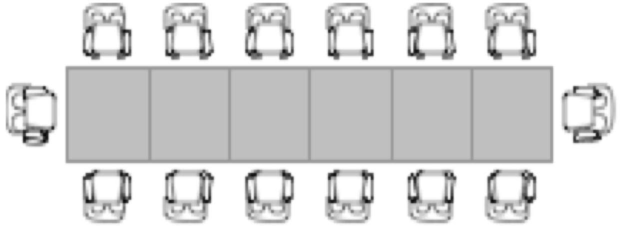
# Développer la pensée algébrique des élèves de 10 à 14 ans : Regard croisé des enseignants du primaire et du secondaire



Joëlle Vlassis & Sylvie Gamo
Université du Luxembourg

Webinaire OIPA – 5 février 2020

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

# Objectif

Présenter les principaux résultats d'un questionnaire soumis à :
- des enseignants du primaire
- des professeurs de mathématiques du secondaire

visant à collecter ...

- leurs croyances à propos des mathématiques et de leur apprentissage;
- **les attentes respectives à propos de la transition arithmétique-algèbre;**
- **leurs connaissances pour enseigner « la pensée algébrique »**

Les analyses viseront à confronter les points de vue des enseignants des deux niveaux scolaires en matière de pensée algébrique à la transition primaire-secondaire.

# Early algebra et pensée algébrique

- Années 70-80 : **Rupture** entre l'arithmétique du primaire et l'algèbre du secondaire
  → Identifier et analyser les difficultés des élèves en algèbre au début du secondaire.
  → Comment aider les élèves du début de l'enseignement secondaire à surmonter les obstacles entre l'arithmétique et l'algèbre?

- Depuis la fin des années 90 : **Continuité** dans les apprentissages numériques relevant de l'arithmétique et de l'algébrique.
  → Courant de recherche « Early Algebra »
  → Développer une « pensée algébrique » chez les élèves dès l'école primaire

(Demonty, 2017; Kieran, 1992, 2007)

# Early algebra et pensée algébrique

## Early algebra

- Ce n’est pas introduire précocement l’algèbre du secondaire,
- mais, offrir des opportunités pour enrichir, dès l’école primaire, la compréhension de concepts comme le sens des opérations ou de l’égalité, eux-mêmes liés au développement d’une « pensée algébrique » (Carraher & Schliemann, 2007).

## Pensée algébrique

La « pensée algébrique » relève non pas de l’utilisation du symbolisme algébrique formel mais d’une manière particulière de penser :

1. Vision relationnelle de l’arithmétique (Carpenter, et al., 2005)

   → sens des opérations

   → sens de l’égalité

   ex : $47 + 5 = ? + 9$

2. Présence d’une indéterminée (Radford, 2014 et 2018)

# Early algebra et pensée algébrique

**Présence d'une indéterminée et pensée algébrique** (Radford, 2014 et 2018) :

Historiquement, l'algèbre est apparue lorsqu'on a commencé à réaliser des opérations impliquant des quantités indéterminées

Cette capacité à **effectuer des opérations sur des quantités indéterminées est donc une caractéristique essentielle de l'algèbre**. Selon Radford, les caractéristiques de la pensée algébrique en relation avec l'indéterminée sont les suivantes :

- **l'indétermination** : capacité à **résoudre des problèmes** qui impliquent des nombres inconnus ;
- **la dénotation** : parvenir à **nommer ou symboliser ces nombres inconnus**. Cette dénotation peut se faire de différentes manières, à l'aide du code alphanumérique, mais aussi du langage naturel, de gestes ou de signes non conventionnels ;
- **le raisonnement analytique** : **traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues**, et à parvenir à réaliser des opérations sur ces nombres inconnus.

# La pensée algébrique dans le contexte luxembourgeois

**Au Luxembourg, dans les curricula du primaire et du secondaire, pas d'injonctions à :**

- **développer une transition arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire**
- **travailler une pensée algébrique au primaire**

Au primaire, dans le plan d'étude (2011) :

- « La commutativité, l'associativité, la distributivité dans le contexte du calcul mental pour effectuer les calculs de manière efficace
- Sens de la relation de l'égalité et de l'équivalence sauf ... en 5$^{e}$ et 6$^{e}$ années primaires
- Résoudre des équations comportant un nombre inconnu » (mais pas en socle de base)

Au secondaire, dans les socles de compétences (2006) :

- « Appliquer des règles pour simplifier un calcul mental ou écrit
- Reconnaître et formuler des règles et des propriétés dans des exemples numériques
- Transformer des formules (exemples : $V=a^3$, $A=½\cdot b\cdot h$) en travaillant à rebours, pour résoudre des problèmes d'application simples ».

# Connaissances pour enseigner l'algèbre

- Développer efficacement la pensée algébrique au primaire et au secondaire requiert de la **part des enseignants, tant du primaire que du secondaire**, de disposer de « **connaissances pour enseigner »** adéquates.

- Or, actuellement, il existe peu de recherche concernant :
  - les connaissances spécifiques pour enseigner l'algèbre ...
  - chez les enseignants du primaire ET du secondaire

- Les connaissances pour enseigner ont été définies initialement par Schulman (1987**)** **(PCK - Pedagogical Content Knowledge)** puis adaptées aux mathématiques notamment par Hill, Ball et Schillings (2008) **(mathematical content knowledge for teaching)** qui ont proposé un modèle sur lequel nous nous basons dans cette étude .

# Connaissances pour enseigner les mathématiques en général

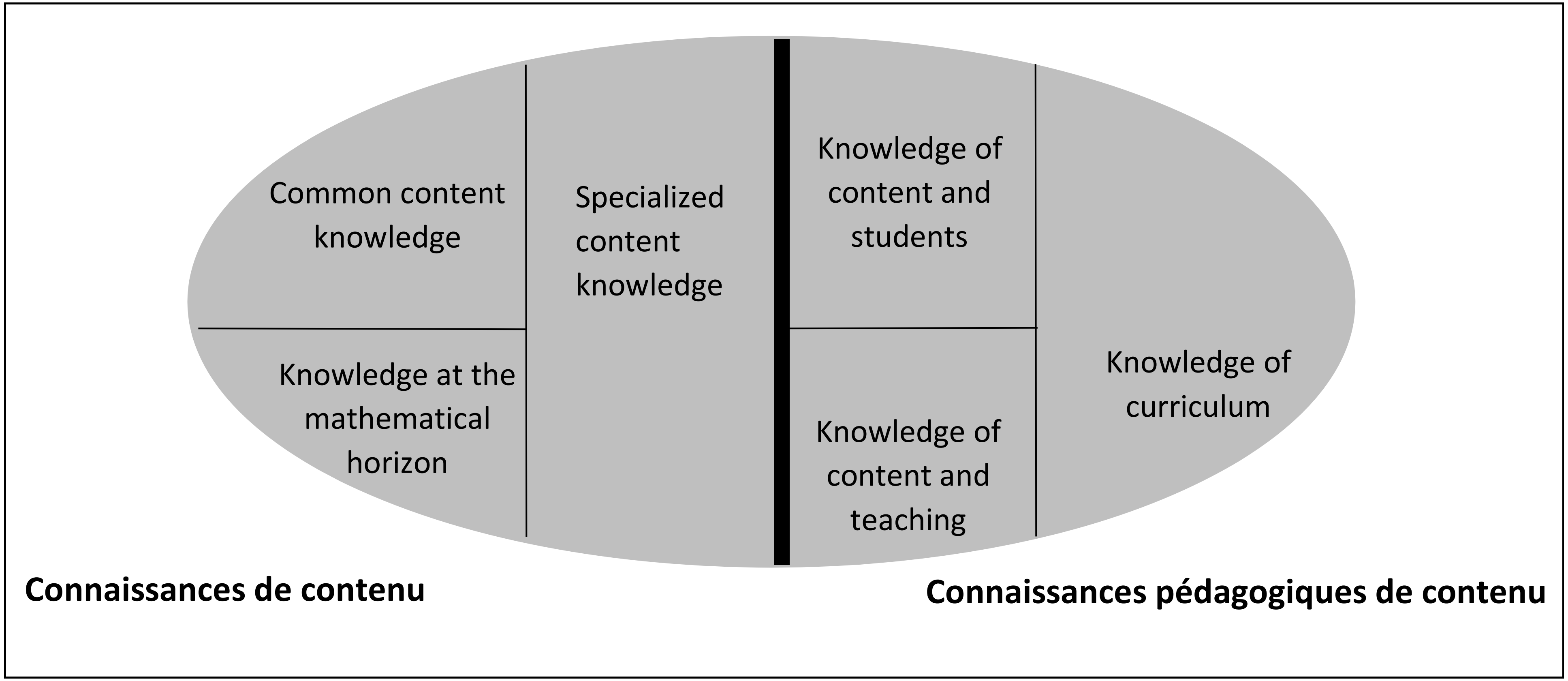



**Figure 1** : Les différentes facettes des connaissances pour enseigner

**Mathematical content knowledge for teaching**
Modèle de Hill, Ball, et Schillings (2008)

# Connaissances pour enseigner l'algèbre

Les quelques recherches concernant les connaissances pour enseigner l'algèbre de la part d'enseignants du primaire et du secondaire montrent que:

- **Les enseignants du primaire** présenteraient un sens limité des enjeux algébriques des activités qu'ils proposent en classe et, tout en semblant comprendre la pensée et les erreurs des élèves, rencontreraient des difficultés à en expliquer les causes et à proposer des étayages efficaces (Chick et Harris, 2007 ; Tanisli & Kose, 2013).
- **Les enseignants du secondaire**, tout en maîtrisant le contenu, manqueraient de connaissances pédagogiques. Ils seraient peu ouverts à la variété des démarches et proposeraient peu d'aides potentiellement efficaces face aux erreurs des élèves (Demonty, Vlassis & Fagnant, 2018).

# Connaissances pour enseigner l’algèbre

- Des limitations dans les connaissances de contenus et dans les PCK,

  ⇒ croyances des enseignants ainsi que leurs actions pédagogiques en classe (Nathan et Koedinger, 2000, in Kieran 2007).

- Une solide connaissance des contenus en algèbre ,

  ⇒ risque, en l’absence d’un PCK développé, de baser les décisions pédagogiques sur la structure d’un domaine mathématique plutôt que sur la manière de penser des élèves : expert blind spot effect (Nathan et Petrosino, 2003, in Kieran 2007).

  ⇒ fossé entre les difficultés réelles des élèves et les prédictions des enseignants (Nathan et Koedinger, 2000, in Kieran 2007; Hadjidemetriou et Williams, 2002, in Kieran 2007; )

# METHODOLOGIE

# Une étude exploratoire

- Questionnaire visant à collecter
  - les croyances : nature /apprentissage des mathématiques
  **- les attentes**
  **- les connaissances pour enseigner la pensée algébrique**
- Questionnaire en ligne destiné aux enseignants du primaire et du secondaire
  → Items fermés : QCM
  → Questions ouvertes
- Echantillon :

| | **Primaire** | **Secondaire** |
|---|---|---|
| **Entrée dans le questionnaire** | 41 | 97 |
| **1ères questions** | 27 | 80 |
| **Fin du questionnaire** | 8 | 28 |

- Les enseignants ont soit été contactés personnellement, soit contactés via certains responsables du Ministère de l'Education.
- La problématique de « l'early algebra » ne figure pas dans les curricula du primaire et du secondaire.

# Mesure des attentes

**Quels sont, selon vous, les exercices que les élèves du primaire doivent pouvoir effectuer pour entrer plus facilement dans l'apprentissage de l'algèbre au début du secondaire ?**

**Compléter selon votre degré d'accord avec l'exercice proposé**

| Pas du tout d'accord | Pas d'accord | Plutôt en désaccord | Plutôt d'accord | D'accord | Tout à fait d'accord |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**En tout, 9 exercices étaient proposés:**

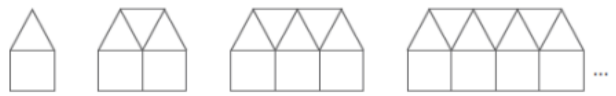
- 6 informels

## Exemples

Compléter une égalité comme la suivante:
8 + 4 = ? + 5

**Répondre aux questions de la situation suivante :**

Observe cette suite de figures composées de carrés et de triangles:



a) Détermine le nombre de triangles de la figure composée de 7 carrés.

b) Propose un message qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

c) Propose une formule qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

# Mesure des attentes

**Quels sont, selon vous, les exercices que les élèves du primaire doivent pouvoir effectuer pour entrer plus facilement dans l'apprentissage de l'algèbre au début du secondaire ?**

**Compléter selon votre degré d'accord avec l'exercice proposé**

| Pas du tout d'accord | Pas d'accord | Plutôt en désaccord | Plutôt d'accord | D'accord | Tout à fait d'accord |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**En tout, 9 exercices étaient proposés:**

- **6 informels**
- **3 formels (avec symbolisme formel)**

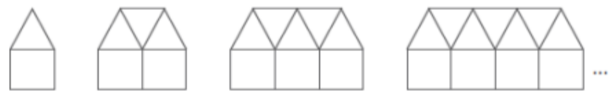
## Exemples

Compléter une égalité comme la suivante:
8 + 4 = ? + 5

Résoudre une équation simple

**Répondre aux questions de la situation suivante :**

Observe cette suite de figures composées de carrés et de triangles:



a) Détermine le nombre de triangles de la figure composée de 7 carrés.

b) Propose un message qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

c) Propose une formule qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

# Mesure des attentes

**Quels sont, selon vous, les exercices que les élèves du primaire doivent pouvoir effectuer pour entrer plus facilement dans l'apprentissage de l'algèbre au début du secondaire ?**

**Compléter selon votre degré d'accord avec l'exercice proposé**

| Pas du tout d'accord | Pas d'accord | Plutôt en désaccord | Plutôt d'accord | D'accord | Tout à fait d'accord |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**En tout, 9 exercices étaient proposés:**
- 6 informels
- 3 formels (avec symbolisme formel)
- 1 affirmation

## Exemples

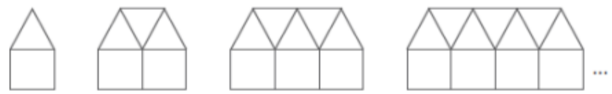
Compléter une égalité comme la suivante:
8 + 4 = ? + 5

Aucun exercice particulier, l'algèbre ne commence qu'au secondaire

Résoudre une équation simple

**Répondre aux questions de la situation suivante :**

Observe cette suite de figures composées de carrés et de triangles:



a) Détermine le nombre de triangles de la figure composée de 7 carrés.

b) Propose un message qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

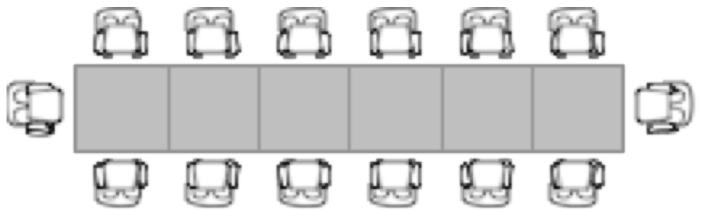
c) Propose une formule qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

# Mesure des connaissances pour enseigner

## Questionnaire structuré autour de 3 types d'activités au coeur de la pensée algébrique :

### 1. Activité de généralisation basée sur des patterns linéaires

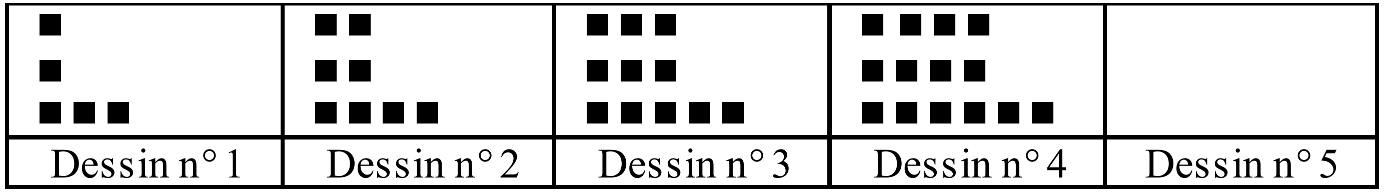
Les parents du petit Jules organisent une fête pour son anniversaire. Ils contactent Monsieur Boulèfrite, le traiteur. Celui-ci dispose de petites tables carrées. Il propose de les placer l'une à côté de l'autre pour en faire une grande table où les invités seront installés selon le modèle suivant :



Écris une règle qui permet de trouver le nombre de chaises, quel que soit le nombre de tables que l'on a.

(Demonty & Vlassis , 2018; Radford, 2008)

Voici une suite de carrés :




a) Continue la suite .... Combien de carrés y aura-t-il au dessin n°5?
b) Trouve une règle pour déterminer le nombre de carrés quel que soit le numéro du dessin.

# Mesure des connaissances pour enseigner

## 2. Activité relative au calcul mental : La calculatrice défectueuse (Demonty & Vlassis, 2018)

Tu dois effectuer une série de calculs, mais la calculatrice ne fonctionne plus
Il y a chaque fois une touche qui ne fonctionne pas.
Trouve un autre calcul que tu puisses encoder pour obtenir le même résultat !
Explique comment tu fais. Écris ta démarche.

| 137 + 66 = | 843 - 79 = |
|---|---|
|  |  |

## 3. Résoudre un problème de partages inégaux (Demonty & Vlassis, 2018)

**Problème des boites de bonbons**

Trois boites contiennent des bonbons. La deuxième boite contient 5 bonbons de plus que la première boite et la troisième boite contient 7 bonbons de plus que la première boite. En tout, il y a 24 bonbons. Combien de bonbons contient chacune des boites ?

# Mesure des connaissances pour enseigner

1. Juger de l'intérêt de la situation pour le primaire? pour le secondaire ?

   (Mathematical knowledge of content and Teaching)

2. Commenter ou noter des productions d'élèves :

   2.1 Les productions sont-elles correctes?

   2.2 Quelle note (/10) attribuer à des productions d'élèves?

   2.3 Les productions sont-elles algébriques?

   (Mathematical knowledge of content and students et Common Content knowledge)

3. Décrire les difficultés potentielles des questions posées dans les activités

   (Mathematical knowledge of content and students)

# Questions de recherche

QR1 - Quelles sont les **attentes** des enseignants du primaire et du secondaire à propos de la transition arithmétique-algèbre?

Observe-t-on une **différence** chez les enseignants des deux niveaux?

QR2 - Quelles sont les **connaissances pour enseigner** des enseignants du primaire et du secondaire à propos de la pensée algébrique?

Observe-ton une **différence** chez les enseignants des deux niveaux?

# RÉSULTATS

# LES ATTENTES DES ENSEIGNANTS

# 1. Le point de vue des enseignants à propos des exercices n’impliquant aucun symbolisme algébrique

**Question posée :**

Quels sont, selon vous, les exercices que les élèves du primaire doivent pouvoir effectuer pour entrer plus facilement dans l’apprentissage de l’algèbre au début du secondaire ?

Compléter selon votre degré d’accord avec l’exercice proposé

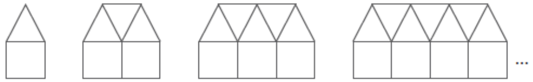
% = plutôt d’accord + d’accord + tout à fait d’accord

Secondaire
Primaire

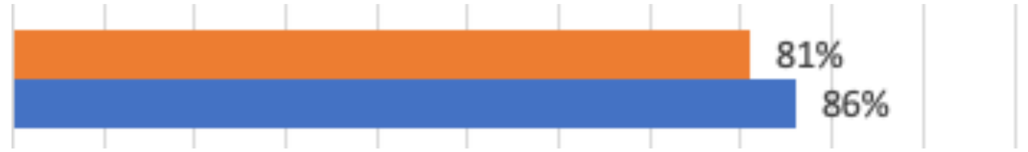
**1*. Compléter une égalité comme la suivante :** 8 + 4 = ? + 5


**2. Répondre aux questions de la situation suivante :**

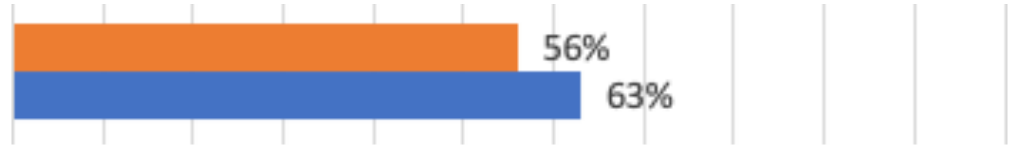
**Observe cette suite de figures composées de carrés et de triangles:**



a) Détermine le nombre de triangles de la figure composée de 7 carrés.




b) Propose un message qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.




**3. Pouvoir résoudre le type de problème suivant :**

**Dans un cycle 3 d’une école primaire, il y a 37 élèves. Dans la classe du cycle 3.1, il y a 5 élèves de plus que dans la classe du cycle 3.2. Combien y a d’élèves par classe ?**

a) Selon une stratégie de résolution au choix de l’élève ?


**4. Pouvoir compléter l’inégalité suivante : 750 – 13 … 750 – 25 par le symbole >**

a) En se basant sur les résultats des 2 opérations, en expliquant que 750 – 13 = 737, c’est donc plus grand que 750 – 25 = 725


b) En expliquant que 750 – 13 est plus grand que 750 – 25 car on retire moins à 750 – 13 qu’à 750 – 25.

## 1. A propos des exercices n'impliquant <u>aucun</u> symbolisme algébrique

- La plupart des enseignants tant du primaire que du secondaire semblent apprécier les activités proposées (plus de 80% d'accord) : ils pensent que pouvoir effectuer ces exercices permet d'entrer plus facilement dans l'algèbre.
- Cependant ceux du primaire se montrent globalement plus favorables
- La production d'un message de généralisation (2.b) reçoit malgré tout reçoit moins d'avis positifs. Or, la recherche reconnaît un potentiel important à ce type d'activités pour la transition arithmétique-algèbre.
- De manière surprenante, les enseignants du secondaire (73%) plébiscitent moins l'exercice 4.b sur l'inégalité que ceux du primaire (100%) alors qu'il propose un raisonnement basé le sens des opérations (plus proche d'une pensée algébrique que le 4.a).

# 2. Le point de vue des enseignants à propos des exercices avec un symbolisme algébrique

**Question posée :**

Quels sont, selon vous, les exercices que les élèves du primaire doivent pouvoir effectuer pour entrer plus facilement dans l'apprentissage de l'algèbre au début du secondaire ?

Compléter selon votre degré d'accord avec l'exercice proposé

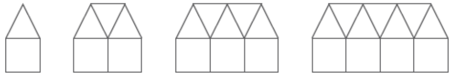
% = plutôt d'accord + d'accord + tout à fait d'accord

Secondaire

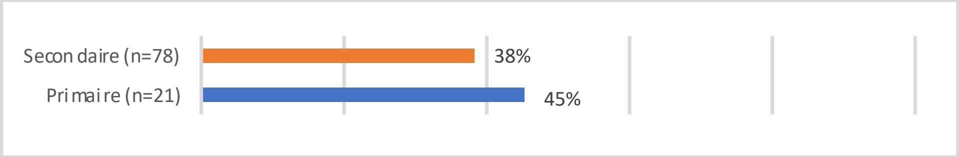
Primaire

**2*. Répondre aux questions de la situation suivante :**

Observe cette suite de figures composées de carrés et de triangles:



c) Propose une formule qui permet de calculer le nombre de triangles quel que soit le nombre de carrés.

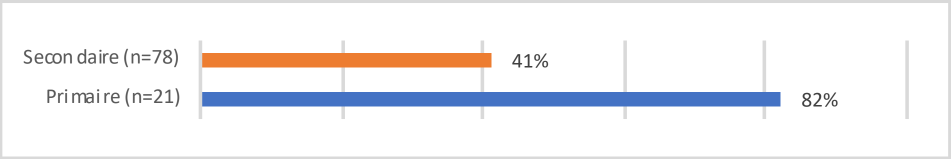



**3. Résoudre une équation simple de la manière présentée ci-dessous :**

$x + 9 = 14 \quad | -9$

$x = 14 - 9$ (on retranche 9 des deux côtés)

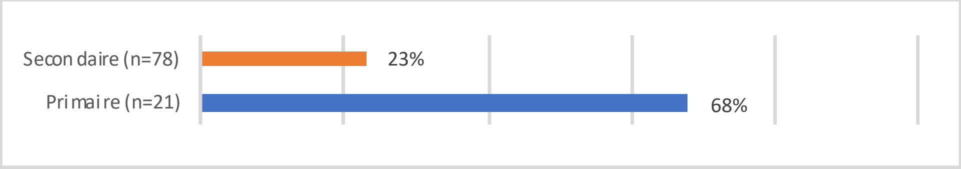
$x = 5$




**5. Pouvoir résoudre le type de problème suivant :**

Dans un cycle 3 d'une école primaire, il y a 37 élèves. Dans la classe du cycle 3.1, il y a 5 élèves de plus que dans la classe du cycle 3.2. Combien y a-t-il d'élèves par classe ?

b) Selon une stratégie de résolution utilisant une équation ?



## 2. A propos des exercices symbolisme algébrique avec un symbolisme algébrique

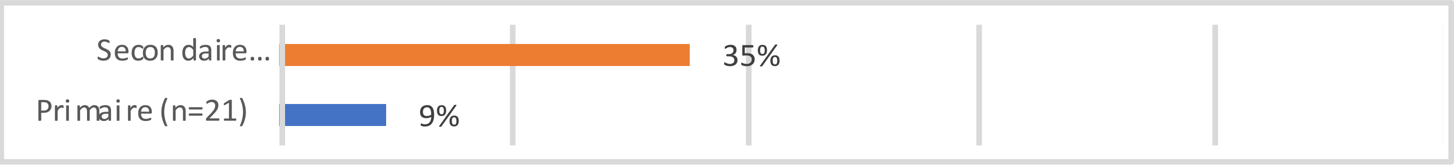
- Si pour les activités précédentes, sans symbolisme algébrique, les avis des enseignants du primaire et du secondaire étaient généralement assez consensuels, il n’en va pas de même pour les activités avec symbolisme algébrique, sauf pour la production de formules où les enseignants des deux niveaux sont peu nombreux à plébisciter.

- Les enseignants du secondaire se montrent globalement peu favorables à ce type d’activités, contrairement aux enseignants du primaire.

- Un important désaccord est observé chez les enseignants à deux questions :
  - → la résolution formelle d’une équation (plébiscitée par 80% primaire versus 41% secondaire)
  - → la résolution d’un problème par une équation (plébiscitée par 70% primaire versus 23% secondaire)

- Au primaire, la résolution des équations figure dans le plan d’études (2011) et dans les anciens manuels.

# 3. Le point de vue des enseignants à propos de l'affirmation suivante /

| | |
|---|---|
| **Aucun exercice particulier**, l'apprentissage de l'algèbre ne commence qu'au secondaire |  |

Secondaire
Primaire

% = plutôt d'accord + d'accord + tout à fait d'accord

Si les enseignants des deux niveaux scolaires ne semblent pas convaincus par cette affirmation, on observe à nouveau une importante différence dans les pourcentages d'accord entre les enseignants :

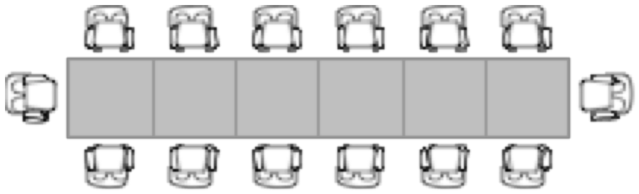
- Seuls, 9% des enseignants du primaire se montrent d'accord avec cette affirmation
- Par contre, un peu plus d'un tiers d'enseignants du secondaire (35%) pensent que l'algèbre ne commence qu'en secondaire. Ces enseignants semblent donc penser que l'algèbre ne concerne pas le primaire et qu'aucune activité réalisée au primaire ne peut préparer efficacement l'entrée en algèbre au secondaire.

# LES CONNAISSANCES POUR ENSEIGNER

# 1. Juger de l’intérêt d’une activité

## Un tour de table

Les parents du petit Jules organisent une fête pour son anniversaire. Ils contactent Monsieur Boulèfrite, le traiteur. Celui-ci dispose de petites tables carrées. Il propose de les placer l'une à côté de l'autre pour en faire une grande table où les invités seront installés selon le modèle suivant :



Écris une règle qui permet de trouver le nombre de chaises, quel que soit le nombre de tables que l’on a.

**Question posée:**

Quel est l’intérêt d’exploiter ce genre de situation :
- pour le primaire?
- pour le secondaire?

Nombre de réponses :

| | intérêt pour le primaire | intérêt pour le secondaire |
|---|---|---|
| **primaire** | 11 | - |
| **secondaire** | 42 | 47 |

- Une petite moitié des enseignants du primaire (11 sur les 28 qui avaient commencé à répondre au questionnaire) et du secondaire (42/47 sur les 92) ont répondu à cette question
- On remarquera qu’aucun des enseignants du primaire ne donne de réponse par rapport à l’intérêt de cette activité pour le secondaire, comme s’ils n’étaient pas concernés par le secondaire ou qu’ils ne se sentaient pas capables de se prononcer sur une activité relative au secondaire.

# 1. Juger de l'intérêt d'une activité

**Intérêt de l'activité « Un tour de table » pour le primaire**
**Avis des enseignants du secondaire et du primaire**

| | primaire | | secondaire | |
|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % |
| Pensée algébrique/généralisation | 2 | **18** | 7 | **18** |
| Modélisation/abstraction | 2 | **18** | 5 | **12** |
| Résolution de problème/pensée logique | 6 | **55** | 18 | **44** |
| Contexte pratique | - | **-** | 3 | **7** |
| Aucun intérêt (trop tôt/trop difficile) | 1 | **9** | 3 | **7** |
| Autres | - | **-** | 5 | **12** |
| | 11 | **100** | 41 | **100** |

# 1. Juger de l’intérêt d’une activité

## Intérêt de l’activité « Un tour de table » pour le primaire

- Pour une majorité d'enseignants, l’intérêt de cette activité au primaire concerne les compétences de **résolution de problèmes, de recherche** ou de **pensée logique**.
- Seuls deux enseignants du primaire et sept enseignants du secondaire voient l'intérêt de cette activité pour la pensée **algébrique** ou pour développer la **généralisation**. A noter que deux enseignants du primaire et cinq enseignants du secondaire pointent l'intérêt en terme de **modélisation** ou d'**abstraction** qui est lié à l'algèbre mais à un niveau plus général.
- Un enseignant du primaire et trois enseignants du secondaire ne voient **aucun intérêt** à développer cette activité au primaire. Mais signalons que ce genre d’activité, malgré son potentiel non seulement pour la pensée algébrique, mais également pour l’arithmétique elle-même (Radford, 2008, 2014 ; etc.), est vraiment très inhabituel pour le primaire et ne figure pas en tant que tel dans les manuels de ce niveau d’étude, au Luxembourg.

# 1. Juger de l'intérêt d'une activité

## Intérêt de l'activité « Un tour de table » pour le primaire

### Avis des enseignants du secondaire et du primaire : Exemples

| **Résolution de problèmes /pensée logique/recherche** | |
|---|---|
| Primaire | « Promouvoir le développement d'une pensée logique »<br>« Résoudre de façon mathématique une situation du quotidien » |
| Secondaire | « Exploration, activité de recherche »<br>« Initiation à la recherche dans le cadre d'une activité nouvelle » |

| **Pensée algébrique/généralisation/régularité** | |
|---|---|
| Primaire | « Premières expériences avec l'algèbre avec une situation qui pourrait être réelle » |
| Secondaire | « Situation de la vie courante : initiation à l'algèbre »<br>« De voir que le nombre de chaises dépend de « manière régulière » du nombre de tables. Développer la pensée algébrique des élèves »<br>« Explorer des relations/dépendances entre grandeurs. Mettre en mot des relations fonctionnelles » |

# 1. Juger de l'intérêt d'une activité

**Intérêt de l'activité « Un tour de table » pour le secondaire**
**Avis des enseignants du secondaire et du primaire**

| | primaire | | secondaire | |
|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % |
| Pensée algébrique/régularité/généralisation | - | - | 29 | **62** |
| Modélisation/abstraction | - | - | 8 | **17** |
| Résolution de problème/pensée logique | - | - | 3 | **6** |
| Contexte pratique | - | - | 1 | **2** |
| Aucun intérêt (trop facile) | - | - | 1 | **2** |
| Autres | - | - | 5 | **11** |
| | - | - | 47 | **100** |

# 1. Juger de l’intérêt d’une activité

## Intérêt de l’activité « Un tour de table » pour le secondaire

- Environ les deux tiers des enseignants du secondaire reconnaissent tout particulièrement les implications **algébriques** de la situation pour l'enseignement secondaire.
- Juste après, 17 % des enseignants décrivent l'intérêt de la situation de manière plus générale, en termes de « **modélisation** » ou « d'**abstraction** ».
- Cette fois, seulement 6 % considèrent cette activité comme intéressante en ce qui concerne la **résolution de problèmes** ou la **pensée logique** pour l'école secondaire.
- Au final, que ce soit pour le primaire ou le secondaire, relativement peu d’enseignants ne voient **aucun intérêt** à cette activité, alors que celle-ci est plutôt inhabituelle au Luxembourg pour le primaire ainsi que le secondaire.

# 1. Juger de l'intérêt d'une activité

## Intérêt de l'activité « Un tour de table » pour le secondaire

### Avis des enseignants du secondaire et du primaire : Exemples

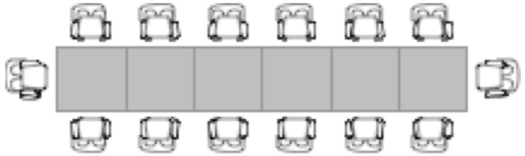
| **Pensée algébrique/généralisation/régularité** | |
|---|---|
| Secondaire | « Elaboration d'une formule et l'introduction du calcul littéral »<br>« Généraliser la règle en utilisant le calcul littéral »<br>« Savoir généraliser à partir d'observations bien comprises pour des valeurs numériques »<br>« Donner du sens à l'utilisation de variables » |

| **Modélisation/abstraction** | |
|---|---|
| Secondaire | « Apprendre à modéliser une situation »<br>« Donner une modélisation mathématique d'un problème pratique (concret) » |

| **Résolution de problèmes/pensée logique** | |
|---|---|
| Secondaire | « Problème de la vie courante »<br>« Comprendre un problème et le traduire en langage mathématique pour le résoudre efficacement » |

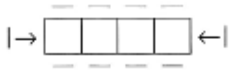
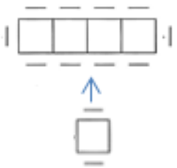
# 2. 1 Juger des productions d'élèves - Un tour de table

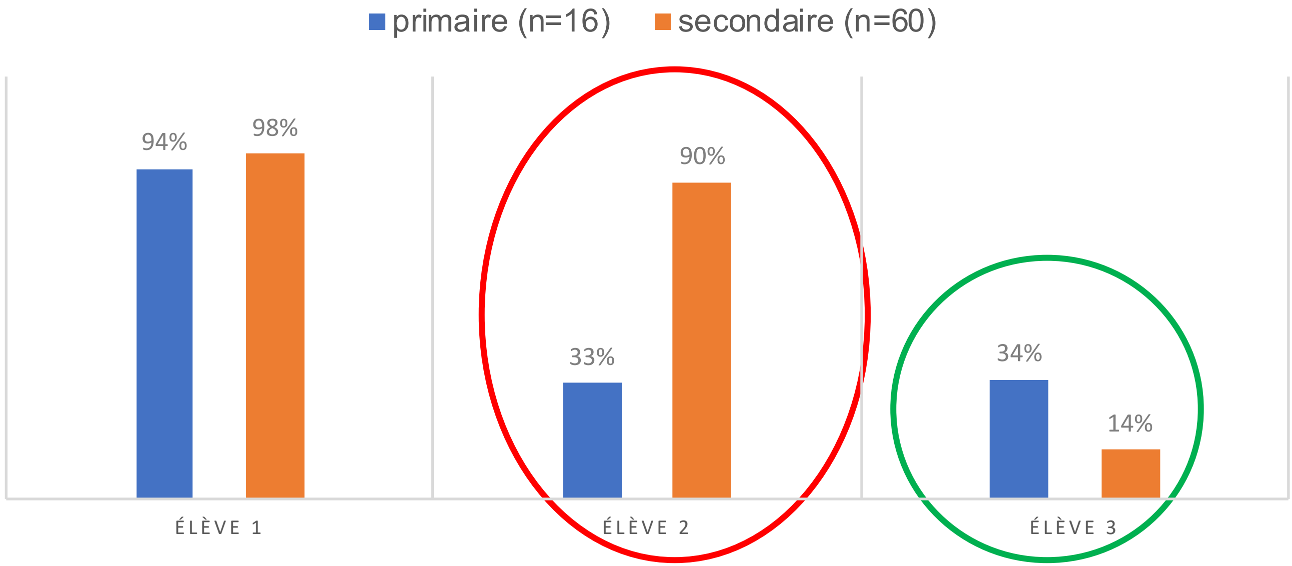
Les parents du petit Jules organisent une fête pour son anniversaire. Ils contactent Monsieur Boulèfrite, le traiteur. Celui-ci dispose de petites tables carrées. Il propose de les placer l'une à côté de l'autre pour en faire une grande table où les invités seront installés selon le modèle suivant :



Écris une règle qui permet de trouver le nombre de chaises, quel que soit le nombre de tables que l'on a.

## Selon vous, quel(s) élève(s) proposent-ils une solution correcte?

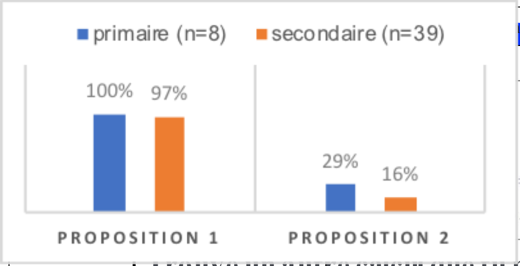
| | Visualisations | Règles proposées |
|---|---|---|
| Élève 1 |  | Nombre de chaises = (nombre de tables x 2) + 2<br>Solution correcte |
| Élève 2 |  | Nombre de chaises = (nombre de tables - 2) x 2 + 6<br>Solution correcte |
| Élève 3 |  | Chaque fois qu'on ajoute une table, on a 2 chaises de plus<br>Nombre de chaises = Nombre de tables + 2<br>Solution incorrecte |




La solution de l'élève 2 est correcte et seulement 33 % des enseignants du primaire le pensent

La solution de l'élève 3 est fausse et pourtant 34 % des enseignants du primaire la trouvent vraie et même 14 % d'enseignants du secondaire

# Juger des productions d'élèves - La calculatrice défectueuse



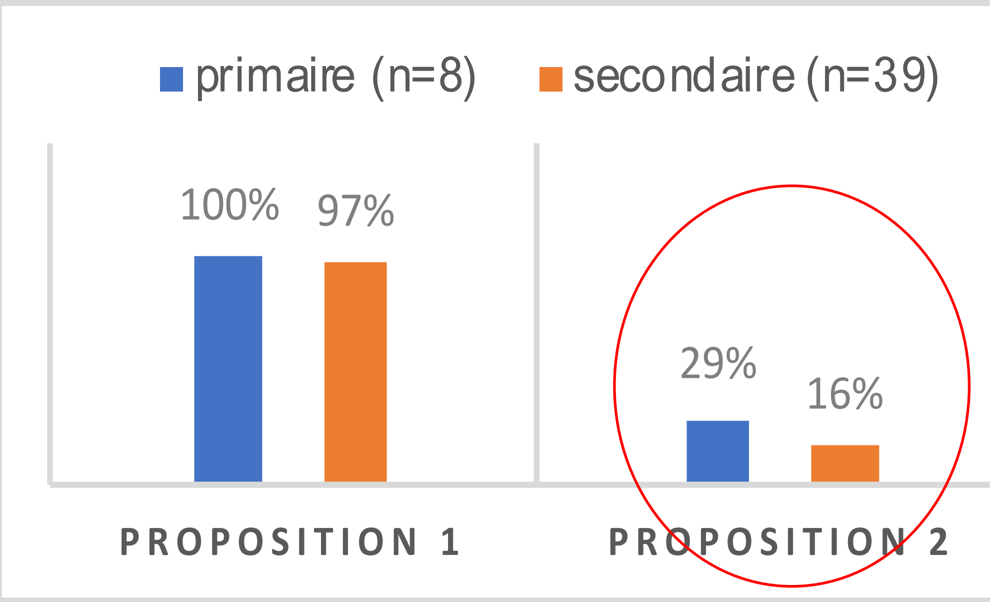

…ais la calculatrice ne fonctionne plus … tionne pas.
Trouve un autre calcul que tu puisses encoder pour obtenir le même résultat !
Explique comment tu fais. Écris ta démarche.

| 137 + 66 = | 843 - 79 = |
|---|---|
|  |  |

**A nouveau, un petit pourcentage d'enseignants du primaire ET du secondaire évalue comme correcte une solution pourtant fausse.**

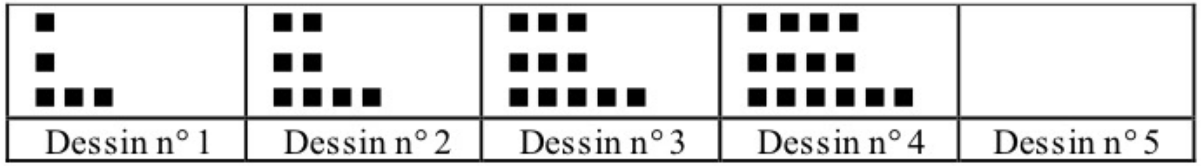
**Selon vous, quel(s) élève(s) proposent-ils une solution correcte?**

| Proposition 1 | Proposition 2 |
|---|---|
| ❖ 137 + 66 =<br>Notre calcul :<br>147 + 56<br>Explication<br>On a ajouté 10 à 137 alors on les retire à 66.<br>Solution correcte | ❖ 843 - 79 =<br>Notre calcul :<br>842 - 80<br>Explication :<br>On a ajouté 1 à 70 alors on retire 1 à 843.<br>Solution incorrecte |



# 2.2 Noter des productions d’élèves – Suite de carrés

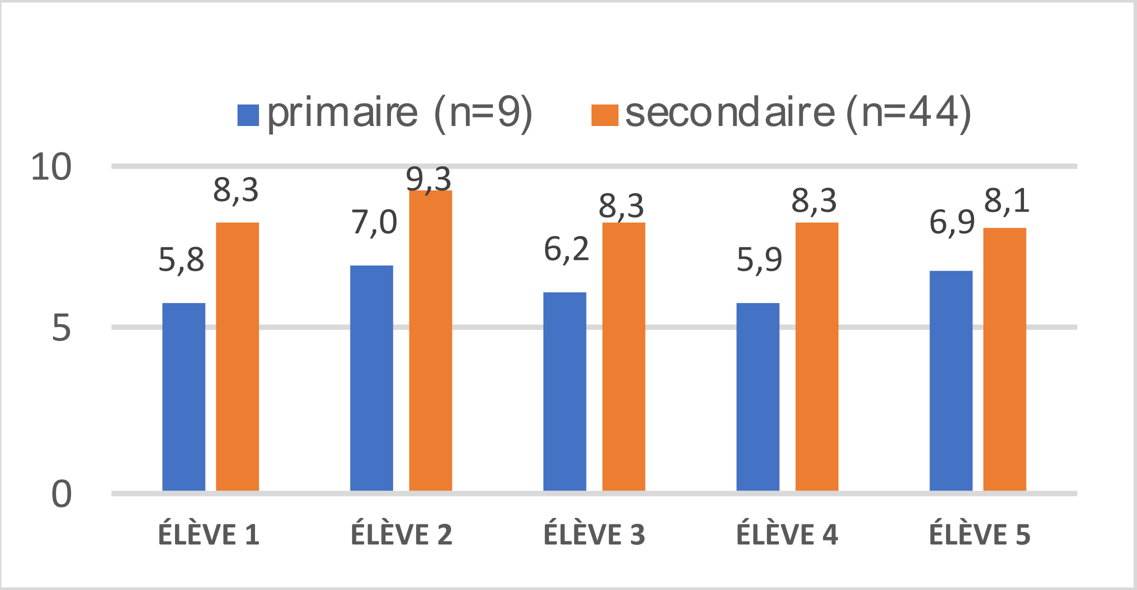
Voici une suite de carrés :




a) Continue la suite .... Combien de carrés y aura-t-il au dessin n°5?
b) Trouve une règle pour déterminer le nombre de carrés quel que soit le numéro du dessin.

## Quelle note attribuer aux productions des 5 élèves ? (Note sur 10)

| | Production |
|---|---|
| **Élève 1** | 1 · n + 2 + 2 · n |
| **Élève 2** | 3n + 2 |
| **Élève 3** | n + 2 + 2n |
| **Élève 4** | (n+ 2) · 3 - 4 |
| **Élève 5** | 3 fois le numéro du motif + 2 |




Moyennes des notes attribuées à chaque élève par les enseignants

## 2.2 Noter des productions d’élèves – Suite de carrés

Alors que ces cinq productions sont correctes, on constate que :

- De manière surprenante, les enseignants du primaire attribuent des notes nettement inférieures à celles des enseignants du secondaire. Il est difficile de comprendre pourquoi ceux-ci attribuent des notes aussi basses à des productions correctes. Connaissance de contenu? Difficultés à comprendre la démarche de l’élève?
- La production de l’élève 2 (3n + 2 ) est celle qui reçoit les meilleures notes alors que la production de l’élève 5 (3 fois le numéro du motif + 2) est similaire du point de vue du raisonnement. Seuls les enseignants du primaire attribuent une note identique aux productions des élèves 2 et 5
- Ces résultats montrent également que les enseignants semblent considérer que seule la production de l’élève 2, dans laquelle l’expression est réduite (3n + 2), mérite la note la plus élevée.
- Au final, il est curieux de constater qu’aucun des élèves ne reçoit une moyenne de 10 sur 10 puisque celles-ci sont toutes correctes, et que la production de l’élève 2 présente en plus l’expression réduite.

# 2.3 Juger des productions d'élèves – Résoudre un problème

Trois boites contiennent des bonbons. La deuxième boite contient 5 bonbons de plus que la première boite et la troisième boite contient 7 bonbons de plus que la première boite. En tout, il y a 24 bonbons.
Combien de bonbons contiennent chacune des boites ?

## Solution 1

**Stratégie arithmétique/Tâtonnement**

Si la 1ère boîte contient 10 bonbons,
La 2e boîte contient : 10 + 5 = 15 bonbons
La 3e boîte contient : 10 + 7 = 17 bonbons
Et 10 + 15 + 17 = 42 bonbons : C'est trop
Si la 1ère boîte contient 7 bonbons,
La 2e boîte contient : 7 + 5 = 12 bonbons
La 3e boîte contient : 7 + 7 = 14 bonbons
Et 7 + 12 + 14 = 33 bonbons : C'est trop
Si la 1ère boîte contient 4 bonbons,
La 2e boîte contient : 4 + 5 = 9 bonbons
La 3e boîte contient : 4 + 7 = 11 bonbons
Et 4 + 9 + 11 = 24 bonbons : C'est bon
On a donc : la 1ère boîte qui contient 4 bonbons, la 2e boîte, 9 bonbons et la 3e boîte, 11 bonbons.

## Solution 2

**Stratégie algébrique formelle**

1ère boîte : $x$
2e boîte : $x + 5$
3e boîte : $x + 7$
$x + x + 5 + x + 7 = 24$
$3x + 12 = 24$
$3x = 12$
$x = 4$

Et donc,
la 1ère boîte qui contient 4 bonbons,
la 2e boîte contient 9 bonbons
la 3e boîte contient 11 bonbons.

## Solution 3

**Stratégie arithmético-algébrique**

1ère boîte : $x$
2e boîte : $x + 5$
3e boîte : $x + 7$
} 24
24 – 12 = 12
12 : 3 = 4
$x = 4$

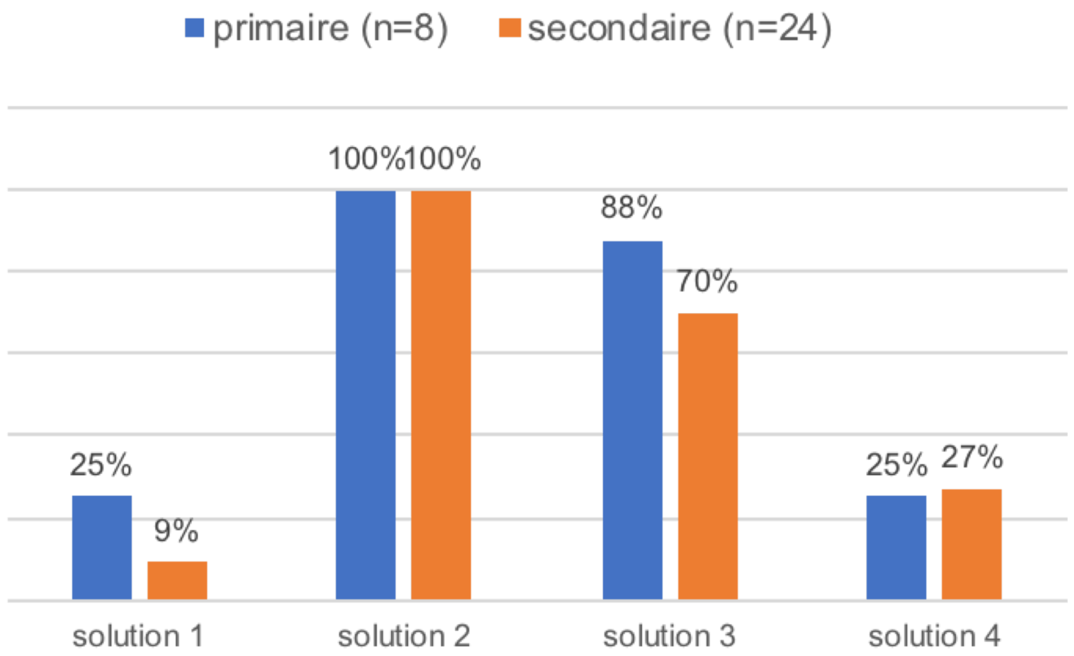
Et donc,
la 1ère boîte contient 4 bonbons,
la 2e boîte contient 9 bonbons
la 3e boîte contient 11 bonbons.

## Solution 4

**Stratégie arithmético-algébrique**

1ère boîte :
2e boîte : 5
3e boîte : 7
} 24
24 – 12 = 12
12 : 3 = 4

Et donc,
la 1ère boîte qui contient 4 bonbons,
la 2e boîte contient 9 bonbons
la 3e boîte contient 11 bonbons.




**Selon vous, quelle(s) solution(s) peut/peuvent elle(s) être qualifiée(s) d'algébrique(s) ?**

# 2.3 Juger des productions d'élèves – Résoudre un problème

- **La solution 2** dont la stratégie ressort de l'algèbre formelle dans laquelle la **lettre *x*** est employée pour désigner la variable, est reconnue comme **algébrique par 100 % des enseignants du primaire et de ceux du secondaire.**

- **Dans la solution 1**, la stratégie mise en œuvre est une **démarche arithmétique par tâtonnement,** et n'est donc en aucun cas une stratégie algébrique. Elle est cependant identifiée comme algébrique par 25 % des enseignants du primaire et même 9 % de ceux du secondaire !

- Les résultats concernant **les solutions 3 et 4** sont fortement contrastés alors qu'il s'agit, dans les deux solutions, de la **même stratégie** que l'on pourrait qualifier d'arithmético-algébrique relevant d'une **pensée algébrique** : algébrique, parce que, dans les deux cas, il y a une représentation d'une indéterminée (part inconnue) à partir de laquelle va s'effectuer le calcul (diviser par 3) ; arithmétique, parce que la résolution s'effectue à l'aide de calculs et non d'une équation formelle.

Ce qui **différencie** cependant les deux solutions, c'est **la nomination de l'inconnue** : dans la solution 3, c'est la lettre *x* qui est utilisée tandis que dans la solution 4, c'est un trait dans le schéma. Il semble que pour de nombreux enseignants, l'utilisation de la lettre suffise pour caractériser une solution d'algébrique, même si le mode de résolution est de nature arithmétique.

# CONCLUSIONS

# A propos des attentes des enseignants

- La majorité des enseignants du primaire et du secondaire pense que pouvoir résoudre les exercices informels proposés est utile pour favoriser l'entrée en algèbre.
- Une majorité d'enseignants du primaire pensent que les exercices requérant un symbolisme formel sont aussi importants pour faciliter l'apprentissage de l'algèbre.
  - Effet du plan d'étude actuel ou des anciens manuels?
- Une majorité d'enseignants du secondaire considère quant à eux que ces exercices avec un symbolisme formel relève uniquement du secondaire.
- Un bon tiers d'enseignants du secondaire, contre 9% d'enseignants du primaire, pensent qu'aucun exercice ne peut faciliter l'apprentissage de l'algèbre car, selon eux, celui-ci ne commence qu'au secondaire

# A propos des connaissances pour enseigner

1. Peu d'enseignants tant du primaire que du secondaire perçoivent l'intérêt d'une activité de généralisation pour permettre aux élèves d'entrer dans l'algèbre (Knowledge of content and teaching)

   ➢ Pour le primaire, ceux-ci la considèrent principalement comme une activité de résolution de problème.

2. Pour les enseignants du secondaire, mais également du primaire, une solution algébrique semble consister en une solution impliquant :

   - une lettre pour désigner l'inconnue (résolution de problème)

   - une expression réduite (activité de généralisation)

   <u>La conception de l'algèbre</u> semble basée principalement sur la <u>forme</u> (présence de la lettre – expression réduite) et non sur une forme de pensée.

   Quid d'une pensée algébrique en tant que mode de raisonnement n'impliquant pas nécessairement un symbolisme formel?

# A propos des connaissances pour enseigner

3. Des connaissances de contenus (Common Content Knowledge) parfois lacunaires sont observées surtout chez les enseignants du primaire mais aussi du secondaire .

4. Tous les enseignants tant du primaire que du secondaire n'attribuent pas la note de 10/10 à des règles de généralisation pourtant correctes.

→ manque d'ouverture à la variété des démarches? (Knowledge of Content & Students)

→ manque de connaissances de contenus? (Common Content Knowledge)

=> Des interviews seraient nécessaires pour mieux comprendre la pensée des enseignants

# Au final ... perspectives

Dans les programmes de formation continuée, il conviendrait ...

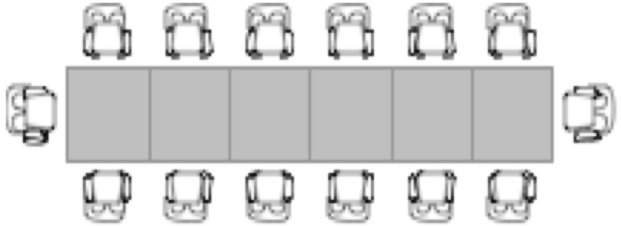
- d'expliciter et d'harmoniser les attentes ...
- tout en mettant en avant l'idée d'une pensée algébrique
  - ✓ qui peut se développer dès le primaire en continuité avec le secondaire
  - ✓ qui se développerait d'abord de manière informelle au primaire puis de manière formelle au secondaire

    => mettre en avant l'intérêt d'une diversité des formules et des stratégies de résolution informelles

    => tremplin pour ancrer le sens des apprentissages formels (sens de la lettre et des expressions algébriques) du secondaire.

# MERCI DE VOTRE ATTENTION

# Développer la pensée algébrique des élèves de 10 à 14 ans : Regard croisé des enseignants du primaire et du secondaire



Joëlle Vlassis & Sylvie Gamo
Université du Luxembourg

Cieaem71 – Braga, Portugal 22 - 26 juillet 2019

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

# LES CROYANCES DES ENSEIGNANTS

# **Les croyances des enseignants** - TEDS-M

**Croyances à propos des mathématiques** (IEA, 2012) :

- **Orientation calculationnelle** : vision des mathématiques en tant qu'un **ensemble de règles et de procédures**
- **Orientation conceptuelle** : vision des mathématiques en tant que **processus d'investigation**, comme moyen au service d'une fin, et non comme une fin en soi.

  importance accordée au système d'idées et de façon de penser des élèves ; importance de l'engagement des élèves dans la tâche.

**Croyances à propos de l'apprentissage des mathématiques** (IEA, 2012) :

- Apprendre les mathématiques **« en suivant les directives de l'enseignant » :** Perspective très centrée sur l'enseignant
- Apprendre les mathématiques **« à travers un engagement actif » :** Perspective centrée sur l'élève qui doit 'faire des mathématiques', mener ses propres investigations, etc.

Dans l'étude du rapport TEDS-M (IEA, 2012), les enseignants ont penché vers l'une ou l'autre vision des mathématiques et de leur apprentissage et les deux échelles de chaque type de croyances ont été corrélées négativement (TEDS-M, IEA, 2012) .

TEDS-M

# Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries

*Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*

Maria Teresa Tatto
John Schwille
Sharon L. Senk
Lawrence Ingvarson
Glenn Rowley
Ray Peck
Kiril Bankov
Michael Rodriguez
Mark Reckase

IEA

# Mesure des croyances : TEDS-M

**Croyances à propos des mathématiques** (IEA, 2012) :

- **Orientation calculationnelle :** 6 items
- **Orientation conceptuelle :** 6 items

**Croyances à propos de l'apprentissage des mathématiques** (IEA, 2012) :

- **Perspective « enseignant »** (Apprendre les mathématiques « en suivant les directives de l'enseignant » ) : 8 items
- **Perspective « élèves »** (Apprendre les mathématiques « à travers un engagement actif ») : 6 items

# Les croyances des enseignants

## Croyances à propos de la nature des mathématiques (IEA, 2012)

| | **Moyenne primaire** (sur 6) | **Moyenne secondaire** ( sur 6) |
|---|---|---|
| **Orientation calculationnelle** (6 items) | 4.36 | 4.45 |
| **Orientation conceptuelle** (6 items) | 4.84 | 4.85 |

- Les enseignants des 2 niveaux affichent des opinions très similaires quant à la nature des mathématiques.
- Contrairement au rapport TEDS-M, nous n'observons pas de tendance marquée vers l'une ou l'autre perspective.
- Les mathématiques concernent à la fois les règles et de procédures (calculational orientation) ainsi que les idées et la façon de penser des élèves (conceptual orientation), même si cette dernière vision des mathématiques reçoit un accord plus marqué.

Echelle de 1 à 6 :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pas du tout d'accord | Pas d'accord | Plutôt pas d'accord | Plutôt d'accord | D'accord | Tout à fait d'accord |

# Les croyances des enseignants

## Croyances à propos de l'apprentissage des mathématiques (IEA, 2012)

| *Apprendre les mathématiques ...* | **Moyenne primaire** (sur 6) | **Moyenne secondaire** (sur 6) |
|---|---|---|
| **En suivant les directives de l'enseignant** (8 items) | 2.6 | 2.8 |
| **A travers un engagement actif** (6 items) | 4.8 | 4.9 |

- A nouveau, on observe des visions quasi identiques entre les enseignants du primaire et du secondaire
- Cette fois, les tendances sont nettement plus marquées en faveur d'un enseignement des mathématiques basé sur l'implication active des élèves.

Echelle de 1 à 6 :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pas du tout d'accord | Pas d'accord | Plutôt pas d'accord | Plutôt d'accord | D'accord | Tout à fait d'accord |

math & Sens

10/14 ans

# Développer l'articulation arithmétique-algèbre

entre le primaire et le secondaire

Guide méthodologique
et documents reproductibles en ligne

Isabelle DEMONTY
Joëlle VLASSIS

de boeck