tilde{t}_n \Big) ds_1 ... ds_k \cdot db \\
&= \int_H \int_{\mathbb{R}^k} \Big| \alpha(s_1, ..., s_k; b) e^{M_1|s_1|+\ldots+M_k|s_k|} |||f_b|||_1 \Big| ds_1 ... ds_k \cdot db
\end{aligned}$$

où $|||.|||_1$ désigne une nouvelle semi-norme de Schwartz. Puisque toute semi-norme de Schwartz est majorée par une semi-norme ${}_N q$, il existe N tel que

$$\begin{aligned}
|||f_b|||_1 &\leq {}_N q(f_b) \\
&\leq \omega^N(b^{-1})\, {}_N q(f) \\
&= \omega^N(b)\, {}_N q(f).
\end{aligned}$$

En effet, remarquons que le voisinage U utilisé dans la définition de τ et ω est symétrique. Donc $\tau(b^{-1}) = \tau(b)$ et $\omega(b^{-1}) = \omega(b)$. D'où

$$\begin{aligned}
|||\alpha(f)||| &\leq \Big(\int_H \int_{\mathbb{R}^k} |\alpha(s_1, ..., s_k; b) e^{M_1|s_1|+\ldots+M_k|s_k|} \omega^N(b)| \\
&\qquad ds_1 ... ds_k \cdot db \Big) \cdot {}_N q(f) \\
&= |||\alpha|||^{\approx} \cdot {}_N q(f)
\end{aligned}$$

par définition de $|||.|||^{\approx}$. En effet remarquons que $\omega^N(b)$ est majoré par un polynôme et que $|||\alpha|||^{\approx} < +\infty$ vu les hypothèses sur α. Ceci achève la démonstration au cas où $|||.||| = |||.|||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$. Si $|||.|||$ est majoré par une combinaison linéaire de $|||.|||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$, on refait le même raisonnement pour chaque $|||.|||^{\sim}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ et on prend N suffisamment élevé de manière à majorer toutes les semi-normes $|||.|||_1$ obtenues. Cela permet alors de déterminer $|||.|||^{\approx}$, en prenant pour $M_1, ..., M_k$ les plus grands coefficients obtenus.

9.10. Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$, $\alpha \in E\mathcal{S}(\mathbb{R}^k \times H)$

$$\alpha(f) \in \overline{\langle {}^{\exp s_1 d_1 \ldots \exp s_k d_k}(f_b) | (s_1, \ldots, s_k; b) \in \mathbb{R}^k \times H \rangle}$$

sous-espace vectoriel fermé engendré par les ${}^{\exp s_1 d_1 \ldots \exp s_k d_k}(f_b)$, la topologie considérée étant soit la topologie de $\mathcal{S}(G)$, soit la topologie engendrée par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

<u>Démonstration</u> : Afin de simplifier les notations, supposons $k = 1$. La démonstration générale se fait exactement selon la même méthode. D'après les calculs effectués en 9.9., on sait que

$$\begin{aligned} |||\alpha(f)||| &\leq \int_H \int_{\mathbb{R}} |||{}^{s}(f_b)||| \cdot |\alpha(s,b)| ds\, db \\ &\leq |||f|||^{\sim} \cdot C \cdot \int_H \int_{\mathbb{R}} |\alpha(s,b)| e^{M|s|} \omega^N(b) ds\, db. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe un compact K de $\mathbb{R} \times H$ de la forme $K_1 \times K_2$ avec K_1 compact de $\mathbb{R}$ et K_2 compact de H, tel que

$$\int \int_{(s,b) \notin K} |\alpha(s,b)| e^{M|s|} \omega^N(b) ds\, db < \frac{\varepsilon}{2|||f|||^{\sim} \cdot C}.$$

Ensuite on peut recouvrir K par un nombre fini d'ensembles mesurables disjoints $S_i \times B_j$ et choisir $(s_i, b_j) \in S_i \times B_j$ tels que

$$\begin{aligned} & |||\alpha(f) - \sum_{i,j} \alpha(s_i, b_j)\, {}^{s_i}(f_{b_j}) \mathrm{mes}(S_i \times B_j)||| \\ = \; & |||\int \int_{(s,b) \notin K} \alpha(s,b)\, {}^{s}(f_b) ds\, db + \int \int_K \alpha(s,b)\, {}^{s}(f_b) ds\, db \\ & \qquad - \sum_{i,j} \int \int_{S_i \times B_j} \alpha(s_i, b_j)\, {}^{s_i}(f_{b_j}) ds\, db||| \\ \leq \; & |||\int \int_{(s,b) \notin K} \alpha(s,b)\, {}^{s}(f_b) ds\, db||| \\ & \qquad + \sum_{i,j} |||\int \int_{S_i \times B_j} [\alpha(s,b)\, {}^{s}(f_b) - \alpha(s_i, b_j)\, {}^{s_i}(f_{b_j})] ds\, db||| \\ \leq \; & \int \int_{(s,b) \notin K} |\alpha(s,b)|\, |||{}^{s}(f_b)||| ds\, db \\ & \qquad + \sum_{i,j} \int \int_{S_i \times B_j} |||\alpha(s,b)\, {}^{s}(f_b) - \alpha(s_i, b_j)\, {}^{s_i}(f_{b_j})||| ds\, db \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; C\cdot |||f|||^{\sim}\cdot \int\int_{(s,b)\notin K} |\alpha(s,b)| e^{M|s|}\omega^{N}(b)ds\, db \\
&\qquad + \sum_{i,j}\int\int_{S_i\times B_j} |||\alpha(s,b)\,{}^{s}(f_b) - \alpha(s_i,b_j)\,{}^{s_i}(f_{b_j})|||ds\, db \\
&< \; \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ceci résulte de la continuité de l'application ([6], ex. 23 p. 85)

$$(s,b) \longmapsto \alpha(s,b)\,{}^{s}(f_b)$$

sur le compact K. Puisqu'une telle approximation est possible dans toute semi-norme de Schwartz et qu'un nombre fini de semi-normes peuvent toujours être majorées par une semi-norme unique, on a le résultat.

9.11. Définition : On dit qu'un idéal I est invariant pour l'action de $d_1, ..., d_k$ si et seulement si

$$f \in I, s_1, ..., s_k \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^{\exp s_1 d_1 ... \exp s_k d_k} f \in I.$$

D'ailleurs dans ce cas on a même ${}^{\exp s_1 d_1 ... \exp s_k d_k}(f_b) \in I$ si I est fermé, étant donné que tout idéal fermé est invariant par translations.

9.12. Proposition : Soit I un idéal fermé (dans $\mathcal{S}(G)$, resp. dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes particulières), invariant par l'action de $d_1, ..., d_k$. Alors

$$f \in I, \alpha \in E\mathcal{S}(\mathbb{R}^k \times H) \Rightarrow \alpha(f) \in I.$$

Démonstration : Par 9.9. puisque, par hypothèse,

$$\overline{\langle {}^{\exp s_1 d_1 ... \exp s_k d_k}(f_b) | (s_1, ..., s_k; b) \in \mathbb{R}^k \times H \rangle} \subset I.$$

9.13. Exemple : a) Soit H un groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{h}$. Soit $\mathbf{g} = \mathbf{n}$ le radical nilpotent de $\mathbf{h}$ et soit $G = \exp \mathbf{g}$. Alors G est un groupe de Lie nilpotent, sous-groupe normal de H. Le groupe H agit sur G et sur $\mathcal{S}(G)$ par : Pour $E \in \mathbf{h}$, $X \in \mathbf{g}$ on définit

$$
\begin{aligned}
E(X) &= [E,X] \qquad \text{crochet de Lie dans } \mathbf{h} \\
(\exp E)(X) &= \sum_0^\infty \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}_{\mathbf{g}} E)^k(X)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} x = \exp X \in G \Rightarrow {}^{(\exp E)}x &= \exp[(\exp E)(X)] \\ &= (\exp E) \cdot x \cdot (\exp E)^{-1} \\ &= (\exp E) \cdot x \cdot (\exp(-E)). \end{aligned}$$

D'où l'action correspondante sur $\mathcal{S}(G)$.

b) L'étude d'actions sur un groupe nilpotent peut être utile dans le but suivant : Les propriétés des groupes nilpotents, de leurs algèbres $L^1(G)$ et $\mathcal{S}(G)$, de leurs représentations irréductibles commencent à être bien connues. Avant de passer à l'étude de ces propriétés sur une classe de groupes plus grande, comme par exemple la classe des groupes exponentiels, on a parfois intérêt à passer par l'étape intermédiaire des groupes nilpotents soumis à l'action d'un groupe plus vaste.

9.14. Application de la construction $\alpha(f)$: a) Cette construction peut être utile dans certaines démonstrations par récurrence. A titre d'exemple, soit G un groupe nilpotent, soit z un élément central de g, soit d une dérivation telle que $d(z) = z$. Définissons

$$^{t}f = {}^{(\exp td)}f \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}^2(x,t) = \int_{\mathbb{R}} {}^{t}f(x \exp rz) e^{ir} dr.$$

On montre facilement que $\tilde{f}^2(x \exp az, t) = e^{-ia} \tilde{f}^2(x,t)$ et que $\tilde{f}^2$ est une fonction de Schwartz en $x \in G/\exp \mathbb{R}z = \tilde{G}$.

b) La construction de $\alpha(f)$ permet, dans certains cas, de séparer les variables dans $\tilde{f}^2(x,t)$. En effet on montre facilement que

$$\widetilde{\alpha(f)}^2(x,t) = \int \tilde{f}^2(x,s) \hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) ds.$$

Soient alors $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi \in E\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et montrons qu'il existe $\alpha \in E\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) = \psi(t)\varphi(s) \\ \Longleftrightarrow \quad & \hat{\alpha}^2(u, -e^{-s}) = \psi(s-u)\varphi(s). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre par exemple

$$\hat{\alpha}^2(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{pour } v \geq 0 \\ \psi(-\ell n(-v) - u)\varphi(-\ell n(-v)) & \text{pour } v < 0. \end{cases}$$

Puisque φ est à support compact et que $\psi \in E\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{\alpha}^2 \in E\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On détermine alors α par transformée de Fourier inverse, c'est-à-dire

$$\alpha(u,w) = \int_{-\infty}^{0} \psi(-\ell n(-v) - u)\varphi(-\ell n(-v))e^{-iwv}dv$$

et $\alpha \in E\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Pour une telle fonction α,

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha(f)}^2(x,t) &= \psi(t)\int \tilde{f}^2(x,s)\varphi(s)ds \\ &= \psi(t)f_1(x)\end{aligned}$$

ce qui donne la séparation des variables en question.
c) Finalement

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha[\alpha(f)]}^2(x,t) &= \psi(t)\int \widetilde{\alpha(f)}^2(x,s)\varphi(s)ds \\ &= \psi(t)\int \psi(s)\int \tilde{f}^2(x,u)\varphi(u)du\,\varphi(s)ds \\ &= \psi(t)\Big(\int \psi(s)\varphi(s)ds\Big)\int \tilde{f}^2(x,u)\varphi(u)du \\ &= \psi(t)f_1(x) \\ &= \widetilde{\alpha(f)}^2(x,t)\end{aligned}$$

à condition de choisir φ et ψ tels que $\int \psi(s)\varphi(s)ds = 1$. Donc $\widetilde{\alpha[\alpha(f)]}^2 = \widetilde{\alpha(f)}^2$, c'est-à-dire modulo la transformation $f \mapsto \tilde{f}^2$, α a les propriétés d'un projecteur.
d) On peut faire des constructions analogues dans d'autres cas.

Bibliographie

[1] J. Dixmier, Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires, Publ. Math. IHES (1960), 305-317.

[2] G.B. Folland and E.M. Stein, Hardy Spaces on Homogeneous Groups, Mathematical Notes 28, Princeton University Press, Princeton (1982).

[3] J. Ludwig, Minimal C^*-Dense Ideals and Algebraically Irreducible Representations of the Schwartz-Algebra of a Nilpotent Lie group, Harmonic Analysis, Springer-Verlag (1987), 209-217.

[4] J. Ludwig, Les Semi-groupes de Mesures sur les Groupes de Lie, Travaux mathématiques II, Publications du Centre Universitaire de Luxembourg (1990), 1-20.

[5] G. Rosenbaum und J. Samuel, Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie'scher Gruppen, Diplomarbeit, Bielefeld (1982).

[6] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw-Hill Book Company (1973).

[7] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris (1973).

[8] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, Analysis and Geometry on Groups, Cambridge University Press (1992).

[9] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag (1971).

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg