ARTICULATION ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE

COMMENT PENSER LA PROGRESSION DES APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES ENTRE 10 ET 14 ANS?

Isabelle Demonty et Joëlle Vlassis

29 aout 2018

SBPM

Le contexte du travail

- Des recherches collaboratives menées en Belgique avec des instituteurs, des régents et des étudiants en sciences de l'éducation en vue de réfléchir à la mise au point d'activités susceptibles de réduire l'écart entre les apprentissages numériques du primaire et du secondaire

- La recherche PROBAL, menée au Grand-Duché du Luxembourg et visant à approfondir la réflexion au niveau des trois premières années du secondaire.

- L'ensemble de ces travaux ont abouti à la rédaction d'un livre qui paraitra au mois d'octobre prochain.

  But : des activités clés et un espace de réflexions pour permettre davantage de liens entre l'arithmétique et l'algèbre.

Plan de la présentation

- La philosophie générale du travail, s’ancrant dans les recherches actuelles menées dans le domaine
- Un atelier centrée sur une activité proposée dans l’ouvrage.

Les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, en pleine évolution…

- Années 80 : **Rupture** entre l'arithmétique du primaire et l'algèbre

  Comment aider les élèves du début de l'enseignement secondaire à bien comprendre que les règles du jeu changent lors des premiers apprentissages algébriques ?

- Depuis la fin des années 90 : **Continuité** dans les apprentissages numériques relevant de l'arithmétique et de l'algébrique.

  Comment la pensée des élèves peut progressivement acquérir les caractéristiques d'une pensée algébrique, au travers de l'exploitation, dès l'école primaire, d'activités centrées sur les nombres et les opérations ?

« Qu'est-ce qu'il peut être fait, dès l'école primaire, pour préparer les élèves à mieux comprendre l'algèbre au début de l'enseignement secondaire? »

2 façons de répondre à cette question

Soit on fait de l'algèbre précoce en primaire	**Soit on cherche ce qui, en arithmétique, peut préparer à l'algèbre**
⇔Travailler le programme du secondaire avant l'heure. Apprendre aux élèves les rudiments du calcul algébrique ou la résolution formelle d'équations.	⇔ Chercher, dans les apprentissages numériques des manières de raisonner qui prennent racine en arithmétique et qui sont essentielles en algèbre

Option 1 : Travailler l'algèbre formelle avant l'heure?

Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.			C
Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.			C
Résoudre et vérifier une équation du premier degré à une inconnue issue d'un problème simple.			C

Selon les socles, NON

Les élèves de 14 ans ont déjà beaucoup de difficultés en algèbre formelle => Peu d'arguments scientifiques soutiennent cette idée…

Option 2 : Chercher ce qui, en arithmétique, peut préparer à l'algèbre ?

Du côté des compétences à certifier à 12 ans?

Estimer, avant d'opérer, l'ordre de grandeur d'un résultat.	↗	C	E
Construire des tables d'addition et de multiplication, en comprenant leur structure, et les restituer de mémoire.	Pour la table d'addition des dix premiers nombres C	C	E
Utiliser la soustraction comme la réciproque de l'addition et la division comme la réciproque de la multiplication.	↗	C	E
Dans un calcul, utiliser les décompositions appropriées des nombres.	En sommes C	En sommes et en produits C	E

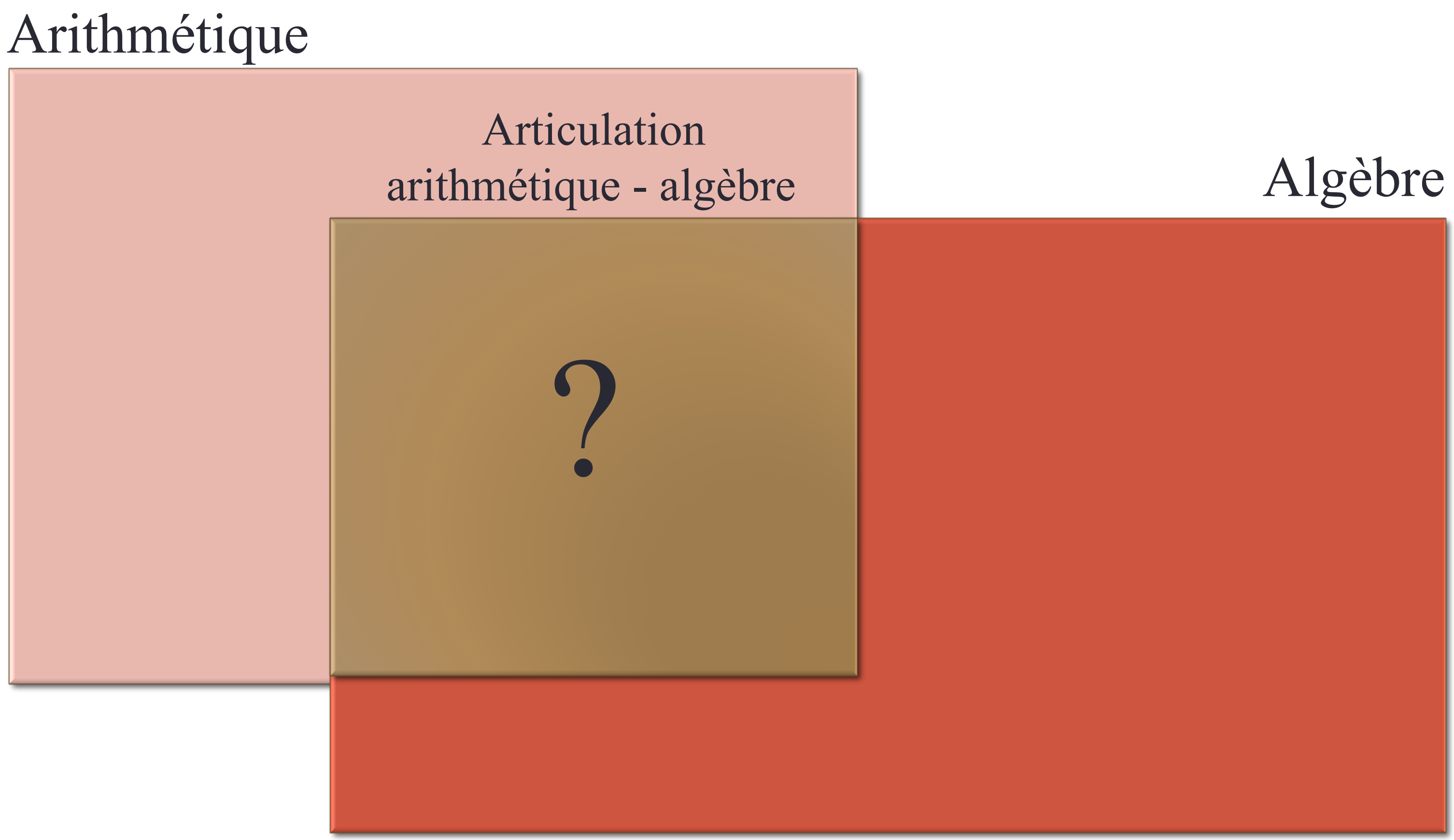
Transformer des expressions littérales, en respectant la relation d'égalité et en ayant en vue une forme plus commode.	?		C
Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.			C
Résoudre et vérifier une équation du premier degré à une inconnue issue d'un problème simple.			C

Les socles ne sont pas d'une grande aide pour trancher sur cette question…

Du côté des compétences en construction à 12 ans ?

Utiliser des propriétés des opérations.	↗	Pour remplacer un calcul par un autre plus simple, y compris en appliquant des démarches de compensation	Pour justifier une méthode de calcul C
Utiliser l'égalité en terme de résultat et en terme d'équivalence.	↗	↗	C
Relever des régularités dans des suites de nombres.	↗	↗	C

Le but n'est donc pas de déplacer des contenus classiquement abordés au secondaire vers le primaire mais plutôt de réfléchir à sa manière d'enseigner l'arithmétique et l'algèbre, afin d'assurer une articulation plus harmonieuse entre ces deux domaines.



Du côté des évaluations CEB/CE1D, des parallélismes possibles

CEB 2013

Il faut semer 30 graines de salade dans 8 pots (6 petits et 2 grands).

Un grand pot contient **deux fois plus** de graines qu'un petit pot.

Combien de graines contiendra un petit pot ?
Combien de graines contiendra un grand pot ?

CE1D 2016

Emma fait une randonnée de 54 km en trois jours.

Le 2e jour, elle marche 10 km de plus que le 1er jour.

Le 3e jour, elle marche le double de kilomètres parcourus le 2e jour.

DÉTERMINE la distance parcourue le 1er jour.

ÉCRIS tout ton raisonnement et tous tes calculs.

On retrouve des problèmes impliquant des quantités indéterminées

CEB 2013

a) **ÉCRIS** le nombre de cubes nécessaires pour réaliser la **construction 3**.

Construction 1

2 cubes

Construction 2

4 cubes

Construction 3

___ cubes

Construction 4

8 cubes

Construction 5

/2

b) Des élèves présentent à leur enseignant leurs procédés pour trouver le nombre de cubes nécessaires à la **construction 6**.

ENTOURE <u>trois</u> procédés possibles.

8 + 2 + 2	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2	19 – 7	6 x 2	(22 : 2) + 1

CE1D 2017

Observe cette suite d'assemblages de cubes.

Figure 1

Figure 2

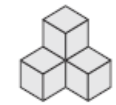
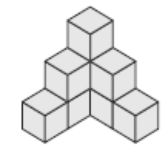


Figure 3



COMPLÈTE le tableau suivant :

Numéro de la figure	Nombre de cubes (même invisibles)
1	1
2	4
3	9
4	____

DÉTERMINE le numéro de la figure qui comporte 36 cubes.

DÉTERMINE le nombre de cubes de la figure n°10.

PROPOSE une formule qui permet de calculer le nombre de cubes en fonction du numéro *n* de la figure.

Nombre de cubes de la $n^{\text{ième}}$ figure : ____

On retrouve des activités qui incitent à généraliser

CEB 2016

COMPLÈTE les égalités.

- $76{,}4 + 83{,}9 =$ ________ $+ 84$
- $792 : 8 = (800 : 8) - ($ ________ $: 8)$
- $4 \times 7 \times 25 =$ ________ $\times 100$
- $128 : 16 = 64 :$ ________
- $805 -$ ________ $= 800 - 242$

CE1D 2016

EFFECTUE.

$4b + 4 - b =$ ____________________

$(6d - 5) \cdot (-2) =$ ____________________

$2a^2 - 4a^2 + 6a^2 =$ ____________________

$5m^3 \cdot 4m^2 \cdot m =$ ____________________

$3a - (1 - 2b) =$ ____________________

$(a - 2) \cdot (2b + 5) =$ ____________________

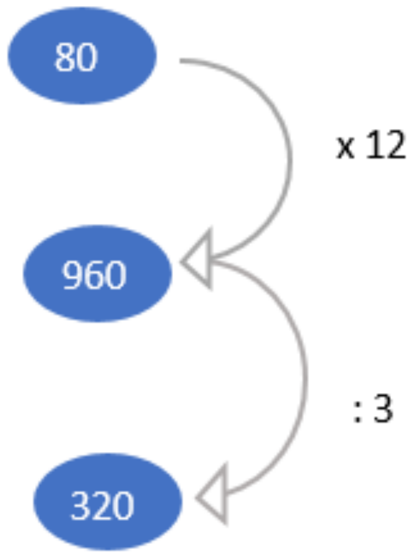
On retrouve des exercices amenant les élèves à transformer des opérations

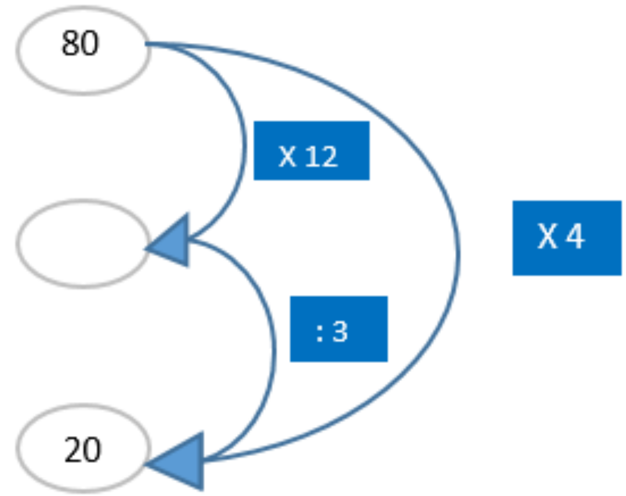
Quelle vision de l'arithmétique peut aider à asseoir les bases de l'algèbre?

Vision calculatoire	Vision relationnelle
• Les opérations et l'égalité sont perçues comme des commandes d'actions à accomplir • Focus sur les techniques de calcul pour elles-mêmes	• Les opérations et l'égalité sont perçues de manière globale, comme ayant des propriétés mathématiques particulières • Les techniques de calcul sont au service d'une prise de conscience des propriétés des opérations et de l'égalité.

(Carpenter, Levi, Franke & Khoeler, 2005)

80 x 12 : 3





Raisonnements pour effectuer les calculs. L'accent est mis sur l'application d'une procédure

Il faut d'abord multiplier 80 par 12. Pour y arriver, on peut faire 8 x 12 et « ajouter » un zéro, donc ça donne 960.

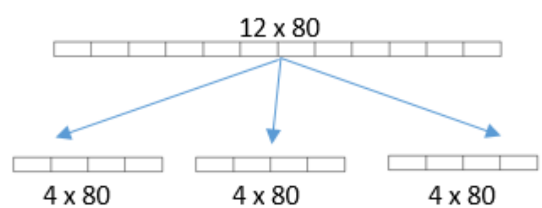
80 x 12 = 960

Ensuite, il s'agit de diviser 960 en 3, cela donnera 320 car 9 : 3 c'est 3, 6 : 3, c'est 2 et on « ajoute » un zéro à la fin.

960 : 3 = 320

Raisonnements pour effectuer les calculs : l'accent est mis sur une compréhension fine des opérations à réaliser

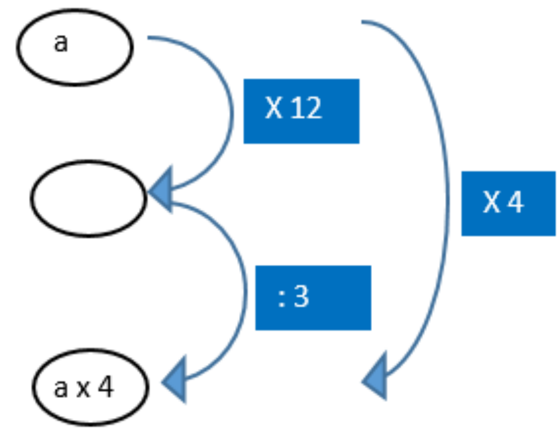
Prendre 12 fois le nombre 80 et puis diviser par 3, cela revient au même que prendre 4 fois le nombre 80.



Donc 80 x 12 : 3
= 80 : 4
= 20

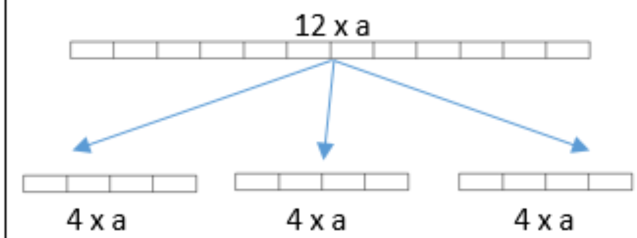
- En algèbre, l'accent est également mis sur les relations

Vision relationnelle de l'algèbre



Raisonnements pour effectuer les calculs

Prendre 12 fois un nombre et puis diviser par 3, cela revient au même que prendre 4 fois le nombre.



Donc a x 12 : 3 = a x 4

- Lorsque l'arithmétique est appréhendée dans une perspective calculatoire, il y a peu de lien entre l'arithmétique et l'algèbre.

- En revanche, appréhender l'arithmétique de manière relationnelle permet de mettre à jour davantage de connections entre l'arithmétique et l'algèbre.

Premier élément clé de l'articulation arithmétique – algèbre : développer une vision relationnelle visant à

- Travailler le sens de l'égalité
- Faire prendre conscience aux élèves des propriétés des opérations.

1) Sens de l'égalité

Quel nombre doit-on mettre à la place du ? pour que l'égalité suivante soit vraie ?

$$8 + 4 = ? + 5$$

12 17 7

Carpenter, Franke & Levy (2003)

12 parce que 8 + 4 = 12	17 parce que 8 + 4 + 5 = 17	7 parce que 8 + 4 ça fait 12. Donc ? + 5 doit être égal à 12 aussi. Donc ? doit être égal à 7, car 7 + 5 = 12	7 parce que à droite de l'égalité, on a ajouté 8 à 4. Pour avoir le même résultat, vu qu'on part de 5, il faudra ajouter 1 de moins que 8 pour avoir le même résultat, donc 7.

2 éléments clés:

- Comprendre que l'égalité ne désigne pas l'amorce d'un résultat
- Parvenir à justifier l'égalité en fonction d'une analyse des opérations plutôt que de passer par le calcul du résultat des opérations présentes dans chaque membre de l'égalité

2) Prendre conscience des propriétés des opérations

Une enseignante demande aux élèves d'effectuer le calcul

17 x 36.

Elle fait comparer les résultats et ils constatent que la réponse correcte est 612.

Un de ses élèves, Thomas, avait proposé le raisonnement suivant : J'arrondis 17 à 20 et 36 à 40. Je sais que 20 x 40, ça donne 800. Après, je retire les 3 en trop (17 -> 20) et les 4 en trop (36 -> 40). La réponse est 793.

L'enseignante demande à Thomas d'écrire sa réponse au tableau et de l'expliquer à la classe.

Une fois que Thomas (qui savait que 793 n'était pas la réponse correcte) a eu fini son explication, l'enseignante demande comme devoir, de comprendre comment Thomas a réfléchi au problème, et pourquoi il n'a pas obtenu la bonne réponse.

Que pensez-vous de la réaction de l'enseignante ?

Russel, Schifter & Bastable (2011)

- La méthode de Thomas illustre une erreur qui consiste à appliquer une technique qui marche pour une opération et qui ne marche pas pour une autre.

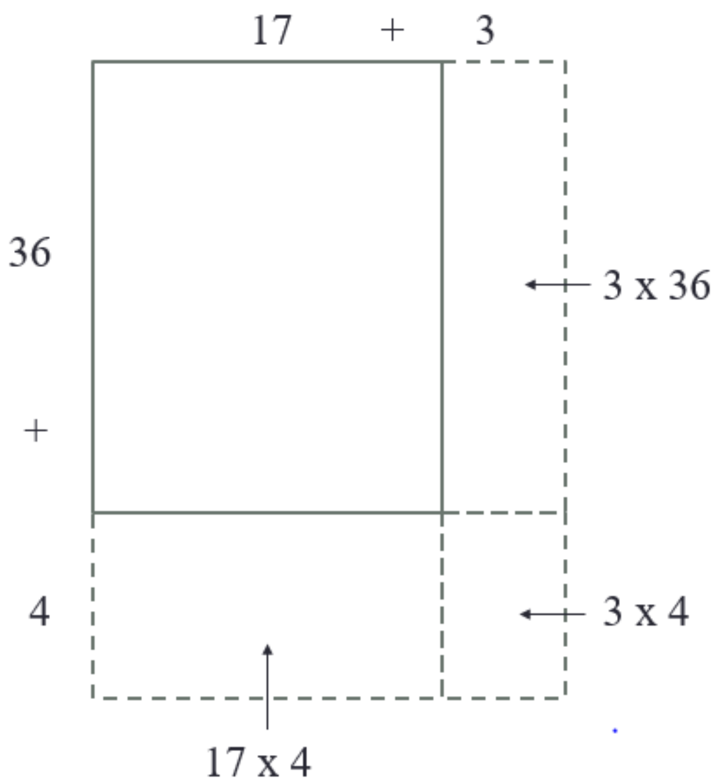
$$17 + 36 = (17 + 3) + (36 + 4) - 3 - 4 = 20 + 40 – 7 = 53$$

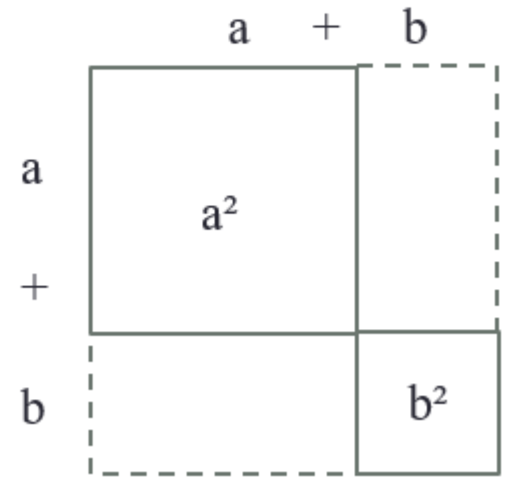
- L'erreur de Thomas, on la retrouve sous d'autres formes en secondaire :

$-3 - 5 = 8$	(car « - » par « - » donne « + »)
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$	(car $(a.b)^2 = a^2 . b^2$)
$2(xy) = 2x . 2y$	(car $2(x+y) = 2x + 2y$)

→ Tant en arithmétique qu'en algèbre, les élèves repèrent des similitudes avec des règles étudiées, sans chercher à revenir au sens profond des opérations …

En étudiant explicitement la démarche de Thomas, et en tentant d'expliquer pourquoi elle ne fonctionne pas, les élèves ont l'occasion de réfléchir à une propriété de la multiplication (la distributivité) dans le but de comprendre le rôle du 3 et du 4 que Thomas a additionnés.





$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$17 \times 36 \neq 20 \times 40 - 7$$

- Etude longitudinale menée en Nouvelle-Zélande (Britt & Irwin, 2011)

  les élèves qui développent, dès l’école primaire, des stratégies raisonnées de calcul parviennent mieux que les autres à comprendre les calculs algébriques en début de secondaire.

Quelle vision de l'algèbre peut s'appuyer sur les apprentissages réalisés en arithmétique ?

Historiquement, l'algèbre est apparue lorsqu'on a commencé à réaliser des opérations impliquant des quantités indéterminées

⇒ Cette capacité à effectuer des opérations sur des quantités indéterminées est donc une caractéristique essentielle de l'algèbre. (Radford; 2014 et 2018)

⇒ Il est tout à fait possible de développer, dans un cadre purement numérique, cette capacité à effectuer des opérations sur des quantités indéterminées.

- Exemples : la résolution de problèmes

Martha, Raphaël et Anne ont ensemble 270 porteclés. Raphaël a le double du nombre de porteclés de Martha et Anne a le triple du nombre de porteclés de Raphaël. Combien de porteclés chacun a-t-il ?

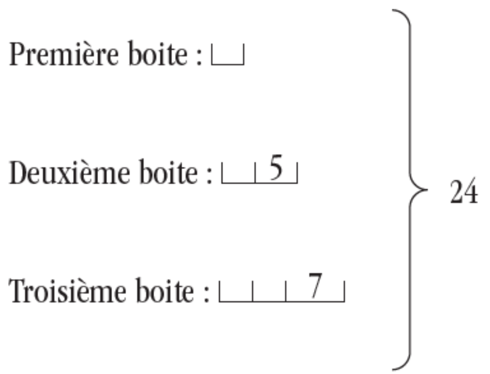
Martha : x

Raphaël : x x

Anne : x x x x x x

$$\begin{array}{r|l} 270 & 9 \\ \hline -27 & 30 \\ 00 & \\ -0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

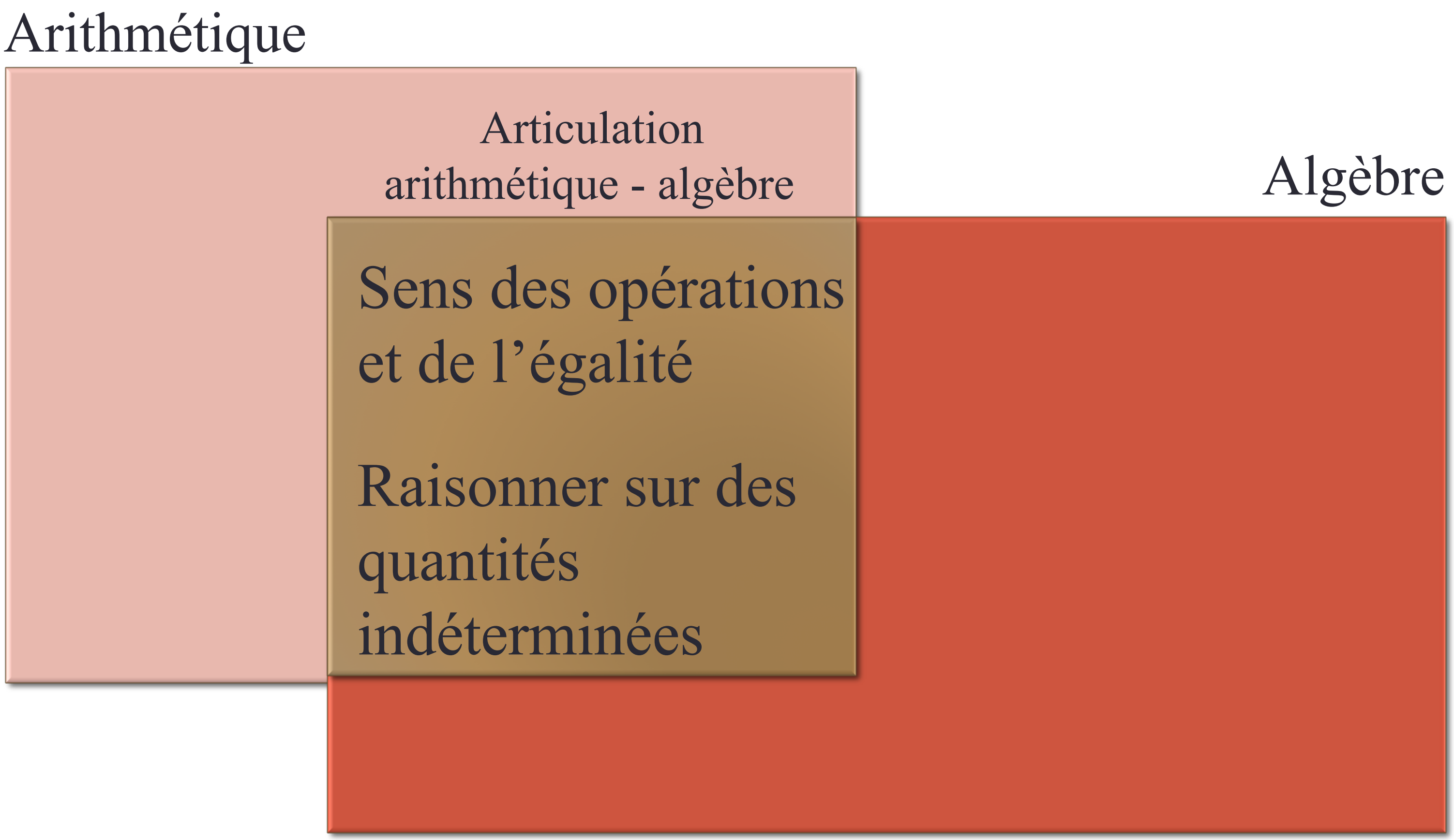
Rép : Martha : 30
Raphaël : 60
Anne : 180

Trois boites contiennent des bonbons. La deuxième boite contient 5 bonbons de plus que la première boite et la troisième boite contient 7 bonbons de plus que la première boite. En tout, il y a 24 bonbons. Combien de bonbons contiennent chacune des boites ?	
Schématisation en bandelettes	Mise en équation
	<u>Choix des inconnues :</u> • Nombre de bonbons dans la première boite : x • Nombre de bonbons dans la deuxième boite : $x + 5$ • Nombre de bonbons dans la troisième boite : $x + 7$ <u>Mise en équation</u> $x + (x + 5) + (x + 7) = 24$

Deuxième élément clé de l'articulation arithmétique – algèbre :

Apprendre aux élèves à élaborer des raisonnements qui envisagent des **quantités indéterminées** aidera à asseoir les bases sur lesquelles pourront s'ancrer les démarches algébrique de résolution de problèmes.

Modèle pour travailler l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre



- Favoriser l’articulation n’impose pas de surcharger les matières à enseigner à l’école primaire ou secondaire

- C’est plutôt le regard à porter sur certaines activités qui doit changer
  - Du côté du primaire : développer le « regard algébrique » sur des situations impliquant des nombres
  - Du côté du secondaire : faire des liens avec ce qui a été appris en arithmétique, pour permettre une meilleure compréhension des concepts et procédures algébriques.

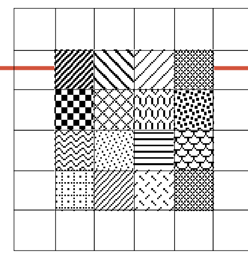
- Activités pensées en progression et suscitant des discussions en classe

  => prévues pour une utilisation flexible.

Un exemple de situations pour promouvoir l'articulation arithmétique – algèbre

Les activités de généralisation

Antoine fait des mosaïques



Isabelle Demonty, Université de Liège

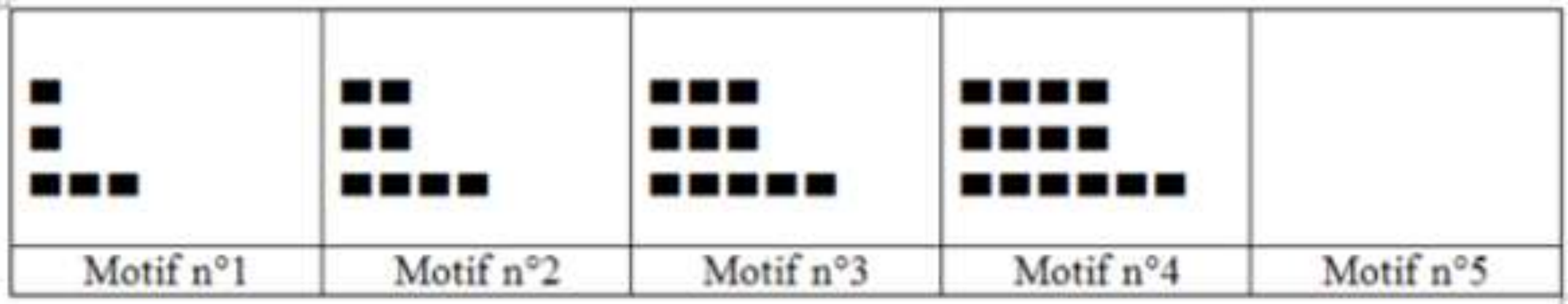
Joëlle Vlassis, Université du Luxembourg

44^{e} congrès de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française

Bruxelles , 28 - 30 août 2018

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

Les activités de généralisation



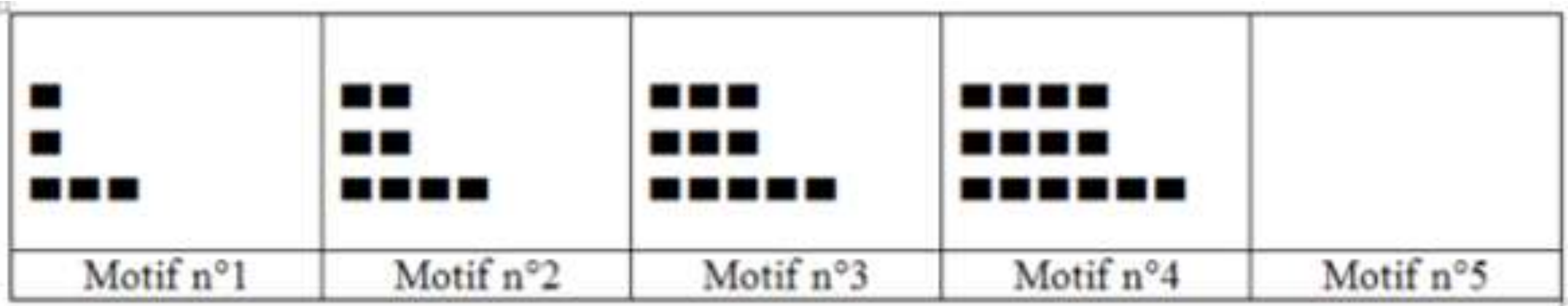
- Combien de carrés au motif n° 5, au motif n° 12?
- Parfois tableau des nombres en support :

N° du motif	Nb de carrés
1	5
2	8
3	11
4	?

- Comment déterminer le nombre de carrés quel que soit le numéro du motif (n)?

  $\rightarrow 3n + 2$ ou $(n+2) \; + 2n$ ou …

Les activités de généralisation



Objectif principal de ces activités

Amener les élèves à "généraliser" un processus.

Ce qui est demandé dans la situation, c'est de trouver un moyen général et non plus de trouver une réponse numérique.

Généraliser amène les élèves **à s’intéresser aux opérations**, aux relations entre les nombres et **non plus seulement au résultat numérique** de l’opération.

=> On évitera les tableaux des nombres qui invitent les élèves à se focaliser sur les résultats et non le sens des

Comment les élèves symbolisent-ils leur moyen de généralisation? (Radford 2006, 2008)

- **La variable est symbolisée par un nombre** (généralisation factuelle)
  Exemple :
  « Par exemple, si on prend le motif 7, on doit faire 7 x 3 + 2 »

- **La variable est symbolisée par un substitut symbolique** (généralisation contextuelle):
  Exemples :
  ? x 3 + 2
  numéro du motif x 3 + 2
  $(n \cdot 3) + 2$

- **Une expression algébrique formelle** (généralisation algébrique)
  Exemple :
  $3n + 2$
  Cette expression se détache de la situation et propose une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique.

Atelier basé sur l'expérimentation de l'activité

ANTOINE FAIT DES MOSAIQUES

- Quel(s) objectif(s) mathématique(s) voyez-vous à cette activité?
- Quel est l'intérêt de développer ce type d'activité au primaire? au secondaire?

Présentation de l'activité "Antoine fait des mosaïques"

Quelques éléments de contexte

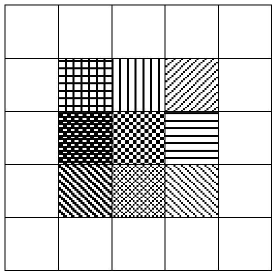
- Activité adaptée par les enseignants
- Utilisation de matériel suggéré par les enseignants
- Passation dans 2 classes (observées)

  1ère secondaire" technique" : pas encore d'apprentissage de l'algèbre

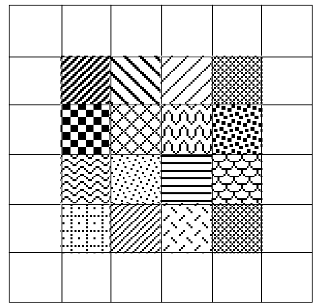
  2e secondaire "technique": apprentissage de l'algèbre depuis 12 mois environ
- Les élèves travaillaient en groupes (5 groupes en 1ère - 7 groupes en 2e)

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
……………………………………………………………………………………………

2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
……………………………………………………………………………………………

3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
……………………………………………………………………………………………

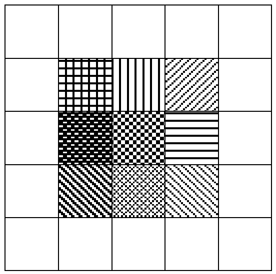
4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
……………………………………………………………………………………………

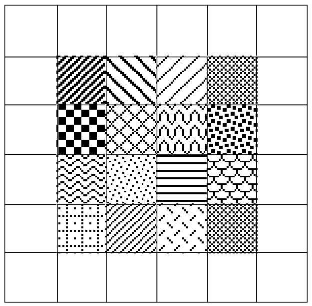
Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de
3 carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de
4 carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
……………………………………………………………………………………………

2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
……………………………………………………………………………………………

3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
……………………………………………………………………………………………

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

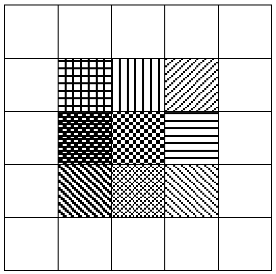
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
……………………………………………………………………………………………

Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

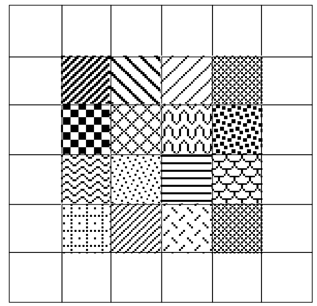
Focaliser l'attention des élèves sur les opérations

Antoine fait des mosaïques

Antoine veut réaliser des mosaïques carrées réalisées à partir de carrés, dont certains sont colorés et d'autres pas. Ces mosaïques sont de différentes tailles mais elles sont toutes produites sur le même modèle comme dans les exemples ci-dessous :



Mosaïque réalisée à partir de **3** carrés de couleur sur un côté



Mosaïque réalisée à partir de **4** carrés de couleur sur un côté

Antoine veut réaliser des mosaïques de différentes tailles. Pour prévoir le matériel, il cherche un moyen de calculer le nombre de carrés blancs dont il aura besoin à partir du nombre de carrés de couleurs qu'il veut mettre sur un côté de la mosaïque.

1) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 5 carrés de couleur sur un côté.
   A l'aide du matériel, construisez cette mosaïque.
   Combien de petits carrés blancs sont-ils nécessaires pour réaliser cette mosaïque?
   ……………………………………………………………………………………………

2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté.
   Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.
   ……………………………………………………………………………………………

3) Faites de même pour une mosaïque construite à partir de 32 carrés de couleur sur un côté.
   ……………………………………………………………………………………………

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de carrés blancs nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
   ……………………………………………………………………………………………

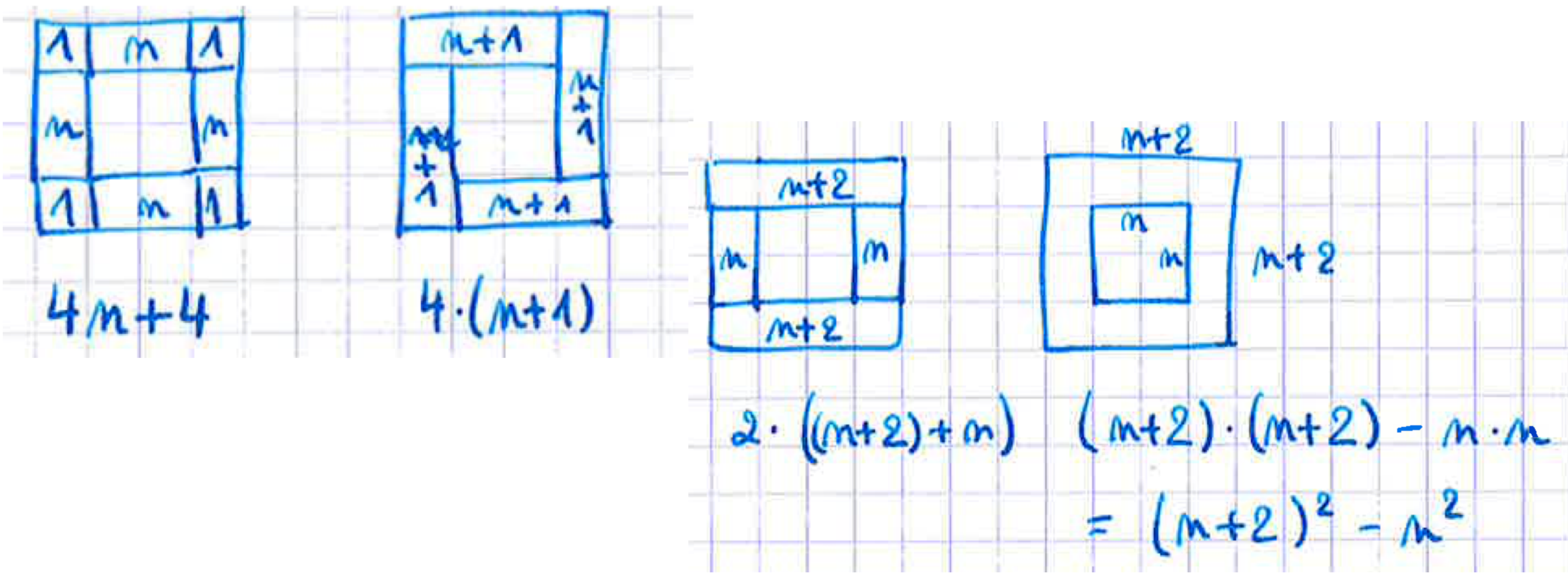
Partir des actions concrètes des élèves sur le matériel

Focaliser l'attention des élèves sur les opérations

Produire un message/une expression avec une indéterminée (nombre qu'on ne connaît pas)

ANALYSE DES DEMARCHES D'ÉLÈVES

1. Diversité des démarches des élèves



Cette diversité témoigne du potentiel de ces activités dans le développement de la pensée algébrique

car qui dit diversité, dit comparaison des formules ou des opérations,

=> possibilité de travailler le sens de l'égalité, des opérations, des techniques algébriques

2. Formules produites par les élèves

- **Formules qui "collent" aux actions posées** (généralisation contextuelle)

1ère année	G1 – 2	$(4 \cdot x) + 4 = ?$
	G1 – 4	$x \cdot 2 + (x + 2) \cdot 2$
3e année	G3 – 1	$4 \cdot 2 + 4 \cdot 1$
	G3 – 2	$a + b + a + b$
	G3 – 6	$4 \cdot a + b$ 4

- **Formules algébriques** (généralisation algébrique)

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
$N + 2 + N + 2 + N + N = 4 \cdot N + 4$

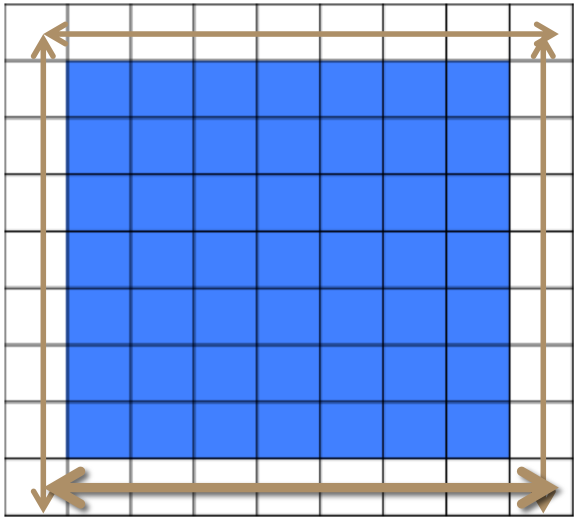
5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.
$x + 2 + x + x + 2 + x = 4x + 4$

4. Principales difficultés des élèves

a) Dans le processus de généralisation

- Difficultés à identifier les éléments de régularité (invariants)
  - ✧ Deux groupes se basent sur le périmètre à la question deux et proposent le calcul 9 x 4 plutôt que 2 x 7 + 2 x 9
  - ✧ Plusieurs éprouvent des difficultés à passer du dénombrement (question 1 voire 2) à la production du calcul (question 3)
- Difficulté à utiliser les invariants correctement trouvés à la question 2 dans la question 3
  - ✧ Un groupe produit le calcul (9.9) – (7.7) mais ne parvient pas à appliquer le même raisonnement à la question 3.
  - ✧ Idem pour un groupe qui produit le calcul 8 x 4 à la question 2 mais ne transfère pas ce raisonnement à la question 3.

Un groupe propose 9 x 4 = 36



2) Antoine voudrait réaliser une mosaïque à partir de 7 carrés de couleur sur un côté. Cherchez cette fois un calcul qui lui permettra de trouver combien de carrés blancs sont nécessaires dans ce cas.

Sur base d'un schéma produit tel que celui ci-dessus, les élèves produisent le calcul suivant : **9 x 4 = 36**

4. Principales difficultés des élèves
(suite)

b) Dans le processus de symbolisation

- Exprimer une variable en fonction d'une autre

  Exemple :

4) Trouvez un moyen qui permette de calculer, à chaque fois, le nombre de mosaïques blanches nécessaires pour réaliser une mosaïque, quel que soit le nombre de carrés colorés de côté.

On calcule coté par coté, mais è deux côtes on è des differentes nombres pour calculer
eddition.

5) Ecrivez ce moyen en langage mathématique.

è+è+b+b

- Confusion entre constantes et variables

  Exprimer la formule par $4x + b$

INTÉRÊT DE L'ACTIVITÉ

AVANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

1. Pour donner du sens aux opérations

Focaliser l'attention sur les opérations et non plus seulement sur la réponse

Mosaïque de 5 carrés 5 x 4 + 4 = 24 carrés blancs

de 7 carrés 7 x 4 + 4 = 32 carrés blancs

de 32 carrés 32 x 4 + 4 = 132 carrés blancs

- Pour généraliser, il faut regarder non pas la réponse, mais le calcul
- Dans tous les cas : On multiplie le nombre de carrés sur un côté de couleur par 4 puis on ajoute 4 à la réponse.

Amener les élèves à se détacher du résultat du calcul pour analyser les opérations

AVANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

2. Pour donner du sens au signe d'égalité

Comment écrire en langage mathématique ?

"S'il y a 32 carrés de couleur de côté, on prend le nombre de carrés qu'on multiplie par 4 et on ajoute 4 à la réponse"

32 x 4 = 128 + 4 = 132 ?

ou

32 x 4 + 4 = 132 ?

Travailler sur les enchaînements erronés d'égalités

AVANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

3. Pour donner du sens aux opérations et à l'égalité

<u>Comparaison des différents calculs produits</u> (possible grâce à la variété des démarches qu'autorise cette activité)

33 . 4 = 132

32 + 32 + 34 + 34 = 132

(4 x 32) + 4 = 132

mais aussi (34.34) – (32.32) = 132

Demander aux élèves pourquoi, sans calculer la réponse, on peut dire que :

a) 33 . 4 = (4 x 32) + 4

b) 32 + 32 + 34 + 34 = 33 . 4

c) (4 x 32) + 4 = 32 + 32 + 34 + 34

- **travail sur le sens de l'égalité**
- **travail sur le sens des opérations**
- **référence au calcul mental : pour faire x 11 on fait x 10 + x 1 (cas a)**

POUR ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

1. Pour introduire ou revoir les techniques algébriques

<u>Comparaison des différentes formules produites</u> (possible grâce à la variété des démarches qu'autorise cette activité)

Comment être sûr que les différentes formules sont toutes équivalentes ?

- ***En utilisant les techniques algébriques***

  $2(n + 2) + 2n = 2n + 4 + 2n = 4n + 4$

  $4n + 4$

  $(n+ 2)^2 – n^2 = \cancel{n^2} + 2.2.n + 2^2 – \cancel{n^2} = 4n + 4$

  $4 (n + 1) = 4n + 4$

Mais aussi

- ***En remplaçant par des nombres***

  Permet de retravailler le sens de la lettre

- ***En utilisant les actions sur le dessin ou le matériel***

POUR ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

2. Pour donner du sens au symbolisme algébrique

- *Le sens de la lettre (variable)*

Mosaïque de 5 carrés	$5 \times 4 + 4 = 24$ carrés blancs
Mosaïque de 7 carrés	$7 \times 4 + 4 = 32$ carrés blancs
Mosaïque de 32 carrés	$32 \times 4 + 4 = 132$ carrés blancs
En langage mathématique	$\boldsymbol{n} \times 4 + 4$

- *Les parenthèses*

$4 \,.\, (n + 1)$ .... et pourquoi pas $(4 \,.\, n) + 1$?

- *L'omission du signe fois"*

$n \,.\, 4 + 4 = 4n + 4$

AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

Intérêt des supports figuratifs

Les supports figuratifs permettent …

- D’appuyer le raisonnement sur le dessin.
- De produire une grande diversité des expressions possibles de la généralisation.

Les différentes visualisations et les différentes expressions de la généralisation issues de ces visualisations favoriseront des **débats riches.**

AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

Ces activités présentent également un intérêt important pour développer les compétences transversales en mathématiques c'est-à-dire :

- Résoudre, raisonner et argumenter
- Appliquer et généraliser
- Structurer et synthétiser

Ces compétences seront d'autant plus développées que l'enseignant(e) proposera l'organisation de classe suivante :

- travail par groupes
- présentation à la classe des solutions des différents groupes
- discussion / débat sur les solutions
- synthèse des apprentissages

math & Sens

Collection dirigée par Françoise Lucas

Une collection de livres-outils pour les élèves et les enseignants du fondamental, qui organise les apprentissages mathématiques de cycle en cycle autour d'un même «nœud-matière» et d'un même réseau de compétences.

Développer l'articulation arithmétique-algèbre

entre le primaire et le secondaire

Ce guide propose aux enseignants des **pistes méthodologiques** accompagnées d'**activités** prêtes à l'emploi visant à développer l'**articulation** entre les apprentissages numériques de la fin de l'école primaire et ceux du début de l'enseignement secondaire.

Chacun y trouvera non seulement des situations s'appuyant sur des recherches didactiques récentes menées dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre, mais aussi des pistes d'exploitation, des propositions de décodage des démarches d'élèves, des réponses à leurs potentielles questions ou des possibilités d'approfondissement. Autant d'éléments indispensables pour permettre d'appréhender au mieux l'articulation entre une pensée « arithmétique » et une pensée « algébrique », en ancrant les apprentissages dans des fondements solides.

Accès gratuit aux documents à destination des élèves, en couleurs, à télécharger en ligne.

Consultez cet ouvrage seul, en équipe de cycle ou en équipe école, selon l'entrée qui correspond le mieux à vos besoins !

De Boeck
ISBN 978-2-8041-9749-0
581048

van in

de boeck

Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire

10/14 ans

math & Sens

10/14 ans

Développer l'articulation arithmétique-algèbre

entre le primaire et le secondaire

Guide méthodologique
et documents reproductibles en ligne

Isabelle DEMONTY
Joëlle VLASSIS