
Flexibilité cognitive et résolution de problèmes : favoriser la construction d'une représentation alternative

Sylvie Gamo,

Université du Luxembourg, Grand-Duché du Luxembourg

Sandra Nogry,

Université Cergy-Pontoise et Université Paris VIII

Emmanuel Sander,

Université Paris VIII

Cadre de l'étude

Étude des effets de contenu de l'énoncé et applications à l'enseignement

- L'habillage du problème a un effet sur
 - La difficulté du problème
 - La stratégie de résolution utilisée
 - Le transfert

- Matériel étudié : problèmes arithmétiques appartenant à même catégorie
 - Exemple d'effet de contenu

Variable Matérielle Prix

Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 Euros et une trousse. Il paie 14 Euros. Un feutre coûte 3 Euros de moins qu'un classeur. Augustin achète une trousse et un feutre. Combien doit-il payer ?

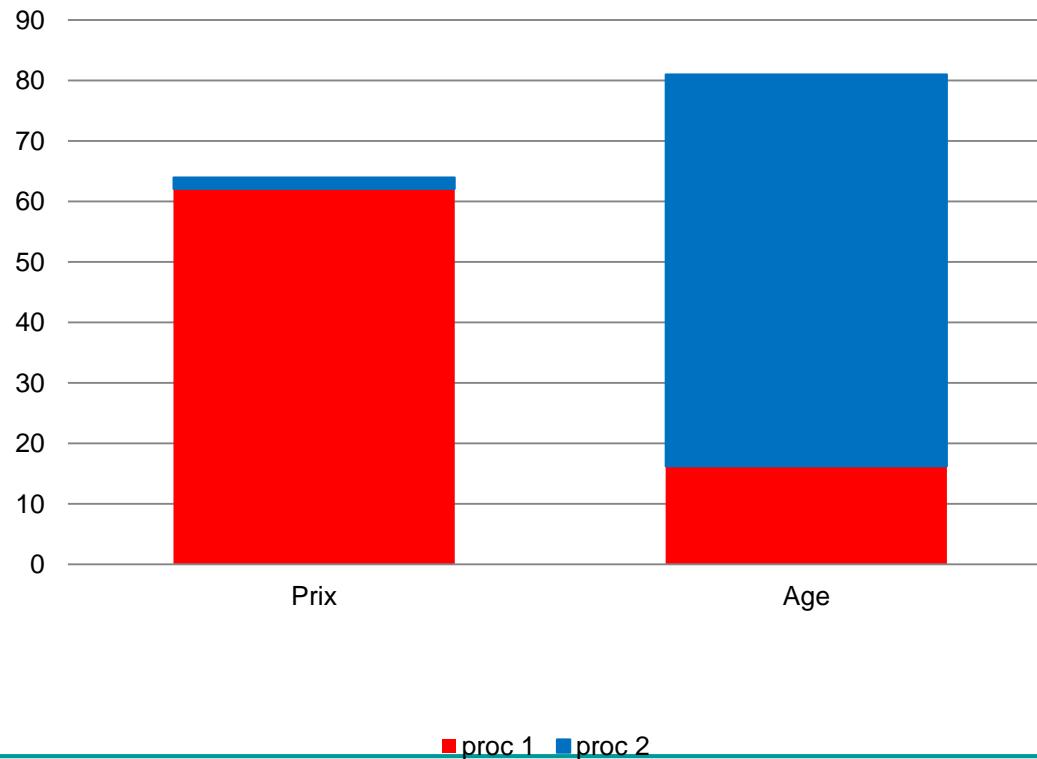
Variable Temporelle Age

Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans et s'est arrêté à 17 ans. Jean a commencé au même âge qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins. A quel âge Jean s'est-il arrêté ?

Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 Euros et une trousse. Il paie 14 Euros. Un feutre coûte 3 Euros de moins qu'un classeur. Augustin achète une trousse et un feutre. Combien doit-il payer ?

Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans et s'est arrêté à 17 ans. Jean a commencé au même âge qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins. A quel âge Jean s'est-il arrêté ?

Performance et distribution des stratégies de réussite



Question de recherche

- Comment amener les élèves à être moins dépendants de ces effets de contenus ?
 - Comment les amener à développer leur flexibilité cognitive en d'autres termes, leur capacité à changer de point de vue sur les problèmes qui leur sont proposés, et à traiter les problèmes de plus en plus abstraitement ?
-

Plan de la présentation

- **Rôle du contenu** et mise en œuvre spontanée d'une **stratégie de résolution** alors que d'autres sont possibles
- **Démarche d'apprentissage** pour favoriser la **flexibilité** (perception de plusieurs point de vue) et l'**abstraction**
- **Conclusion / Discussion**

Effet de contenu et Structure induite :

Alignement sémantique



$X : Y =$

- **Relation asymétrique** (contenant/ contenu: « est contenu dans »)



$X + Y =$

- **Relation symétrique** (2 éléments similaires « est une sorte de »)
-

Effet de contenu sur la mise en œuvre d'une stratégie

Cas des problèmes appartenant à une même catégorie

- Impact de modifications des éléments de l'énoncé tel le scénario de l'histoire (Coquin-Viennot et Moreau; 2003)

- Rôle de la Nature de la variable (Sander, Levrat, Brissiaud, Porcheron et Richard; 2003 - Hakem, Sander, Labat et Richard; 2005- Gamo, Taabane et Sander; 2011)

Impact de modifications des éléments de l'énoncé tel le scénario de l'histoire

Problème 1

Pour une distribution de prix, le fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats 5 roses et 7 tulipes.

Problème 2

Pour une distribution de prix, le fleuriste prépare pour chacun des 14 candidats un **bouquet** composé de 5 roses et 7 tulipes.

Combien de fleurs le fleuriste utilise-t-il en tout ?

Stratégies de résolution

Le développement : $(14 \times 5) + (14 \times 7)$

La factorisation : $14 \times (5 + 7)$

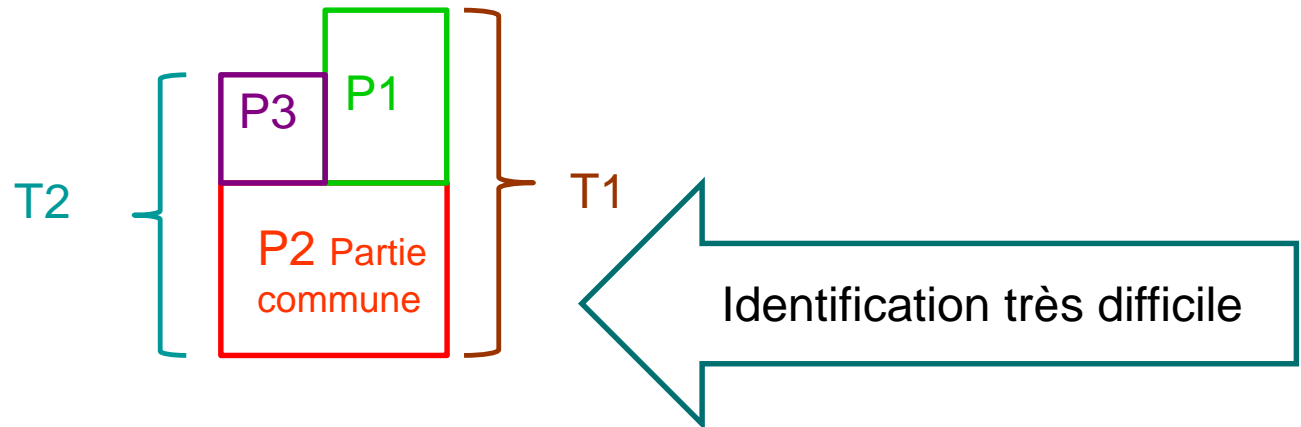
Taux de Factorisation Pb 1 < Pb 2



Nature de la variable

Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 Euros (**Partie 1**) et une trousse (**Partie 2**). Il paie 14 Euros (**Tout 1**). Un feutre coûte 3 Euros de moins qu'un classeur. (**Partie 3 construite par comparaison avec P1**)
Augustin achète une trousse et un feutre. Combien doit-il payer ? (**Tout 2**)

Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans (**Partie 1**) et s'est arrêté à 17 ans (**Tout 1**). Jean a commencé au même âge (**Partie 2**) qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins (**Partie 3 construite par comparaison avec la Partie 1**).
A quel âge Jean s'est-il arrêté ? (**Tout 2**)



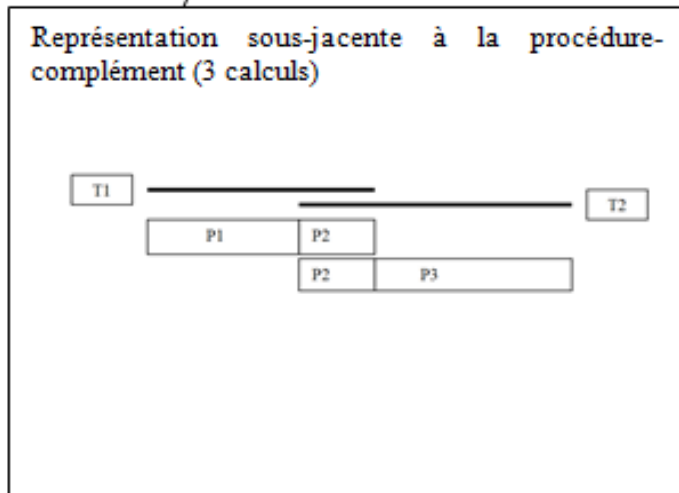
Nature de la variable

Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 Euros (**Partie 1**) et une trousse (**Partie 2**). Il paie 14 Euros (**Tout 1**)..

Un feutre coûte 3 Euros de moins qu'un classeur. (**Partie 3 construite par comparaison avec P1**)

Augustin achète une trousse et un feutre.

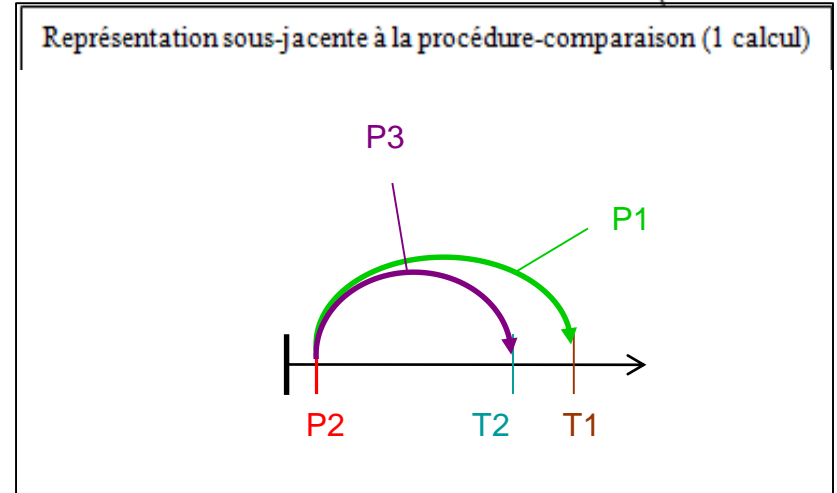
Combien doit-il payer ? (**Tout 2**)



97% des réussites

Procédure-complément

3 calculs ($14-8=6$; $8-3=5$; $6+5=11$)



3% des réussites

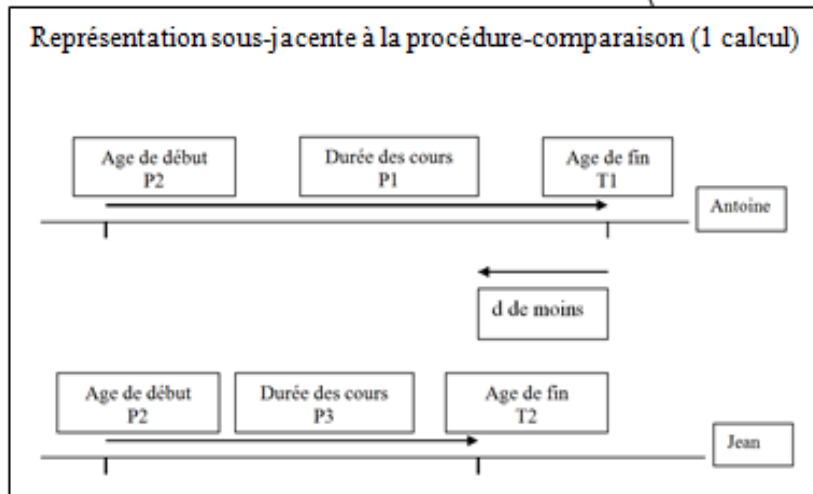
Procédure-comparaison

1 calcul ($14-3 = 11$)

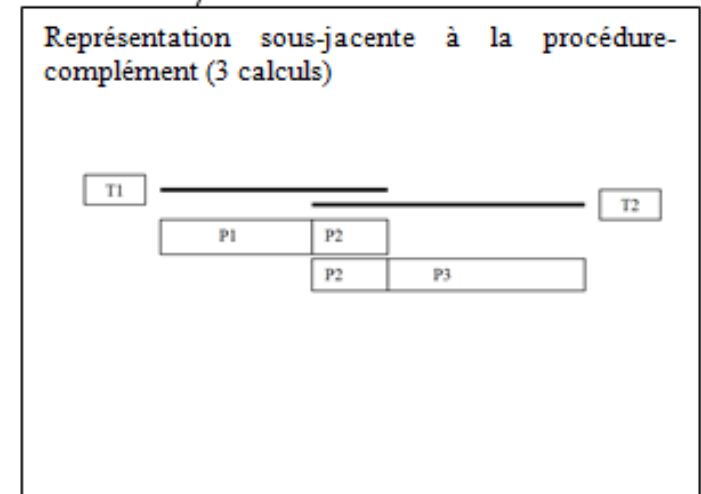
Nature de la variable

Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans (**Partie 1**) et s'est arrêté à 17 ans (**Tout 1**). Jean a commencé au même âge (**Partie 2**) qu'Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins (**Partie 3 construite par comparaison avec la Partie 1**).

A quel âge Jean s'est-il arrêté ? (**Tout 2**)



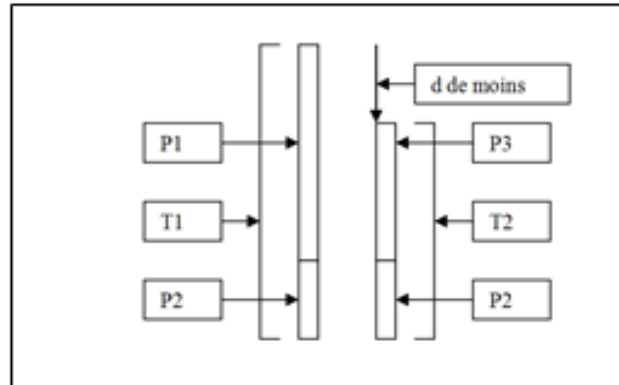
80% des réussites
Procédure-comparaison
1 calcul ($17 - 2 = 15$)



20% des réussites
Procédure-complément
3 calculs ($17 - 8 = 9$; $8 - 2 = 6$; $9 + 6 = 15$)

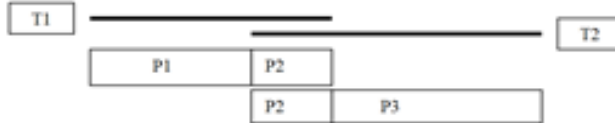
Structure mathématique des problèmes étudiés

Structure abstraite
par mise en correspondance entre les deux représentations induites

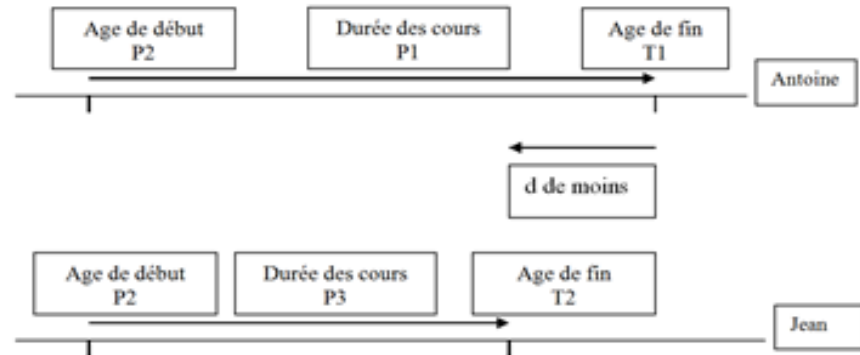


Fondée
- sur l'identification de la **partie commune** (P2)
sur le **théorème** :
Si deux ensembles ont une partie commune, la différence des parties complémentaires est que la même que celle des « tous ».

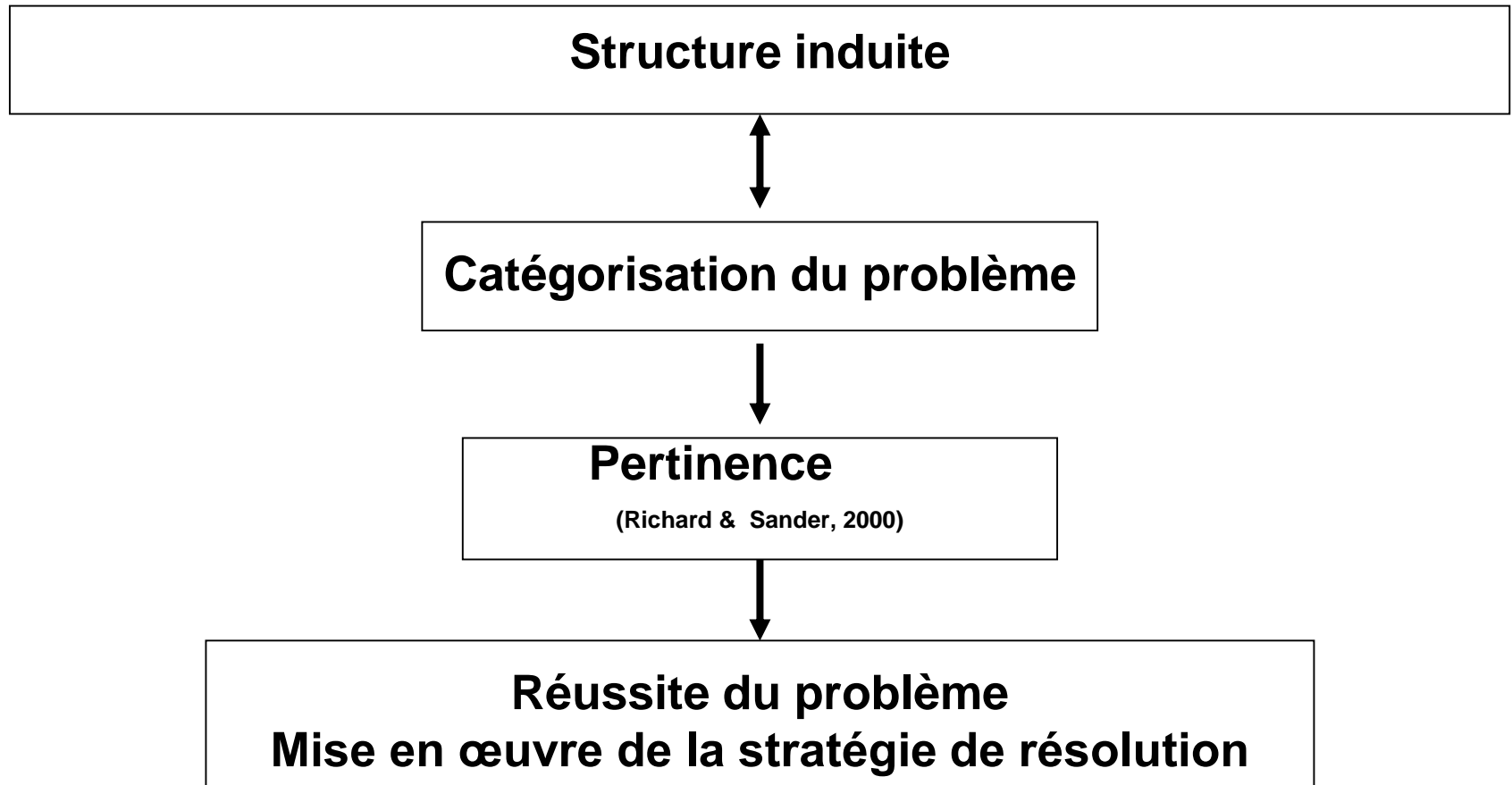
Représentation sous-jacente à la procédure-complément (3 calculs)



Représentation sous-jacente à la procédure-comparaison (1 calcul)



La construction de la représentation d'un problème



Certains éléments auraient un pouvoir structurant sur la représentation construite permettant à nos connaissances quotidiennes et familières de s'introduire dans la résolution de problèmes arithmétiques.

- Les Variables temporelles/matérielles favorisent les représentations ordinales/cardinales

- (Hakem, Sander, Labat et Richard; 2005- Gamo, Taabane et Sander; 2011)

- La présence d'un élément structurant favorise la factorisation (Coquin-Viennot et Moreau; 2003)

Problématique

- Amener les élèves
 - à être moins dépendants de ces effets de contenus
 - à dépasser l'appréhension spontanée des situations
 - à se questionner sur le point de vue spontanément adopté en résolution de problèmes et à en chercher d'autres alternatifs.
 - à envisager toutes les stratégies que la structure mathématique du problème autorise et à choisir celle qui est la plus directe plutôt que celle induite par son habillage
- Proposer un apprentissage favorisant la flexibilité (perception de plusieurs points de vue) et l'acquisition d'un point de vue plus général

Quelles sont les tâches qui favoriseraient la compréhension de points de vue alternatifs et le changement de représentation?

Encourager à la comparaison

- ❑ **De cas analogues** (Gentner, Loewenstein & Thompson, 2003 ; 2004/résolution de problèmes en analogie)
- ❑ **Des stratégies** (Brissiaud, 1994, résolution de problèmes arithmétiques)

Présentation de la séquence d'apprentissage

■ Séance 1 (60 min)

- Travail sur 4 problèmes – variable matérielle (effectif)
- Recherches des différentes stratégies
- Comparaison des stratégies (intérêt de chacune)
- Comparaison des problèmes résolus
 - Mise en évidence des similarités entre problèmes

■ Séance 2 (60 min)

- Travail sur 4 problèmes – variable matérielle (effectif et hauteur)
- Manipulation d'objets (boîtes) pour « simuler » le problème
- Construction de schémas pour représenter l'énoncé du problème et le résoudre

Contribution expérimentale:

Apprentissage auprès de différents publics scolaires

Hypothèse

La stratégie alternative devrait être plus fréquente après apprentissage

Prédiction

La démarche d'apprentissage fondée sur le recodage sémantique des problèmes et sur la mise en correspondance des stratégies de résolution doit conduire les élèves à reconnaître que plusieurs points de vue sont possibles, à re-représenter le problème et à abstraire la structure mathématique du problème.

- Expérience 1: Élèves de CM de classes banales (Gamo, Sander & Richard; 2010)
- Expérience 2: Élèves de CM scolarisés en REP (Gamo & Nogry, soumis)

Contribution expérimentale:

Apprentissage auprès de différents publics scolaires

- **Expérience 1 : 11 classes banales de CM (261 élèves)**
 - **Groupe expérimental : 8 classes (193 élèves, 67 / 3 CM1, 126 / 5 CM2)**
 - **Groupe contrôle : 3 classes (68 élèves / CM2)**
- **Expérience 2 : 5 classes de CM (95 élèves) en REP**
 - **Groupe expérimental : 3 classes (55 élèves / CM2)**
 - **Groupe contrôle : 2 classes (40 élèves / CM2)**

VI: Apprentissage / Absence d'apprentissage

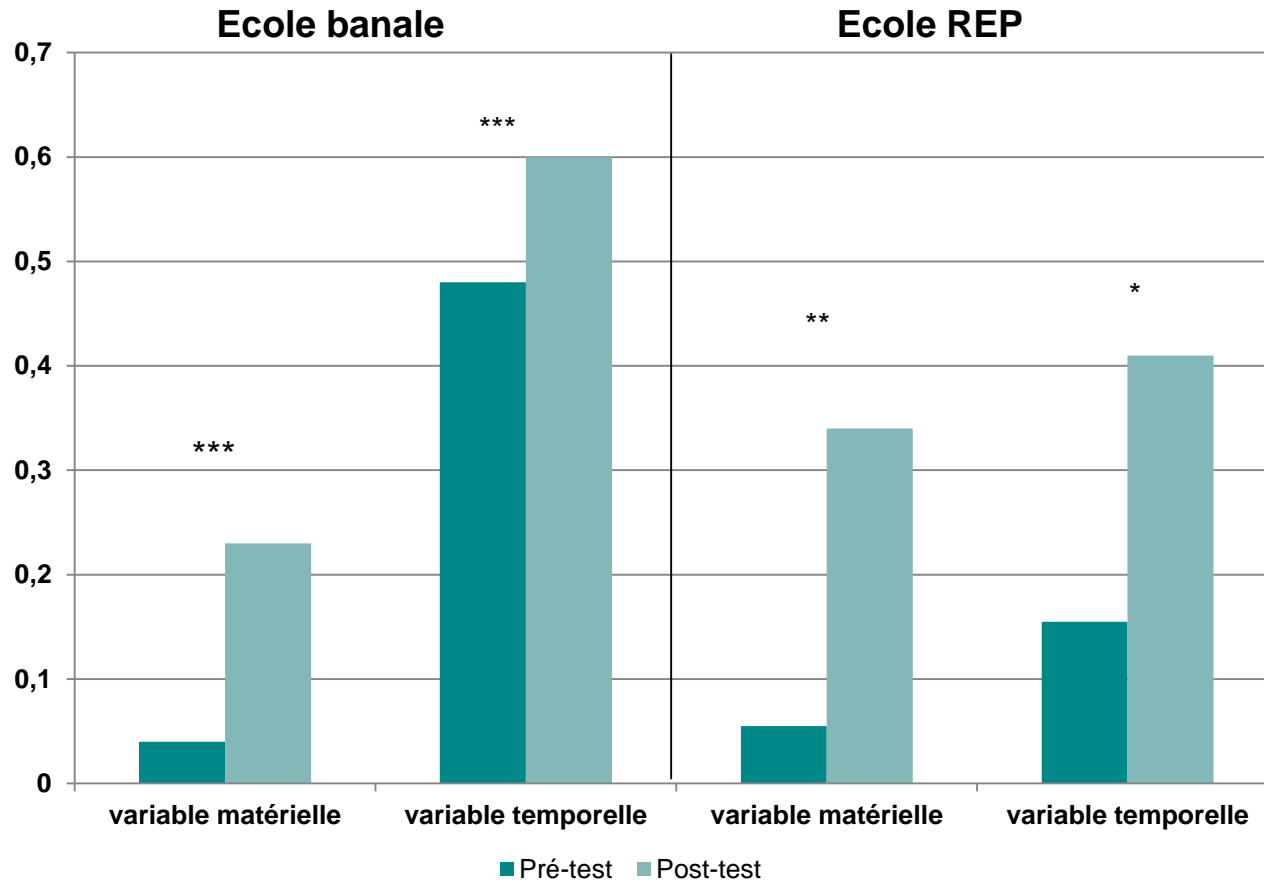
VD: stratégie utilisée

■ Dispositif et Matériel:

- pré-test – APPRENTISSAGE – post-test (papier-crayon)
- 6 problèmes isomorphes / 2 variables : matérielle et temporelle

Résultat

Fréquence de la stratégie alternative



Conclusion (1)

- Rôle des effets de contenu dans la catégorisation de problèmes arithmétiques pouvant être résolus par plusieurs procédures
 - Surpasser l'influence de la représentation spontanée
- Apport d'un apprentissage par recodage sémantique visant à faire acquérir un point de vue plus général sur la situation
 - Faire acquérir la structure mathématique, en prenant en compte les relations entre structures induites et structures profondes

Conclusion (2)

■ Implications directes dans le cadre scolaire

□ Apprenant

- structures induites/structure profonde
- Développement de compétences conceptuelles et transversales (Réf en France: Compétences 3 (mathématiques) et 7 (autonomie) socle commun des connaissances et des compétences)

□ Enseignant

- structures induites/structure profonde
- situations d'apprentissage

LE SOCLE COMMUN DES CONNAISSANCES ET DES COMPÉTENCES

Compétences 3 (Socle commun mis en place en France depuis la rentrée 2007)

Les mathématiques, ... favorisent

la rigueur intellectuelle constitutive du raisonnement scientifique.

Les mathématiques fournissent **des outils pour agir, choisir et décider** dans la vie quotidienne. **Elles développent la pensée logique, les capacités d'abstraction ...**

CONNAISSANCES

... aussi tôt que possible à l'école primaire ... Il est aussi indispensable **d'apprendre à démontrer et à raisonner.**

CAPACITÉS

À **la sortie de l'école obligatoire**, ... l'élève doit être capable :

- de raisonner logiquement, de pratiquer la déduction, de démontrer ;
- de communiquer, à l'écrit comme à l'oral, en utilisant un langage mathématique adapté ;

ATTITUDES

L'étude des mathématiques permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois logiques et développe :

- **la rigueur et la précision ;**
- **le respect de la vérité rationnellement établie ;**
- **le goût du raisonnement fondé sur des arguments dont la validité est à prouver.**

Principaux éléments de mathématiques, (extrait du livret de compétences, palier 2 : fin CM 2)

- ❑ Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations
- ❑ Pratiquer une démarche scientifique
- ❑ Pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner
- ❑ Manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter, mettre à l'essai
- ❑ plusieurs pistes de solutions

Compétence 7. L'autonomie et l'initiative

L'AUTONOMIE

le socle commun établit la **possibilité d'échanger, d'agir et de choisir en connaissance de cause, en développant la capacité de juger par soi-même.**

■ CONNAISSANCES

La maîtrise des autres éléments du socle commun est indissociable de l'acquisition de cette compétence, mais chaque élève doit aussi :

- **connaître les processus d'apprentissage, ses propres points forts et faiblesses ;**

■ CAPACITÉS

Les principales capacités attendues d'un élève autonome sont les suivantes :

- s'appuyer sur des méthodes de travail
- **se concentrer**, mémoriser,
- savoir respecter des consignes ;
- **être capable de raisonner avec logique et rigueur et donc savoir identifier un problème et mettre au point une démarche de résolution ;**
- **rechercher l'information utile, l'analyser, la trier, la hiérarchiser, l'organiser, la synthétiser ;**
- mettre en relation les acquis des différentes disciplines et les mobiliser dans des situations variées ;
- **identifier, expliquer, rectifier une erreur ;**
- distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut prouver ;
- **mettre à l'essai plusieurs pistes de solution ;**
- savoir s'auto-évaluer ;
- **développer sa persévérance ;**

Nous vous remercions de votre attention

Annexes

Problèmes expérimentaux

Personnes-effectif xat	Achats-prix yat	Age zat
<p>Dans la famille Richard, il y a 5 personnes. Quand les Richard partent en vacances avec les Robert, ils sont 9 à l'hôtel.</p> <p>Dans la famille Dumas, il y a 3 personnes de moins que dans la famille Richard. Les Robert partent en vacances avec les Dumas.</p> <p>Combien seront-ils à l'hôtel ?</p>	<p>Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 Euros et des ciseaux. Il paie 14 Euros.</p> <p>Un feutre coûte 3 Euros de moins qu'un classeur.</p> <p>Augustin achète des ciseaux et un feutre.</p> <p>Combien doit-il payer ?</p>	<p>Antoine a suivi les cours de peinture à l'école d'art pendant 8 ans et s'est arrêté à 17 ans.</p> <p>Jean a commencé au même âge que Antoine et a suivi les cours 2 ans de moins. A quel âge Jean s'est-il arrêté ?</p>
Personnes-effectif xap	Achats-prix yap	Age zap
<p>Dans la famille Bernard, il y a 6 personnes. Quand les Bernard vont avec les Durand à la pizzeria, ils sont 9 à table. Quand les Durand vont avec les avec les Rousseau à la pizzeria, ils sont 2 de moins à table.</p> <p>Combien sont-ils dans la famille Rousseau?</p>	<p>Daniel achète à la librairie un cahier qui coûte 7 euros et une règle. Il paie 11 euros.</p> <p>Clément achète une règle et un feutre. Il paie 2 euros de moins Daniel.</p> <p>Combien coûte le feutre ?</p>	<p>Pauline a suivi les cours de danse au conservatoire pendant 11 ans et s'est arrêté à 17 ans.</p> <p>Julie a commencé au même âge que Pauline et s'est arrêtée 4 ans plus tôt.</p> <p>Combien de temps Julie a-t-elle suivi les cours ?</p>

Les problèmes de la phase d'apprentissage

Séance 1

Dans la basse-cour, il y a 224 poules. Quand les poules sont avec les canards, il y a 512 animaux. Finalement, le fermier met des oies à la place des poules, cela fait 5 animaux de moins dans la basse-cour. Combien y a-t-il d'oies ?

Séance 2

Une brique orange mesure 8cm. Cette brique orange est posée sur une brique blanche. La pile ainsi formée mesure 15cm de hauteur. Une brique rouge est posée à la place de la brique orange. La nouvelle pile mesure 5cm de moins. Quelle est la hauteur de la brique rouge ?