BIANCHI'S ADDITIONAL SYMMETRIES

ALEXANDER D. RAHM

Abstract. In a 2012 note, the author has tried to answer a question of Jean-Pierre Serre; it turns out that the scope of that answer needs an adjustment, which is the purpose of the present paper. The original question is the following. Consider the ring of integers $\mathcal{O}$ in an imaginary quadratic number field, and the Borel–Serre compactification of the quotient of hyperbolic 3–space by $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Consider the map α induced on homology when attaching the boundary into the Borel–Serre compactification. *How can one determine the kernel of α (in degree 1) ?* Serre used a global topological argument and obtained the rank of the kernel of α. He added the question what submodule precisely this kernel is.

Une version française de ce manuscrit se trouve sur les dernières pages.

Introduction

As the note "On a question of Serre" [9] by the author had been published prematurely, the proof of the key lemma remaining sketchy, the author did contact an expert for the Borel–Serre compactification, Lizhen Ji, for the project of establishing a detailed version of that key proof. Lizhen Ji then found out that there are cases where that proof does not apply. So it is necessary to correct the scope of the lemma, which we will do in the present paper.

Throughout this paper, we use the upper-half space model $\mathcal{H}$ for hyperbolic 3-space, as it is the one used by Bianchi. As a set, $\mathcal{H} = \{(z, \zeta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \mid \zeta > 0\}$. The Bianchi groups, $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ over the ring $\mathcal{O}$ of integers in an imaginary quadratic field $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, act naturally on $\mathcal{H}$ (cf. the monographs [5], [6], [7]). *Throughout this paper, we will exclude the ring $\mathcal{O}$ from being the Gaussian integers, in $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, or the Eisensteinian integers, in $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.* Those two special cases can easily be treated separately. For a subgroup Γ of finite index in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, consider the Borel–Serre compactification ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ of the orbit space ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$, constructed in the appendix of [12], which joins a 2-torus $\mathbf{T}_\sigma$ to ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$ at every cusp σ.

Question 1 (Serre [12]). *Consider the map α induced on homology when attaching the boundary into the Borel–Serre compactification ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$. How can one determine the kernel of α (in degree 1) ?*

Motivation of Question 1. The search for a set of generators for the kernel of the attaching map has motivations that are indicated already in Serre's 1970 paper. The paper does (after achieving its goal, namely solving the congruence subgroups problem), describe how to calculate the Abelianisation of the investigated arithmetic groups in terms of generators for the kernel of the attaching map. Knowledge about the Abelianisation Γ^{ab} of Γ a (congruence subgroup in a) Bianchi group, especially in terms of generating matrices, has the following application to the Langlands programme (we can assume that this application was already realised by Serre at that time, because of his subsequent question in the paper). For each weight k of modular forms, there is a coefficient module M_k such that the Eichler–Shimura–Harder isomorphism identifies the space of weight k modular forms for Γ with the cohomology $H^1(\Gamma; M_k)$. The latter can be computed explicitly as $\mathrm{Hom}(\Gamma^{\mathrm{ab}}, M_k)$ when Γ^{ab} is given in terms of generating matrices. These computations would then not have to pass by an explicit computation of a fundamental domain like the Bianchi fundamental polyhedron, which is a necessary step still nowadays [10, 11] for computing the dimension of $H^1(\Gamma; M_k)$.

The following lemma was the key for the approach to Question 1 pursued in the 2012 note. In the remainder of this paper, we consider an imaginary quadratic field $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ with D a square-free natural integer, and we set $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-D})})$. We decompose the 2-torus $\mathbf{T}_\sigma$ in the classical way into a 2–cell, two edges and a vertex.

Lemma 2. *Let n be the number of prime divisors of D. Let $N = 2^{n-1}$ for $D \equiv 2$ or $3 \mod 4$, $N = 2^n$ for $D \equiv 1 \mod 4$. Then ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$ admits at least N cusps σ such that the inclusion of $\mathbf{T}_\sigma$ into ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ makes exactly one of the edges of $\mathbf{T}_\sigma$ become the boundary of a 2–chain.*

The hypothesis on σ was missing in the 2012 note, and we will give a completed proof in Section 2, making use of this hypothesis.

Corollary 3. *If the class group of $\mathcal{O}$ is isomorphic to $\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}$ for some $m \in \mathbf{N}$, then for all cusps σ of ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$, the inclusion of $\mathbf{T}_\sigma$ into ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ makes exactly one of the edges of $\mathbf{T}_\sigma$ become the boundary of a 2–chain.*

Date: August 2, 2019.

Proof. By [4, thm. 3.22], our hypothesis on the class group of $\mathcal{O}$ is equivalent to $m = \begin{cases} n-1, & D \equiv 2 \text{ or } 3 \mod 4, \\ n, & D \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$

It is well known that each ideal class of $\mathcal{O}$ corresponds to one cusp of ${}_{\Gamma}\backslash\mathcal{H}$, so there are N cusps, and Lemma 2 yields the claim. □

1. Bianchi's additional symmetries

The list of Bianchi's symmetries presented in this section allows us to reduce the proof in the following section in each case to the situation at the cusp at infinity. As a fundamental domain in hyperbolic space, we make use of the polyhedron with missing vertices at the cusps, described by Bianchi [2], and which we will call the *Bianchi fundamental polyhedron.* It is the intersection of a fundamental domain in $\mathcal{H}$ for the stabiliser in Γ of the cusp at ∞ (in the shape of a rectangular prism) with the set of points of $\mathcal{H}$ that are closer to ∞ than to any other cusp. We consider the cellular structure on ${}_{\Gamma}\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ induced by the Bianchi fundamental polyhedron. From Bianchi's articles [2,3], it was not clear that one can always compute the Bianchi fundamental polyhedron, a fact which meanwhile has been established by an algorithm of Richard G. Swan [13] that has been implemented at least twice [1,8]. The reason why in some cases Bianchi did not obtain the Bianchi fundamental polyhedron, must be that some "sfere di riflessione impropria" did escape him [2, §20; at the first example, $D = 14$, it is the hemisphere of center $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-14}}{3}$ and radius $\frac{1}{6}$]. Note that in the upper-half space model, totally geodesic planes are modelled by vertical planes, respectively by hemispheres centered in the boundary, so we will call the latter "reflecting (hemi)spheres" to continue Bianchi's terminology, even though they are to be thought as mirroring planes in hyperbolic space. Instead of the missing reflecting spheres, Bianchi did find additional symmetries which did allow him to construct a differently shaped but equivalent fundamental domain [3]. These symmetries are going to be the foundations of our proof. Since Bianchi's papers, a cusp is called *singular* when it is not on the Γ-orbit of ∞.

Theorem 4 (Bianchi)**.** *Let D, n and N be as in Lemma 2. Then the symmetry group of the Bianchi fundamental polyhedron admits a subgroup of order N, each of whose non-trivial elements flips the cusp ∞ with a different singular cusp, while leaving invariant a hemisphere of radius smaller than 1, and preserving the Γ-cell structure.*

We will call those elements *Bianchi's additional symmetries.*

Proof. With D a square-free natural integer satisfying either

- Case A: $D \equiv 1$ or $2 \mod 4$, and suppose that D admits a prime divisor $m < D$;
- or Case B: $D \equiv 1 \mod 4$ with $D > 1$,

Bianchi specified the symmetry by composing complex conjugation with the action of the matrix

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{-D}{m}} & -\sqrt{m} \\ \sqrt{m} & \sqrt{\frac{-D}{m}} \end{pmatrix} \text{in Case A;} \qquad\qquad M_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-D}+1}{\sqrt{2}} & \frac{D-1}{-4}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{-D}-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{in Case B,}$$

where we choose m to be the smallest prime divisor of D. The action on the boundary of hyperbolic space is given by classical Möbius transformations, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Therefore, Bianchi's additional symmetry flips the cusp ∞ with the cusp

$$\sigma = \frac{\sqrt{-D}}{m} \text{ in Case A;} \qquad\qquad \sigma = \frac{\sqrt{-D}+1}{2} \text{ in Case B.}$$

We can check that the cusp σ is singular by checking that the ideal I_σ is not principal, where

$$I_\sigma = (\sqrt{-D}, m) \text{ in Case A;} \qquad\qquad I_\sigma = (\sqrt{-D}+1, 2) \text{ in Case B.}$$

We assume the contrary and lead it to a contradiction: Suppose that there are $c \in I_\sigma$, $a, b \in \mathcal{O}$ with

$$ac = \sqrt{-D},\ bc = m \text{ in Case A;} \qquad\qquad ac = \sqrt{-D}+1,\ bc = 2 \text{ in Case B.}$$

We easily show that c is in the $\mathbf{Z}$-module with generators the two generators of I_σ (we might say that "c admits coefficients in $\mathbf{Z}$") when we use

in Case A, that m is a divisor of D; in Case B, that $D \equiv 1 \mod 4$.

Next, we separate real and imaginary part in the above system of two equations, solve for the coefficients of c and arrive at the desired contradiction. Therefore, the cusp σ is singular. As we have chosen m to be the smallest prime dividing D, the cusp σ is a vertex of the Bianchi fundamental polyhedron. This entails that the matrix M_σ of Bianchi's additional symmetry flips the Bianchi fundamental polyhedron onto itself, interchanging two isometric halves of it which are separated by a plane equidistant to the cusps ∞ and σ. The Bianchi group Γ is a normal subgroup of index 2 in the group $\langle \Gamma, M_\sigma \rangle$, whence this symmetry preserves the Γ-cell structure. The other symmetries are obtained similarly [3], and we collect them in Table 1. The conditions in the table are implied by $\det(M_\sigma) = 1$.

Type	σ	r_σ	M_σ	Conditions
I	$\frac{a_1 m + a_2\sqrt{-D}}{cm}$	$\frac{1}{c\sqrt{m}}$	$\begin{pmatrix} a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}} & b\sqrt{m} \\ c\sqrt{m} & a_2\sqrt{\frac{-D}{m}} - a_1\sqrt{m} \end{pmatrix}$	$D \equiv 1$ or $2 \mod 4$, $\frac{D}{m}$ quadratic residue mod m, $ma_1^2 + \frac{D}{m}a_2^2 + mbc = 1$
II	$\frac{a_2 D - a_1 mc\sqrt{-D}}{cD}$	$\frac{1}{c\sqrt{\frac{D}{m}}}$	$\begin{pmatrix} a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}} & b\sqrt{\frac{-D}{m}} \\ c\sqrt{\frac{-D}{m}} & a_1\sqrt{m} - a_2\sqrt{\frac{-D}{m}} \end{pmatrix}$	$D \equiv 1$ or $2 \mod 4$, m quadratic residue mod $\frac{D}{m}$, $ma_1^2 + \frac{D}{m}a_2^2 + \frac{D}{m}bc = 1$
III	$\frac{a_1 + a_2\sqrt{-D}}{2c}$	$\frac{1}{c\sqrt{2}}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1 + a_2\sqrt{-D}}{\sqrt{2}} & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & \frac{a_2\sqrt{-D} - a_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$D \equiv 1 \mod 4$, $a_1^2 + Da_2^2 + 4bc = 2$
IV	$\frac{a_2 D - a_1\sqrt{-D}}{2cD}$	$\frac{1}{c\sqrt{2D}}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1 + a_2\sqrt{-D}}{\sqrt{2}} & b\sqrt{2}\sqrt{-D} \\ c\sqrt{2}\sqrt{-D} & \frac{a_1 - a_2\sqrt{-D}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$D \equiv 1 \mod 4$ 2 quadratic residue mod D, $a_1^2 + Da_2^2 + 4Dbc = 2$
V	$\frac{a_1 m + a_2\sqrt{-D}}{2cm}$	$\frac{1}{c\sqrt{2m}}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{\sqrt{2}} & b\sqrt{2m} \\ c\sqrt{2m} & \frac{-a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$D \equiv 1 \mod 4$ 2 and $\frac{D}{m}$ have the same quadratic character mod m, $ma_1^2 + \frac{D}{m}a_2^2 + 4mbc = 2$
VI	$\frac{a_2 D + a_1 m\sqrt{-D}}{2cD}$	$\frac{1}{c\sqrt{2\frac{D}{m}}}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{\sqrt{2}} & b\sqrt{2\frac{-D}{m}} \\ c\sqrt{2\frac{-D}{m}} & \frac{a_1\sqrt{m} - a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$D \equiv 1 \mod 4$ 2 and m have the same quadratic character mod $\frac{D}{m}$, $ma_1^2 + \frac{D}{m}a_2^2 + 4\frac{D}{m}bc = 2$
VII	$\frac{a_1 m + a_2\sqrt{-D}}{2cm}$	$\frac{1}{c\sqrt{m}}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{2} & b\sqrt{m} \\ c\sqrt{m} & \frac{-a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{2} \end{pmatrix}$	$D \equiv 3 \mod 4$ $\frac{D}{m}$ quadratic residue mod m, $ma_1^2 + \frac{D}{m}a_2^2 + 4mbc = 4$
VIII	$\frac{a_2 D + a_1 m\sqrt{-D}}{2cD}$	$\frac{1}{c\sqrt{\frac{D}{m}}}$	$\begin{pmatrix} \frac{a_1\sqrt{m} + a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{2} & b\sqrt{\frac{-D}{m}} \\ c\sqrt{\frac{-D}{m}} & \frac{a_1\sqrt{m} - a_2\sqrt{\frac{-D}{m}}}{2} \end{pmatrix}$	$D \equiv 3 \mod 4$ m quadratic residue mod $\frac{D}{m}$, $ma_1^2 + \frac{D}{m}a_2^2 + 4\frac{D}{m}bc = 4$

TABLE 1. Bianchi's additional symmetries [3, §III]. The parameters $a_1, a_2, b, c \in \mathbf{Z}$ and the divisor m of D have to satisfy the specified conditions. Examples for Type I are $m = 2, a_1 = 0, a_2 = c = 1$, $(D, b) \in \{(6, -1), (10, -2), (22, -5), (58, -14)\}$; examples for Type III are $a_1 = a_2 = c = 1$, $(D, b) \in \{(5, -1), (13, -3), (37, -9)\}$.

Then we read off from the table that the radius r_σ of the reflecting sphere is smaller than 1, and that σ is a singular cusp (its numerator and denominator generate a non-principal ideal).

□

2. The proof

We will use Bianchi's additional symmetries for decomposing the Bianchi fundamental polyhedron into two isometric parts with the cutting plane between them being equidistant between ∞ and the singular cusp at which $\mathbf{T}_\sigma$ is located.

Proof of lemma 2. Consider, in the boundary of the Bianchi fundamental polyhedron, the fundamental rectangle $\mathcal{F}$ for the action of the cusp stabiliser on the plane joined to $\mathcal{H}$ at the cusp ∞. There is a sequence of rectangles in $\mathcal{H}$ obtained as translates of $\mathcal{F}$ orthogonal to all the geodesic arcs emanating from the cusp ∞. This way, the portion of the fundamental polyhedron which touches the cusp ∞, is locally homeomorphic to the Cartesian product of a geodesic arc with a translate of $\mathcal{F}$.

The boundaries of these translates are subject to the same identifications by Γ as the boundary of $\mathcal{F}$. Namely, denote by $t(\mathcal{F})$ one of the translates of $\mathcal{F}$; and denote by γ_x and γ_y two generators, up to the -1 matrix, of the cusp stabiliser identifying the opposite edges of $\mathcal{F}$. We can choose $\gamma_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\gamma_y = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Then, γ_x and γ_y identify the opposite edges of $t(\mathcal{F})$ and make the quotient of $t(\mathcal{F})$ into a torus. So in the quotient space by the action of Γ, the image of $\mathbf{T}_\infty$ is wrapped into a sequence of layers of tori. And therefore in turn, the 3-dimensional interior of the Bianchi fundamental polyhedron is wrapped around the image of $\mathbf{T}_\infty$ along the entire surface of the latter, such that there is a neighbourhood inside ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$ which is homeomorphic to the Cartesian product of a 2-torus and an open interval. Hence, there is, in a suitable ambient space, a neighbourhood of the image of $\mathbf{T}_\infty$ that is homeomorphic to Euclidean 3–space with the interior of a solid torus removed. Now, considering the cell structure of the torus, we see that precisely one of the loops generating the fundamental group of $\mathbf{T}_\infty$ can be contracted in the interior of the quotient of the Bianchi fundamental polyhedron — namely, the loop given by the edge that has its endpoints identified by γ_x. The other loop (the one obtained by the identification by γ_y) is nontrivially linked with the removed solid torus. This entails that it cannot be unlinked when moving it in the Borel–Serre compactification of ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$, and thus remains uncontractible there. For each ideal class that is represented by a singular cusp σ which is subject to one of Bianchi's additional symmetries, we observe the following. The radius r_σ of the reflecting sphere is smaller than 1 (cf. Table 1), and hence the above described contraction happens *within* the half touching the cusp ∞. By our Γ-cell structure preserving isometry, we get a copy of this contraction. The rôles of γ_x and γ_y are then played by $M_\sigma \gamma_x M_\sigma^{-1}$ and $M_\sigma \gamma_y M_\sigma^{-1}$ with M_σ specified in Table 1. Hence the inclusion of $\mathbf{T}_\sigma$ into ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ makes exactly one of the edges of $\mathbf{T}_\sigma$ become the boundary of a 2–chain. The number of such cusps σ is given by Theorem 4. And Serre's theorem about the rank of the map α [12, théorème 7] allows us to conclude that no nontrivial linear combination of these loops can be homologous to zero. $\square$

Note that only with Bianchis additional symmetries, we get more than one linked loop. Sufficiently many of these symmetries are available only for the Bianchi orbifolds specified in Corollary 3, and in general we just have the one linked loop at the torus at infinity, which was already observed in Serre's original paper. As the class group type assumed in Corollary 3 occurs only finitely many times [14], it might seem disappointing that the scope of the theorem deduced from it in [9] is much more narrow than it was originally claimed, but this actually means that once that we leave this scope of validity, the topology of the Bianchi orbifolds near their boundary is much richer than asserted in [9], and can provide interesting studies for future generations of mathematicians.

Acknowledgements. The author would like to thank Lizhen Ji for a helpful correspondence which laid the foundations for the present paper. He is grateful to the University of Luxembourg for funding his research through Gabor Wiese's AMFOR grant.

Version française

Abstract. Dans une note précédente, l'auteur a essayé de répondre une question de Jean-Pierre Serre; il s'avère que le domaine de validité de cette réponse doit être ajusté, ce qui est le but de la note présente. La question originale est la suivante. Considérons l'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ dans un corps quadratique imaginaire, et la compactification de Borel–Serre du quotient de l'espace hyperbolique $\mathcal{H}$ à 3 dimensions par $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$. Considérons l'application α induite en homologie quand le bord est attaché dans la compactification de Borel–Serre. *Comment peut-on déterminer le noyau de α (en degré 1) ?* Serre se servait d'un argument topologique global et obtenait le rang du noyau de α. Il rajoutait la question de quel sous-module précisément il s'agit pour ce noyau.

Introduction

Comme la note "On a question of Serre" [9] par l'auteur fut publiée avant d'atteindre son état de maturité, la démonstration du lemme clé restant en esquisse, l'auteur a contacté un expert pour la compactification de Borel–Serre, Lizhen Ji, avec le projet d'établir une version détaillée de cette démonstration clé. Ensuite, Lizhen Ji trouvait qu'il y a des cas où la démonstration ne peut pas être appliquée. Il est donc nécessaire de corriger le domaine de validité du lemme, ce que nous allons faire dans le manuscrit présent.

Dans tout ce manuscrit, nous nous servons du modèle $\mathcal{H}$ de demi-espace supérieur pour l'espace hyperbolique $\mathcal{H}$ à trois dimensions, comme il est celui utilisé par Bianchi. En tant qu'ensemble, $\mathcal{H} = \{(z,\zeta) \in \mathbf{C}\times\mathbf{R} \mid \zeta > 0\}$. Considérons un corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, où m est un entier positif ne contenant pas de carré, et son anneau d'entiers $\mathcal{O}$. Les *groupes de Bianchi* sont les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, qui agissent de manière naturelle sur $\mathcal{H}$ (cf. les monographes [5], [6], [7]). *Dans l'intégralité de ce manuscrit, nous allons exclure pour l' anneau $\mathcal{O}$ les entiers Gauss, dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, et les entiers de Eisenstein, dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.* Ces deux cas particuliers peuvent être traités séparément. Pour un sous-groupe Γ d'indice fini dans un groupe de Bianchi, nous considérons la compactification ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ de Borel–Serre du quotient ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$ de l'espace hyperbolique à trois dimensions, construite dans l'appendice de [12], qui joint un 2-tore $\mathbf{T}_\sigma$ à ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$ à chaque pointe σ.

Question 1 (Serre [12]). *Considérons l'application α induite en homologie quand le bord est attaché dans la compactification de Borel–Serre ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$. Comment peut-on déterminer le noyau de α (en degré 1) ?*

Motivation de la question 1. La recherche d'un ensemble de générateurs pour le noyau de l'application α de recollement du bord admet des motivations qui sont indiquées déjà dans l' ouvrage de Serre datant de 1970. Cet ouvrage, après d'achever son but qui est de résoudre le problème des sous-groupes de congruence, décrit comment on peut calculer l' Abélianisé des groupes arithmétiques cernés en termes de générateurs du noyau de l'application de recollement du bord. Pour Γ un groupe de Bianchi où un de ses sous-groupes de congruence, un tel savoir sur l' Abélianisé Γ^{ab}, en particulier en termes de matrices génératrices, admet l'application suivante au programme de Langlands (et nous pouvons présumer que cette application fut déjà réalisée par Serre en ces temps, à cause de sa question suivante dans le même ouvrage). Pour tout poids k de formes modulaires, il y a un module M_k de coefficients tel que l' isomorphisme de Eichler–Shimura–Harder identifie l' espace de formes modulaires de poids k pour Γ avec la cohomologie $H^1(\Gamma; M_k)$. Cette dernière peut être calculée explicitement comme $\mathrm{Hom}(\Gamma^{\mathrm{ab}}, M_k)$ quand Γ^{ab} est donné en termes de matrices génératrices. Pour ces calculs, il ne serait donc pas nécessaire de passer par une détermination explicite d'un domaine fondamental comme le polyèdre fondamental de Bianchi, ce qui est une étape nécessaire encore de nos jours [10,11] pour calculer la dimension de $H^1(\Gamma; M_k)$.

Le lemme suivant fut la clé pour l'approche à la question 1 suivie dans la note de 2012 [9]. Pour le reste de ce manuscrit, nous considérons un corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ avec D en entier naturel sans carré, et nous posons $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-D})})$. Nous décomposons le 2-tore $\mathbf{T}_\sigma$ de la manière classique en une 2-cellule, deux arêtes et un sommet.

Lemme 2. *Soit n le nombre de diviseurs premiers de D. Soit $N = 2^{n-1}$ pour $D \equiv 2$ où $3 \mod 4$, $N = 2^n$ pour $D \equiv 1 \mod 4$. Alors, ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$ admet au moins N pointes σ telles que l' inclusion de $\mathbf{T}_\sigma$ dans ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ fait devenir précisément une des arêtes de $\mathbf{T}_\sigma$ le bord d'une 2–chaîne.*

L'hypothèse concernant σ était manquante dans la note de 2012 [9], et nous allons donner une démonstration complétée dans le paragraphe 2, faisant usage de cette hypothèse.

Corollaire 3. *Si le groupe de classes d' idéaux de $\mathcal{O}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}$ pour quelque $m \in \mathbf{N}$, alors pour toutes les pointes σ de ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$, l' inclusion de $\mathbf{T}_\sigma$ dans ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ fait devenir précisément une des arêtes de $\mathbf{T}_\sigma$ le bord d'une 2–chaîne.*

Proof. Par [4, thm. 3.22], notre hypothèse sur le groupe de classes de $\mathcal{O}$ est équivalent à $m = \begin{cases} n-1, & D \equiv 2 \text{ où } 3 \mod 4, \\ n, & D \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$ Il est bien connu que chaque classe d' idéaux de $\mathcal{O}$ correspond à une pointe de ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$; donc il y a N pointes, et le lemme 2 entraîne l' assertion. $\square$

1. Les symétries supplémentaires de Bianchi

La liste de symétries trouvées par Bianchis et présentées dans ce paragraphe nous permet de réduire la démonstration dans le prochain paragraphe en chaque cas à la situation à la pointe à l'infini. Comme domaine fondamental dans l'espace hyperbolique, nous nous servons du polyèdre manquant des sommets aux pointes décrit par Bianchi [2], et que nous allons appeler le *polyèdre fondamental de Bianchi.* Il est l' intersection d'un domaine fondamental dans $\mathcal{H}$ pour le stabilisateur dans Γ de la pointe à ∞ (de la forme d'un prisme rectangulaire) avec l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ qui sont plus proches de ∞ que de n'importe quelle autre pointe. Nous considérons la structure cellulaire sur ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ induite par le polyèdre fondamental de Bianchi. À travers les articles de Bianchi [2,3], il n'était pas clair que l' on peut toujours calculer le polyèdre fondamental de Bianchi, un fait qui entre-temps a été établi par un algorithme de Richard G. Swan [13], qui a été implanté au moins deux fois [1,8]. La raison pourquoi dans quelques cas Bianchi ne trouvait pas le polyèdre fondamental de Bianchi, doit être que quelques "sfere di riflessione impropria" lui échappaient [2, §20; dans le premier exemple, $D = 14$, il s'agit de la hémisphère de centre $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-14}}{3}$ et rayon $\frac{1}{6}$]. Notons que dans le modèle de demi-espace supérieur, les plans totalement géodésiques sont modelés par des plans verticaux, respectivement par des hémisphères centrées dans le bord; donc nous allons les appeler des "(hémi)sphères de reflet" afin de continuer la terminologie de Bianchi, bien qu'ils doivent être pensés comme des plans reflétants dans l' espace hyperbolique. À la place des sphères de reflet manquantes, Bianchi trouvait des symétries supplémentaires qui lui permettaient de construire un domaine fondamental d'une forme différente mais équivalente [3]. Ces symétries vont constituer la base de notre démonstration. Depuis les ouvrages de Bianchi, une pointe est appelée *singulière* si elle n'est pas sur la Γ-orbite de ∞.

Théorème 4 (Bianchi)**.** *Soient D, n et N comme dans le lemme 2. Alors le groupe de symètries du polyèdre fondamental de Bianchi admet un sous-groupe d' ordre N, dont chaque élément non-trivial échange la pointe ∞ contre une pointe singulière différente, en laissant invariante une hémisphère de rayon inférieur à 1, et préservant la structure Γ-cellulaire.*

Nous allons appeler ces éléments les *symétries supplémentaires de Bianchi.* Pour la démonstration du théorème, nous suivons soit la version anglaise ci-dessus, soit l'article original de Bianchi en italien [3, §1 et §2].

2. La démonstration

Nous allons utiliser les symétries supplémentaires de Bianchi afin de décomposer le polyèdre fondamental de Bianchi en deux parties isométriques telles que le plan coupant entre les deux parties est équidistant entre ∞ et la pointe singulière où se trouve $\mathbf{T}_\sigma$.

Proof of lemma 2. Considérons, dans le bord du polyèdre fondamental de Bianchi, le rectangle fondamental $\mathcal{F}$ pour l' action du stabilisateur de la pointe ∞ sur le plan collé à $\mathcal{H}$ à la pointe ∞. Il y a une suite de rectangles dans $\mathcal{H}$ obtenue comme déplacements de $\mathcal{F}$ orthogonaux à tous les arcs géodesiques rayonnant de la pointe ∞. De cette manière, la portion du polyèdre fondamental qui touche la pointe ∞, est localement homéomorphe au produit Cartésian d' un arc géodesique avec un déplacement de $\mathcal{F}$. Les bords de ces déplacements sont sujets aux mêmes identifications par Γ que le bord de $\mathcal{F}$. En effet, dénotons par $t(\mathcal{F})$ un de ces déplacements de $\mathcal{F}$; et dénotons par γ_x et γ_y deux générateurs, modulo la matrice -1, du stabilisateur de la pointe, identifiant les arêtes opposées de $\mathcal{F}$. Nous pouvons choisir $\gamma_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma_y = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, γ_x et γ_y identifient les arêtes opposées de $t(\mathcal{F})$ et font en sorte que le quotient de $t(\mathcal{F})$ devienne un tore. Donc dans l'espace quotient de l' action de Γ, l' image de $\mathbf{T}_\infty$ est emballée par une suite de couches de tores. Et alors l' intérieur 3-dimensionnel du polyèdre fondamental de Bianchi à son tour emballe l' image de $\mathbf{T}_\infty$ le long de toute la surface de ce dernier, tel qu'il y a, à l'intérieur de ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$, un voisinage qui est homéomorphe au produit Cartésien d'un 2-tore et d'un intervalle ouvert. Pour cette raison, il y a, dans un espace ambiant convenable, un voisinage de l' image de $\mathbf{T}_\infty$ qui est homéomorphe à l' espace Euclidéen à 3 dimensions duquel on a enlevé l'intérieur d' un tore solide. Maintenant, nous considérons la structure cellulaire du tore, et nous voyons que précisément un des lacets engendrant le groupe fondamental de $\mathbf{T}_\infty$ peut être contracté à l'intérieur du quotient du polyèdre fondamental de Bianchi; en effet, il s'agit du lacet donné par l' arête les sommets terminaux de laquelle sont identifiés par γ_x. L' autre lacet — celui obtenu par l' identification par γ_y — est entrelacé avec le tore solide enlevé, et reste donc incontractile dans la compactification de Borel–Serre de ${}_\Gamma\backslash\mathcal{H}$. Pour toute classe d' idéaux qui est représentée par une pointe singulière σ qui est sujet à une des symétries supplémentaires de Bianchi, nous observons le fait suivant. Le rayon r_σ d'une sphère de reflet est inférieur à 1 (cf. le tableau 1), et pour cette raison, la contraction décrite ci-dessus se produit *à l' intérieur* de la moitié qui touche la pointe ∞. Par notre isométrie préservant la structure Γ-cellulaire, nous obtenons une copie de cette contraction. Les rôles de γ_x et γ_y sont alors joués par $M_\sigma \gamma_x M_\sigma^{-1}$ et $M_\sigma \gamma_y M_\sigma^{-1}$, avec M_σ spécifiée dans le tableau 1. Donc l' inclusion de $\mathbf{T}_\sigma$ dans ${}_\Gamma\backslash\widehat{\mathcal{H}}$ fait devenir exactement une arête de $\mathbf{T}_\sigma$ le bord d' une 2–chaîne. Le nombre de telles pointes σ est donné par le théorème 4. Et le théorème de Serre sur le rang de l'application α [12, théorème 7] nous permet de conclure qu'aucune combinaison linéaire non-triviale de ces lacets ne peut être homologue à zéro. $\square$

Notons que seulement avec les symétries supplémentaires de Bianchi, nous obtenons plus qu'un seul entrelac noué. Un nombre suffisant de ces symétries est disponible seulement pour les orbi-espaces de Bianchi spécifiés dans le corollaire 3; et en général, nous avons seulement l'entrelac noué au tore à l'infini, qui a déjà été observé dans l'article original de Serre. Comme le type de groupe de classes présumé dans le corollaire 3 apparaît seulement un nombre fini de fois [14], il peut paraître decevant que le domaine de validité du théorème déduit de lui dans [9] est beaucoup plus étroit qu' affirmé originalement; mais ceci signifie en fait que dès que nous partons de ce domaine de validité, la topologie des orbi-espaces de Bianchi proche à leur bord est beaucoup plus riche qu' affirmé dans [9], et peut fournir des études intéressantes à des futures générations de mathématiciennes et mathématiciens.

References

[1] M. T. Aranés, *Modular symbols over number fields*, Ph.D. thesis, University of Warwick, 2010.

[2] L. Bianchi, *Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginarî*, Math. Ann. **40** (1892), no. 3, 332–412 (Italian). MR1510727, JFM 24.0188.02

[3] ———, *Sui gruppi di sostituzioni lineari*, Math. Ann. **42** (1893), no. 1, 30–57, DOI 10.1007/BF01443444 (Italian). MR1510766, JFM 25.0198.04

[4] D. A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics (Hoboken), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013. Fermat, class field theory, and complex multiplication. MR3236783, Zbl 1275.11002

[5] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR1483315 (98g:11058), Zbl 0888.11001

[6] B. Fine, *Algebraic theory of the Bianchi groups*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. **129**, Marcel Dekker Inc., New York, 1989. MR1010229 (90h:20002), Zbl 0760.20014

[7] C. Maclachlan and A. W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **219**, Springer-Verlag, New York, 2003. MR1937957 (2004i:57021), Zbl 1025.57001

[8] A. D. Rahm, *Higher torsion in the Abelianization of the full Bianchi groups*, LMS J. Comput. Math. **16** (2013), 344–365. MR3109616

[9] ———, *On a question of Serre*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 15-16, 741–744. MR2981344

[10] A. D. Rahm and M. H. Şengün, *On level one cuspidal Bianchi modular forms*, LMS J. Comput. Math. **16** (2013), 187–199. MR3091734

[11] A. D. Rahm and P. Tsaknias, *Genuine Bianchi modular forms of higher level, at varying weight and discriminant*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **31** (2019), no. 1, 27–48.`http://hdl.handle.net/10993/29493`

[12] J.-P. Serre, *Le problème des groupes de congruence pour SL_2*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 489–527. MR0272790

[13] R. G. Swan, *Generators and relations for certain special linear groups*, Advances in Math. **6** (1971), 1–77. MR0284516

[14] P. J. Weinberger, *Exponents of the class groups of complex quadratic fields*, Acta Arith. **22** (1973), 117–124. MR0313221

Université du Luxembourg, Mathematics Research Unit
URL: `http://math.uni.lu/~rahm/`
E-mail address: `Alexander.Rahm@uni.lu`