Sur les uninormes discrètes idempotentes

On idempotent discrete uninorms

M. Couceiro[1] J. Devillet[2] J.-L. Marichal[2]
[1] LORIA, (CNRS - Inria Nancy Grand Est - Université de Lorraine)
[2] Mathematics Research Unit, Université du Luxembourg

BP239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France. miguel.couceiro@inria.fr
MNO, 6 av. de la Fonte, L-4364 Esch-sur-Alzette, Luxembourg. {jimmy.devillet,jean-luc.marichal}@uni.lu

Résumé :
Dans cet article, nous donnons deux axiomatisations de la classe des uninormes discrètes idempotentes en tant qu'opérations binaires conservatives, où une opération est conservative si elle renvoie toujours la valeur prise par l'une de ses variables. Plus précisément, nous montrons d'abord que les uninormes discrètes idempotentes sont exactement les opérations qui sont conservatives, symétriques and non décroissantes. Ensuite, nous montrons que dans cette caractérisation la symétrie peut être remplacée par la bisymétrie et l'existence d'un élément neutre.

Mots-clés :
Agrégation et fusion de données, connecteur flou, uninorme discrète, axiomatisation.

Abstract:
In this paper we provide two axiomatizations of the class of idempotent discrete uninorms as conservative binary operations, where an operation is conservative if it always outputs one of its input values. More precisely we first show that the idempotent discrete uninorms are exactly those operations that are conservative, symmetric, and nondecreasing. Then we show that, in this characterization, symmetry can be replaced with both bisymmetry and existence of a neutral element.

Keywords:
Aggregation and data fusion, fuzzy connective, discrete uninorm, axiomatization.

1 Introduction

Les fonctions d'agrégation définies sur des échelles linguistiques (chaînes finies) ont été largement étudiées depuis plus de deux décenies ; voir par exemple [3–5,7,9–14,16,17]. Parmi ces fonctions, les connecteurs flous discrets (tels que les uninormes discrètes) sont des opérations binaires qui jouent un rôle important en logique floue.

Ce court article se concentre sur quelques caractérisations de la classe des uninormes discrètes idempotentes. Rappelons qu'une uninorme discrète est une opération binaire sur une chaîne finie qui est associative, symétrique, non décroissante en chaque variable et qui possède un élément neutre.

Une première caractérisation de la classe des uninormes discrètes idempotentes a été donnée par De Baets et col. [3, Theorem 3]. Cette caractérisation révèle que toute uninorme discrète idempotente est une combinaison des opérations minimum et maximum. En particulier, une telle opération est *conservative* dans le sens qu'elle retourne toujours la valeur prise par l'une de ses variables.

Cet article est organisé comme suit. Après une présentation dans la section 2 de quelques résultats préliminaires sur les opérations conservatives, nous montrons dans la section 3 que les uninormes discrètes idempotentes sont exactement les opérations qui sont conservatives, symétriques et non décroissantes en chaque variable. Cette nouvelle caractérisation est très simple et ne requiert ni l'associativité ni l'existence d'un élément neutre. Dans la section 4 nous fournissons une caractérisation alternative de cette classe en termes de la propriété de bisymétrie. Plus spécifiquement, nous montrons que les uninormes discrètes idempotentes sont exactement les opérations qui sont conservatives, bisymétriques, non décroissantes et qui ont un élément neutre.

Une version étendue de cet article est disponible dans [2].

2 Préliminaires

Soit X un ensemble arbitraire non vide et soit $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ la diagonale de X^2.

Définition 1. Une opération $F: X^2 \to X$ est dite

- *idempotente* si $F(x,x) = x$ pour tout $x \in X$.
- *conservative* si $F(x,y) \in \{x,y\}$ pour tous $x,y \in X$.
- *associative* si $F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))$ pour tous $x,y,z \in X$.

Un élément $e \in X$ est appelé un *élément neutre* de F (ou simplement un *élément neutre*) si $F(x,e) = F(e,x) = x$ pour tout $x \in X$. Dans ce cas, nous pouvons facilement montrer par l'absurde qu'un tel élément neutre est unique. Les points (x,y) et (u,v) de X^2 sont dits *connectés pour* F (ou simplement *connectés*) si $F(x,y) = F(u,v)$. Nous observons que "être connecté" est une relation d'équivalence. Le point (x,y) de X^2 est dit *isolé pour* F (ou simplement *isolé*) s'il n'est connecté à aucun autre point de X^2.

Remarque 1. La conservativité (en anglais : conservativeness) a été introduite dans Pouzet et col. [15]. Cette condition est aussi appelée "local internality" dans Martín et col. [8].

Lemme 2. *Soit $F: X^2 \to X$ une opération idempotente. Si le point $(x,y) \in X^2$ est isolé, alors il est sur Δ_X, c'est-à-dire, $x = y$.*

Remarque 2. Nous observons que l'idempotence est nécessaire dans le lemme 2. En effet, considérons l'opération $F: X^2 \to X$, où $X = \{a,b\}$, definie par $F(x,y) = a$ si $(x,y) = (a,b)$ et $F(x,y) = b$ sinon. Alors (a,b) est isolé et $a \neq b$. Le graphe des lignes de niveau de F est représenté à la figure 1. Ici (ainsi que dans dans tout l'article), les points connectés sont reliés par des arêtes. Pour simplifier les figures nous omettons parfois les arêtes obtenues par transitivité.

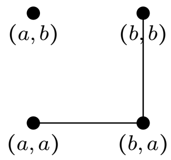

Figure 1 – Une opération non idempotente

Le lemme suivant fournit un test très simple pour l'existence d'un élément neutre d'une opération conservative.

Lemme 3. *Soit $F: X^2 \to X$ une opération conservative et soit $e \in X$. Alors e est un élément neutre si et seulement si (e,e) est isolé.*

Corollaire 4. *Tout point isolé (x,y) d'une opération conservative $F: X^2 \to X$ est unique et se trouve sur Δ_X. De plus x $(= y)$ est un élément neutre.*

Remarque 3. Le lemme 3 n'est plus valable si la conservativité est remplacée par l'idempotence. En effet, en prenant simplement $X = \{a,b,c\}$ nous pouvons construire une opération idempotente ayant un point isolé sur Δ_X et aucun élément neutre (voir figure 2). De plus, il est facile de construire une opération idempotente ayant un élément neutre mais aucun point isolé (voir figure 3 qui représente l'opération de consensus proposée par Lawry et Dubois [6, Table 1]). On remarque aussi qu'il y a des opérations idempotentes ayant plus d'un point isolé (voir figure 4).

3 Résultats principaux

Nous nous concentrons à présent sur la classe des uninormes discrètes idempotentes. Ces opérations sont définies sur des chaînes finies. Sans perte de généralité, nous considérerons uniquement les chaînes à n éléments $L_n = \{1,\ldots,n\}$, $n \geq 1$, munies de la relation d'ordre usuelle $\leq$.

Rappelons qu'une opération $F: L_n^2 \to L_n$ est dite *non décroissante (en chaque variable)* si

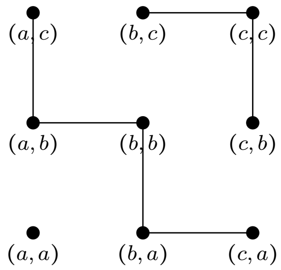

Figure 2 – Une opération n'ayant aucun élément neutre

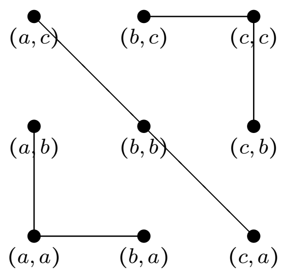

Figure 3 – Une opération n'ayant aucun point isolé

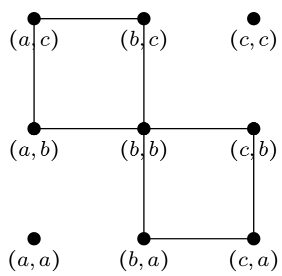

Figure 4 – Une opération ayant deux points isolés

$F(x,y) \leq F(x',y')$ chaque fois que $x \leq x'$ et $y \leq y'$.

Définition 5 (voir, e.g., [3])**.** Une *uninorme discrète* sur L_n est une opération $U\colon L_n^2 \to L_n$ qui est associative, symétrique, non décroissante et qui a un élément neutre.

Une caractérisation de la classe des uninormes discrètes idempotentes est donnée dans le théorème suivant. Bien que cette caractérisation semble quelque peu complexe, elle montre, en la combinant avec le lemme 7 ci-dessous, que toute uninorme discrète idempotente est conservative.

Théorème 6 (voir [3, Theorem 3])**.** *Une opération $F\colon L_n^2 \to L_n$ avec élément neutre $1 < e < n$ est une uninorme discrète idempotente si et seulement s'il existe une fonction non croissante $g\colon [1,e] \to [e,n]$, avec $g(e) = e$, telle que*

$$F(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\}, & \textit{si } y \leq \overline{g}(x) \textit{ et } x \leq \overline{g}(1), \\ \max\{x,y\}, & \textit{sinon}, \end{cases}$$

où $\overline{g}\colon L_n \to L_n$ est défini par

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \textit{si } x \leq e, \\ \max\{z \in [1,e] \mid g(z) \geq x\}, & \textit{si } e \leq x \leq g(1), \\ 1, & \textit{si } x > g(1). \end{cases}$$

Nous montrons à présent que les uninormes discrètes idempotentes sont exactement les opérations qui sont conservatives, symétriques et non décroissantes (voir théorème 9).

Considérons d'abord le lemme suivant, qui reste en fait valable sur qu'importe quelle chaîne (finie ou non).

Lemme 7. *Si $F\colon L_n^2 \to L_n$ est idempotent, non décroissant et a un élément neutre $e \in L_n$, alors $F|_{[1,e]^2} = \min$ et $F|_{[e,n]^2} = \max$.*

Proposition 8. *Si $F\colon L_n^2 \to L_n$ est conservatif, symétrique et non décroissant, alors il est associatif et a un élément neutre.*

Pour $n = 2$ et $n = 3$, les opérations possibles $F\colon L_n^2 \to L_n$ qui sont conservatives, symétriques et non décroissantes sont représentées au moyen de leurs lignes de niveau dans les figures 5 et 6.

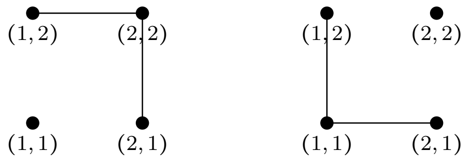

Figure 5 – Opérations possibles lorsque $n = 2$

Remarque 4.

(a) Les opérations représentées dans la figure 6 sont le minimum, le maximum, la conjonction de Sobociński et la disjonction de Sobociński (voir par exemple [1, Table 1]).

(b) L'existence d'un élément neutre dans la proposition 8 n'est plus garantie si la chaîne n'est pas finie. Par exemple, l'opération réelle $F\colon[0,1]^2 \to [0,1]$ définie par $F(x,y) = \min\{x,y\}$ si $x,y \in [0,\frac{1}{2})^2$ et $F(x,y) = \max\{x,y\}$ sinon, est conservative, symétrique et non décroissante mais n'a pas d'élément neutre.

(c) Nous observons que la conservativité ne peut être remplacée par l'idempotence dans la proposition 8. Par exemple, l'opération $F\colon L_3^2 \to L_3$ dont les lignes de niveau sont représentées dans la figure 2 est idempotente, symétrique et non décroissante mais on peut montrer qu'elle n'est pas associative et qu'elle n'a pas d'élément neutre.

(d) Nous observons aussi que chacune des conditions de la proposition 8 est nécessaire. En effet, nous donnons dans la figure 7 une opération qui est conservative et symétrique mais qui n'est pas non décroissante. Nous donnons également dans la figure 8 une opération qui est conservative et non décroissante mais non symétrique. Finalement, nous donnons à la figure 9 (voir par exemple [1, Table 1]) une opération qui est symétrique et non décroissante mais non conservative. Aucune de ces trois

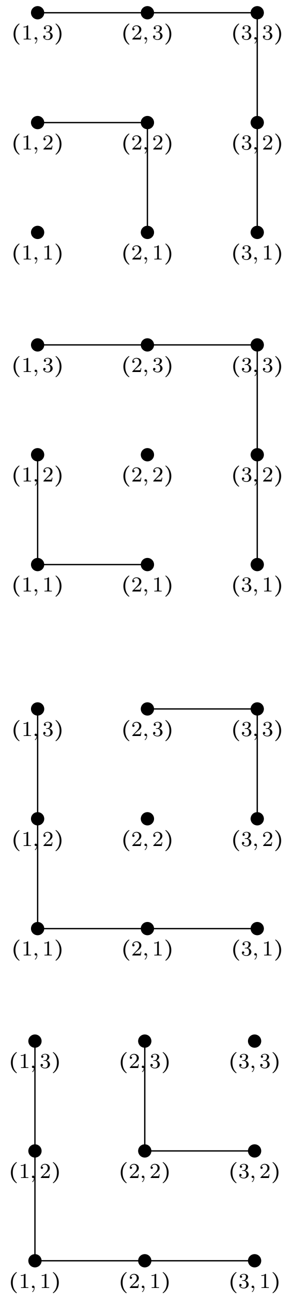

Figure 6 – Opérations possibles lorsque $n = 3$

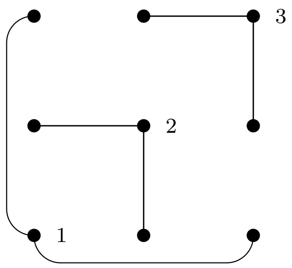

Figure 7 – Une opération qui n'est pas non décroissante

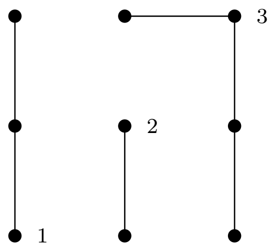

Figure 8 – Une opération qui n'est pas symétrique

opérations n'est associative et aucune n'a d'élément neutre.

Théorème 9. *Une opération $F\colon L_n^2 \to L_n$ est conservative, symétrique et non décroissante si et seulement si c'est une uninorme discrète idempotente. De plus, il y a exactement 2^{n-1} uninormes discrètes idempotentes sur L_n.*

Remarque 5. Le théorème 9 nous permet de donner une caractérisation graphique des uninormes discrètes idempotentes en termes de leurs lignes de niveau. En effet, en notant L une chaîne arbitraire à n éléments, nous observons que la restriction $F|_{L'}$ de toute uninorme discrète idempotente $F\colon L^2 \to L$ à une sous-chaîne L' obtenue en supprimant une des extrémités de L est encore une uninorme discrète idempotente. De plus, l'opération F (ou de façon équivalente, le graphe de ses lignes de niveau) peut être reconstruite à partir de $F|_{L'}$ en connectant tous les points de $L^2 \setminus L'^2$. Il s'ensuit que toutes les uninormes discrètes idempotentes peuvent être (facilement) construites récursivement en termes de leurs lignes de niveau.

4 Opérations bisymétriques

Dans cette section, nous donnons une caractérisation de la classe des uninormes discrètes idempotentes en termes de la propriété de bisymétrie (ou médialité).

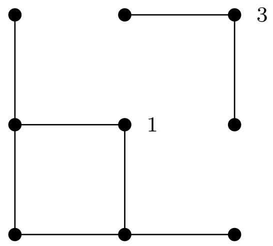

Figure 9 – Une opération qui n'est pas conservative

Définition 10. Une opération $F\colon X^2 \to X$ est dite *bisymétrique* si

$$F(F(x,y),F(u,v)) = F(F(x,u),F(y,v))$$

pour tous $x,y,u,v \in X$.

Proposition 11. *Soit $F\colon X^2 \to X$ une opération conservative qui a un élément neutre. Alors F est bisymétrique si et seulement si il est associatif et symétrique.*

En combinant la proposition 11 avec le théorème 9, nous pouvons facilement déduire la caractérisation alternative suivante des uninormes discrètes idempotentes.

Théorème 12. *Une opération $F\colon L_n^2 \to L_n$ est conservative, bisymétrique, non décroissante et a un élément neutre si et seulement si c'est une uninorme discrète idempotente.*

Remerciements :

Cette recherche est partiellement soutenue par le projet de recherche interne R-AGR-0500 de l'Université du Luxembourg.

Références

[1] D. Ciucci and D. Dubois. A map of dependencies among three-valued logics. *Information Sciences*, 250 :162–177, 2013.

[2] M. Couceiro, J. Devillet and J.-L. Marichal. Characterizations of idempotent discrete uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*. In press. https ://doi.org/10.1016/j.fss.2017.06.013.

[3] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. Idempotent uninorms on finite ordinal scales. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(1) :1–14, 2009.

[4] B. De Baets and R. Mesiar. Discrete triangular norms. in *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets*, Trends in Logic, eds. S. Rodabaugh and E. P. Klement (Kluwer Academic Publishers), 20, pp. 389–400, 2003.

[5] J. Fodor. Smooth associative operations on finite ordinal scales. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 8 :791–795, 2000.

[6] J. Lawry and D. Dubois. A Bipolar Framework for Combining Beliefs about Vague Propositions. Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2012), Rome, Italy, June 10-14, 2012. In : G. Brewka, T. Eiter, S. McIlraith (eds.), AAAI Press, 2012.

[7] G. Li, H.-W. Liu, and J. Fodor. On weakly smooth uninorms on finite chain. *Int. J. Intelligent Systems*, 30 :421–440, 2015.

[8] J. Martín, G. Mayor, and J. Torrens. On locally internal monotonic operations *Fuzzy Sets and Systems* 137 :27–42, 2003.

[9] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens. t-operators and uninorms on a finite totally ordered set. *Int. J. Intelligent Systems*, 14 :909–922, 1999.

[10] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens. On bisymmetric operators on a finite chain. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 11 :647–651, 2003.

[11] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens. On left and right uninorms on a finite chain. *Fuzzy Sets and Systems*, 146 :3–17, 2004.

[12] M. Mas, M. Monserrat and J. Torrens. Smooth t-subnorms on finite scales. *Fuzzy Sets and Systems*, 167 :82–91, 2011.

[13] G. Mayor, J. Suñer and J. Torrens. Copula-like operations on finite settings. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 13 :468–477, 2005.

[14] G. Mayor and J. Torrens. Triangular norms in discrete settings. in *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, eds. E. P. Klement and R. Mesiar (Elsevier, Amsterdam), pp. 189–230, 2005.

[15] M. Pouzet, I. G. Rosenberg, and M. G. Stone. A projection property. *Algebra Universalis*, 36(2) :159–184, 1996.

[16] D. Ruiz-Aguilera and J. Torrens. A characterization of discrete uninorms having smooth underlying operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 268 :44–58, 2015.

[17] Y. Su and H.-W. Liu. Discrete aggregation operators with annihilator. *Fuzzy Sets and Systems*, 308 :72–84, 2017.