

Quelle place accorder aux modèles dans l'apprentissage de l'addition des entiers ?

Joëlle Vlassis

Université du Luxembourg

Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début
du secondaire : Recherches et perspectives curriculaires
Colloque OIPA – Université de Sherbrooke à Longueuil – Québec
7 – 9 mai 2018

Objectifs

1. Discuter de la **pertinence et de l'utilisation des modèles en mathématiques** sur la base d'une séquence didactique ...
... destinée à donner du sens à l'**addition d'entiers et aux réductions polynomiales**.
2. Proposer une analyse des difficultés à opérer avec les négatifs en termes **d'utilisation du signe "moins"**.

1. CONTEXTE

Contexte

Origine de notre questionnaire

Dans les équations, on observe des erreurs dans les opérations avec les négatifs (Vlassis, 2002) :

$$\begin{array}{rcccl} 2 & - & \underline{3x} & + & 6 & = & 2x & + & 16 \\ & & \downarrow -2x & & & & \downarrow -2x & & \\ \underline{1x} & + & 6 & = & 16 & & & & \end{array}$$

=> Etude sur la base d'un test soumis à 131 élèves de 2^e année secondaire générale (élèves de 13-14 ans) et d'interviews de 12 élèves

- ✓ Test composé d'additions d'entiers (6) et de réductions polynomiales (28)
- ✓ Polynômes de structure simple (= membre d'une équation)

ex : $20 + 8 - 7n - 5n$

Contexte

Au moment du testing, à la fin de la 2e année du secondaire, les élèves étaient initiés à l'addition d'entiers et aux réductions polynomiales depuis 16 mois environ.

Difficultés observées dans l'addition d'entiers :

- **Concept de nombre négatif** : Difficulté à envisager des nombres plus petits que 1 : $5 - 7 = ?$
- **Appliquer des techniques opératoires inadéquates** :
 - La règle des signes :
 $- 8 - 9 = 17$ car "moins" par "moins" donne "plus" 88% réussite
 - Raisonnement "parenthèses" (Herscovics e Linchevski (1991, Vlassis, 2010) :
 $137 + 63 - 92 + 92 = 200 - (92 + 92) = 16$ 82% réussite

Contexte

Principales erreurs observées dans les réductions polynomiales :

- Raisonnement « parenthèses »

$$20 + 8 - (7n - 5n)$$

$$28 - 2n$$

% réussite: 70%

- La règle des signes

$$6 - 5a - 3 - 4a$$

$$9 + 9a$$

% réussite : 66%

- Prendre le signe qui suit

$$6y - 20 + 3y - 12$$

$$3y - 32 \text{ ou } 3y - 8$$

% réussite : 72%

Analyse des difficultés

- Origine des difficultés dans les opérations avec les négatifs
souvent attribuée au concept de "négatif" :

Est-ce que c'est seulement une question de nombre négatif?

$$3 + 6x - 2$$

- Difficultés dans les opérations avec les entiers négatifs :
Concept de nombre négatif → Utilisation du signe « moins »
- Sens de la lettre et d'une expression littérale comme $3x$ ou $-4x$

La négativité

La négativité : modèle des différentes utilisations du signe "moins" en algèbre élémentaire

TRIPLE NATURE DU SIGNE “MOINS”		
UNAIRE	BINAIRE	SYMETRIQUE
Nombre-relatif Nombre-solution Nombre-résultat Nombre négatif formel	Soustraction arithmétique $7 - 4$ Soustraction algébrique $5a - 3a + 2$	Prendre l’opposé : - d’un nombre - d’une somme

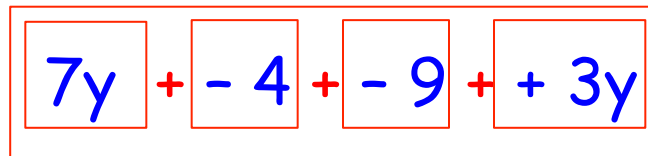
(Vlassis, 2010)

Dans les réductions polynomiales

Dans notre étude, les erreurs viennent :

- de difficultés liées à l'utilisation unaire du signe « moins » (tendance à détacher le signe "-")
- de difficultés à entrer dans un discours algébrique caractérisé par une utilisation flexible du signe « moins » (binaire et unaire)
- d'une incapacité à considérer le polynôme comme **une somme d'entités signées**

ex : $7y - 4 - 9 + 3y$


$$7y + -4 + -9 + +3y$$

Les démarches correctes des élèves :

- Non verbalisées
- Référence à la droite des nombres
- Référence à la règle algébrique « *pour calculer la somme de 2 entiers... »*

Les réductions polynomiales et la pensée algébrique

Modèle de la pensée algébrique (Demonty, 2017) caractérisé par

- le raisonnement analytique (indéterminée) (Radford, 2006),
- le sens de l'égalité et des opérations (Carragher & Schliemann, 2007)

Réduire de manière significative les polynômes implique ces différentes dimensions.

$$7y - 4 - 9 + 3y = 10y - 13$$

=> En effet, c'est opérer avec des **variables (indéterminées)** et comprendre que les deux expressions sont **équivalentes**.

=> Cela demande également d'élargir le **sens des opérations** en élargissant le sens du signe "moins" et en considérant le polynôme comme une somme d'entités signées.

2. COMMENT SOUTENIR L'APPRENTISSAGE DE L'ADDITION DES ENTIERS ET DES REDUCTIONS POLYNOMIALES?

Activités possibles

- Les activités de généralisation,
- les problèmes (résolution par équations),
- les problèmes classiques de gains/dettes ou de température
- les manipulations sur la droite des nombres
- etc...

... peuvent constituer des contextes significatifs pour opérer dans les entiers et réduire des polynômes

Activités possibles

CEPENDANT,

- Dans les activités de généralisation, les opportunités de réaliser ces opérations ne sont pas si nombreuses.
- Dans des problèmes se résolvant par équations, les opérations avec les entiers se mêlent à d'autres difficultés.
- La droite des nombres ne fait pas nécessairement toujours sens auprès des élèves (les manipulations sont abstraites et hors contexte) et semblent sujette à controverses.
- Dans les problèmes classiques de dettes/gains ou de températures, les élèves contournent les opérations avec les entiers (Peled & Carraher, 2008)

Ex : Problème classique de T° : quelle différence de t° entre le mois d'août (20°) et le mois de janvier ($- 6^{\circ}$)?

Les élèves additionnent les valeurs absolues pour trouver la différence et ne font pas : $20 - (- 6) = 26$

La modeling perspective

Proposition d'une séquence d'activités basée sur "la **modeling perspective**" (Gravemeijer, 2000) :

- La notion de modèles diffère profondément de la manipulation traditionnelle de matériel et de représentations visuelles utilisés dans les classes de mathématiques.
- Ce qui distingue les deux conceptions,
 - c'est d'une part la **vision dynamique** défendue dans la « modeling perspective » où **les élèves contribuent à l'émergence des modèles (vision « bottom up »)**,
 - et d'autre part, la **vision statique des approches traditionnelles** où les modèles sont donnés d'emblée avec une utilisation « prête à l'emploi » (vision « top down »).

Objectifs de la séquence didactique

1. Sens des opérations et de l'égalité

- Promouvoir une utilisation flexible du signe « moins » dans les opérations algébriques élémentaires.
- Reconnaître le polynôme comme une somme d'entités signées

2. Raisonnement analytique

- Donner du sens aux termes d'un polynôme en particulier aux termes littéraux ($-3a$)

3. METHODOLOGIE & OPTIONS DIDACTIQUES

Méthodologie

1. Prétest / post-test immédiat / post test différé

- Test : réductions polynomiales (12) / résolution d'équations (5)
- Post-test immédiat : quelques jours après l'expérimentation
- Post-test différé : 4 mois après

2. Etude pilote

3. Collecte des données

- Deux étudiantes de 2^e année du secondaire sélectionnées sur la base du pré-test (Réussite < 20%) –
- 7 sessions de 30 minutes durant le temps de midi (video)

2. Axes d'analyse des données :

- Analytique : incidents critiques (vignettes) du point de vue du sens et de la symbolisation
- Synthétique : Réussite/ non réussite et types d'erreurs pour chaque équations/opérations discutées durant les sessions

Options didactiques

Modeling perspective (Gravemeijer 2002; Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack, 2000)

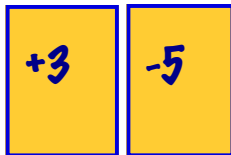
- Cohérente avec l'approche socioculturelle : Le sens et les "symboles" co-émergent au départ des symbolisations informelles.
- Rôle proactif de l'enseignant en tant que représentant de la culture mathématique :
 - ✓ l'enseignant/interviewer prend part au discours non seulement comme un guide mais également comme un véritable participant (suggérant des solutions, des stratégies, des objections, des questions, ...)
 - ✓ l'enseignant tire parti des contributions des élèves pour réaliser les finalités de la séquence.



Options didactiques

- **Choix des modèles :**

- Droite des nombres : opérations avec les entiers et utilisation binaire du signe "moins"
- Cartes : - utilisation unaire du signe « moins »



- symbolisation d'une expression littérale

→ Promouvoir une utilisation flexible du signe « moins »

- **Contexte d'utilisation des modèles**

- Modélisation « Bottom up »
- Modèles « co-construits » en fonction des besoins de l'activité
- Modèles au service de la communication et de l'argumentation

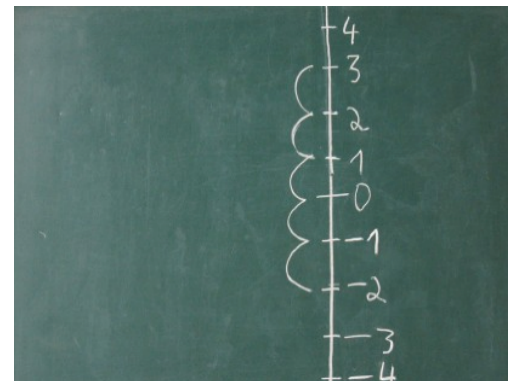
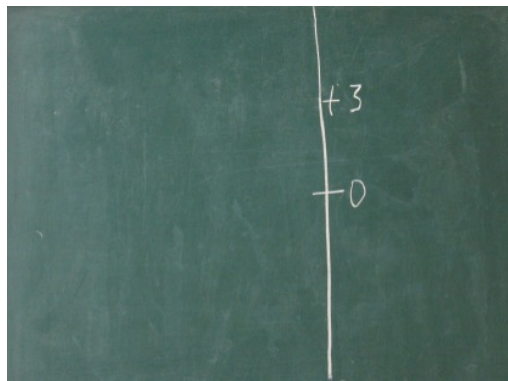
4. PRESENTATION DE L'ÉTUDE PILOTE

Principales étapes

1. Additions d'entiers



Réappropriation de la droite des nombres



Principales étapes

1. Additions d'entiers (suite)

$$\begin{array}{|c|} \hline + 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline - 4 \\ \hline \end{array}$$

Et si on inversait les l'ordre des cartes, que deviendrait la réponse?

$$\begin{array}{|c|} \hline - 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline + 2 \\ \hline \end{array}$$

E1 : Cela ne changera rien du tout

E2 : J'ai trouvé -6 (en réponse à $-4 + 2$) au début, mais parce que j'ai encore fait $4 + 2$ et j'ai mis le "moins" devant. C'est des trucs comme ça qu'on nous explique en classe.

Oui, dans certains cas, il faut le faire. Mais ici c'est tout simple, c'est dans ma tête : Je descends de 4 et je remonte de 2, OK, puis j'arrive à -2.

Que je fasse comme ça $(+2 - 4)$ ou que je fasse comme ça $(-4 + 2)$. C'est le même calcul.

Principales étapes

2. Résoudre des équations (1^{re} partie)

Méthodes utilisées par les élèves pour trouver un nombre inconnu

- Essais et erreurs

$$+3 \quad ? \quad -5$$

- Essais et erreurs

$$+3 \quad ? \quad ? \quad = \quad -5$$

3. Résoudre des équations (2^e partie)

- Essais et erreurs

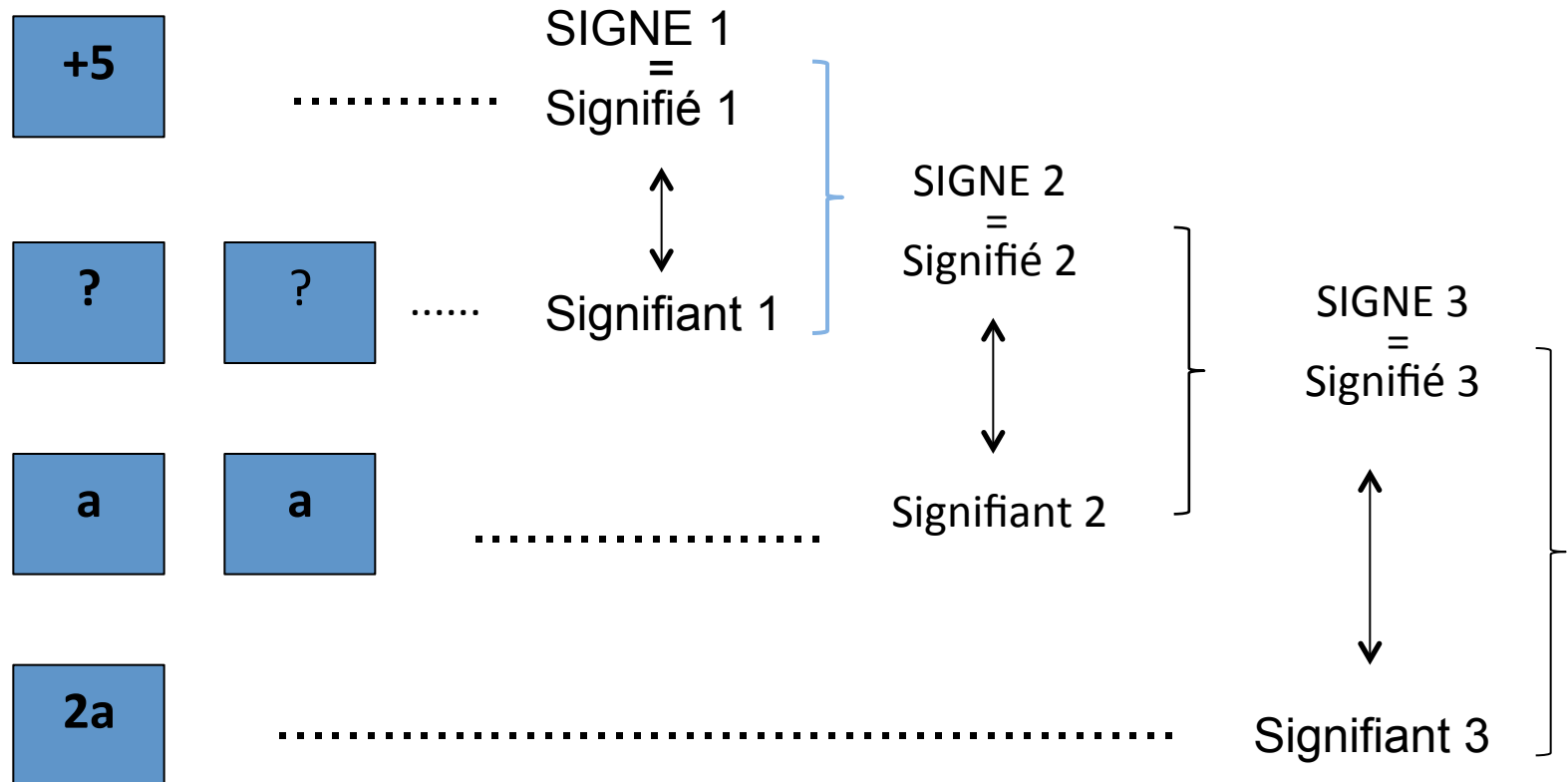
$$+3 \quad a \quad a \quad = \quad -5$$

- Diviser par 2

$$+3 \quad 2a \quad = \quad -5$$

Chaîne de signification d'un terme littéral

(Gravemeijer, et al. 2000; Presmeg, 2006; Vlassis, 2010, 2015)



Principales étapes

4. Produire et résoudre une équation sans le support des cartes

– Produire une équation : $-4 - 1 \boxed{2x} = -15$

→ Quel signe devant $2x$?

– Résoudre une équation : $2 - y = 20$ ($y = -18$)

Difficulté à distinguer le « moins » devant la solution du
« moins » devant y

Objectif en phase 4 : donner du sens au terme littéral

**Nombreux aller et retour entre le numérique et le
littéral**

Principales étapes

5. Réduire des polynômes

- Comparer 2 expressions

$$-10 + 4 + a + a + a = \text{ou} \neq a + a + a - 10 + 4$$

- Produire une expression égale à une autre et justifier

$$-10 + 4 + a + a + a = -6 + 3a \text{ (solution de E1)}$$

$$= 4 + a + a + a - 10 \text{ (solution de E2)}$$

- Réduire des polynômes

Réduire des polynômes :

Trouver une expression égale et non plus trouver la « réponse »

5. PRINCIPAUX RÉSULTATS

Résultats des tests

	POLYNOMES /12			EQUATIONS /5		
	Pré	Post 1	Post 2	Pré	Post 1	Post 2
E1	2	11	11	1	3	4
E2	2	11	11	1	3	1
Moyenne classe	7	6	7,7	2,6	3	3,4

$$\boxed{8} - \boxed{9b} - \boxed{5} - \boxed{6b} = -15b + 3$$

Evolution du discours

Un discours argumenté :

1. Sens des opérations avec les entiers sur la base de la droite des nombres (DN)
2. Sens des signes « plus » et « moins » (DN) : le signe « moins » indique qu'on se trouve en-dessous et qu'on doit descendre
=> flexibilité non seulement dans les réductions polynomiales mais également dans le discours
3. Commutativité
4. Sens d'une expression littérale
5. Sens des réductions des polynômes

6. DISCUSSION

De la pertinence des modèles en
mathématiques

Arguments contre

- L'utilisation d'un modèle concret risque de créer ultérieurement des blocages dans l'apprentissage des mathématiques formelles (Glaeser, 1981).

Ex : le modèle de la droite des nombres et la multiplication des entiers

- Historiquement, le concept formel de nombres négatifs n'a pu émerger que lorsque la quête d'un modèle concret a cessé (Glaeser, 1981).
- Les modèles concrets sont basés sur des conventions artificielles et ne répondent pas aux obstacles cognitifs des élèves.
L'existence des négatifs et les relations entre eux ne peuvent être déduites que formellement (Fischbein, 1987)
- LA DN n'est utile que pour la relation d'ordre (Y. Matheron, 8 mai 2018)
- Danger de surexploitation de la DN (Freudenthal, 1973) :
=> Méthode inductive-exploratoire

Arguments pour

- Sans les modèles, la plupart des élèves ne peuvent donner aucune signification à des concepts comme les négatifs (Kuchmann, 1981).
- Les modèles répondent au besoin de donner une signification concrète et intuitive aux entiers et aux opérations entre eux (Linchevski & Williams, 1999; Peled, 1989).
- La DN constitue un excellent moyen de visualiser les opérations avec les entiers (Freudenthal, 1973) : DN verticale à utiliser dès les premiers apprentissages mathématiques.
- Les modèles font partie des systèmes de représentations pour une pensée mathématique efficace (Goldin, 2001).

Arguments pour

- Dans les approches socioculturelles, les modèles font partie d'un processus de modélisation constitutif de la pensée mathématique (Gravemeijer, Cobb & Withenack, 2000)
- La compréhension des mathématiques vient de la capacité de voir un/e même objet/situation à travers différentes représentations dans des activités qui font sens (Duval, 2001; Sfard, 2000; Steinbring, 2002)
- Un formalisme que ne sous-tiendrait aucune expérience de la « réalité » conduirait à l'utilisation d'un signifiant dépourvu de signifié => rupture dans la chaîne de significations.
(Vlassis, 2010, 2015)

Conclusions

- Les modèles co-construits avec les élèves comme ceux présents dans la séquence semblent avoir montré une certaine efficacité avec deux élèves faibles.
- Ayant participé à leur émergence, elles en ont perçu leur sens et leur fonctionnement.
- Les discussions leur ont permis de faire le lien entre les actions sur les modèles et les opérations algébriques visées.

Conclusions

Au final, les modèles, malgré leurs limites, montrent une certaine efficacité et permettent aux élèves d'accrocher du sens aux mathématiques abstraites pour autant que :

- les élèves participent à leur construction dans des activités où ils font sens.
- l'enseignant tire parti des contributions des élèves pour discuter et faire le pont entre les actions sur les modèles et les mathématiques elles-mêmes.
- les modèles restent "à leur place" et l'enseignant ne les exploite pas au-delà de leurs limites.

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Quelle place accorder aux modèles dans l'apprentissage de l'addition des entiers ?

Joëlle Vlassis

Université du Luxembourg

Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début
du secondaire : Recherches et perspectives curriculaires
Colloque OIPA – Université de Sherbrooke à Longueuil – Québec
7 – 9 mai 2018