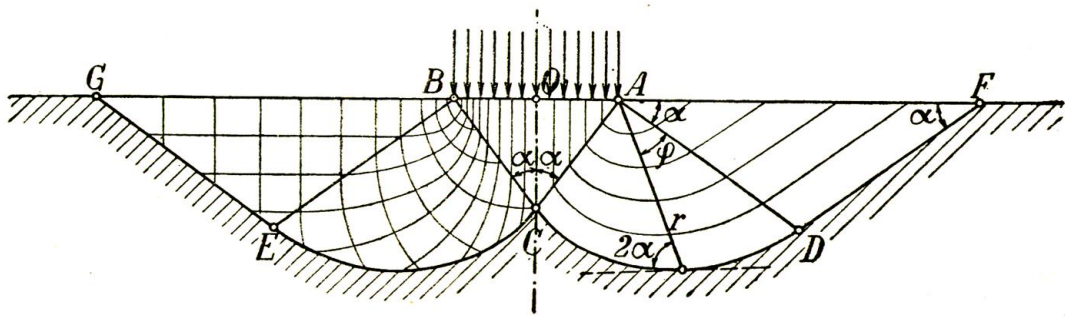


100 Year Prandtl's Wedge

Intermediate report



Stefan Van Baars

Cover Figure: Original drawing of the Prandtl-wedge



You can copy, distribute, display, and perform this copyrighted work, or a derivative work based upon this, for non-commercial purposes - but only when given credit to the author.

Published by Stefan Van Baars, July 2016

Key words: soil mechanics, foundation engineering, bearing capacity, footings

PREFACE

During the first years working as professor in Foundation Engineering and Soil Mechanics at the Faculty of Science, Technology and Communication of the University of Luxembourg, I got fascinated by the beauty of the analytical solutions of the bearing capacity of foundations made a century ago. Since the article “About the hardness of a plastic body”, published by Ludwig Prandtl in 1920, a lot of extensions have been made, for example with inclination factors and shape factors. Also many laboratory experiments have been done and many numerical calculations have been made. The failure mechanism for shallow foundations has even been extrapolated to the failure mechanism around the tip of a pile. All this scientific work leads back to the first publication of the so-called Prandtl-wedge of 1920.

This book “100 Year Prandtl’s Wedge” has been made for all those who are interested in these fundamentals of foundation engineering and their history.

Luxembourg, June 2015

Stefan Van Baars

CONTENT

I	PRANDTL & REISSNER.....	7
1	Introduction.....	8
2	Ludwig Prandtl	10
3	Hans Jacob Reissner	13
II	ORIGINAL PUBLICATIONS	15
4	Prandtl's publication of 1920.....	16
4.1	Introduction	16
4.2	Prandtl-wedge	17
4.3	Prandtl-wedge, also discovered by Prandtl?	18
5	Reissner's publication of 1924	21
5.1	Introduction	21
5.2	Effect of the surcharge	21
III	BEARING CAPACITY FACTORS.....	23
6	Prandtl-wedge	24
7	Surcharge bearing capacity factor N_q	27
7.1	Analytical solution	27
7.2	Numerical solution.....	28
8	Cohesion bearing capacity factor N_c	31
8.1	Analytical solution	31
8.2	Numerical solution.....	33
9	Soil-weight bearing capacity factor N_γ	35
9.1	Scaled modelling.....	35
9.2	Numerical solution.....	37
10	Table of bearing capacity factors	40
IV	CORRECTION FACTORS.....	41
11	Extensions: correction factors	42
12	Inclination factors	43
12.1	Meyerhof and Brinch Hansen.....	43
12.2	Surcharge fan reduction angle ψ_q	44
12.3	Cohesion fan reduction angle ψ_c	46
12.4	The surcharge inclination factor i_q	47
12.5	Cohesion inclination factor i_c	49
12.6	Soil-weight inclination factor i_γ	52

13	Shape factors	54
13.1	Introduction.....	54
13.2	Cohesion shape factor s_c	56
13.3	Surcharge shape factor s_q	57
13.4	Soil-weight shape factor s_γ	57
13.5	Superposition of the shape factors	58
14	Non-eccentric loading.....	59
15	Inclined footing factors	61
16	Slope factors	62
17	Perforation factor	63
V	PILE TIP BEARING CAPACITY	65
18	Pile tip bearing capacity using Meyerhof.....	66
19	Pile tip bearing capacity using CPT-based methods	68
20	Pile tip bearing capacity versus horizontal stress	71
VI	APPENDICES.....	73
21	Mohr-Coulomb and Rankine.....	74
22	N_c simplification	76
23	Prandtl's publication of 1920.....	78
24	Reissner's publication of 1924	92
25	Literature.....	106
26	Background of the author	109

I Prandtl & Reissner

1 Introduction

The discipline of Soil mechanics and Foundation Engineering is one of the younger basic civil engineering disciplines. This discipline has been developed in the beginning of the 20th century. The need for this discipline arose in many countries, often as a result of spectacular accidents such as landslides and failures of foundations. The first important contributions to soil mechanics are due to Coulomb, who published an important treatise on the failure of soils in 1776, and to Rankine, who published an article on the possible stress states in soils in 1857. Important pioneering contributions to the development of soil mechanics were made by the Austrian Karl Von Terzaghi, who described in 1925 in his book “Erdbaumechanik” how to deal with the influence of the pressures of the pore water on the behaviour of soils. His concept of effective stresses is an essential element of the theory of soil mechanics.



Figure 1-1. Karl Von Terzaghi (Oct. 2, 1883 – Oct. 25, 1963).

The biggest problem for a shallow foundation, just as any other type of foundation, is a failure due to an overestimation of the bearing capacity. This means that the correct prediction of the bearing capacity of the shallow foundation is often the most important part of the design of a civil structure. That is why the publication of Prandtl in 1920, about the hardness of a plastic body, was a major step in solving the bearing capacity of a shallow foundation, although it is well possible that he never realised this, because his solution was not made for civil engineering purposes, but for mechanical purposes.



Figure 1-2. Overloaded shallow foundation of a group of grain silos.



*Figure 1-3. Overloaded shallow foundation of a group of grain silos.
Transcona Grain Elevator, Manitoba, Canada, October 18, 1913*

2 Ludwig Prandtl

About the life of Ludwig Prandtl a lot of details can be found, from Wikipedia, from the homepage of the Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), from the book “Prandtl and the Göttingen School”, written by Eberhard Bodenschatz and Michael Eckert, or especially from the book “Ludwig Prandtl, A Biographical Sketch, Remembrances and Documents” of which there is a German original by Johanna Vogel-Prandtl but also an English translation by V. Vasanta Ram, published by The International Centre for Theoretical Physics Trieste, Italy. The information below follows from these sources.

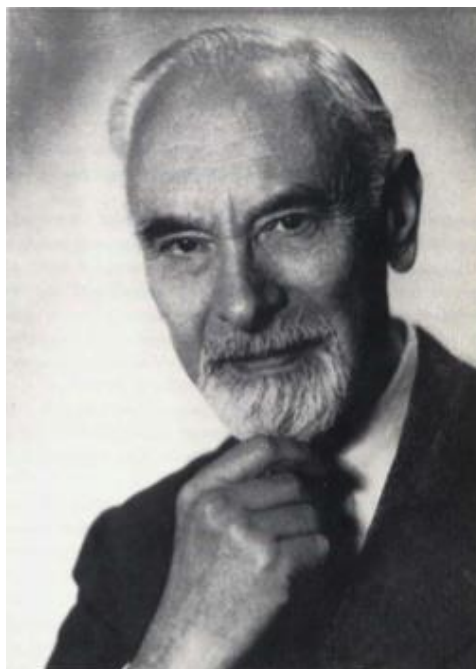


Figure 2-1. Ludwig Prandtl (Feb. 4, 1875 – Aug. 15, 1953)

Ludwig Prandtl was born in Freising, near Munich, Germany, in 1875. His mother suffered from a lengthy illness and, as a result, Ludwig spent more time with his father, a professor of engineering. He entered the Technische Hochschule Munich in 1894. Prandtl passed the final examination in 1898 with the grade "sehr gut" ("very good").

After this, Professor Föppl offered him the job of a “Hilfsassistent”, which he gladly accepted. This post, which was meant for earning a doctor's degree, was assigned for one year only. Professor Föppl helped Prandtl to postpone his conscription for the military service by one year. The period when Prandtl worked with August Föppl in his mechanical engineering laboratory can be dated exactly: from October 1, 1898 to November 30, 1899. In this time Prandtl wrote his dissertation entitled: “Kipp-Erscheinungen, ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht” (Lateral torsional buckling: A case of unstable elastic equilibrium). With this dissertation, Prandtl could not get a doctor's degree at the Technische Hochschule München (this institution was

given the right to award doctor's degrees only in 1900), so that he submitted his work to the *Philosophische Fakultät* of the Munich University. The defence took place on January 29, 1900.

In 1901 Prandtl became a professor of fluid mechanics at the technical school in Hannover, now the Technical University Hannover. It was here that he developed many of his most important theories. In 1904 he delivered his first famous paper, "Fluid Flow in Very Little Friction", in which he described the boundary layer and its importance for drag and streamlining. This paper also described flow separation as a result of the boundary layer, clearly explaining the concept of stall for the first time. The effect of the paper was so great that Prandtl became director of the Institute for Technical Physics at the University of Göttingen later that year.

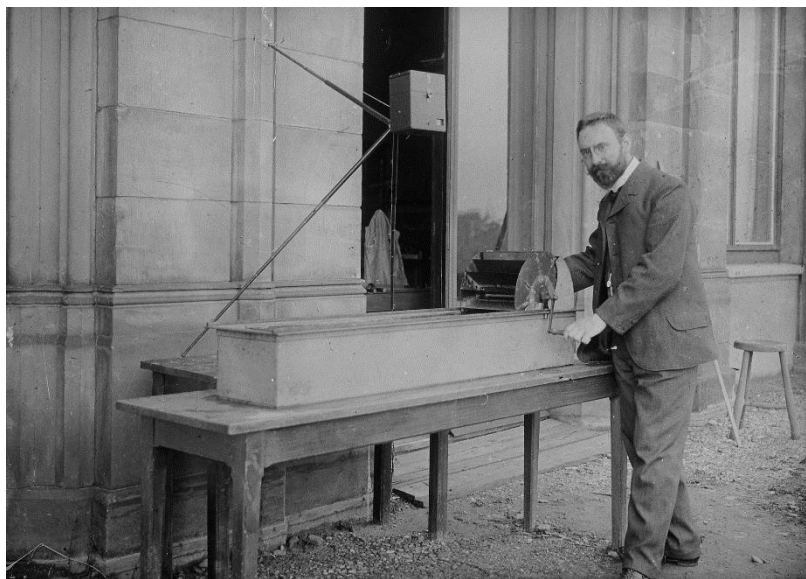


Figure 2-2. Ludwig Prandtl with his fluid test channel, 1904.

Prandtl had a good contact with the family of professor Föppl. On Easter 1909, Prandtl asked Gertrud Föppl to marry him. An agreement had been reached in respect of religion that Prandtl would remain in the Catholic Church but Gertrud's protestant ancestry would prescribe the formalities for the marriage. On September 11, 1909, Ludwig Prandtl and Gertrud Föppl married in Munich according to protestant formalities. The marriage festivities were held at the Föppl's house.

Prandtl and his student Theodor Meyer developed the first theories of supersonic shock waves and flow in 1908. The Prandtl-Meyer expansion fans allowed for the construction of supersonic wind tunnels. He had little time to work on the problem further until the 1920s, when he worked with Adolf Busemann and created a method for designing a supersonic nozzle in 1929. Today, all supersonic wind tunnels and rocket nozzles are designed using the same method. A full development of supersonics would have to wait for the work of Theodore von Kármán, a student of Prandtl at Göttingen.

In 1922 Prandtl, together with Richard von Mises, founded the GAMM (the International Association of Applied Mathematics and Mechanics) and was its chairman from 1922 until 1933.

Prandtl worked at Göttingen until he died on August 15, 1953. His work in fluid dynamics is still used today in many areas of aerodynamics and chemical engineering. He is often referred to as the father of modern aerodynamics.

The crater Prandtl on the far side of the Moon is named in his honour.

The Ludwig-Prandtl-Ring is awarded by Deutsche Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt (German Aerospace Association) in his honour for outstanding contribution in the field of aerospace engineering.



Figure 2-3. Ludwig Prandtl at his water tunnel in the mid to late 1930s (Reproduction from the original photograph DLR: FS-258).

3 Hans Jacob Reissner

About the life of Hans Jacob more information can be obtained from Wikipedia or from the library of the University of California, San Diego. The information below is a summary from these two sources.



Figure 3-1. Josefina und Hans Jacob Reissner.

Hans Jacob was born on January 18, 1874, in Berlin, Germany. He earned a degree in civil engineering from Berlin's Technische Hochschule in 1897, and then spent a year in the United States working as a structural draftsman. Reissner returned to Germany to study physics with Max Planck at Berlin University. In 1900 he changed direction and attended the Technische Hochschule, where he studied under Heinrich Mueller-Breslau and completed one of the first engineering doctorates in 1902. His dissertation was on vibrations of framed structures. Reissner joined the faculty at Berlin's Technische Hochschule, but he also worked on outside projects, including structural analysis for Graf (Count) Von Zeppelin. In 1904, he was awarded a fellowship to study the use of iron in construction in the United States of America.

In 1906, Reissner returned to Germany and was appointed professor of mechanics at the Technische Hochschule in Aachen. Until this time, his research had dealt with topics at the intersections of mechanics and physics, but his attention now focused upon the new field of aviation.

At June 6, 1906, he married Josefina Reichenberger. They got four children; Max Erich (Eric Reissner), Edgar Wilhelm, Dorothea Gertrud (Thea) and Eva Sabine.

By 1908 Reissner was familiar enough with the basic areas of aircraft stability, control and propulsion to deliver a seminal paper published as "Wissenschaftliche Fragen aus der Flugtechnik" (Scientific Aerospace Questions), the first of many articles on

these topics. Hugo Junkers, who also worked at the faculty in Aachen, and Reissner designed and constructed the first successful all-metal and tail-first airplane, the "Ente" (Duck). In this time he also worked for Ferdinand Graf Von Zeppelin.

After seven years at the Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen (Aachen University of Technology), Reissner was invited to return to Berlin's Technische Hochschule in 1913 as professor of mathematics in the civil engineering department. During World War I he was responsible for the structural analysis of the Staaken four-engine bomber and designed the first controllable-pitch propellers for this aircraft. He was awarded the Iron Cross for civilians for his work.

In 1929 he started to cooperate with Moritz Straus, the owner of both Argus-Werke and Horch. When Reissner was forced to retire in 1935 under the Nazi-Regime due to his Jewish background, he became an advisor of Argus Motoren Gesellschaft.

When Straus was forced to give the company Argus-Werke away in 1938 due to his Jewish background and the Aryanisation, Reissner emigrated to the United States, where he first taught at the Illinois Institute of Technology (1938-1944) and then, until his retirement, at the Polytechnic Institute of Brooklyn (1944-1954). For his seventy-fifth birthday in 1949 he was honoured with the presentation of a festschrift, the Reissner Anniversary Volume, at a dinner in New York. Reissner retired from professional life in 1954 and died in 1967.

Reissner's son became Professor Mechanical Engineering at the Massachusetts Institute of Technology.

II Original Publications

4 Prandtl's publication of 1920

4.1 Introduction

The publication of Prandtl in 1920 is called “Über die Härte plastischer Körper”, or in English “About the hardness of a plastic body”. It has been published in the journal “Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch.-physikalischen Klasse*” on page 74–85.

The publication can also be found in the appendices of this book (see Chapter 23), with thanks to the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB), Georg-August-Universität Göttingen, Germany.

The title of the publication is already interesting, because “About the hardness of a plastic body”, does not suggest that a main problem in the shallow foundation engineering has been solved. In fact Prandtl was not a geotechnical engineer, not even a civil engineer.

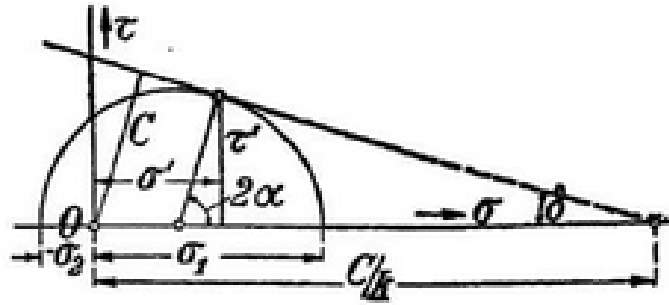
This explains why the publication of Prandtl did not refer to geotechnical solutions, which are well-known in the geotechnical world, like the analytical solution of the vertical stresses below a strip footing, made by Flamant in 1892. And also not to the solution of the vertical stresses below a circular footing by Boussinesq in 1885. From laboratory tests it is known that these analytical solutions are very accurate (Türedi and Örnek, 2016).

The explanation of the title is given at the beginning of the publication: “One owes Heinrich Hertz a theory about the contact of a solid elastic body”. In fact Hertz solved in 1881 the elastic, but non-linear, force-displacement relation between two balls or a ball and a flat surface. This was a major step for mechanical engineers, for example for checking if a ball bearing will be overloaded and to what extent plasticity would occur.

The publication of Prandtl was meant to find out at which load, full plasticity would be reached, and an object could be fully pushed into a solid body.

It is clear from the article that the author is not a geotechnical engineer, but a mechanical engineer, because it is written partially with the idea that (see the first page, page 78): “the biggest shear stresses have a constant value Cand the difference between the smallest and largest stress should be constant $= 2C$ ”.

This is the case for steel since for steel the friction angle $\phi = 0$, but for soils this is not correct because a part of the shear stress comes from the friction angle.



Figur 2.

Figure 4-1. Mohr's circle with Coulomb failure envelope.

In the article, for the friction angle, the parameter δ is used, instead of the parameter ϕ , also the parameter k is used, instead of $\sin \delta$ and the parameter C is used for the cohesion instead of the parameter c .

There are also two other remarkable points, see Figure 4-1.

First, the Coulomb failure envelope is drawn for geotechnical engineers as mirror image, because in mechanical engineering tension is positive, while in geotechnical engineering pressure is positive.

Second, the cohesion is not drawn vertically as it should be, but perpendicularly to the Coulomb failure envelope. These two points explain why in the final solution (equation 13b, page 84) there is a $-C/k$, which is a mistake; it should be only a c .

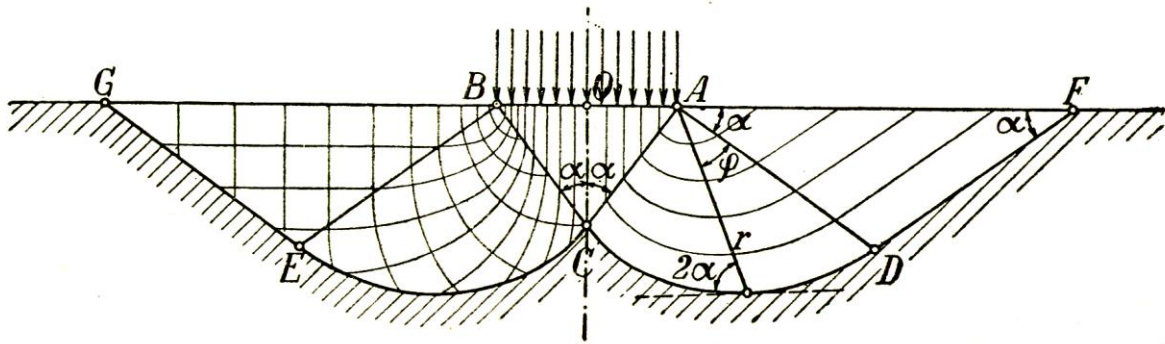
4.2 Prandtl-wedge

Prandtl was the first to publish the failure mechanism of the solid body due to a strip load, consisting of three different types of area. This failure mechanism is nowadays known as "The Prandtl-wedge"

Unfortunately the article is very direct; final solutions are often given without much explication. For example the most important part of the publication, the "discovery" of the Prandtl-wedge is discussed in only a few lines, in a style something like:

"There must be an area below the strip load with the principle direction of the largest stress downwards and an area below the adjacent surface of the strip load, where the highest principle stress is horizontal and the lowest principle stress points downwards. These areas have shear surfaces with an angle of $\alpha = 45^\circ - \phi/2$ in comparison to the highest principle stress".

And then the author simply concludes on page 76: "Closer examination shows that the solution is found by the zoning depicted in Figure 1", which is followed by the famous "Prandtl-wedge" shown in Figure 4-2.



Figur 1.

Figure 4-2. The Prandtl-wedge.

A bit further it says:

“Between the first and the two last triangles there are sector shaped parts ACD and BCE”, because “the curves CD and CE” are a part of “a system of shear lines” which cross “the radii leaving from A and B”, with “a constant angle 2α ”, from which “it follows directly that the shear lines are logarithmic spirals”.

The way the final solution (equation 13b, page 80) is found is not really given. It only says on this page: “...in this way, after simple calculations,...”.

Therefore a complete explanation of this solution will be given in Chapter 8.

4.3 Prandtl-wedge, also discovered by Prandtl?

In the past it was very common that the head of a research group got most or even all the credits for the output of his group. As an example, all astronomical objects discovered by Pierre Méchain, are not named after him, but after Charles Messier, “simply” because Méchain was hired by Messier.

The Prandtl Crater on the Moon is named after Prandtl, but was certainly not discovered by him. In a similar way it is not automatically clear if the Prandtl-wedge is really discovered by Prandtl himself, or by someone who was appointed by Prandtl. For an answer to this, some points have to be considered.

First, it is, at least to say, remarkable that the article of the “Prandtl”-wedge of 1920, which deals about solid mechanics, was published, completely alone, by Prandtl, as a former professor in fluid mechanics, fully dedicated at that time to supersonic wind tunnels and rocket nozzles, while having scientific staff working for him, not only on fluid mechanics, but also on solid mechanics.

Second, another remarkable point can be derived from the list of all publications of Prandtl, which can be found in the book:

Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen
Zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik
Herausgegeben von Walter Tollmein – Hermann Schlichting - Henry Görtler
Schriftleitung F.W. Riegels
Erster Teil (S.1-574) 1961 Springer- Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Based on this list, Figure 4-3 has been made, showing the number of publications Prandtl has made during his career as a single author and the number of publications together with a co-author.

It is remarkable that Prandtl, while he had scientists working for him and had also his managerial tasks to do as director of the Institute for Technical Physics at the University of Göttingen and chairman of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics, still published so many articles per year and also most of them completely alone.

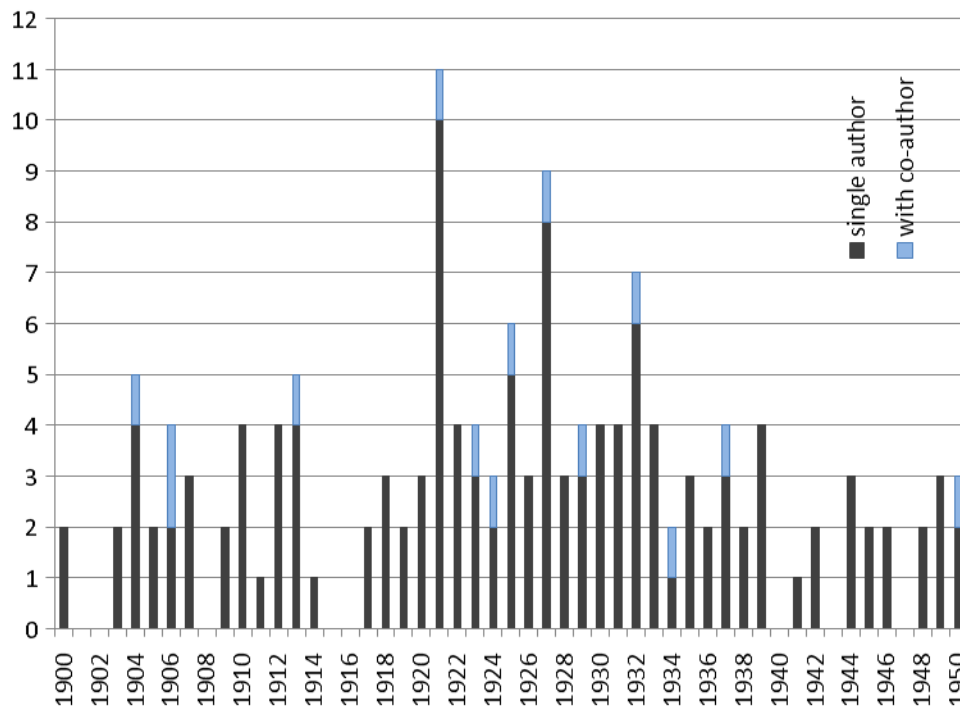


Figure 4-3. Publications of Prandtl, with and without co-author.

Third, the few articles which Prandtl did not publish alone, were almost all co-authored by his closest research collaborators, like the famous Albert Betz and Max Munk. Betz made later a fast career; in 1926 he was appointed professor at Göttingen and in 1936 he even replaced Prandtl under the Luftwaffe command as director of the Aerodynamische Versuchsanstalt (AVA, aerodynamics laboratory). One could ask the question; why are there not more co-authorships of the scientific work of the other colleagues?

Fourth, all scientists working for Prandtl at that time, were saved by Prandtl from the trenches of the First World War by being declared indispensable. The time of the First World War in Germany was a time, in which one was glad to escape the war and to do research “under guidance and responsibility of the director”. It was not a time to protest if his (or her?) name was missing on a publication. Even nowadays professors present at conferences the scientific work of their research assistants.

Therefore, the possibility cannot be completely excluded that the solution of the Prandtl-wedge is not really discovered by Prandtl himself, but by one of his research collaborators instead, working on solid mechanics, unlike Prandtl himself. In this case, the real discoverer of the famous “Prandtl”-wedge, will most likely stay unknown for ever.

5 Reissner's publication of 1924

5.1 Introduction

The publication of Reissner in 1924 is called “Zum Erddruckproblem”, or in English “Concerning the earth–pressure problem”. It has been published in the “International proceedings of the first International Congress of Applied Mechanics, Delft, the Netherlands, pages 295-311.

A part of this publication can also be found in the appendices of this book (see Chapter 24).

The title is rather general because several topics are discussed in the publication. Remarkably enough, of the 17 pages of the publication, only one page, page 307, discusses the effect of the surcharge on the bearing capacity.

5.2 Effect of the surcharge

In fact the solution for the surcharge is far more simple then the solution for the cohesion published by Prandtl 4 years before Reissner. The simple reason why Prandtl never thought of solving the effect of the surcharge is that the effect of the surcharge is typically a civil engineering problem and Reissner was a civil engineer and Prandtl a mechanical engineer.

Reissner gives at the bottom of page 307 in only one or two lines first a solution for an inclined (unsymmetrical) load, which is incorrect, as can be seen from the solutions given in Chapter 12. This is directly followed by a solution, in only one or two lines, for a vertical (symmetrical) load, supported by the figure below.

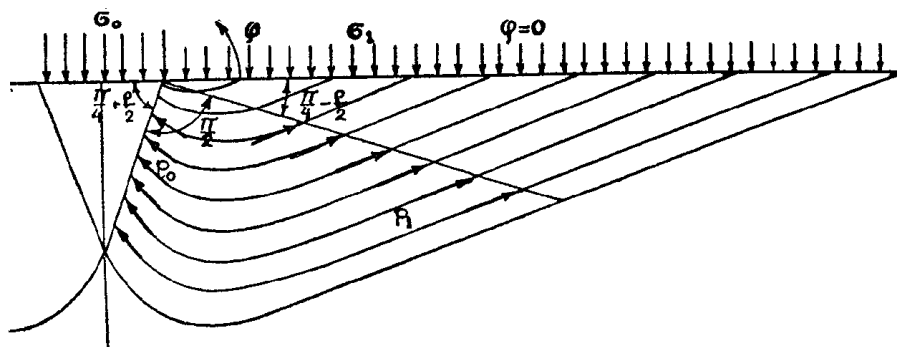


Figure 5-1. Prandtl wedge according to Reissner.

The middle part of the Prandtl-wedge in Reissner's figure does not really look like a logarithmic spiral, but this was more a drawing problem than a scientific problem. Having a logarithmic spiral is crucial, because this is the only shape where the effects of the frictional part of the shear forces, acting along this middle part, are zero. This will be discussed in Chapter 7.

III Bearing capacity factors

6 Prandtl-wedge

The publication of Prandtl in 1920 gives an analytical solution for the bearing capacity of a soil under a limit pressure, p , causing kinematic failure of the weightless infinite half-space underneath. The strength of the half-space is given by the angle of internal friction, ϕ , and the cohesion, c . The solution was extended by Reissner in 1924 with a surrounding surcharge, q . The article of Prandtl subdivided the sliding soil part into three zones (see Figure 6-1):

1. Zone 1: A triangular zone below the strip load. Since there is no friction on the ground surface, the directions of the principal stresses are horizontal and vertical; the largest principal stress is in the vertical direction.
2. Zone 2: A wedge with the shape of a logarithmic spiral, where the principal stresses rotate through 90° from Zone 1 to Zone 3. The pitch of the sliding surface equals the angle of internal friction; $\xi = \phi$, creating a smooth transition between Zone 1 and Zone 3 and also creating a zero frictional moment on this wedge, which will be discussed later.
3. Zone 3: A triangular zone adjacent to the strip load. Since there is no friction on the surface of the ground, the directions of principal stress are horizontal and vertical; the largest principal stress is in the horizontal direction.

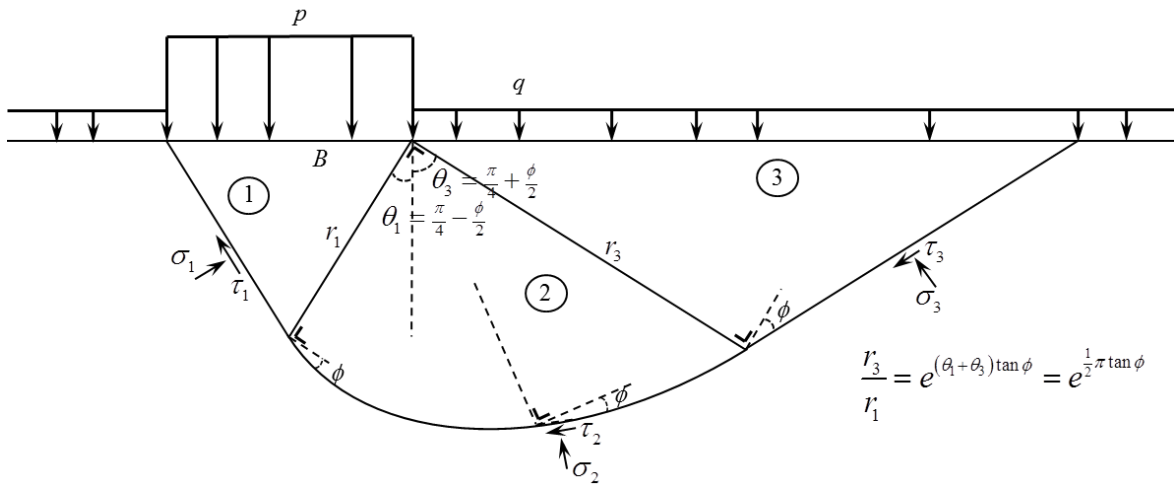


Figure 6-1. The Prandtl-wedge.

According to the Mohr-Coulomb failure criterion (see Appendix Chapter 21) the angles in the triangular zones are defined as:

$$\theta_1 = \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \phi \quad \text{and} \quad \theta_3 = \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \quad \text{so that} \quad \theta_1 + \theta_3 = \frac{1}{2} \pi, \quad (6.1)$$

or:

$$\theta_1 = 45^\circ - \frac{1}{2} \phi \quad \text{and} \quad \theta_3 = 45^\circ + \frac{1}{2} \phi \quad \text{so that} \quad \theta_1 + \theta_3 = 90^\circ. \quad (6.2)$$

This means that zone 2 has an angle of 90 degrees.

The fact that the angle between active and passive failure is an angle of $\theta_1 + \theta_3 = 90^\circ$ can also be shown with a clay sample with a small aluminium plate as retaining wall, (see Figure 6-2) which was gravity loaded in a centrifugal clothes dryer (top loaded clothes washing machine).

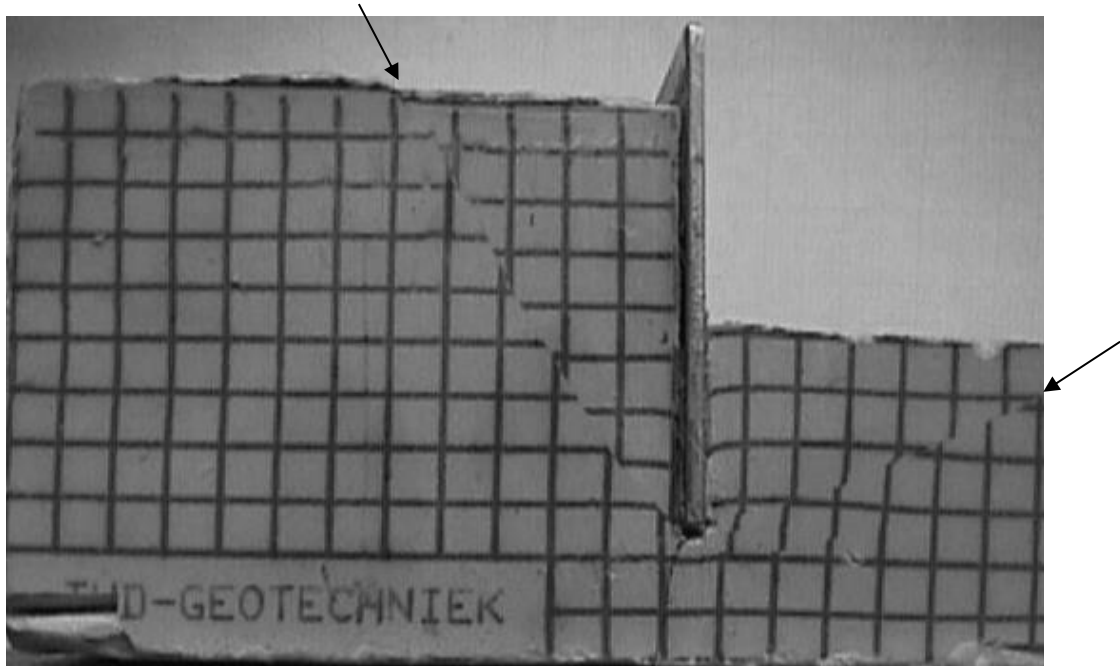


Figure 6-2. Active (left) and passive (right) failure plane in a clay sample.

The length of the legs of both triangles (Zone 1 and Zone 3 in Figure 6-1) can be determined from the width of the load strip (B) and the size and shape of the logarithmic spiral:

$$r(\theta) = r_1 \cdot e^{(\theta - \theta_1) \tan \phi} \quad (6.3)$$

Giving:

$$\frac{r_3}{r_1} = e^{\frac{1}{2}\pi \tan \phi} \quad (6.4)$$

The shape of the failure mechanism has been validated by many researchers, first with centrifuge tests (see Figure 6-3) and numerous laboratory tests (see Figure 6-4), and later also with many numerical (Finite Element) calculations.

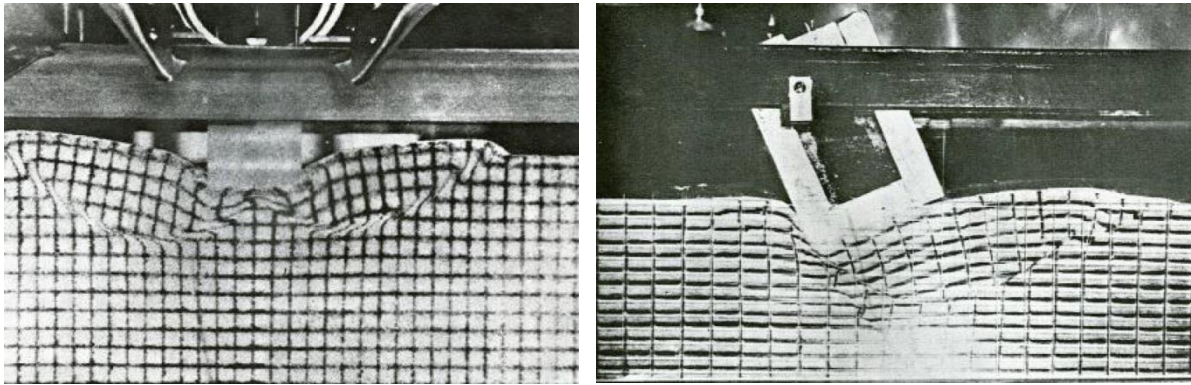


Figure 6-3. Failure planes in sand for centric loading (left: Selig and McKee, 1961) and eccentric loading (right: Jumikis, 1956).

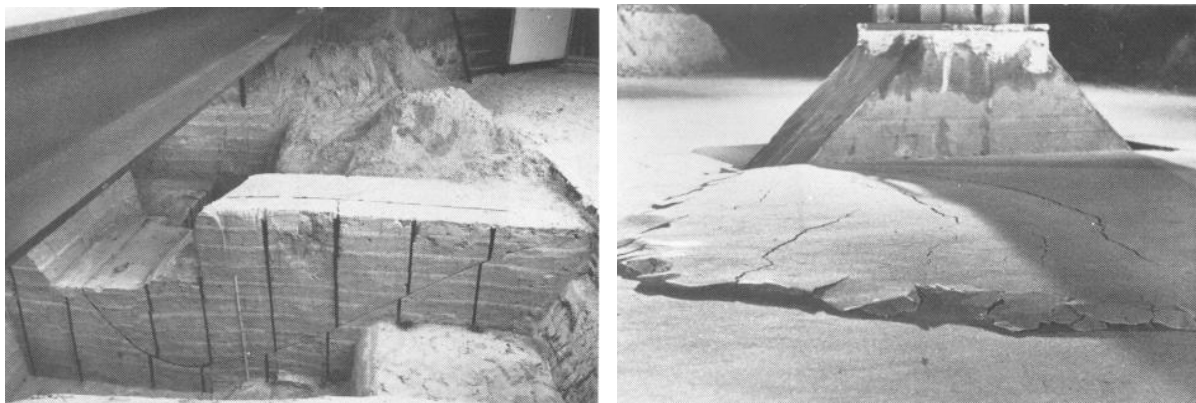


Figure 6-4. Failure planes in sand (Muhs and Weiß, 1972).

It was Prandtl who published in 1920 the bearing capacity due to the cohesion and Reissner who published in 1924 the bearing capacity due to the surcharge. These solutions were extended by Keverling Buisman (1940) for the soil weight, γ . Von Terzaghi (1943) was the first to write this extension as:

$$p = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (6.5)$$

The three bearing capacity factors will be discussed in the following chapters. Since the surcharge bearing capacity factor N_q from Reissner is easier to solve and explain than the cohesion bearing capacity factor N_c from Prandtl, the surcharge factor will be discussed first.

7 Surcharge bearing capacity factor N_q

7.1 Analytical solution

In order to solve the surcharge bearing capacity factor N_q , simply the stresses can be followed along the 3 zones, for a case in which there is no cohesion and no soil weight ($c = 0, \gamma = 0$).

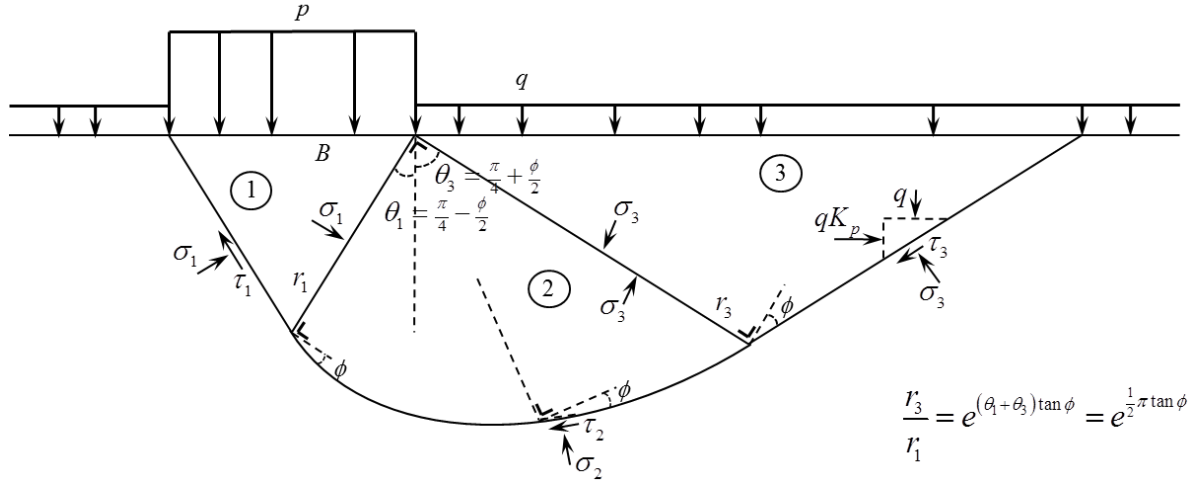


Figure 7-1. The Prandtl-wedge (copy of Figure 6-1).

Zone 3

For Zone 3 the vertical stress is given by the surcharge ($\sigma_v = q = \sigma_{\min}$), and the horizontal stress is given by the Mohr-Coulomb criterion as follows (see Chapter 21):

$$\sigma_h = \sigma_{\max} = \sigma_{\min} K_p \quad \text{with} \quad K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2 \theta_3 \quad (7.1)$$

The normal stress, σ_3 , is found by using the principle of force equilibrium in the direction of σ_3 :

$$\frac{\sigma_3}{q} = K_p \cdot \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3 = 2 \sin^2 \theta_3. \quad (7.2)$$

The shear stress, τ_3 , is simply found by using the Coulomb criterion (without cohesion):

$$\frac{\tau_3}{q} = \frac{\sigma_3}{q} \cdot \tan \phi. \quad (7.3)$$

Zone 2

The shape of the outside shear line of Zone 2 is a logarithmic spiral with a pitch of exactly ϕ . The important point of this is that along this outside, the additional moment

ΔM_θ created by the normal $\sigma_{2,i}$ and shear forces $\tau_{2,i}$ is for this pitch, for every angle θ_i , exactly zero during Mohr-Coulomb failure:

$$\Delta M_\theta = \int \frac{1}{2} \cdot r_{2,i}^2 (\tau_{2,i} \cdot \cos \phi - \sigma_{2,i} \cdot \sin \phi) d\theta_i = 0 \quad \text{because} \quad \tau_{2,i} = \sigma_{2,i} \cdot \tan \phi. \quad (7.4)$$

This means that a moment equilibrium of Zone 2 depends only on the loads coming from Zone 1 and Zone 3, so:

$$\sum M_\theta = 0 \Rightarrow \sigma_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_1^2 = \sigma_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_3^2, \quad (7.5)$$

or:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{r_3^2}{r_1^2} = \left(e^{\frac{1}{2}\pi \tan \phi} \right)^2 = e^{\pi \tan \phi} \quad \text{and} \quad \frac{\tau_1}{q} = \frac{\sigma_1}{q} \cdot \tan \phi. \quad (7.6)$$

Zone 1

The horizontal stress σ_h in Zone 1 can be found in the same way as the vertical stress σ_v (or q) in Zone 3:

$$\frac{\sigma_h}{\sigma_1} = \frac{1}{2 \sin^2 \theta_3}. \quad (7.7)$$

The vertical load or stress p is simply the horizontal stress times the passive earth pressure coefficient, so:

$$\frac{p}{\sigma_h} = K_p. \quad (7.8)$$

Zone 1+2+3

By adding the effects of the three zones, which means by multiplying the previous steps, the surcharge bearing capacity coefficient N_q can be found:

$$\begin{aligned} N_q &= \frac{p}{q}, \\ &= \frac{p}{\sigma_h} \cdot \frac{\sigma_h}{\sigma_1} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{\sigma_3}{q}, \\ &= K_p \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \theta_3} \cdot e^{\pi \tan \phi} \cdot 2 \sin^2 \theta_3, \\ &= K_p \cdot e^{\pi \tan \phi}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

7.2 Numerical solution

The analytical solution published by Reissner can of course be checked nowadays with finite element calculations. In this study all solutions will be checked with the software Plaxis 2D for a (bi-linear) Mohr-Coulomb (c , ϕ) soil model without hardening, softening, or volume change during failure ($\psi = 0$). There have been

several researchers working on this numerical comparison, but their publications often show one or more of the following mistakes:

- Using inaccurate numerical tools, for example the limit-equilibrium analysis method, instead of the finite element method.
- Using softening (in Plaxis there is a standard “tension cut off”-procedure which must be switched off).
- Using volume change during failure, for example by selecting an associated flow rule ($\psi = \phi$).

Plaxis produces incremental displacement plots during failure, which indicate the failure mechanism. For low friction angles the failure mechanism is almost the same as the Prandtl-wedge failure mechanism, which is the basis of the analytical solution. For high friction angles though, the failure mechanism looks completely different, see Figure 7-2.

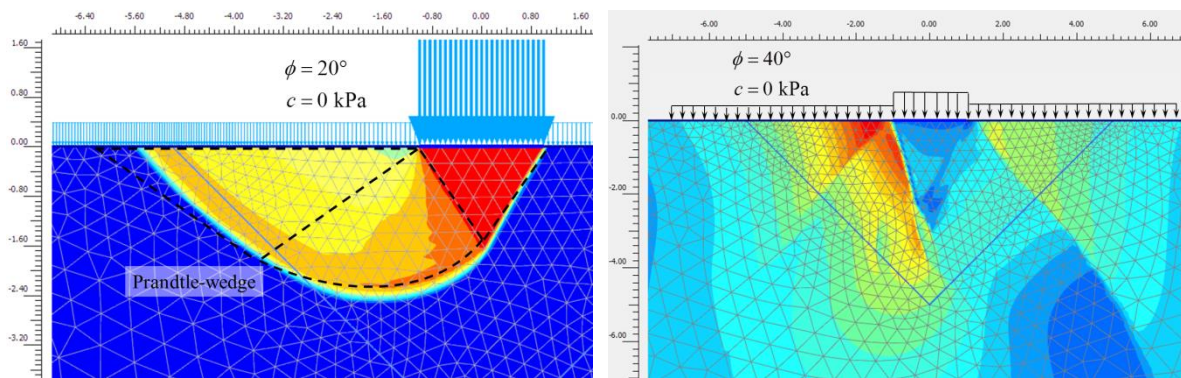


Figure 7-2. Failure mechanism; left: low friction angle; right: high friction angle.

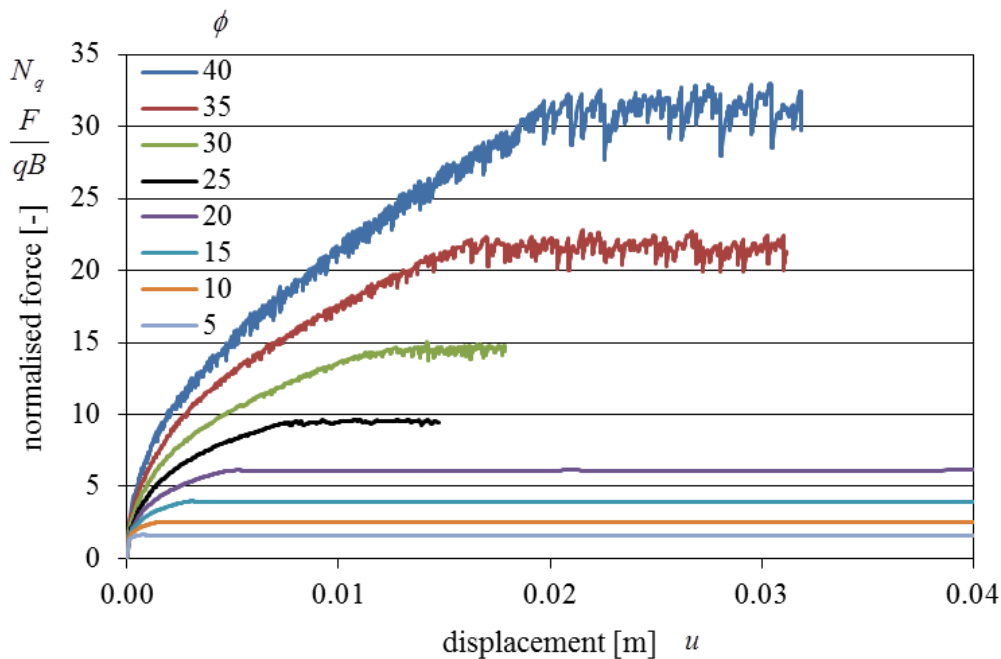


Figure 7-3. Normalised force versus displacement for different friction angles.

This change in failure mechanism has consequences; the force versus displacement plot is rather smooth for low friction angles, but becomes very rough for higher friction angles, see Figure 7-3. This is a sign that constantly new failure plans are found in the calculation, depending on internal redistribution of stresses.

For a series of different friction angles, the maximum normalised force, or the surcharge bearing capacity has been plotted, see Figure 7-4. For the Finite Element Modelling (FEM) two different options have been used; both stress controlled and displacement controlled. The two options give as expected (almost) the same results.

Remarkable is that the analytical solution of Reissner gives values which are too high, especially for higher friction angles. This must be explained by the existence of an easier failure mechanism, which was mentioned before.

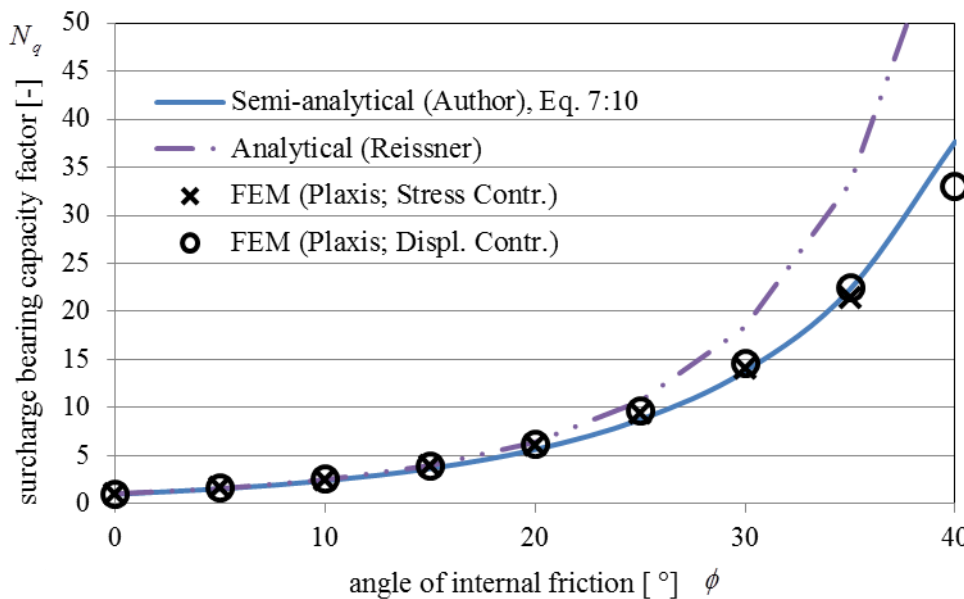


Figure 7-4. Surcharge bearing capacity factors: Reissner versus FEM.

The semi-analytical line in the figure describes much better the surcharge bearing capacity factors, and can be written as:

$$N_q = \cos^2 \phi \cdot K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} \quad (7.10)$$

Loukidis et al (2008) already noticed that non-dilatant (non-associated) soil is 15% - 30% weaker than associated soil ($\psi = \phi$), and has a rougher failure pattern.

The difference between the analytical solution (eq. 7.9) and the numerical results (eq. 7.10) was explained by Knudsen and Mortensen (2016): The higher the friction angle, the wider the Prandtl wedge and the more the stresses reduce in this wedge during failure. So, the analytical formulas are only kinematically admissible for associated flow ($\psi = \phi$).

The problem of associated soil is of course, that such a high dilatancy angle is by far unrealistic for natural soils. This means as well that calculating the bearing capacity factor based on the analytical solutions is for higher friction angles also unrealistic.

8 Cohesion bearing capacity factor N_c

8.1 Analytical solution

In order to solve the cohesion bearing capacity factor N_c , simply the stresses have to be followed along the 3 zones, for a case in which there is no surcharge and no soil weight ($q = 0, \gamma = 0$). In the solution below, the load will be inclined, so that this solution can also be used later for solving the inclination factor.

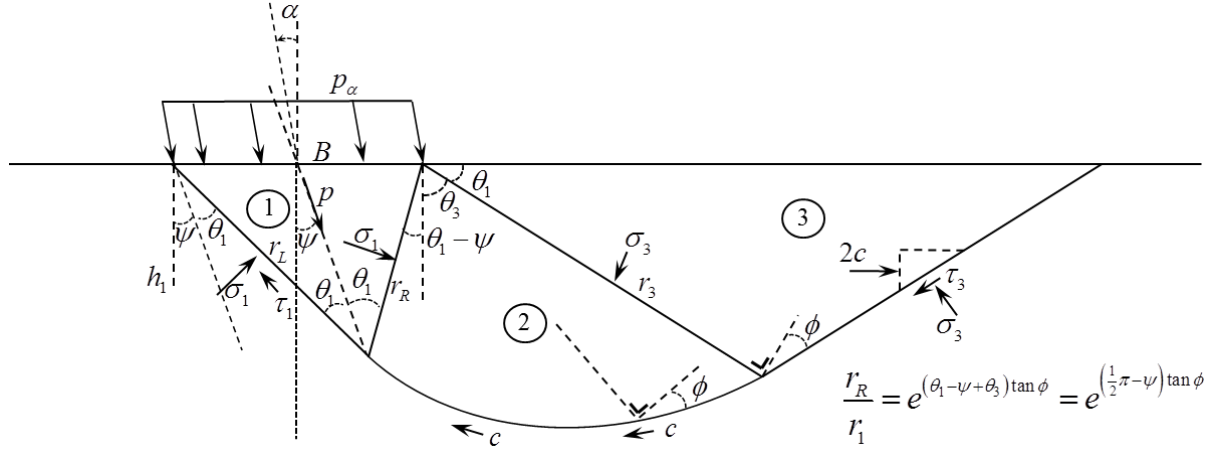


Figure 8-1. Inclined Prandtl wedge.

The load inclination angle α is causing a rotation of Zone 1 and a reduction of the fan (Zone 2) with an angle ψ . The load inclination angle α and the fan reduction angle ψ are zero for non-inclined, or vertical, loads.

Zone 3

For Zone 3 the shear force follows from the Mohr-Coulomb failure criterion:

$$\tau_3 = c + \sigma_3 \cdot \tan \phi. \quad (8.1)$$

Vertical force equilibrium yields:

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow \sin \theta_1 \cdot \tau_3 = \cos \theta_1 \cdot \sigma_3, \quad (8.2)$$

or with the first equation implemented in the second:

$$\sigma_3 = c \cdot \frac{\tan \theta_1}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \phi}. \quad (8.3)$$

Zone 2

The previous chapter already showed that for Zone 2, which has a shape of a logarithmic spiral, the additional moment ΔM_θ , created by the normal force $\sigma_{2,i}$ and the corresponding frictional shear forces $\tau_{2,i}$, is zero during Mohr-Coulomb failure. So along the outside only the cohesion needs to be taken into account for the moment equilibrium:

$$\sum M_{\theta} = 0 \Rightarrow \sigma_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_1^2 = \sigma_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot r_3^2 + \int_{\theta_i = \theta_1 - \psi}^{\theta_3} r_i^2 \cdot c \cdot \frac{\cos \phi}{\cos \phi} d\theta_i, \quad (8.4)$$

or:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_3 \cdot \frac{r_3^2}{r_1^2} + 2c \int_{\theta_i = \theta_1 - \psi}^{\theta_3} e^{2\theta_i \cdot \tan \phi} d\theta_i \\ \sigma_1 &= \sigma_3 \cdot e^{2(\theta_3 + \theta_1 - \psi) \tan \phi} + 2c \cdot \left[\frac{1}{2 \tan \phi} \cdot e^{2\theta_i \cdot \tan \phi} \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \psi} \\ \sigma_1 &= \sigma_3 \cdot e^{(\pi - 2\psi) \tan \phi} + c \cdot \cot \phi \cdot (e^{(\pi - 2\psi) \tan \phi} - 1) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Zone 1

The shear force along the triangle shaped Zone 1 will be according Mohr-Coulomb:

$$\tau_1 = c + \sigma_1 \cdot \tan \phi. \quad (8.6)$$

In fact, independently from the rotation angle ψ , force equilibrium in the direction of ψ will result in the following equation of the main principle stress p :

$$\begin{aligned} \sum F_{\psi} = 0 &\Rightarrow p \cdot \sin \theta_1 = \cos \theta_1 \cdot \tau_1 + \sin \theta_1 \cdot \sigma_1, \\ &\Rightarrow p = c \cdot \cot \theta_1 + \sigma_1 \cdot (1 + \cot \theta_1 \cdot \tan \phi). \end{aligned} \quad (8.7)$$

For finding the size of the load p_{α} , or its vertical and horizontal components, the fan reduction angle ψ has to be solved first.

Zone 1+2+3

By implementing the equations of the three zones, the following equation is found:

$$\frac{p}{c} = \cot \theta_1 + \left\{ \left(\frac{\tan \theta_1}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \phi} \right) \cdot e^{(\pi - 2\psi) \tan \phi} + \cot \phi \cdot (e^{(\pi - 2\psi) \tan \phi} - 1) \right\} \cdot (1 + \cot \theta_1 \cdot \tan \phi). \quad (8.8)$$

This equation can be used later for finding the corresponding inclination factor, but first the solution of a vertical load $p_v = p(\alpha = \psi = 0)$ will be derived:

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{p(\psi = 0)}{c}, \\ &= \cot \theta_1 + \left\{ \left(\frac{\tan \theta_1}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \phi} \right) \cdot e^{\pi \tan \phi} + \cot \phi \cdot (e^{\pi \tan \phi} - 1) \right\} \cdot (1 + \cot \theta_1 \cdot \tan \phi). \end{aligned} \quad (8.9)$$

From Appendix Chapter 22 it follows after a long derivation that this equation is exactly the same as:

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi \quad \text{with:} \quad N_q = K_p \cdot e^{\pi \tan \phi}. \quad (8.10)$$

This is the same solution as in the publication of Prandtl, but in the publication of Prandtl most of this derivation is missing; the reader can only find in the publication the words “after simple calculations”.

8.2 Numerical solution

The analytical solution published by Prandtl has been checked with finite element calculations performed with Plaxis 2D. The incremental displacement plots during failure indicate the failure mechanism. For low friction angles the failure mechanism looks very much like the Prandtl-wedge failure mechanism, which is the basis of the analytical solution. For high friction angles though, the failure mechanism looks completely different, see Figure 8-2.

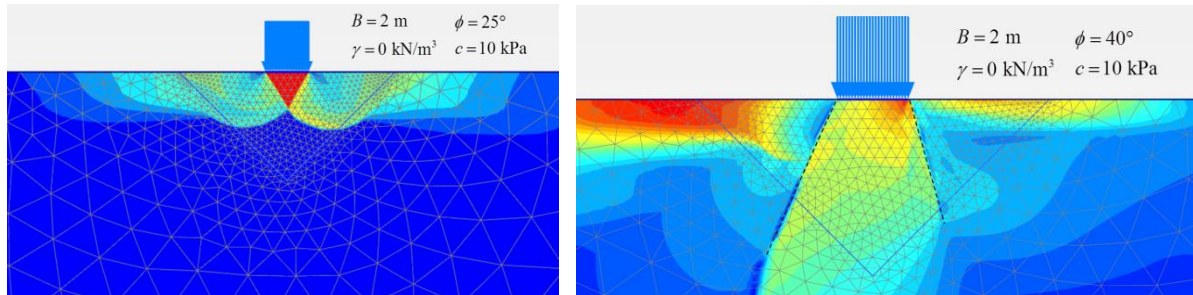


Figure 8-2. Failure mechanism; left: low friction angle; right: high friction angle.

This change in failure mechanism has consequences; the force versus displacement plot is rather smooth for low friction angles, but becomes very rough for higher friction angles, see Figure 8-3. This is a sign that constantly new failure planes are found in the calculation, depending on the internal redistribution of the stresses.

For a series of different friction angles, the maximum value of the normalised force, or the surcharge bearing capacity has been plotted, see Figure 8-4. For the Finite Element Modelling (FEM) both stress controlled and displacement controlled calculations have been used. These two gave, as expected, (almost) the same results. Remarkable is that the analytical solution of Prandtl is a bit too high, especially for higher friction angles. This can be explained by the loosening of the soil in Zone 2, due to the logarithmic spiral, leading to an easier failure mechanism, just as happened for the surcharge bearing capacity factor N_q .

The semi-analytical line in the figure describes much better the cohesion bearing capacity factor, and can be written as:

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi \quad \text{with:} \quad N_q = \cos^2 \phi \cdot K_p \cdot e^{\pi \tan \phi}. \quad (8.11)$$

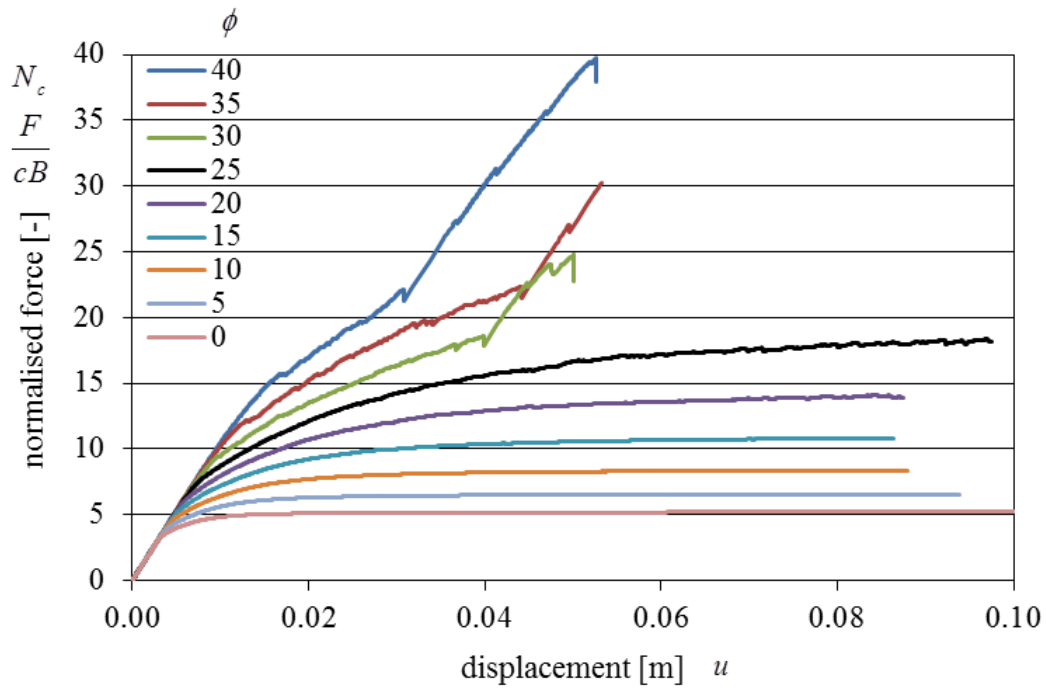


Figure 8-3. Normalised force versus displacement for different friction angles.

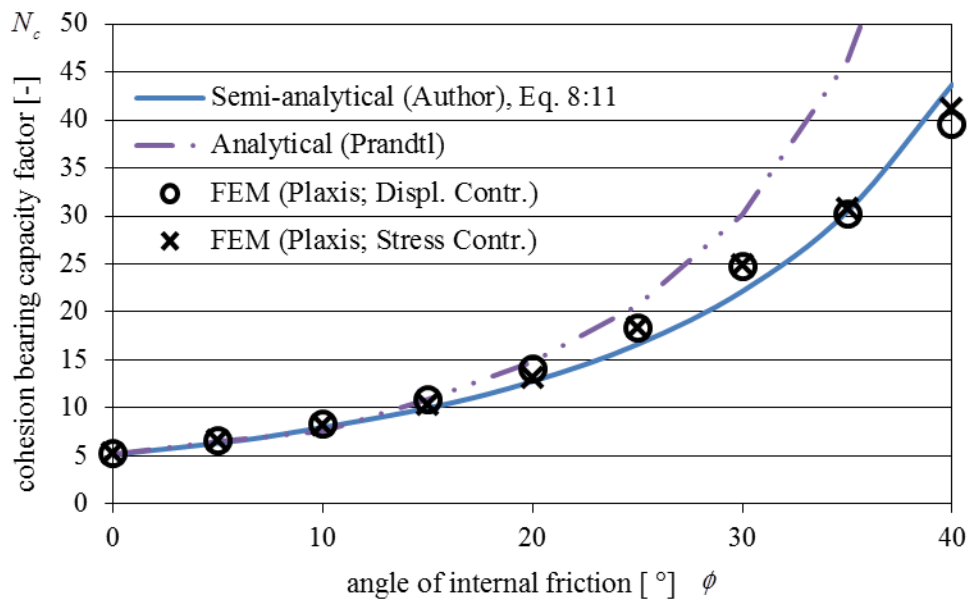


Figure 8-4. Cohesion bearing capacity factors: Prandtl versus FEM.

9 Soil-weight bearing capacity factor N_γ

9.1 Scaled modelling

The effects of the cohesion are taken into account by the cohesion bearing capacity factor N_c and the effects of a surcharge are taken into account by the surcharge bearing capacity factor N_q . So, the soil-weight bearing capacity factor N_γ regards the additional effect of the gravity on a frictional, but cohesionless material without a surcharge. The fact that the failure mechanism for the soil-weight bearing capacity is different from the bearing capacity for the cohesion, and also for the surcharge, is already known for some time. Caquot and Kerisel published in their book “Traité de Mécanique des sols” from 1966 the circular or elliptical failure mechanism of Figure 9-1.

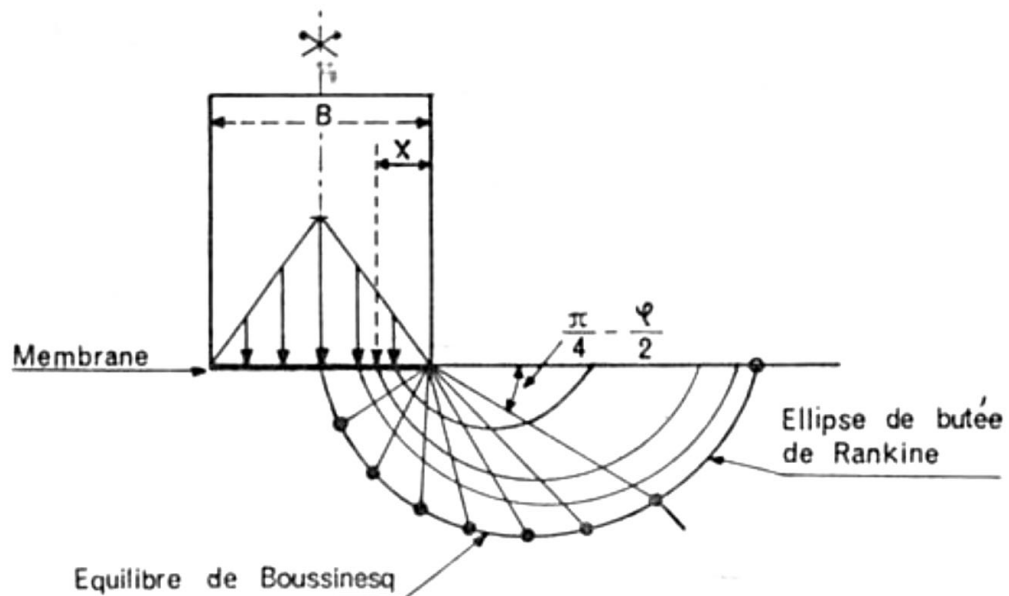


Figure 9-1. Failure mechanism for the soil weight bearing capacity factor N_γ .

This circular failure mechanism can also be observed in the photo of Figure 9-2 which can be found in the book “Soil Mechanics” of Lambe and Whitman of 1969.

A constant, or rectangular shaped, load p is impossible because just next to the load there is no strength for a cohesionless material without a surcharge. So, unlike the effect of the cohesion and the effect of the surcharge, the effect of the soil-weight does not result in a constant maximum load p . There will be a maximum load in the middle and a zero load at the edges, where the shear and normal stresses go to zero too. This explains why, in the figure of Caquot and Kerisel, not a rectangular load, but a triangle shaped load is drawn. But in fact, finite element modelling shows that the stress under a footing on non-cohesive soil has a hyperbolic shape (see Figure 9-3).

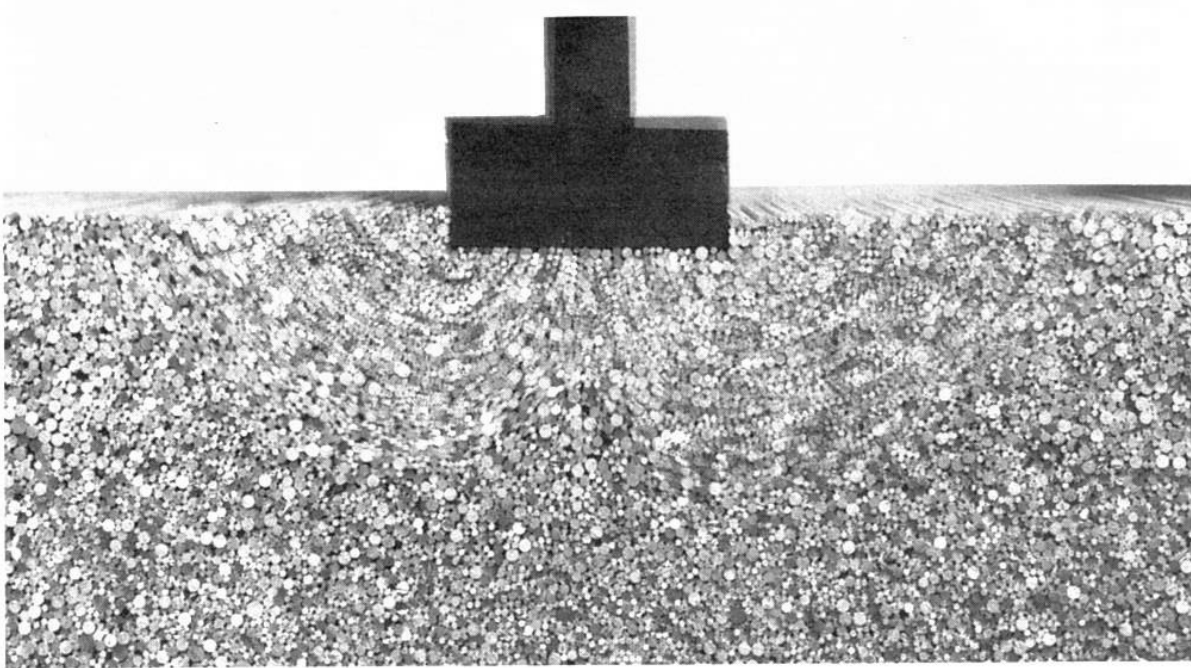


Figure 9-2. Laboratory test with cylinders: circular failure zones under a footing.

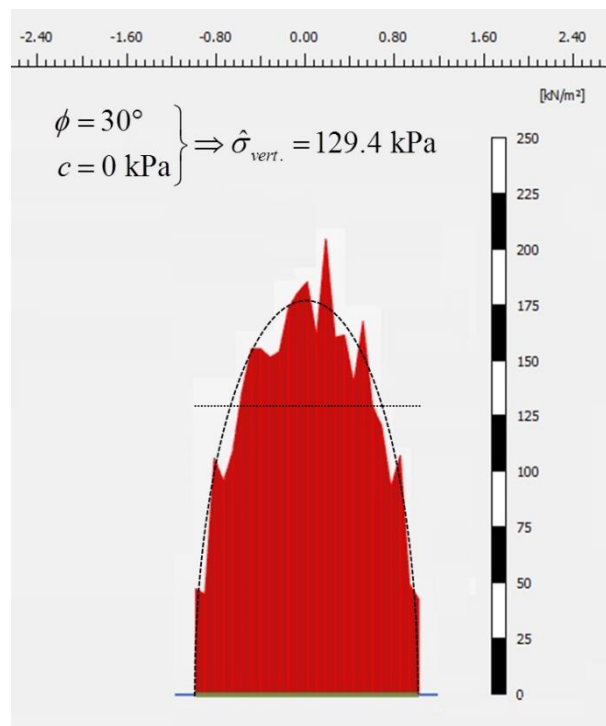


Figure 9-3. Finite Element Modelling: Stress under a footing has a hyperbolic shape.

The effect of the condition of zero bearing capacity at the edges, but not in the middle, explains the shape of a shoe print in the sand (see Figure 9-4), since for a shoe on the sand there is also no bearing capacity due to a surcharge or cohesion, but only due to the soil-weight.

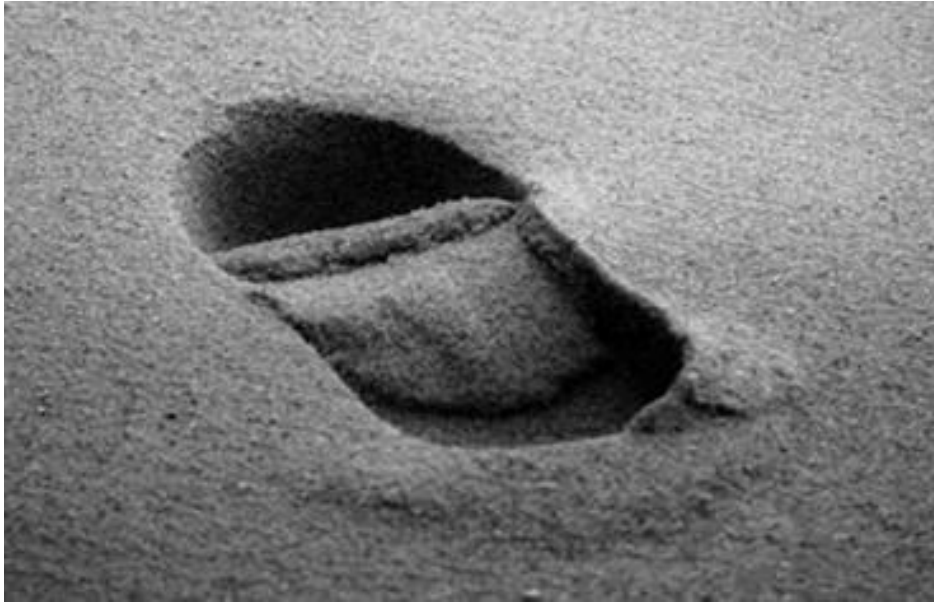


Figure 9-4. Shoe print in sand: bearing capacity in the middle, but not at the edges.

The representation of this spatially variable load as a constant bearing capacity factor means that only an average component can be calculated for the soil-weight bearing capacity factor. Although the use of the soil-weight bearing capacity factor, in the same way as the other two bearing capacity factors, suggests also a constant maximum load or bearing capacity at the surface, it should be clear that this is definitely not the case.

9.2 Numerical solution

Keeverling Buisman (1940), Von Terzaghi (1943), Caquot and Kérisel (1953, 1966), Meyerhof (1951; 1953; 1963; 1965), Brinch Hansen (1970), Vesic (1973, 1975) and Chen (1975) subsequently proposed different equations for the soil-weight bearing capacity factor N_γ . Therefore the following equations for the soil-weight bearing capacity factor can be found in the literature:

$$\begin{aligned}
 N_\gamma &= (K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} - 1) \tan(1.4\phi) \quad (\text{Meyerhof, 1963}), \\
 N_\gamma &= 1.5(K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} - 1) \tan \phi \quad (\text{Brinch Hansen, 1970}), \\
 N_\gamma &= 2(K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} + 1) \tan \phi \quad (\text{Vesic, 1973}), \\
 N_\gamma &= 2(K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} - 1) \tan \phi \quad (\text{Chen, 1975}).
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

The equation from Brinch Hansen is, as he writes, “based on calculations first from Lundgren and Mortensen (1953) and later from Odgaard and N. H. Christensen”. The equation of Vesic is almost identical to the solution of Caquot and Kérisel (1953) because it is, as he writes, based on “the numerical results of an analysis made by them under the assumption that (the dilatancy angle $\psi = 45^\circ + \phi / 2$). ...approximated with an error on the safe side”.

The equation of Chen and also others like Michalowski (1997) are based on the limit analyses, in which the soil is modelled as a perfectly plastic material obeying an associated flow rule.

Although Chen’s equation is used, without reference, by Eurocode 7, caution is still needed, because Yu et al. (1998) concluded: “*although the limit-equilibrium analysis is used widely...., its use may lead sometimes to significant errors as both kinematic and static admissibility are violated in the method*”.

Another important point is given by Hjjaj et al (2005), who wrote: “*As discussed by Chen (1975), the analysis of cohesion less (frictional) soil with self-weight is complicated by the fact that the shear strength increases with depth from a value of zero at the ground surface. This means that the Prandtl failure mechanism is no longer capable of yielding exact results, ..., this leads to the conclusion that the bearing capacity obtained using this mechanism can, at best, only be an upper bound on the correct value.*”

Because of these problems of the current solutions for the soil-weight bearing capacity factor, these solutions have been checked with displacement controlled calculations with the finite element model (FEM) Plaxis for a dilatancy angle $\psi = 0$.

The incremental displacement plots (see Figure 9-5), of these finite element calculations for the soil-weight bearing capacity factor, indicate that the displaced area (area with the lightest colour) forms a circular-wedge failure mechanism, which looks like the circular-wedge failure mechanism of Figure 9-2, and not like the much larger Prandtl-wedge failure mechanism (Van Baars, 2016).

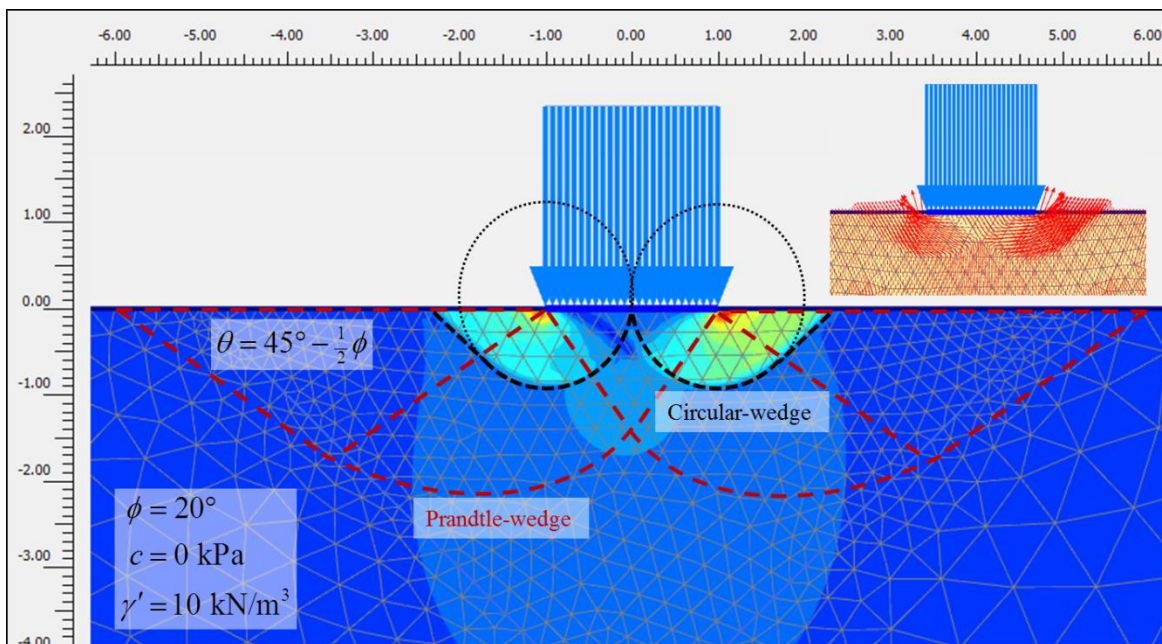


Figure 9-5. Numerical modelling: circular failure zones under a footing.

Figure 9-6 shows the results of the soil-weight bearing capacity factor. For this figure calculations have been made for both a rough plate (no horizontal displacement of the soil below the plate) and a smooth plate (free displacement). The results of the displacement controlled calculations for a rough plate are, for internal friction angles up to 35° , very similar to the equation of Vesic (1973):

$$N_\gamma = 2(K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} + 1) \tan \phi \quad (\text{for rough plates}). \quad (9.2)$$

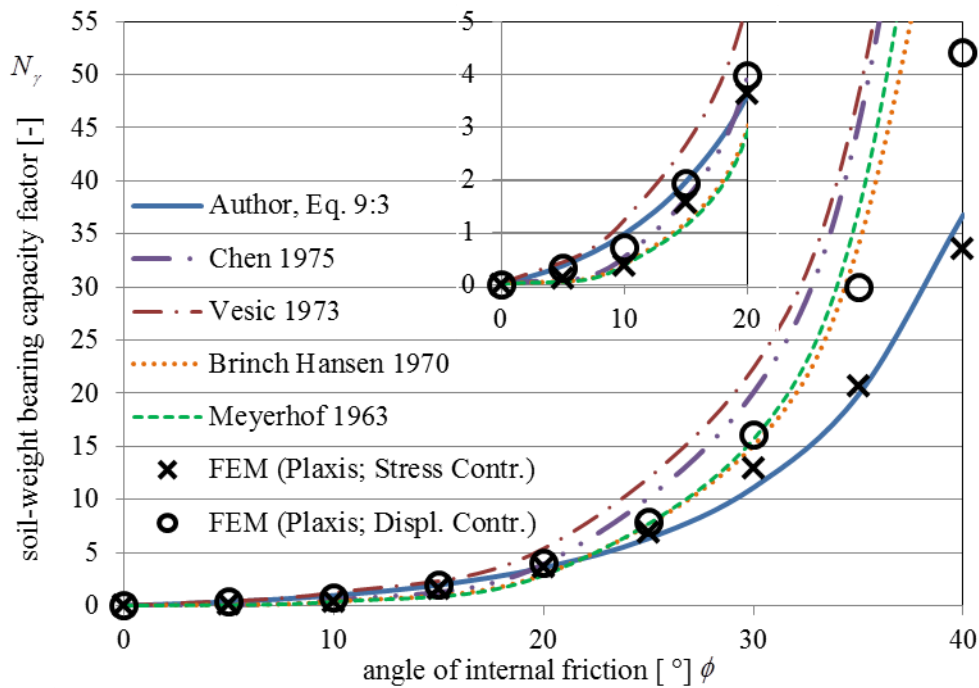


Figure 9-6. The soil-weight bearing capacity factor N_γ .

The results of the soil-weight bearing capacity factor for a smooth plate are, for internal friction angles above to 20° , lower than all currently used equations. Van Baars (2015) proposed therefore to use a lower and safer equation, such as for example (see the empirical straight line in the figure based on FEM):

$$N_\gamma = 4 \tan \phi \cdot (e^{\pi \tan \phi} - 1) \quad (\text{for smooth plates}). \quad (9.3)$$

Since infinite roughness can never be promised in reality, and since the plate should be strong enough to hold the tension force in the plate, and since the equations of Prandtl, Von Terzaghi, and Meyerhof are based on pure vertical loading without shear, it is better to use in design the last equation for smooth plates.

10 Table of bearing capacity factors

The outcome of the previous chapters can be summarised in the following table.

ϕ	N_c	N_q	N_γ
0	5.142	1.000	0.000
1	5.360	1.094	0.004
2	5.590	1.195	0.016
3	5.831	1.306	0.038
4	6.085	1.426	0.069
5	6.353	1.556	0.111
6	6.634	1.697	0.164
7	6.931	1.851	0.231
8	7.244	2.018	0.312
9	7.574	2.200	0.408
10	7.922	2.397	0.522
11	8.291	2.612	0.654
12	8.680	2.845	0.808
13	9.092	3.099	0.984
14	9.528	3.376	1.185
15	9.991	3.677	1.415
16	10.482	4.006	1.677
17	11.004	4.364	1.973
18	11.558	4.756	2.307
19	12.149	5.183	2.685
20	12.778	5.651	3.112
21	13.449	6.163	3.593
22	14.166	6.724	4.134
23	14.933	7.339	4.745
24	15.755	8.015	5.432
25	16.637	8.758	6.206
26	17.584	9.576	7.079
27	18.603	10.479	8.064
28	19.702	11.476	9.176
29	20.888	12.578	10.433
30	22.172	13.801	11.856
31	23.563	15.158	13.469
32	25.075	16.668	15.300
33	26.720	18.352	17.383
34	28.516	20.234	19.758
35	30.480	22.342	22.471
36	32.633	24.709	25.578
37	35.001	27.375	29.145
38	37.612	30.386	33.253
39	40.499	33.796	37.997
40	43.703	37.671	43.495

Table 10-1: Bearing capacity coefficients.

These factors are for non-dilatant soils and are all based on the Finite Element calculations mentioned in the previous chapters (Eqs. 7.10, 8.11 and 9.3) and are lower, especially for higher friction angles, and therefore safer and more accurate than the factors normally used, for example in Eurocode 7.

IV Correction factors

11 Extensions: correction factors

In 1953 Meyerhof was the first to propose equations for inclined loads. He was also the first in 1963 to write the formula for the (vertical) bearing capacity p_v with both inclination factors and shape factors as correction coefficients, in order to take into account the shape of the loaded area and the inclination of the load:

$$p_v = i_c s_c c N_c + i_q s_q q N_q + i_\gamma s_\gamma \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma. \quad (11.1)$$

In this equation the coefficients i_c , i_q and i_γ are correction factors for a possible inclination of the load (inclination factors), and s_c , s_q and s_γ are correction factors for the shape of the loaded area (shape factors).

Jørgen Brinch Hansen (1970) adopted later this equation. Over the years this equation has become the standard equation for the bearing capacity of shallow foundations.

There are also some other correction factors which are used nowadays, such as the correction factors for a footing near a sloping soil surface, or a sloping (inclined) foundation footing.

Although this equation is widely used nowadays, the applied superposition in this equation is scientifically speaking not correct, because the failure mechanism belonging to the soil-weight (N_γ) is, as explained in Chapter 9, not the same as the failure mechanism belonging to both the cohesion (N_c) and the surcharge (N_q).

By using the inclination factors and the shape factors, or even both at the same time, the risk for additional errors is even larger.

12 Inclination factors

12.1 Meyerhof and Brinch Hansen

In the case of an inclined load, i.e. loading by a vertical force and a horizontal load at the same time, the additional horizontal load can considerably reduce the vertical bearing capacity. At the same time the horizontal component of the load is limited due to the Coulomb shear failure at the foundation surface:

$$p_h \leq c + p_v \tan \phi. \quad (12.1)$$

Meyerhof published in 1953 his results of laboratory experiments on inclined loading on “purely cohesion materials” and “cohesionless materials”, (See Figure 12-2) for cases in which the horizontal component of the load is smaller than its maximum possible value (due to Coulomb shear failure). The correction factors for a certain load inclination angle α were in 1963 expressed by him as:

$$i_q = i_c = \left(1 - \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\right)^2, \quad i_\gamma = \left(1 - \frac{\alpha^\circ}{\phi^\circ}\right)^2, \quad \text{for: } \alpha < \phi. \quad (12.2)$$

In the United States of America, but also in many other countries, these factors are mostly used (see also Das, 1999).

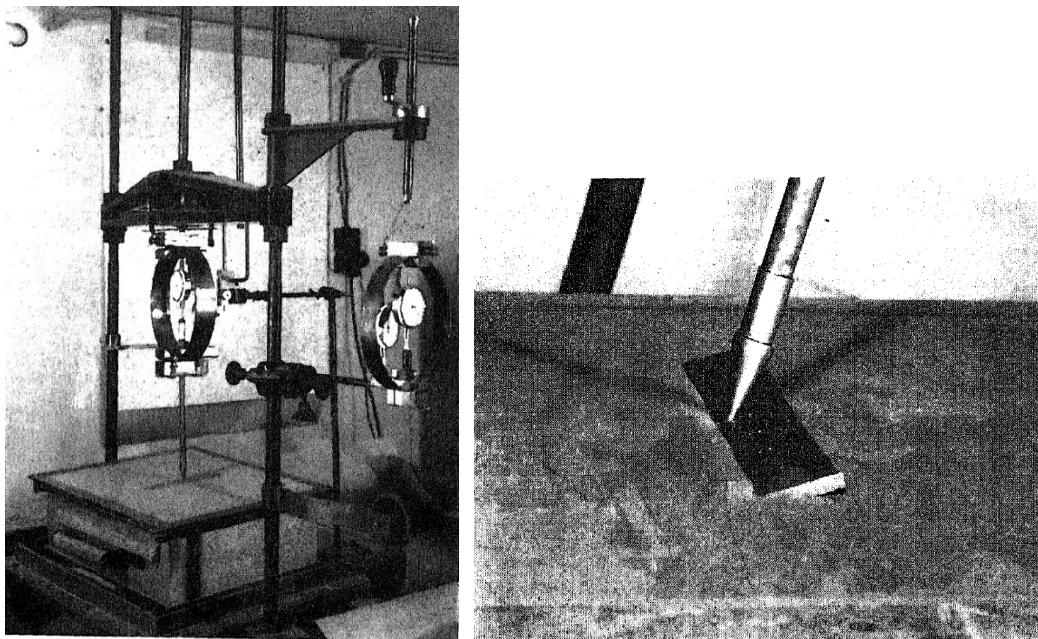


Figure 12-1. Model tests with inclined loaded footings (Meyerhof, 1953).

In 1970 Brinch Hansen proposed other inclination factors:

$$i_c = 1 - \frac{p_h}{c + p_v \tan \phi}, \quad i_q = i_c^2, \quad i_\gamma = i_c^3. \quad (12.3)$$

This solution is often used in Scandinavia and in the Netherlands. It is however a disallowed mixture of the Coulomb shear failure criterion, which should only be applied at the interface at the surface, and the Mohr-Coulomb (Prandtl-wedge) bearing capacity failure of the half-space below the interface. A clear indication of the incorrectness of this solution is the fact that the surcharge inclination factor, i_q , depends here on the cohesion, c , while the factor N_q for any inclination, and therefore also i_q , should not depend on the cohesion, c . The same even applies for the cohesion inclination factor, i_c . This indicates that this solution is incorrect and should not be used.

In the coming chapters, the failure mechanism presented in Figure 12-2 for inclined loads will be studied; analytical solutions will be derived and compared to the equation of Meyerhof, based on his laboratory test, and these will also be compared to the results of finite element calculations.

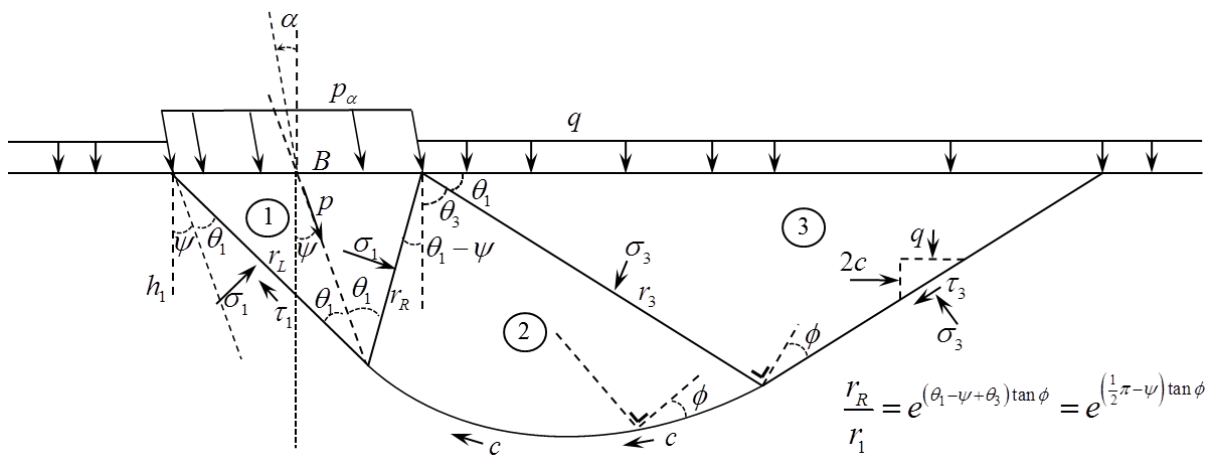


Figure 12-2. Prandtl-wedge for inclined load.

12.2 Surcharge fan reduction angle ψ_q

The surcharge fan reduction angle ψ_q of Zone 2 can be calculated for non-cohesive soils from Figure 12-3, which depicts the stresses of the inclined Prandtl-wedge and is also used by Bolton (1979) in his book “Guide to Soil Mechanics”. The following three equations follow from this figure. The load angle yields:

$$\frac{P_h}{P_v} = \tan \alpha. \quad (12.4)$$

The radius of the Mohr circle of Zone 1 gives:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{p} &= \frac{(1 - K_a)}{2} \\ \Rightarrow \frac{\tau}{p} = S = \frac{\sin \phi}{1 + \sin \phi} &\Rightarrow \frac{1}{S} - 1 = \frac{1}{\sin \phi} \end{aligned} \quad \text{with: } K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (12.5)$$

The relation between the vertical stress and the maximum stress results in:

$$p_v + \tau(1 - \cos 2\psi_q) = p \Rightarrow$$

$$\frac{p_v}{p} = 1 + S(\cos 2\psi_q - 1) \quad \text{or for } \alpha \ll \phi: \frac{p_v}{p} \approx \cos \alpha \quad (12.6)$$

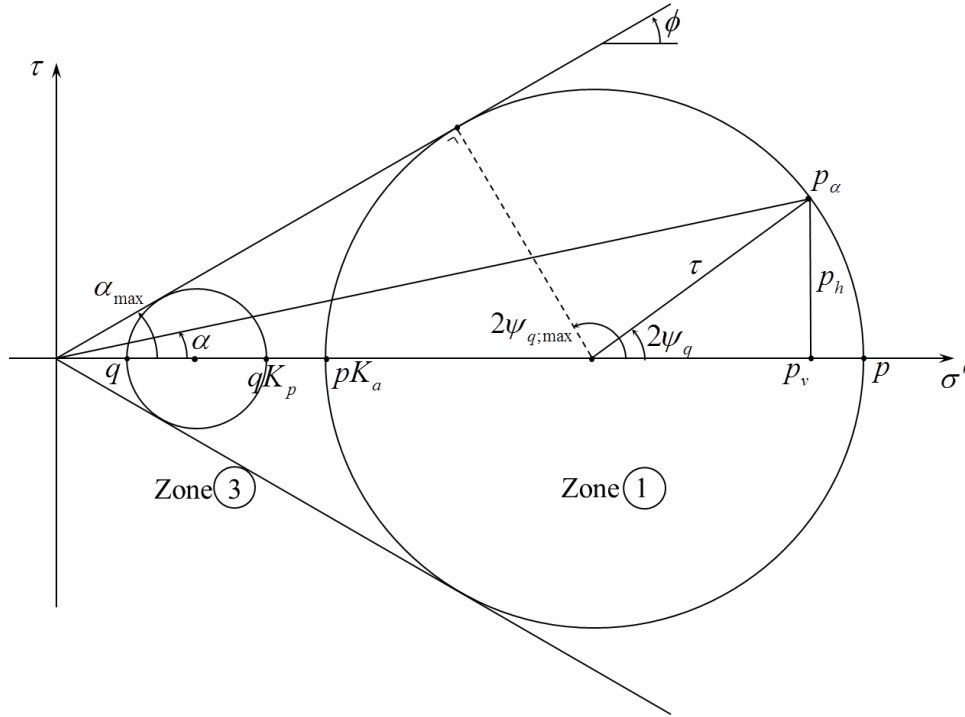


Figure 12-3. Mohr-Coulomb circles and fan reduction angle.

These three equations can be implemented in a fourth equation:

$$\begin{aligned} \sin 2\psi_q &= \frac{p_h}{\tau}, \\ &= \frac{p_h}{p_v} \cdot \frac{p_v}{p} \cdot \frac{p}{\tau}, \\ &= \tan \alpha \cdot [1 + S(\cos 2\psi - 1)] \cdot \frac{1}{S}, \\ &= \frac{\tan \alpha}{\sin \phi} + \tan \alpha \cdot \cos 2\psi, \end{aligned} \quad (12.7)$$

from which the surcharge fan reduction angle ψ_q can be calculated (iteratively).
With this equation, the following surcharge fan reduction angles can be found:

$$\begin{aligned} \alpha = 0: & \quad \psi_q = 0 \\ \text{for: } \alpha \ll \phi: & \quad \psi_q = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin \phi \cdot \sin \alpha}{1 + \sin \phi} \right) \\ \tan \alpha = \sin \phi: & \quad \psi_q = 45^\circ \\ \alpha_{\max} = \phi: & \quad \psi_{q,\max} = 45^\circ + \frac{1}{2} \phi \end{aligned}$$

12.3 Cohesion fan reduction angle ψ_c

The cohesion fan reduction angle ψ_c will be approximated by writing the cohesion as:

$$c = \frac{P_v}{i_c N_c}. \quad (12.8)$$

The radius of the Mohr circle of Zone 1 gives:

$$\frac{\tau}{p} = \frac{(1 - K_a + 2c\sqrt{K_a})}{2} \quad \text{with:} \quad K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (12.9)$$

This gives:

$$\begin{aligned} \sin 2\psi_c &= \frac{P_h}{P_v} \cdot \frac{P_v}{p} \cdot \frac{p}{\tau}, \\ &= \tan \alpha \cdot \frac{P_v}{p} \cdot \frac{2}{1 - K_a + \frac{2P_v}{i_c N_c p} \sqrt{K_a}}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Solving the cohesion fan reduction angle ψ_c would mean, that first the cohesion inclination factor i_c must be solved before solving the fan reduction angle ψ_c , and at the same time the fan reduction angle ψ_c must be solved before solving the cohesion inclination factor i_c , which is due to the complexity of both equations, not really possible. For a relative small load inclination angle α , the fan reduction angle ψ_c can be solved though, because in this case:

$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad i_c \approx 1; \quad \frac{P_v}{p} \approx \cos \alpha \approx 1; \quad \psi_c \leq 90^\circ. \quad (12.11)$$

This yields for the cohesion fan reduction angle:

$$\psi_c \approx \min\left(\frac{\alpha}{1 - K_a + \frac{2}{N_c} \sqrt{K_a}}; 90^\circ\right) \quad (12.12)$$

Having both a surcharge and a cohesion will result in a single fan reduction angle, which will be somewhere in between the two fan reduction angles. This means the cohesion and the surcharge influence each other's inclination factors. So, writing the surcharge part and the cohesive part completely separated, as suggested by the Meyerhof bearing capacity equation, is, scientifically speaking, not allowed.

This solution has been compared with the results of FEM calculations. For this a very wide mesh is used with 15-node triangular elements, see Figure 12-4. According to these calculations the principle directions in Zone 1 are indeed rotated with this fan reduction angle ψ_c . This angle influences the total shape of the Prandtl-wedge.

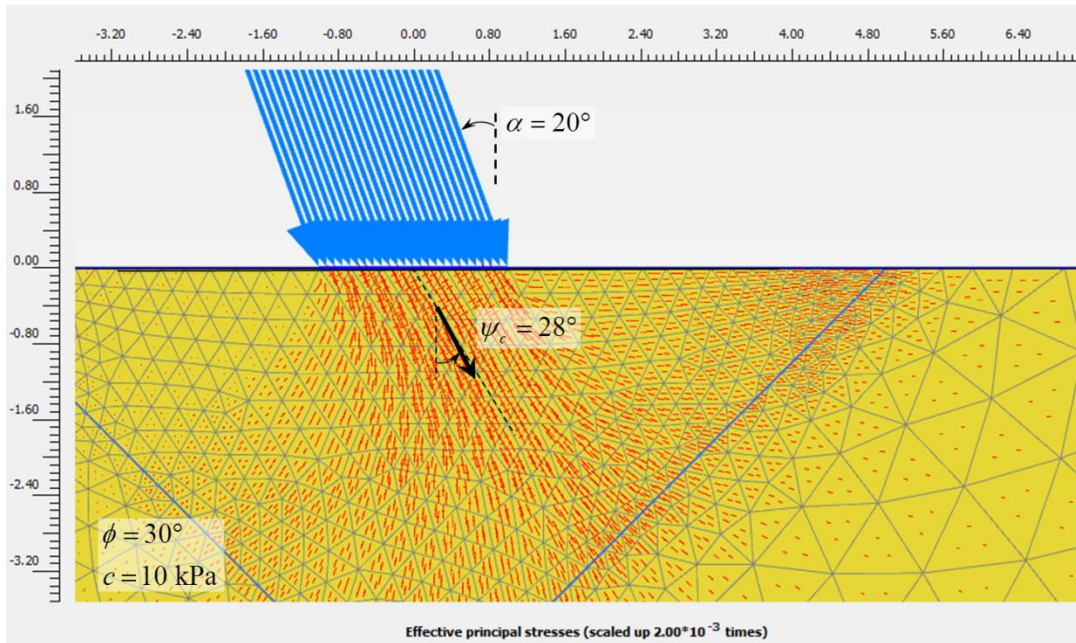


Figure 12-4. Rotation of the principle direction in Zone 1.

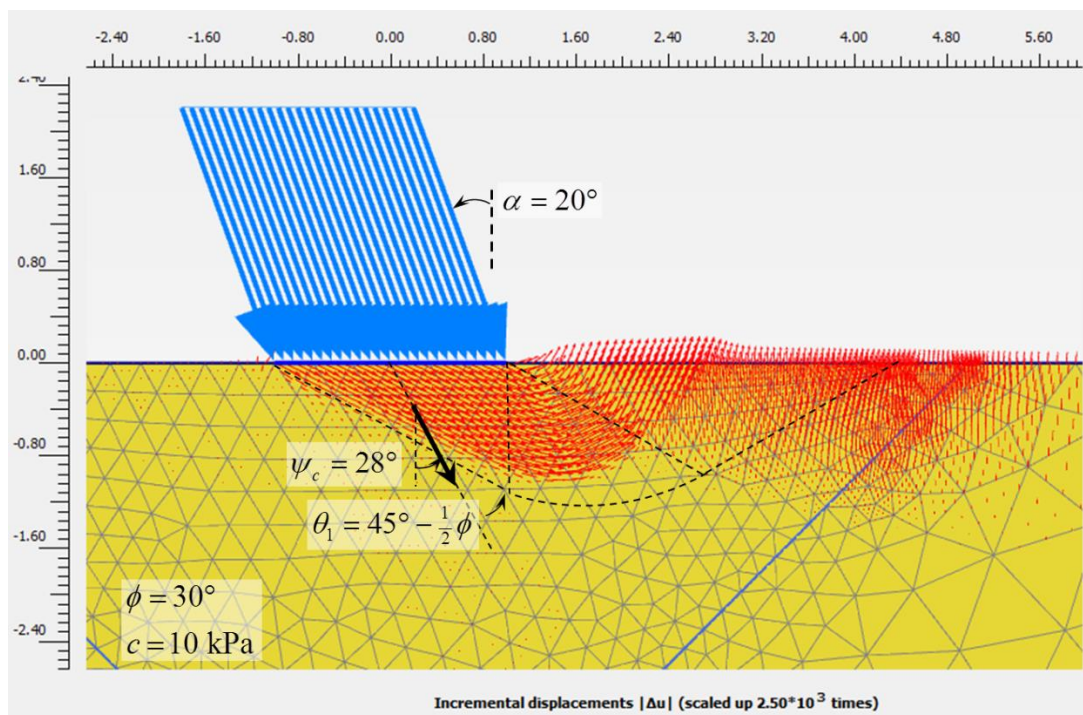


Figure 12-5. Incremental displacements and rotated Prandtl-wedge.

12.4 The surcharge inclination factor i_q

In 2014 Van Baars published, based on a rotated Prandtl-wedge failure mechanism, the analytical solution for the surcharge inclination factor, i_q . For this mechanism, the solution for the surcharge inclination factor can be analytically found by examining the effect of the inclined load for the three zones independently and multiplying the individual effects.

Zone 3

For Zone 3 all equations and even all stresses remain the same.

Zone 2

For Zone 2, the rotation angle ($\theta_1 + \theta_3 = \frac{1}{2}\pi$) reduces due to the surcharge fan reduction angle ψ_q , so the following equation (see Chapter 7 and Figure 12-2) is changed:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{r_3^2}{r_R^2} = \left(e^{\left(\frac{1}{2}\pi - \psi_q\right) \tan \phi} \right)^2 = e^{(\pi - 2\psi_q) \tan \phi}. \quad (12.13)$$

Zone 1

For Zone 1, all equations stay the same.

The inclination factors are influenced by the effects of the three zones, but also by the fact that they are based on the vertical component of the inclined bearing capacity, so:

$$p_v \approx \cos \alpha \cdot p \quad (12.6)$$

Analytical solution

Combination of all these effects, results in the following analytical solution of the surcharge inclination factor, which is defined as the (vertical component) of the inclined bearing capacity divided by the non-inclined bearing capacity:

$$\begin{aligned} i_q &= \frac{P_{v;q(\alpha>0)}}{P_{v;q(\alpha=0)}}, \\ &= \cos \alpha \cdot \frac{P_{q(\alpha>0)}}{P_{q(\alpha=0)}}, \\ &= \cos \alpha \cdot i_{q,1} \cdot i_{q,2} \cdot i_{q,3}, \\ &= \cos \alpha \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{r_3}{r_R}\right)^2}{\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2} \cdot 1, \\ &= \cos \alpha \cdot \frac{e^{(\pi - 2\psi_q) \tan \phi}}{e^{(\pi) \tan \phi}}, \\ i_q &= \cos \alpha \cdot e^{-2\psi_q \tan \phi}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

This solution is however limited due to Coulomb shear failure of the load at the surface. By also taking this into account, the inclination factor becomes:

$$\begin{aligned} i_q &= \cos \alpha \cdot e^{-2\psi_q \tan \phi} \quad (\alpha < \phi), \\ &= 0 \quad (\alpha > \phi). \end{aligned} \quad (12.15)$$

Numerical results

This analytical solution has been compared with the results of FEM calculations. The cohesion is zero and the saturated weight of the soil is taken equal to the weight of the water, in order to have zero effective stresses due to the soil-weight. In this way all effects due to the cohesion bearing capacity N_c and the soil-weight bearing capacity N_γ are excluded.

The analytical relationship is presented in Figure 12-6, for a load inclination angle of $\alpha = 20^\circ$, together with the relationship of the laboratory experiments of Meyerhof (Eq. 12.2) and with the results of the FEM calculations.

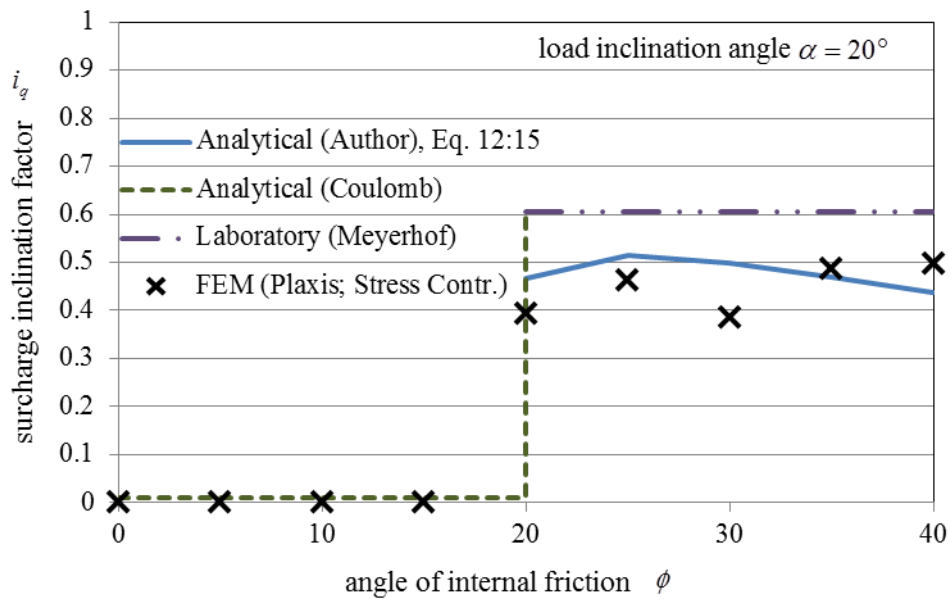


Figure 12-6. Surcharge inclination factor: Analytical, Laboratory and FEM.

The analytical solution is close to the FEM results and even describes them better as the empirical equation of Meyerhof, as can be seen from Figure 12-6.

12.5 Cohesion inclination factor i_c

Analytical solution

In 2014 Van Baars showed that in a similar way as for the analytical solution for the surcharge inclination factor, i_q , an analytical solution for the cohesion inclination factor, i_c can be found, but only at the following two boundary conditions:

$$\begin{aligned} \phi = 0: \quad i_c &= \cos \alpha \cdot \frac{2 + \pi - 2\psi_c}{2 + \pi} \\ \phi \gg 0: \quad i_c &= i_q. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Based on these analytical boundary solutions, one can make a short equation for the variable i_c which goes gradually from the zero boundary into the infinite boundary, which is:

$$i_c = \cos \alpha \cdot \left(e^{-2\psi_c \tan \phi} - \frac{2\psi_c}{2 + \pi} \cdot e^{-\pi \tan \phi} \right) \quad (12.17)$$

This solution is only exact at the boundaries and is an approximation in between. There is also a way however, leading to the exact solution.

Since the inclination factor is defined as the (vertical component) of the inclined bearing capacity divided by the non-inclined bearing capacity:

$$i_c = \frac{P_{v;c(\alpha>0)}}{P_{v;c(\alpha=0)}} = \cos \alpha \cdot \frac{P_{c(\alpha>0)}}{P_{c(\alpha=0)}}, \quad (12.18)$$

the exact cohesion inclination factor is (see chapter 8):

$$i_c = \cos \alpha \cdot \frac{\left\{ \cot \theta_1 + \left(\frac{\tan \theta_1}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \phi} \right) \cdot e^{(\pi-2\psi_c)\tan \phi} + \cot \phi \cdot \left(e^{(\pi-2\psi_c)\tan \phi} - 1 \right) \right\} \cdot (1 + \cot \theta_1 \cdot \tan \phi)}{\left\{ \cot \theta_1 + \left(\frac{\tan \theta_1}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \phi} \right) \cdot e^{\pi \tan \phi} + \cot \phi \cdot \left(e^{\pi \tan \phi} - 1 \right) \right\} \cdot (1 + \cot \theta_1 \cdot \tan \phi)} \quad (12.19)$$

or with simplification of the denominator:

$$i_c = \cos \alpha \cdot \frac{\left\{ \cot \theta_1 + \left(\frac{\tan \theta_1}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \phi} \right) \cdot e^{(\pi-2\psi_c)\tan \phi} + \cot \phi \cdot \left(e^{(\pi-2\psi_c)\tan \phi} - 1 \right) \right\} \cdot (1 + \cot \theta_1 \cdot \tan \phi)}{(K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} - 1) \cot \phi} \quad (12.20)$$

This exact solution is, just as the surcharge inclination factor, limited due to Coulomb shear failure at the surface:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_h = c + \sigma_v \cdot \tan \phi \\ \sigma_h = \sigma_v \cdot \tan \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_v = \frac{c}{\tan \alpha - \tan \phi} = i_c N_c c \quad (12.21)$$

$$\Rightarrow i_c = \frac{1}{N_c (\tan \alpha - \tan \phi)}.$$

So, by taking both inclined Prandtl failure and Coulomb shear failure into account, the cohesion inclination factor simply becomes the lowest factor of both failure mechanisms, which yields for the short equation (12.17):

$$i_c = \min \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \cdot \left(e^{-2\psi_c \tan \phi} - \frac{2\psi_c}{2 + \pi} \cdot e^{-\pi \tan \phi} \right), \\ \frac{1}{N_c (\tan \alpha - \tan \phi)}. \end{array} \right. \quad (12.22)$$

Figure 12-7 shows the comparison of this short equation (for a load inclination angle $\alpha = 20^\circ$) with the exact equation (12.20). The solutions are (almost) the same.

Numerical results

Both analytical relationships are presented in Figure 12-7, together with the equation of Meyerhof (Eq. 12.2) based on his laboratory experiments and together with the results of the finite element calculations, for a load angle of 20° .

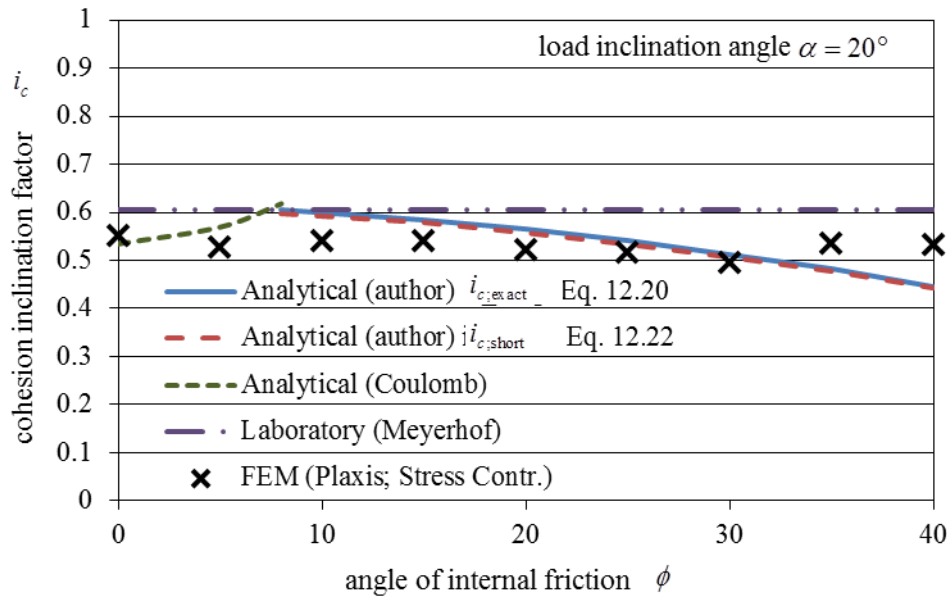


Figure 12-7. Cohesion inclination factor: Analytical, Laboratory and FEM.

Also in this case the analytical solution prescribes rather well to the FEM results and, as can be seen from this figure, even more accurate than the Meyerhof equation for the inclination factors (Eq. 12.2).

Another interesting point is that there is a zone for the internal friction ($8^\circ < \phi < 20^\circ$, for $\alpha = 20^\circ$) in which the cohesion inclination factor depends on a Prandtl failure mechanism, while the surcharge inclination factor depends on a Coulomb shear failure mechanism. Since there are different failure mechanisms occurring at the same time, the superposition of Meyerhof's bearing capacity equation (Eq. 11.1) is, scientifically speaking, not allowed for this zone.

The accurateness of the analytical solution (Equations 12.12 and 12.22) can also be seen from a vertical load versus horizontal load plot with a variable load angle α , and a constant friction angle ($\phi = 0^\circ$), see Figure 12-8. This plot also shows how inaccurate the Meyerhof equation is for angles larger than 20 degrees.

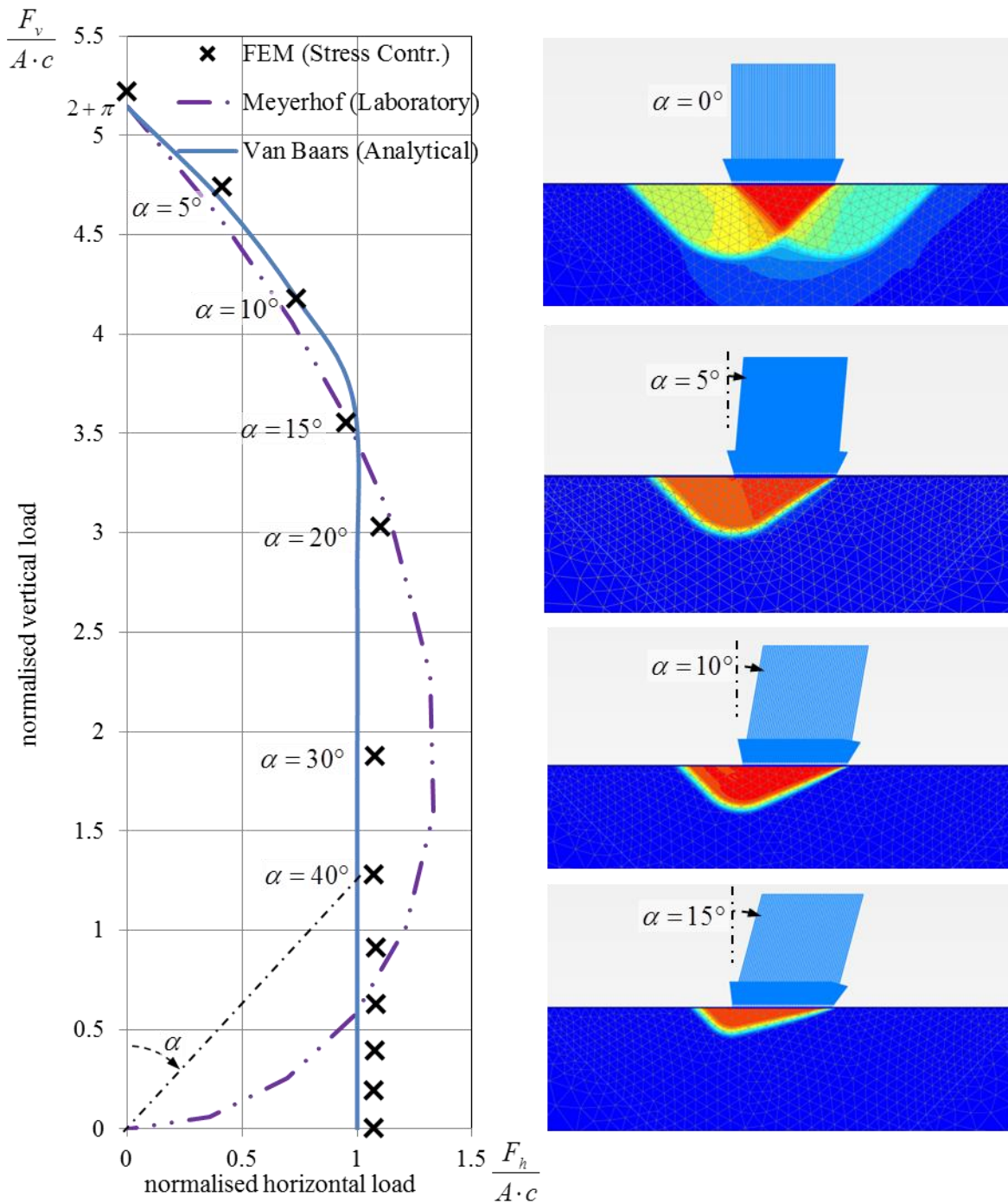


Figure 12-8. Cohesion inclination factor versus load angle.

12.6 Soil-weight inclination factor i_γ

The soil-weight inclination factor can only be obtained from numerical or laboratory tests, like Meyerhof did. Nevertheless, from the equation of Meyerhof for the soil-weight bearing capacity, it becomes clear that Meyerhof thought about a gradual reduction to zero and not about a sudden drop to zero (Coulomb shear failure) such as for the surcharge inclination factor. The empirical solution of Meyerhof (based on laboratory tests) has been plotted in Figure 12-10, together with the results from the finite element calculations. These calculations proof that the correction factors for the inclination of the load must be changed into:

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\right)^5, \quad \text{for: } \alpha < \phi, \quad (12.23)$$

in order to fit the results of the numerical calculations.

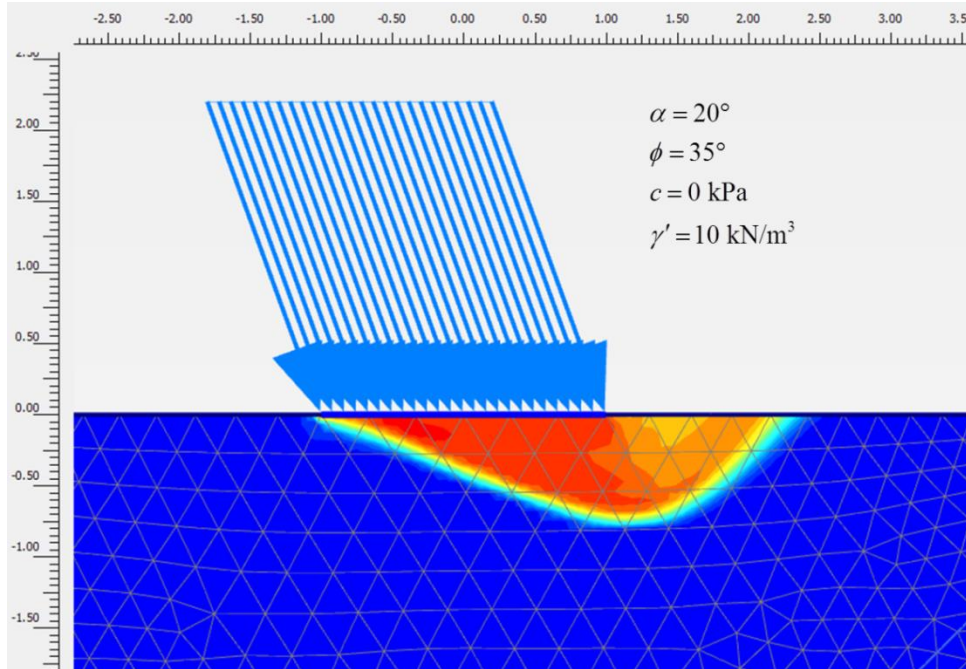


Figure 12-9. Soil-weight failure mechanism for inclined load.

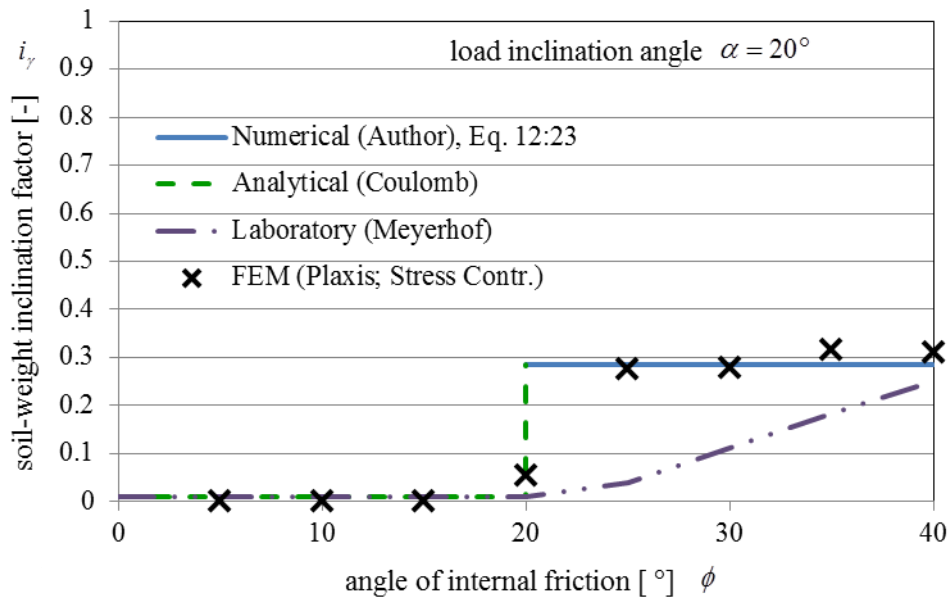


Figure 12-10. Soil-weight inclination factor: Laboratory and FEM.

13 Shape factors

13.1 Introduction

If the shape of the foundation area is not an infinitely long strip, but a rectangular area, of width B and length L (where it is assumed, that the width is the shortest dimension, i.e., $L \geq B$), correction factors for the shape are used. Meyerhof (1963) was the first to publish shape factors:

$$s_q = s_\gamma = 1 + 0.1K_p \frac{B}{L} \sin \phi, \quad s_c = 1 + 0.2K_p \frac{B}{L} \quad \text{with:} \quad K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (13.1)$$

A few years later De Beer (1970) published his shape factors, based on laboratory experiments. Brinch Hansen (1970) based his shape factors on the experimental results from De Beer. So the most commonly used shape factors are (for $B \leq L$):

$$s_c = 1 + 0.2 \frac{B}{L}, \quad s_q = 1 + \frac{B}{L} \sin \phi, \quad s_\gamma = 1 - 0.3 \frac{B}{L}. \quad (13.2)$$

There is still no international agreement on the precise values of these correction factors.

It may be noted that for $B/L = 0$, the formulas all give a factor 1, in agreement with the basic results for an infinite strip. It should also be remembered that $B/L \leq 1$, by definition.

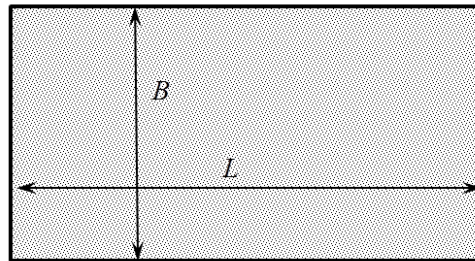


Figure 13-1. Rectangular area.

Knudsen and Mortensen (2016) compared for frictionless soils ($\phi = 0$), the bearing capacity for axi-symmetric (2D Plaxis), circular, and square foundations (both 3D Plaxis). They found very similar results (deviation less than 3%). This means the shape factors can also be studied with axi-symmetric calculations.

There is a risk in assuming an identical Prandtl-wedge shaped failure mechanism for circular or even elliptical shaped loaded areas, such as for example Figure 13-2. Van Baars (2014 and 2015) showed that, for circular shallow foundations, the resulting shape factors are far too high, according to Finite Element calculations, and also according to the laboratory tests of De Beer. The reason for this is that the area of part 3 of the Prandtl wedge, the part next to the load, becomes too big, creating too much support, so before this Prandtl-wedge failure mechanism can occur, already another

mechanism occurs. For deep foundations though, this failure mechanism might still be interesting, see Chapter 18.

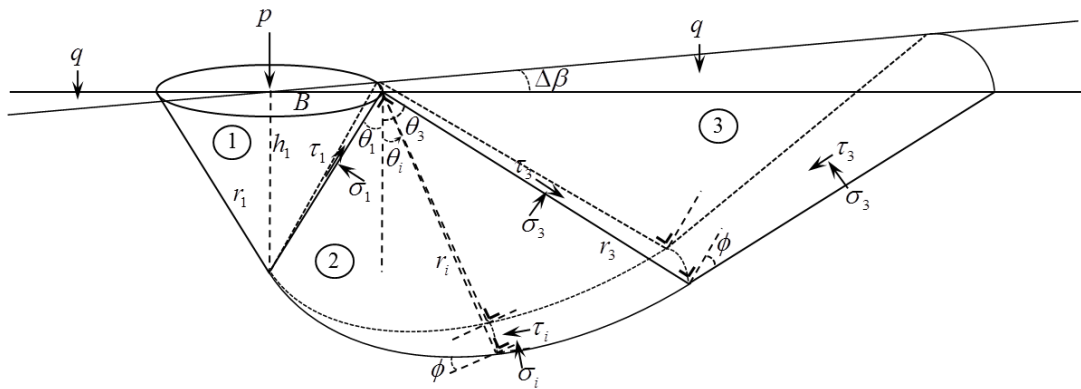


Figure 13-2. Prandtl-wedge approach for circular loaded areas.

Figure 13-3 shows the incremental displacements during failure, for a circular loaded area ($D = 4$ m) on two different cohesive soils, without a surcharge, indicating the failure mechanism. The failure mechanism starts like the circular-wedge failure mechanism, in the middle of the loaded area, has 3 zones, like the Prandtl-wedge, and is found for all three bearing capacity cases (cohesion, surcharge and soil-weight).

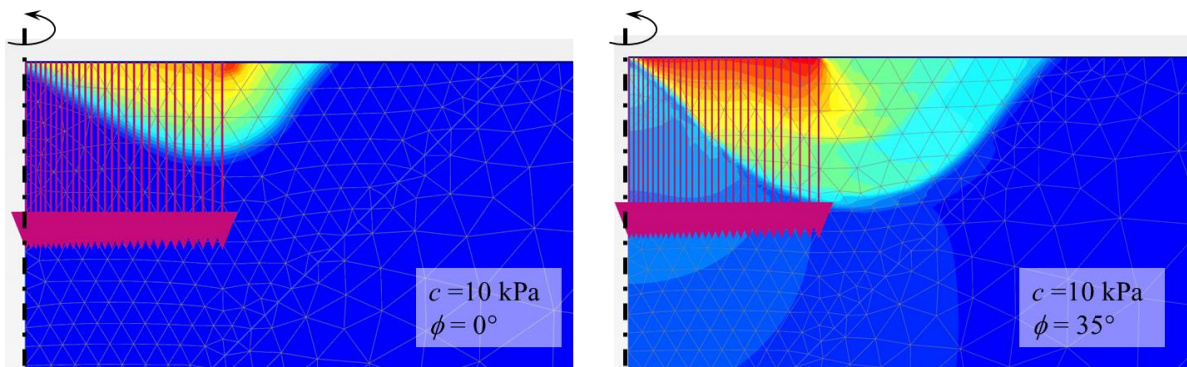


Figure 13-3. Failure mechanism for circular loaded areas.

Due to the axial symmetry, the circular wedge is pushed out during failure, causing a declining tangential stress (i.e. circumferential stress or hoop stress).

For the strip load (plane strain solution) the minimum stress, in part 3 of the wedge, is the vertical stress, which is zero without a surcharge, and the maximum stress is the horizontal stress (perpendicular to the load).

For the circular load (axial symmetry) however, the minimum stress, in part 3 of the wedge, is not the vertical stress, but the tangential stress, which is zero, or even less in case of a cohesion, which causes even tension. Therefore, the maximum stress, which is still the horizontal stress (perpendicular to the load), will also be far less. Due to this cleaving failure mechanism, the bearing capacity of a circular load will be far less than of a strip load, resulting in shape factors below “1”. In reality, for cohesive materials, there will be radial cracks formed, which eliminate the tensile tangential stresses and therefore increase the bearing capacity.

13.2 Cohesion shape factor s_c

The shape factor for circular (round) loads can be calculated with axial symmetric calculations in Plaxis. Plaxis gives for displacement controlled calculations the resulting load F_y for 1 rad, or half a circular load. The circular cohesion shape factor is therefore calculated by:

$$s_{c;round} = \frac{2F_y}{\left(\frac{1}{4}\pi D\right)(N_c c)} \quad \text{with:} \quad \begin{aligned} N_c &= (N_q - 1) \cot \phi \\ N_q &= \cos^2 \phi \cdot K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} \end{aligned} \quad (13.3)$$

The shape factor for a circular footing (s_c for $B = L$) on cohesive soil has been plotted in Figure 13-4, for Meyerhof, De Beer and the outcome of the axial-symmetric FEM calculations. The FEM results show that the currently used factors from especially Meyerhof, but also De Beer, are too high, so unsafe.

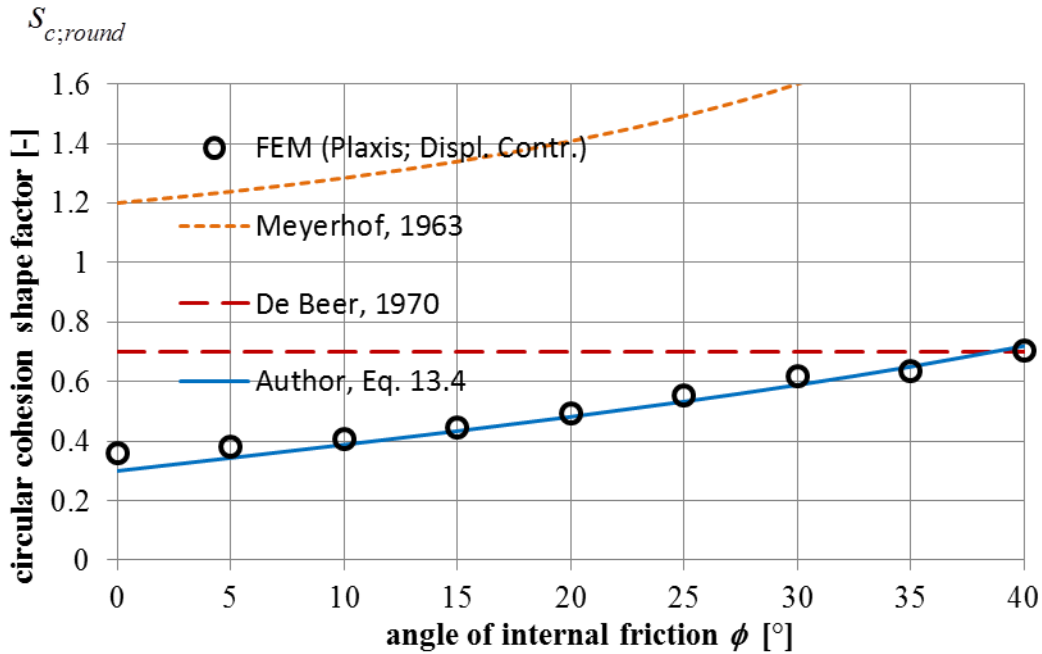


Figure 13-4. The circular cohesion shape factor.

Several publications, for example Zhu and Michalowski (2005), and Tapper et al. (2015), show that the shape factors are related to $\sqrt{\frac{B}{L}}$, and not to $\frac{B}{L}$. This will be adopted here. The shape factor used for the straight line in the figure is:

$$s_c = 1 - (0.7 - 0.5 \tan \phi) \cdot \sqrt{\frac{B}{L}}. \quad (13.4)$$

13.3 Surcharge shape factor s_q

The shape factor for a circular footing (s_q for $B = L$) surrounded by a surcharge, has been plotted in Figure 13-5, for Meyerhof, De Beer and also the outcome of the axial-symmetric FEM calculations.

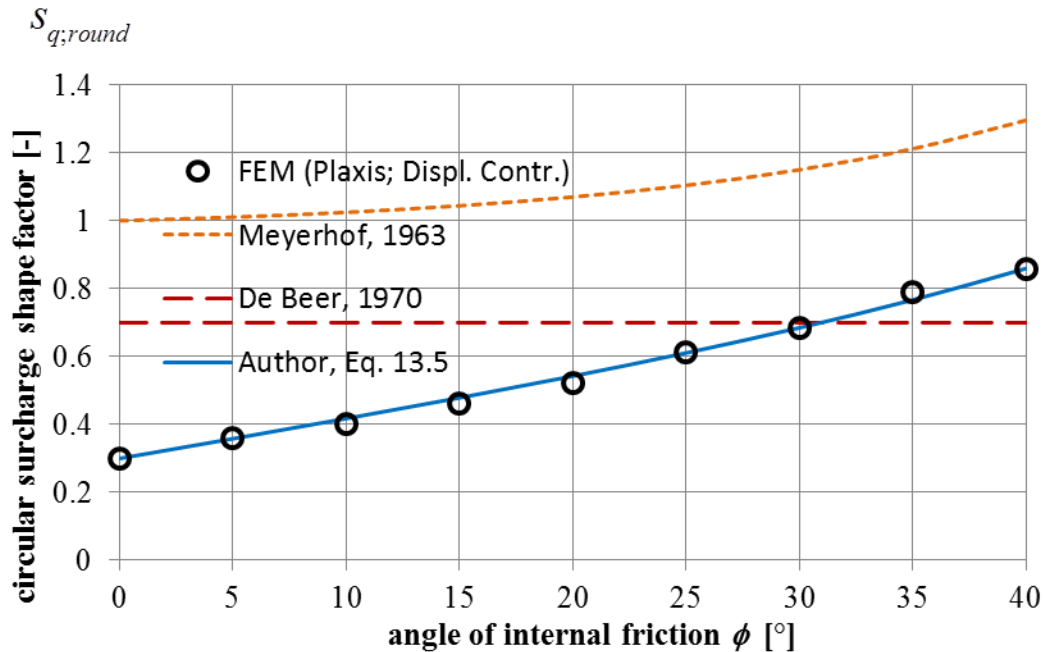


Figure 13-5. The circular surcharge shape factor.

The results show that the currently used factors from especially Meyerhof, but also De Beer, are too high, so unsafe. The shape factor used for the straight line is:

$$s_q = 1 - \left(0.7 - \frac{2}{3} \tan \phi \right) \cdot \sqrt{\frac{B}{L}}. \quad (13.5)$$

13.4 Soil-weight shape factor s_γ

The shape factor for a smooth circular footing (s_γ for $B = L$), on soil with an effective weight, has been plotted in Figure 13-6, for Meyerhof, De Beer and also the outcome of the axial-symmetric FEM calculations.

The results show that the currently used factors from especially Meyerhof, but also De Beer, are again too high, so unsafe. The shape factor used for the straight line is:

$$s_\gamma = 1 - \left(0.6 - \exp\left(-\frac{\phi}{4^\circ}\right) \right) \cdot \sqrt{\frac{B}{L}}. \quad (13.6)$$

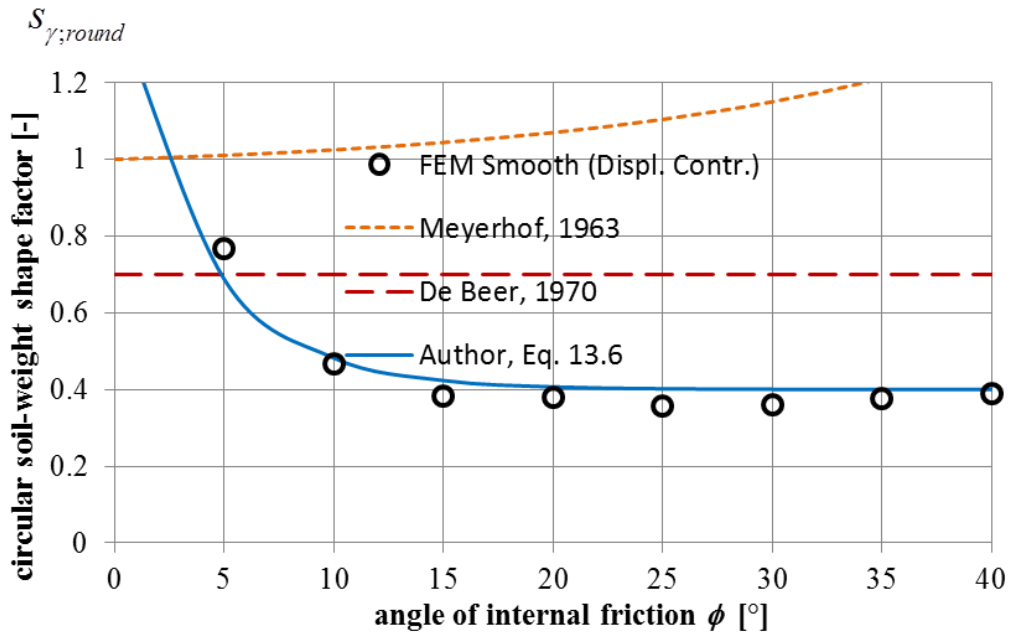


Figure 13-6. The circular soil-weight shape factor.

13.5 Superposition of the shape factors

Figure 13-7 shows the results of a single combined calculation in which $c = q = \frac{1}{2} \gamma' D$. Since the failure mechanisms of the three parts (cohesion, surcharge and soil-weight) are identical, superposition is allowed. The prediction based on the shape factors presented in this chapter is good, while the classical equations overestimate the results.

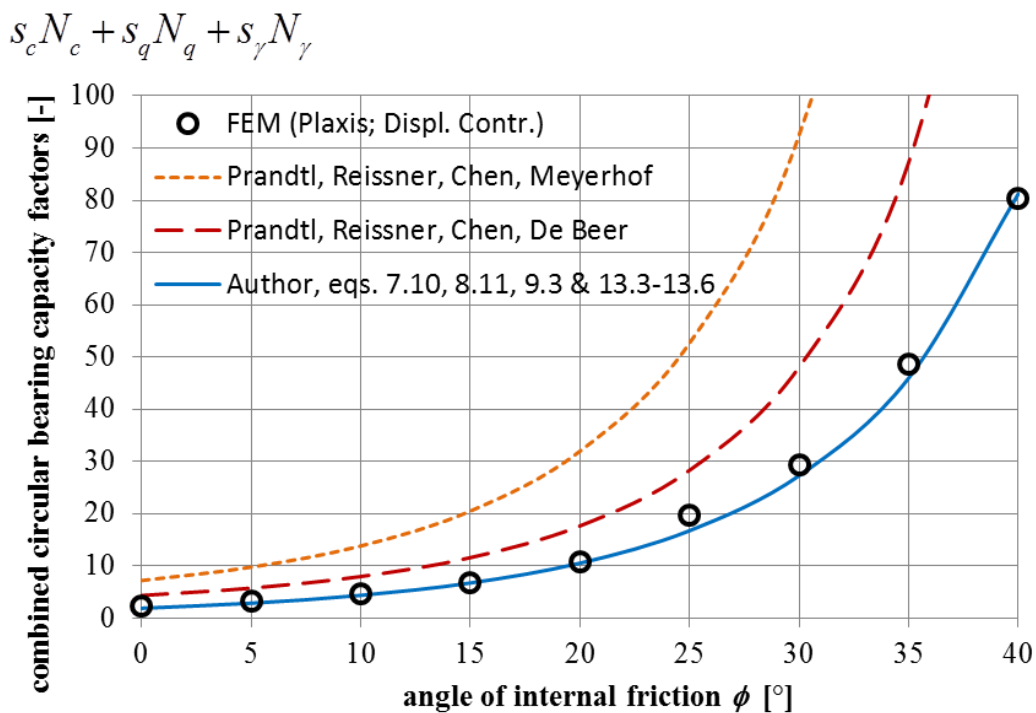


Figure 13-7. The combined circular bearing capacity factors.

14 Non-eccentric loading

Until now, nobody proposed correction factors for non-eccentric loading. The common practice is to reduce the contact area of the foundation such that its centroid coincides with that of the load, which means that, the area of the foundation outside the effective area, is completely neglected.

The question is, if this reduction of the foundation area is an accurate method to describe the reduction of the bearing capacity due to vertical non-eccentric loading. Several people have performed finite element calculations of vertical and also inclined non-eccentric loaded strip footings. There can still be some discussion about these results, because Hjiiaj et al (2004) based their results on the limit analysis, so the words “dilatancy angle” were not mentioned in their article. Knudsen and Mortensen (2016) and independently Khitas et al (2016) only found results for frictionless soil ($\phi = 0$). They found for frictionless soils that the error of the simplified method, with the reduction of the foundation area, is limited to 5% percent, in case the eccentricity is limited to: $e/B < 0.30$.

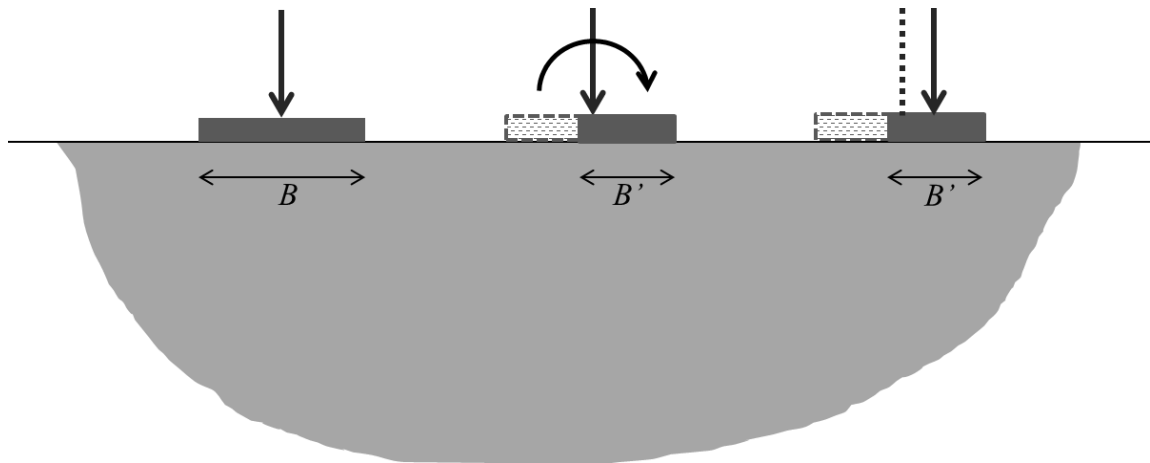


Figure 14-1. Effective or reduced foundation due to non-eccentric loading.

The failure mechanism, see Figure 14-2, is very different between non-eccentric and eccentric loading, so one can expect a different force-displacement relation. The force-displacement curve however, see Figure 14-3, remains remarkably very similar indeed, having also forces at failure, which are only slightly influenced by the additional unloaded part of the plate.

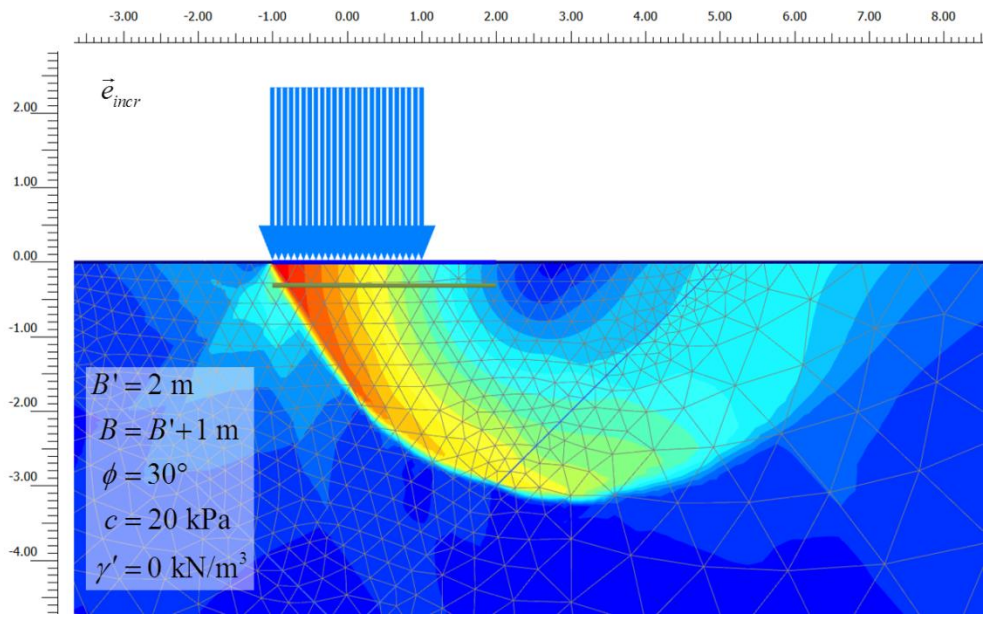


Figure 14-2. Failure mechanism for non-eccentric loading.

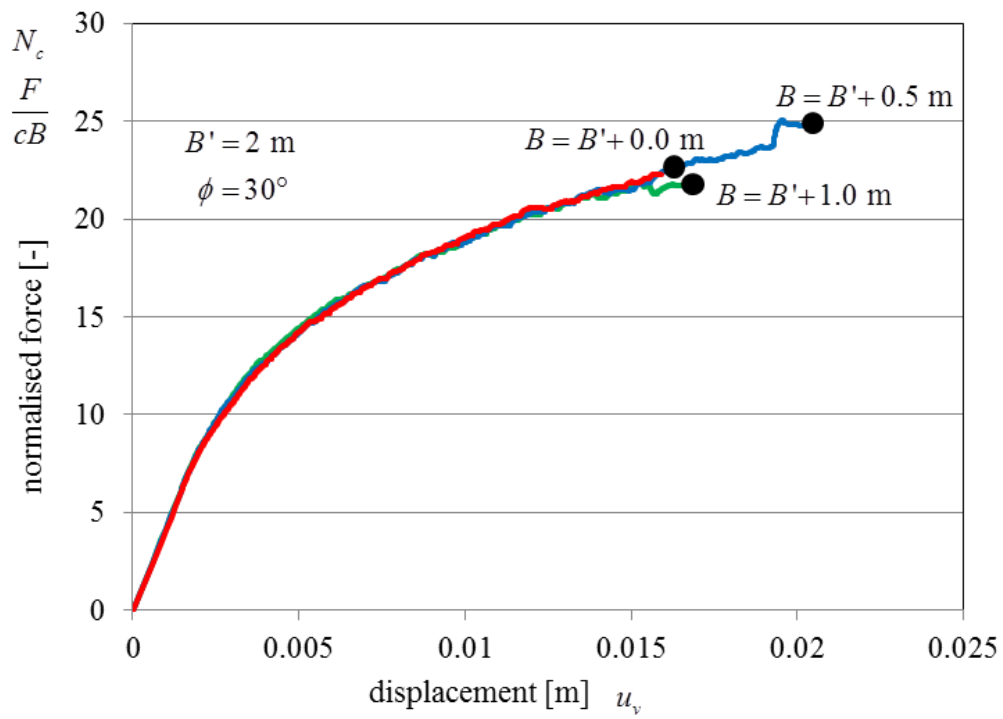


Figure 14-3. Normalised force versus displacement.

15 Inclined footing factors

In the German norms an even more rare case can be found, the reduction factor for the case of an inclination of the footing itself (in German: Sohlneigungsbeiwert). This relates to page 307 of the publication of Reissner.

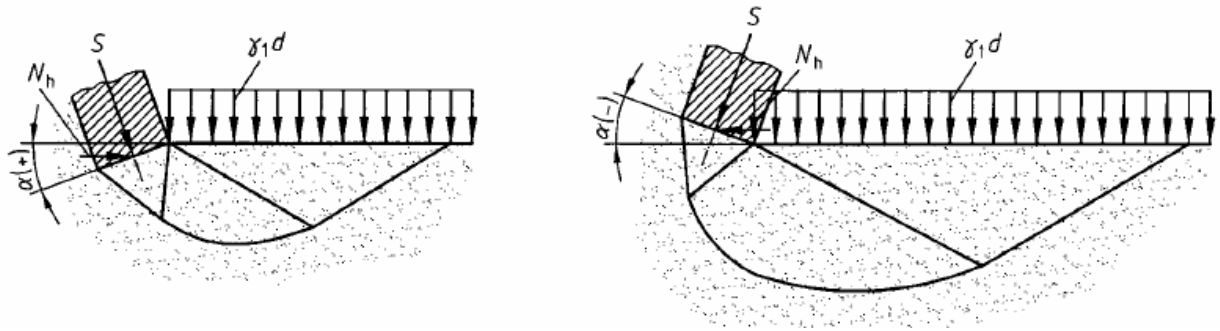


Figure 15-1. Inclined footings.

According to the German norms the reduction factors are:

$$\xi_c = \xi_q = \xi_\gamma = e^{-0.045\alpha \tan \phi} \quad (\phi > 0). \quad (15.1)$$

It is unclear where these reduction factors come from, and moreover, it is very suspicious that these factors are supposed to be all the same. Therefore, if one is ever asked to design an inclined footing, which is unlikely, it is probably better not to use these reduction factors, but to apply the solution of the inclined loads as given in Chapter 12.

16 Slope factors

It is rare to make a foundation at the edge of a slope, but even for such a case the German norms proposes the following correction factors (in German: Geländeneigungsbeiwert):

$$\lambda_c = \frac{N_q e^{-\alpha} - 1}{N_q - 1} \quad (\phi > 0), \quad \text{or undrained: } \lambda_c = 1 - 0.4 \tan \beta \quad (\phi = 0)$$

$$\lambda_q = (1 - \tan \beta)^{1.9},$$

$$\lambda_\gamma = (1 - 0.5 \tan \beta)^6,$$
(16.1)

with:

$$\alpha = 0.0349 \cdot \beta \cdot \tan \phi. \quad (16.2)$$

The angles in these equations are all in degrees and to avoid slope failure: $\beta \leq \phi$.

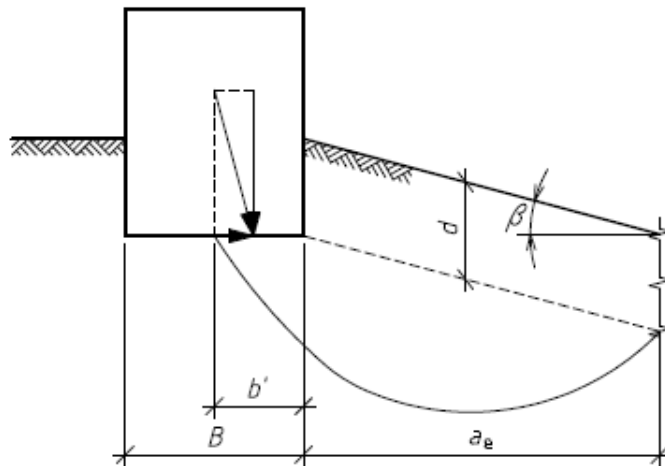


Figure 16-1. Footing near a long slope.

In the solution for the cohesion factor there is a mysterious jump around $\phi = 0$ and the cohesion correction factor λ_c is even assumed to depend on the surcharge bearing capacity factor N_q . Since there is also no background information in the norms about this solution, it is recommended not to use these factors.

It could be safer to perform a Bishop slip circle calculation in order to check the safety factor of a foundation near a slope.

17 Perforation factor

Tapper et al. (2015) published in their article about the “Undrained vertical bearing capacity of perforated shallow foundations” something new: the perforation shape factor. They wrote:

“Perforated shallow foundations are commonly used as mudmats to support subsea infrastructure such as pipeline end manifolds and terminations. The perforations may be included in the foundation design to allow water to escape during installation, or to reduce uplift resistance on decommissioning. Perforated geometries, often involving a single perforation, can also be efficient for larger gravity-based foundations. However, perforations decrease the available foundation bearing area, which reduces the capacity of the foundation during operation.”

The authors studied with centrifuge tests and numerical simulations the effect of the perforation on the bearing capacity of a shallow foundation on cohesive material.

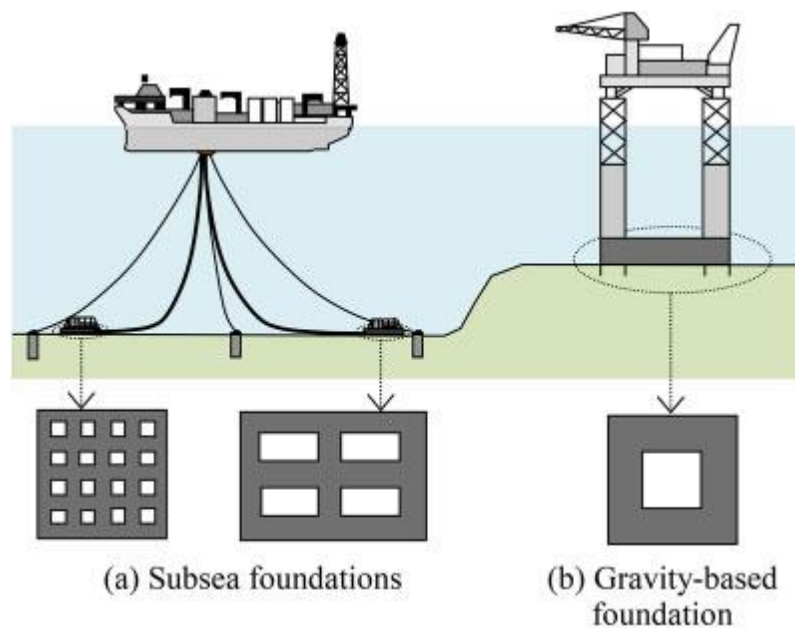


Figure 17-1. Perforated offshore foundation examples.

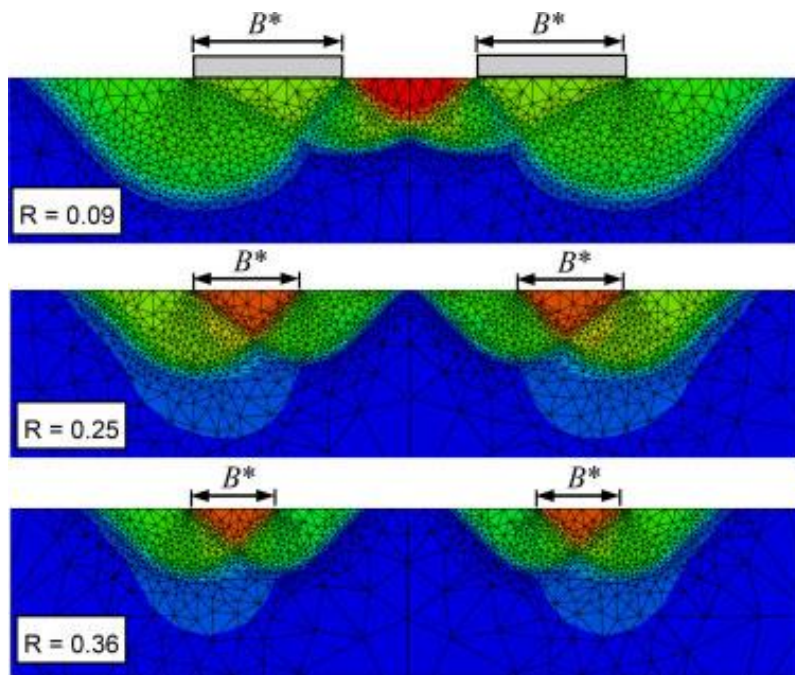


Figure 17-2. Transition of failure mechanisms.

In the plots of their numerical simulations, one can recognise the Prandtl-wedges (Figure 17-2).

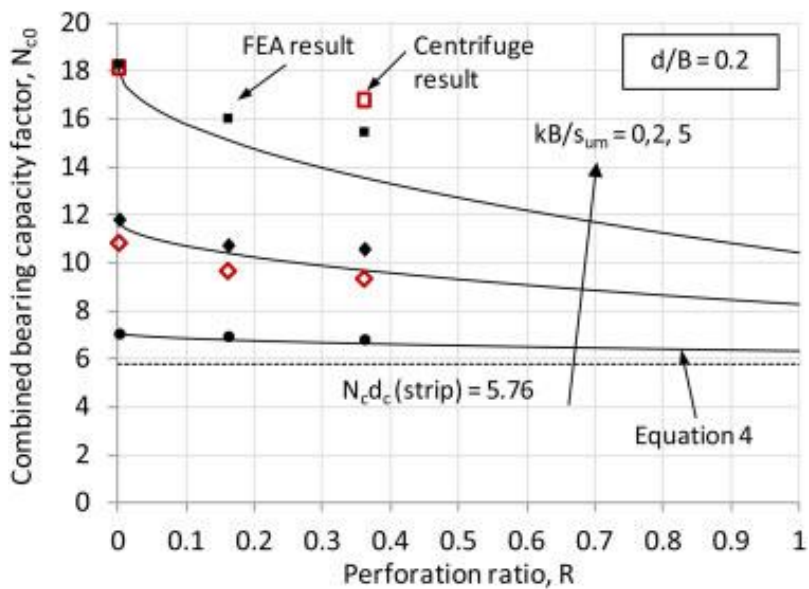


Figure 17-3. Square perforated footing capacity ($d/B=0.2$).

V Pile tip bearing capacity

18 Pile tip bearing capacity using Meyerhof

For the determination of the bearing capacity of the tip of a foundation pile very often the general bearing capacity formula of Meyerhof is used. In this analysis the basic parameters are the shear strength of the sand layer (characterised by its cohesion c and its friction angle ϕ), and the weight of the soft layers, which are taken into account as a surcharge q .

The maximum tip bearing capacity is determined analogously to the bearing capacity of a shallow foundation, which is based on the Prandtl-wedge. This entails simply using the 2-dimensional solution of a shallow foundation, multiplied with shape factors for a 3-dimensional collapse, and simply disregarding the shear strength (but not the weight) of the soil above the foundation plane, see Figure 18-1.

The first who applied the Prandtl-wedge for pile foundations were Keverling Buisman (1935, 1940) and Meyerhof (1951), but they forgot about the shape factors, because they were first published by Meyerhof in 1963.

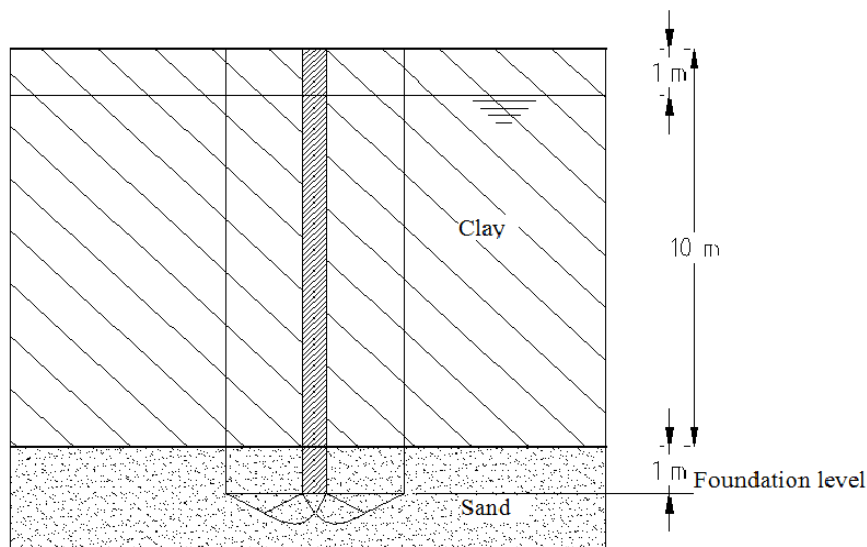


Figure 18-1. Slide plains under a pile, based on the Prandtl-wedge.

Figure 18-2 shows a figure published by Vesic (1967) and republished by Fang (1990). It shows the bearing capacity factor for shallow round footings $S_{q,round} \cdot N_q$ according to several researchers. The solution of the author (Van Baars, 2014), based on this 3-dimensional Prandtl-wedge failure mechanism (see Figure 13-2), is added to this figure. This solution can be approximated by:

$$S_{q,round} \cdot N_q = e^{2\pi \tan \phi} \quad (18.1)$$

This solution is somewhat in the middle of the other results. The interesting point is that this solution is close to the Berezantsev solution, because Fang (1990) writes: “Of the values shown in the figure, that of Berezantsev et al (1961) is considered to be the most reliable (Norland, 1963; Vesic, 1965; Tomlinson, 1977; Canadian Foundation Engineering Manual (CFEM), 1978)”.

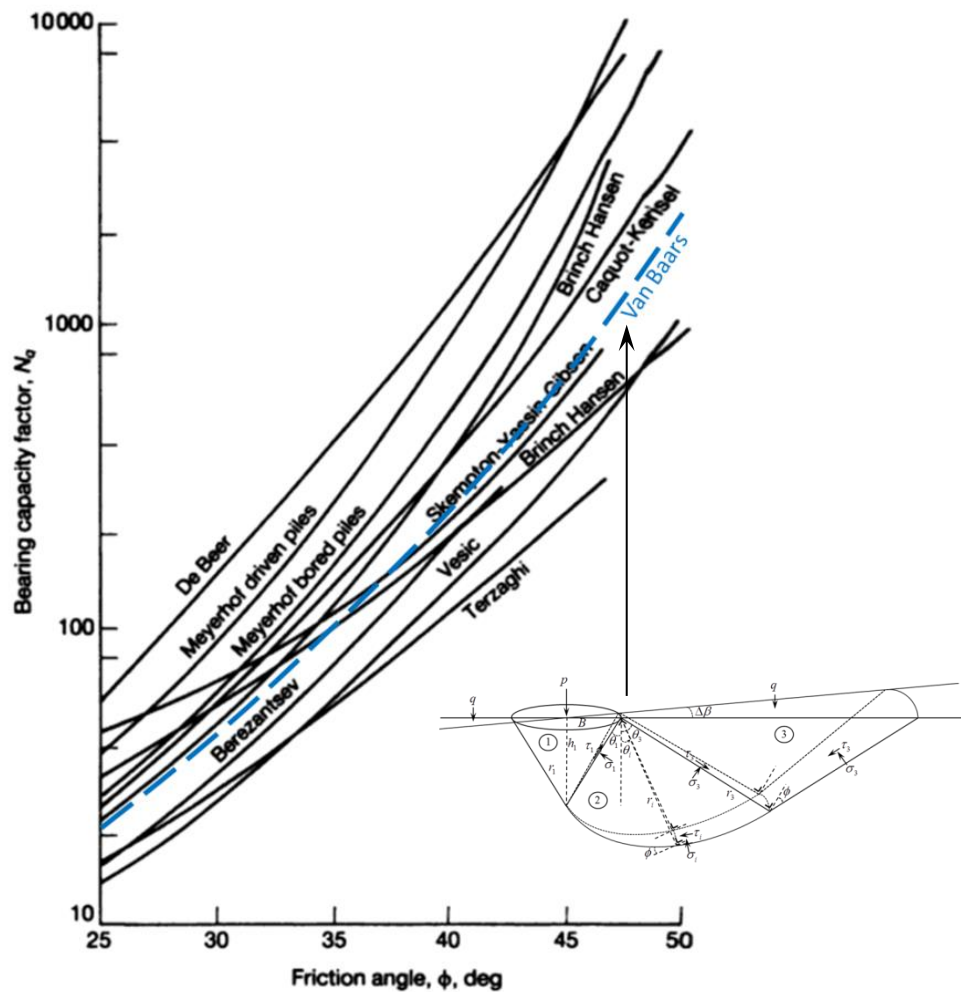


Figure 18-2. Comparison of the surcharge shape factor for round loads $S_{q;round} \cdot N_q$ (By Vesic, 1967 and Fang, 1990).

The problem of such an approach is that there is in fact no real failure mechanism possible all the way to the surface as it occurs with the Prandtl-wedge failure mechanism for shallow foundations. So, the whole failure mechanism in the ground higher than the pile tip is neglected. This can make this method conservative. On the other hand this method neglects the failure mechanism occurring for the shallow foundations, which is failure due to a tangential stress (hoop stress) going to zero. If one uses the Meyerhof equation, with the shape factor and surcharge bearing capacity factor for shallow foundations, to calculate the bearing capacity of a pile, and not equation 18.1, then for certain a far too low bearing capacity will be found.

The reason why these methods are still used very often, is that the only better alternative; the use of Cone Penetration Test (CPT) based methods, is not always possible. Not in all cases CPT's can be made, for example when the soil is too strong, or when there are too many large stones in the soil.

19 Pile tip bearing capacity using CPT-based methods

In engineering practice a simpler, more practical and more reliable method has been developed, on the basis of a Cone Penetration Test (CPT), considering this as a model test (Boonstra, 1940).

The common assumption made here is that the failure mechanism around the pile tip is a sort of Prandtl-wedge type failure. In this case, at a certain depth, the term of the soil-weight in the Meyerhof equation can be neglected and the other two terms; the cohesion term and the surcharge term, are independent of the width of the pile tip. This would mean that the bearing capacity stress measured with the CPT test must be the same as the bearing capacity stress of the much bigger pile.

The essence of this assumption is unfortunately not correct; the real failure mechanism around the pile tip is not a Prandtl-wedge type of failure. According to field tests on real piles the bearing capacity (the average stress below the pile tip) depends on the size of the pile tip and is a little bit smaller for bigger piles. Therefore the bearing capacity measured with the cone of the CPT (q_c -value) must be reduced before using it as bearing capacity for a real pile tip.

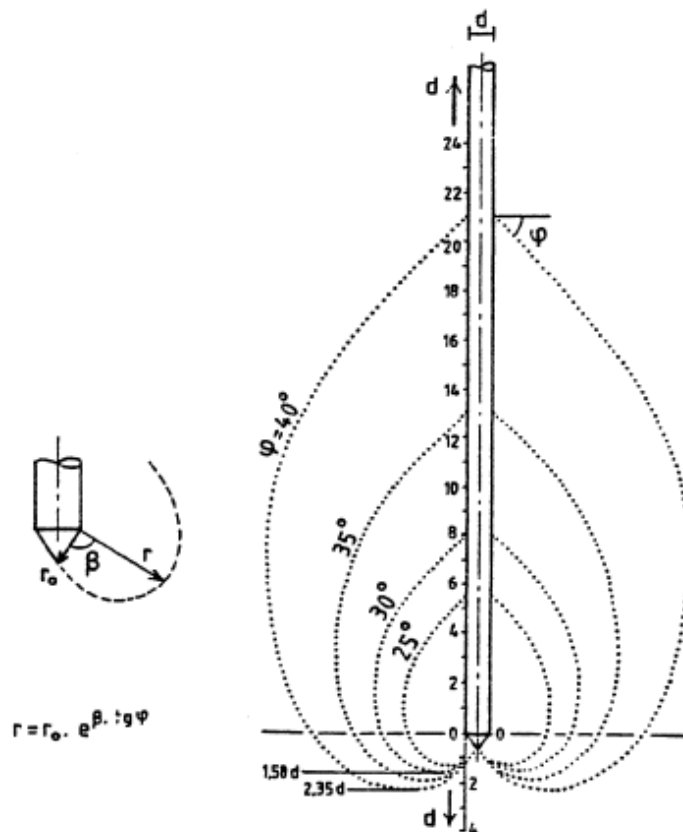
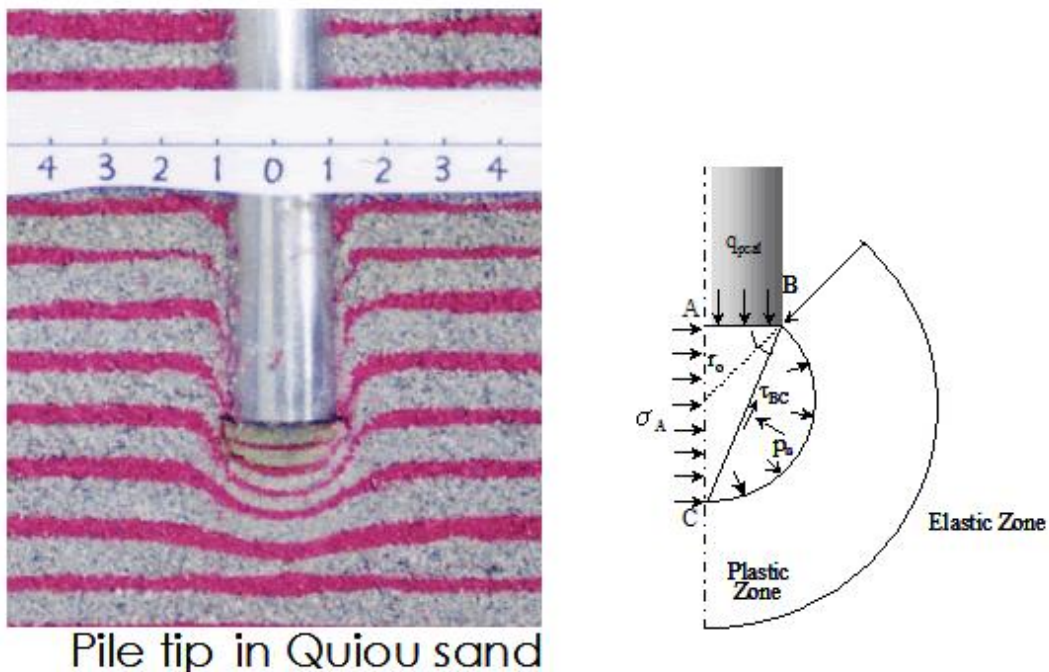


Figure 19-1. Logarithmic spiral shape failure mechanism around a pile tip.

Another point is that the thin CPT cone is far more sensitive for the discontinuities of the subsoil as real piles. Therefore every CPT-based method needs a rule for “smoothing” the discontinuities over a certain distance. The distance over which this “smoothing” rule must be applied is, in case of the Koppejan’s method (Van Mierlo & Koppejan, 1952), based on Zone 2 of the solution of the Prandtl-wedge, by assuming a logarithmic spiral shaped failure mechanism around the pile tip, see Figure 19-1. Because of this logarithmic spiral, the failure zone is, in the Koppejan’s method, assumed to reach from $0,7 D_{eq}$ to $4 D_{eq}$ below the pile tip, until $8 D_{eq}$ above the pile tip.

A slip failure along this logarithmic spiral is however impossible; although the soil below the level of the pile tip can rotate away from the pile, similarly as Zone 2 of the Prandtl-wedge, the soil above the level of the pile tip cannot rotate towards the pile and will not finally disappear in the pile.



Pile tip in Quiou sand

Figure 19-2. Global failure below pile tip in crushable sand.
(Picture from Kyushu University, Geotechnical Engineering Research Group)

Also laboratory model tests, see Figure 19-2, and numerical simulations show a global failure zone and not a failure with a slip surface. Moreover, this zone is mostly below, and not above, the level of the pile tip; from $7 D_{eq}$ below the pile tip, until $4 D_{eq}$ above the pile tip for a fully elasto-plastic soil, see Figure 19-3.

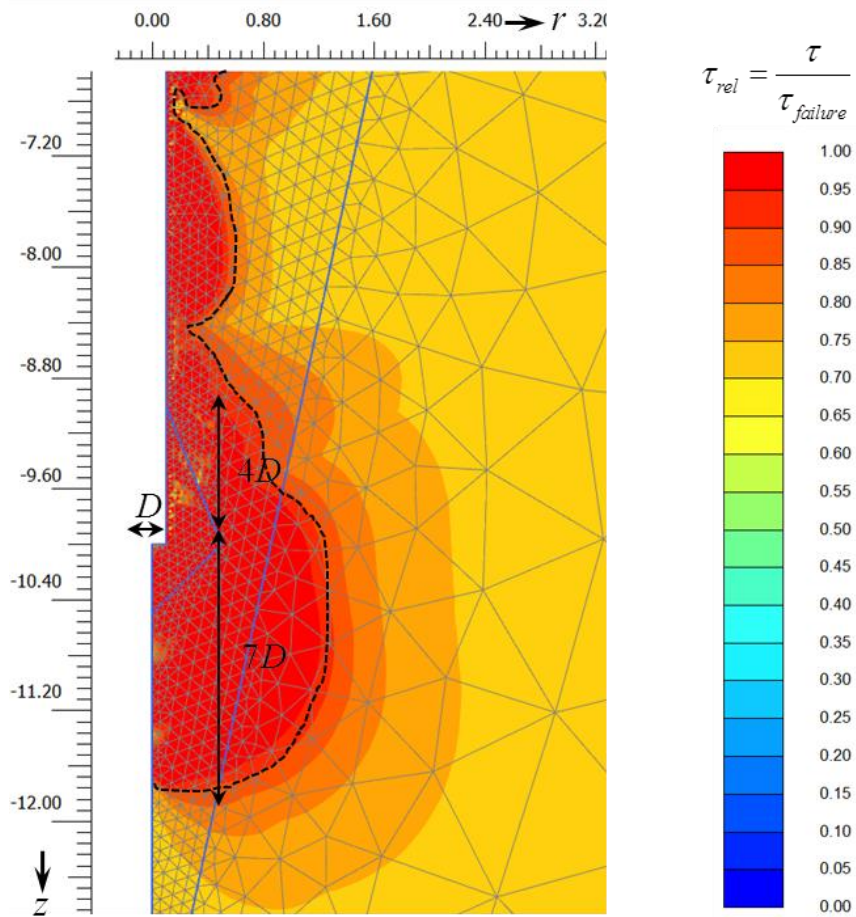


Figure 19-3. Numerical calculation of the failure zone around a pile tip.

This shows that it is not correct to assume a Prandtl-wedge type of failure mechanism near the tip of a foundation pile, or to derive the smoothing zone from the shape of a logarithmic spiral.

20 Pile tip bearing capacity versus horizontal stress

According to Reissner, for a shallow foundation, the bearing capacity depends on the vertical stresses. The assumption by Meyerhof, and others, that this also applies to pile foundations, is probably incorrect. In Cone Penetration Tests, the shaft friction and the cone resistance q_c always show a similar pattern; in sand there is always a rather constant ratio or friction number of $f = 1\%$, see Figure 20-1. From this two conclusions can be drawn.

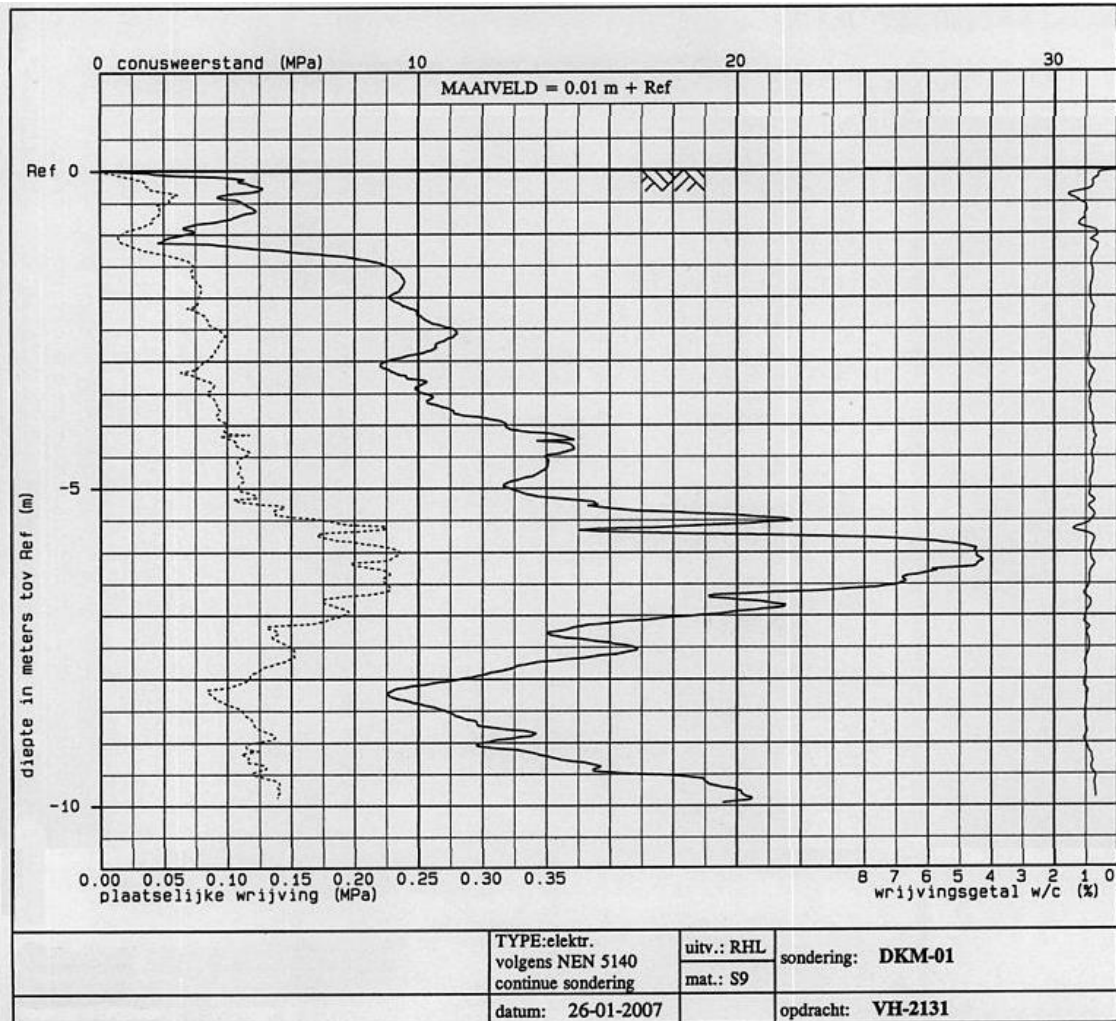


Figure 20-1. Cone penetration test in normally consolidated sand, showing shaft friction, cone resistance and friction number (on the right).

First, the cone resistance cannot depend on the vertical stress, while the cone resistance can decrease with depth (here between -6 and -8 m), while the vertical stress always increases with depth.

Second, since the shaft friction τ depends on the horizontal effective stress, more or less like:

$$\tau = \sigma'_h \cdot \tan \delta, \quad (20.1)$$

the bearing capacity p does not depend on the vertical stress, but on the horizontal stress (after the pile installation):

$$p = q_c = \sigma'_h \cdot \frac{\tan \delta}{1\%}. \quad (20.2)$$

This suggests that the pile tip failure mechanism is related to a sort of cavity expansion failure mechanism, probably controlled by the lowest (horizontal) stress, and not like shallow foundations, to a Prandtl-wedge failure mechanism.

VI Appendices

21 Mohr-Coulomb and Rankine

The possible stresses in a soil are limited by the Mohr-Coulomb failure criterion. Following Rankine (1857) this condition will be used in this chapter to determine limiting values for the horizontal stresses, and for the lateral stress coefficient K .

The stress states in a soil can be limited, with a good approximation by the Mohr-Coulomb failure criterion. This criterion is that the shear stresses on any plane are limited by the condition

$$\tau < \tau_f = c + \sigma \tan \phi, \quad (21.1)$$

where c is the cohesion, and ϕ is the angle of internal friction. The criterion can be illustrated using Mohr's circle, see Figure 21-1.

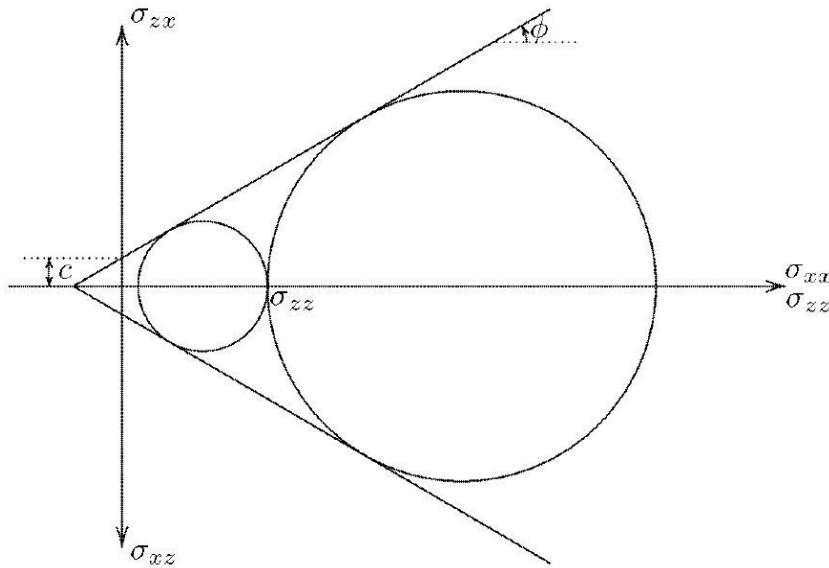


Figure 21-1. Mohr-Coulomb I.

If it is assumed that σ_{zz} and σ_{xx} are principal stresses, and that σ_{zz} is known (by the weight of the load and the soil), it follows that the value of the horizontal stress σ_{xx} cannot be smaller than indicated by the small circle, and not larger than defined by the large circle. The ratio between the minor and the major principal stress can be determined by noting, see Figure 21-2, that the radius of Mohr's circle is $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, and that the location of the centre is at a distance $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ from the origin. It follows that for a circle touching the envelope,

$$\sin \phi = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot \phi},$$

so that

$$\sigma_3 = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_1 - 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (21.2)$$

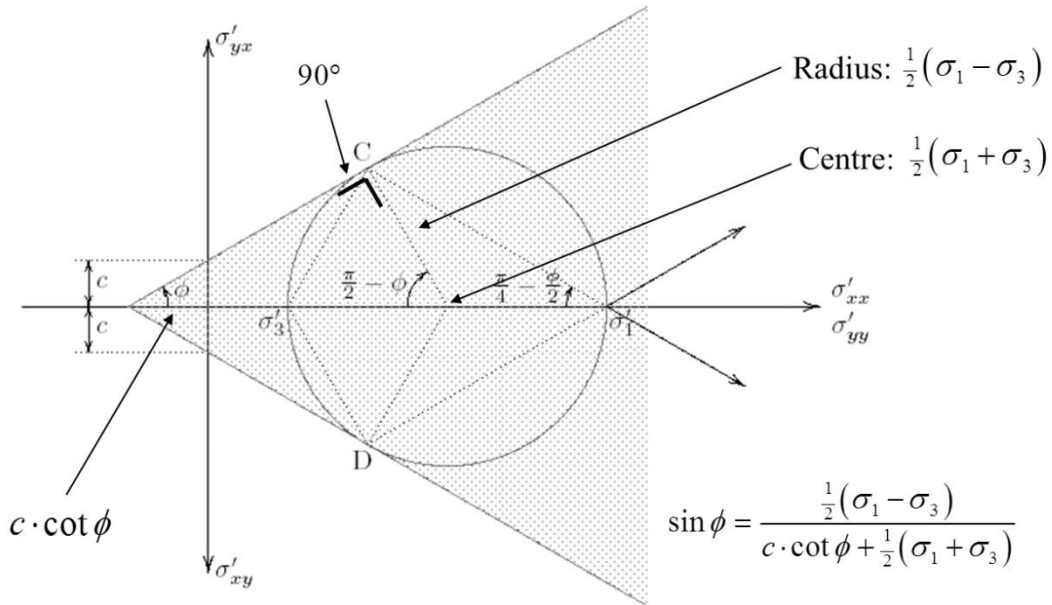


Figure 21-2. Mohr-Coulomb II.

The two coefficients in this equation can be related by noting that

$$\frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}}{1 + \sin \phi} = \frac{\sqrt{(1 + \sin \phi)(1 - \sin \phi)}}{1 + \sin \phi} = \sqrt{\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}}$$

This means that equation (21.2) can be written as

$$\sigma_3 = K_a \sigma_1 - 2c\sqrt{K_a} \quad \text{with:} \quad K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (21.3)$$

Apart from the constant term $2c\sqrt{K_a}$ there appears to be a given ratio of the minor and the major principal stress.

Formula (21.3) can be written in inverse form as

$$\sigma_1 = K_p \sigma_3 + 2c\sqrt{K_p} \quad \text{with:} \quad K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (21.4)$$

The coefficients K_a and K_p , which give the smallest and the largest ratio of the two principal stresses (apart from a constant term), are denoted as the coefficients of active earth pressure K_a and passive earth pressure K_p , respectively.

The angle between the shear surface and the smallest principle stress is according to Figure 21-2:

$$\theta_3 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi. \quad (21.5)$$

And the angle between the shear surface and the largest principle stress is:

$$\theta_1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi. \quad (21.6)$$

22 N_c simplification

In order to simplify the N_c equation, the following parameters must be defined first (see Chapter 21):

$$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\phi$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{1}{\tan^2 \theta} \Rightarrow \sqrt{K_p} = \cot \theta$$

$$N_q = K_p \cdot e^{\pi \tan \phi}$$

Also three equations (A, B and C) have to be derived from the following basic equation, which can be found in any good Analysis book:

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

This basic equation can be rewritten to equation A:

$$\frac{1}{\tan \phi} = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \phi\right) = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$1 - \tan^2 \theta = \tan \phi \cdot 2 \tan \theta$$

$$1 = \tan^2 \theta + \tan \phi \cdot 2 \tan \theta \quad (A)$$

$$\frac{1}{\tan^2 \theta} = 1 + \frac{2}{\tan \theta} \cdot \tan \phi$$

$$K_p = 1 + 2\sqrt{K_p} \cdot \tan \phi$$

This equation A will be used later, but first it will be changed into equation B:

$$2K_p = 1 + K_p + 2\sqrt{K_p} \cdot \tan \phi$$

$$2K_p - 2\sqrt{K_p} \cdot \tan \phi = 1 + K_p$$

$$2\sqrt{K_p} (\sqrt{K_p} - \tan \phi) = 1 + K_p \quad (B)$$

$$2\sqrt{K_p} = \frac{1 + K_p}{\sqrt{K_p} - \tan \phi}$$

$$2\sqrt{K_p} \cdot \tan \phi = \frac{\tan \phi + K_p \cdot \tan \phi}{\sqrt{K_p} - \tan \phi}$$

This equation B will be substituted in equation A to find equation C:

$$K_p = 1 + \frac{\tan \phi + K_p \tan \phi}{\sqrt{K_p} - \tan \phi}$$

$$\frac{K_p}{\tan \phi} = \frac{1 + K_p}{\sqrt{K_p} - \tan \phi} + \frac{1}{\tan \phi} \quad (C)$$

This equation C will be needed later on.

The simplification starts from the equation of N_c (Chapter 8):

$$\begin{aligned}
N_c &= \cot \theta + \left\{ e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{\tan \theta}{1 - \tan \theta \cdot \tan \phi} \right) + \cot \phi (e^{\pi \tan \phi} - 1) \right\} \cdot \{1 + \cot \theta \cdot \tan \phi\} \\
&= \sqrt{K_p} + \left\{ e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{K_p} - \tan \phi} \right) + \cot \phi (e^{\pi \tan \phi} - 1) \right\} \cdot \{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi\} \\
&= \sqrt{K_p} + e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi}{\sqrt{K_p} - \tan \phi} + \frac{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi}{\tan \phi} \right) - \frac{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi}{\tan \phi} \\
&= e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi}{\sqrt{K_p} - \tan \phi} + \frac{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi}{\tan \phi} \right) - \frac{1}{\tan \phi} \\
&= e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{K_p} \cdot \tan \phi}{\sqrt{K_p} - \tan \phi} + \sqrt{K_p} + \frac{1}{\tan \phi} \right) - \frac{1}{\tan \phi} \\
&= e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{1 + K_p}{\sqrt{K_p} - \tan \phi} + \frac{1}{\tan \phi} \right) - \frac{1}{\tan \phi} \quad \{\text{here equation C is implemented}\} \\
&= e^{\pi \tan \phi} \cdot \left(\frac{K_p}{\tan \phi} \right) - \frac{1}{\tan \phi} \\
&= e^{\pi \tan \phi} \cdot K_p \cdot \cot \phi - \cot \phi \\
&= (K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} - 1) \cdot \cot \phi
\end{aligned}$$

In this way the equation for N_c can be rewritten to:

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi \quad \text{with:} \quad \begin{aligned} N_q &= K_p \cdot e^{\pi \tan \phi} \\ K_p &= \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{1}{\tan^2 \theta} \end{aligned} \quad (22.1)$$

23 Prandtl's publication of 1920

Prandtl, L. (1920) "Über die Härte plastischer Körper." Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch.-physikalischen Klasse*, 74–85.

With thanks to the owner of this document, the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB), Georg-August-Universität Göttingen, Germany.

Nachrichten

von der Königlichen Gesellschaft
der Wissenschaften zu Göttingen

Mathematisch-physikalische Klasse
aus dem Jahre 1920

B E R L I N
Weidmannsche Buchhandlung
1920



Über die Härte plastischer Körper.

Von

L. Prandtl.

Vorgelegt in der Sitzung vom 18. Februar 1920.

1. Man verdankt Heinrich Hertz eine Theorie der Berührung elastischer Körper. Hertz selbst leitet aus seiner Theorie ein Maß für die Härte ab, indem er dafür diejenige Druckspannung in der Mitte der Druckfläche vorschlägt, durch die die Elastizitätsgrenze überschritten wird. Wegen der Unmöglichkeit einer sichern Feststellung dieser Grenzbelastung bei nicht spröden Körpern hat man sich jedoch bei den praktischen Härtemessungen der Technik darauf geeinigt, bleibende Vertiefungen in das zu untersuchende Material einzudrücken und die mittlere Druckspannung in der Druckfläche als Härtemaß zu nehmen. Bei der Brinell-Probe wird z. B. eine gehärtete Stahlkugel in das Material eingedrückt. Eine Theorie des Spannungszustandes bei dieser bleibenden Formänderung ist bisher nicht bekannt geworden. Im folgenden soll gezeigt werden, daß eine solche Theorie für das entsprechende ebene Problem unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen möglich ist.

Der Begriff des plastischen Körpers soll hier weiter gefaßt werden, als dies nach dem Vorgang von B. de St. Venant und M. Lévy¹⁾ sonst meist üblich ist. Nach den Ansätzen dieser Beiden soll in denjenigen Gebieten des Körpers, in denen die Elastizitätsgrenze überschritten ist, die größte Schubspannung einen konstanten Wert C haben, oder, was dasselbe bedeutet, der Unterschied zwischen der größten und kleinsten Hauptspannung soll

1) B. de St. Venant, Journal de Math. 16 (1871) S. 308 und 373. M. Lévy, ebenda S. 369, vgl. auch Encykl. IV 81 (v. Kármán) Nr. 16.

konstant $= 2C$ sein. Ha a r und v. K á r m á n ¹⁾) unterscheiden hierbei noch den „halbplastischen“ und den „vollplastischen“ Zustand, je nach dem die dritte Hauptspannung irgend einen Wert zwischen den beiden andern Hauptspannungen hat, oder mit einer von diesen beiden übereinstimmt.

Hier soll eine etwas allgemeinere Bedingung für den plastischen Zustand formuliert werden: Dieser Zustand sei dadurch charakterisiert, daß zwischen der kleinsten und der größten Hauptspannung eine bestimmte Beziehung erfüllt ist, die wir im folgenden der Einfachheit halber als linear annehmen werden, die aber auch allgemeinerer Art sein kann. In dieser zuerst von O. Mohr ²⁾) in etwas anderer äußerer Form aufgestellten Hypothese ist der „spezielle plastische Körper“ von de Saint-Venant, wie man sieht, als Sonderfall mit enthalten. Sie umfaßt aber auch solche häufig vorkommenden Fälle, in denen die Grenz-Schubspannung durch allseitigen Druck erhöht wird. Der Grenzfall, daß ohne einen allseitigen Druck diese Grenzschubspannung gleich Null ist, führt mit linearem Ansatz auf die übliche Erddrucktheorie.

Wir nehmen also an, daß überall dort, wo der Unterschied der kleinsten und der größten Hauptspannung kleiner ist, als der aus der erwähnten Beziehung folgende Wert, elastisches Verhalten vorhanden ist, und daß andererseits überall, wo die Elastizitätsgrenze überschritten ist, unabhängig von der Größe der Formänderung unsere Beziehung zwischen den äußeren Hauptspannungen erfüllt wird. Dabei müssen die Hauptachsen des Ellipsoids der Dehnungsgeschwindigkeiten mit denen des Spannungsellipsoids der Richtung nach übereinstimmen und die Vorzeichen der Differenzen der einzelnen Hauptdehnungen die gleichen sein wie die der Differenzen der entsprechenden Spannungen.

Wegen der Voraussetzung des ebenen Problems sind die Dehnungen nach der zur Ebene senkrechten Richtung gleich Null, woraus sich unmittelbar ergibt, daß hier der „halbplastische“ Zustand vorhanden ist mit der mittleren Hauptspannung senkrecht zur Ebene des Problems.

Da die elastischen Formänderungen für gedrungene Stücke aus den üblichen technischen Baustoffen sehr klein sind und die plastischen Formänderungen sie in vielen Fällen weit überwiegen, kann man sich die Aufgabe für die erste Näherung noch dadurch

1) Göttinger Nachr. 1909 S. 204.

2) Otto Mohr, Ziviling. 1882, S. 113; Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1900. S. 1524; Ges. Abhandl., Berlin 1906, S. 204 u. f., siehe auch Encykl. IV 31 (v. K á r m á n) Nr. 10.

Null, der wagerechte, wie leicht ersichtlich, gleich der gewöhnlichen Druckfestigkeit. Zwischen den ersteren und den beiden letzteren Dreiecken liegen die sektorartigen Stücke ACD und BCE . Wenn der Nachweis gelingt, daß ein Zustand, in dem auf jeden von A bzw. B ausstrahlenden Radius ein homogener Spannungszustand herrscht, zu einem mit der Bedingung des plastischen Zustandes verträglichen Gleichgewicht führt, dann lassen sich die „Sektoren“ ACD und BCE mit stetigem Übergang der Spannungen an die Dreiecke anschließen und dadurch die Bedingungen der Aufgabe vollständig erfüllen. Die nachfolgenden Rechnungen werden diesen Nachweis erbringen. Zugleich ergibt sich, daß in den beiden Sektoren die Radien Gleitlinien sind, woraus unmittelbar folgt, daß — im Fall der linearen Beziehung — die Kurven CD und CE , die das andere System von Gleitlinien darstellen, das das erste unter dem Winkel 2α schneidet, logarithmische Spiralen sind. Die Spannung in der Druckfläche wird sich in Übereinstimmung mit der Erfahrung als wesentlich größer als die Druckfestigkeit ergeben.

3. Die Durchführung der Rechnung gestaltet sich folgendermaßen:

Die Beziehung zwischen der größten Hauptspannung σ_1 und der kleinsten Hauptspannung (größten Druckspannung) σ_2 , mag im Fall der Linearität in der Form geschrieben werden

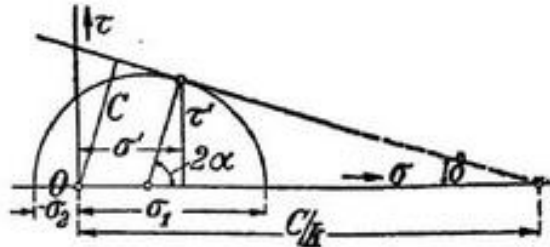
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = C - k \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (1)$$

Hierbei stellt die linke Seite die größte Schubspannung dar, die zum Spannungszustand σ_1, σ_2 gehört; diese zeigt sich hier also als lineare Funktion des Mittelwerts von σ_1 und σ_2 .

Trägt man nach dem Vorschlag von O. Mohr die auf den in den verschiedensten Orientierungen gezogenen Schnittflächen wirkenden Schubspannungen τ als Ordinaten zu den zugehörigen Normalspannungen σ als Abszissen auf, so sind alle Spannungszustände durch Punkte eines Gebietes dargestellt, daß nach außen durch einen Kreis vom Durchmesser $\sigma_1 - \sigma_2$, mit dem Mittelpunkt auf der σ -Achse begrenzt ist. Die Gleichung (1) liefert als Enveloppe der Spannungskreise eine Gerade, die den Abstand C vom Nullpunkt hat und die Achse bei $\sigma = C/k$ trifft, vgl. Fig. 2. Im allgemeinen Fall einer nichtlinearen Beziehung anstelle von Gl. (1) ist die Enveloppe eine Kurve.

Die Schnittflächen, deren Spannungszustände durch Punkte des Grenzkreises dargestellt werden, enthalten sämtlich die Richtung

der mittleren Hauptspannung in sich. Der Berührungspunkt zwischen Kreis und Enveloppe ist dabei den Gleitflächen zugeordnet (O. Mohr a. a. O.). Das Lot aus dem Punkte $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ auf die Enveloppe liefert hiermit den doppelten Gleitflächenwinkel α , da allgemein die Radien



Figur 2.

des Spannungskreises den doppelten Winkel mit der σ -Achse einschließen, wie die entsprechenden Schnittflächen mit der σ_1 -Achse. Gemäß Fig. 2 ist im linearen Fall

$$k = \sin \delta = \cos 2\alpha. \quad (2)$$

Die Spannungskomponenten auf der Gleitfläche werden nach Fig. 2:

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin \delta, \quad (3a)$$

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \delta. \quad (3b)$$

Sind nicht die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 unmittelbar gegeben, sondern ein allgemeiner ebener Spannungszustand, so hat man die Gleichungen

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (4)$$

Aus Gl. (1) wird somit jetzt die Gleichung

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} + k \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma \quad (5)$$

als Bedingung für den plastischen Zustand erhalten.

Führt man durch die Beziehungen

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

eine Spannungsfunktion F („Airysche Funktion“) ein, so entsteht aus Gl. (5) eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die, da immer $k < 1$ ist, vom hyperbolischen Typus ist. Durch diesen Umstand ist die Möglichkeit, die Lösung aus einzelnen Flickern zusammen-

zusetzen, mathematisch begründet. Die Charakteristiken der Differentialgleichung sind unsere Gleitlinien; die einzelnen Flecken sind daher immer von Gleitlinien begrenzt.

4. Für die sektorartigen Gebiete ACD und BCE ist nun ein der Gl. (5) genügender Spannungszustand zu finden, der auf den Grensradien konstante aber verschiedene Spannung ergibt. Es liegt nahe, diese Eigenschaft von allen Radien zu verlangen. Führt man zur Feststellung des inneren Gleichgewichtes eine Spannungsfunktion F ein, so muß diese in Polarkoordinaten somit die Gestalt

$$F = \frac{r^2}{2} f(\varphi) \quad (6)$$

haben. Die Spannungen σ_r (radial), σ_t (tangential) und τ werden hiermit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2} f'' + f, \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = f; \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{2} f'. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Gl. (5) liefert also für f die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} f''^2 + f'^2} + k \left(\frac{1}{2} f'' + f \right) = C. \quad (8)$$

Eine Lösung von Gl. (8) ist

$$f = C/k + A e^{\beta \varphi}, \quad (9)$$

wobei β der Gleichung

$$\frac{\beta^2}{4} \left(\frac{\beta^2}{4} + 1 \right) + k^2 \left(\frac{\beta^2}{4} + 1 \right)^2 = 0 \quad (10)$$

genügen muß. Ein Wertepaar dieser Gleichung vierten Grades ist $\beta = \pm 2i$; die zugehörige Lösung $f(\varphi) = C_1 \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi$ stellt einen gewöhnlichen homogenen Spannungszustand dar und nicht den hier gesuchten. Nach Division von Gl. 10 durch $\frac{\beta^2}{4} + 1$ ergibt sich das zweite Wertepaar zu

$$\beta = \pm \frac{2k}{\sqrt{1-k^2}} = \pm 2 \operatorname{tg} \delta. \quad (11)$$

Für den Sonderfall $k = 0$ (spezieller plastischer Körper) wird $\beta = 0$, wodurch Gl. (9) die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annimmt. Ein sehr einfacher Grenzübergang ergibt hier die Lösung

$$f = \pm 2C\varphi + \text{const.} \quad (9a)$$

Bildet man nun — für den allgemeinen Fall — mittels der Gleichungen (7) die Ausdrücke für σ_r , σ_t und τ , so lassen sich daraus mittels der Beziehungen (4) die Hauptspannungen ermitteln. Es wird für das +-Zeichen in Gl. (11)

$$\sigma_t = \frac{C}{k} + \frac{A \cdot e^{2\varphi \operatorname{tg} \delta}}{1 \pm k}, \quad (12)$$

wobei zu beachten ist, daß A immer negativ ist. Für den speziellen plastischen Körper wird

$$\sigma_t = C(2\varphi \pm 1) + \text{const.}$$

Durch die Übereinstimmung der Werte von σ_t und τ mit den aus (12) und (3 a) bzw. 3 b) berechneten Werten von σ' und τ' ergibt sich, daß die radialen Flächen des Sektors in der Tat Gleitflächen sind. Hiermit ergibt sich sofort aus den in den Dreiecksgebieten herrschenden Spannungszuständen (Hauptspannungen senkrecht und parallel zur Oberfläche), daß die Winkel FAD und ACO , und die zu ihnen symmetrischen, Gleitwinkel, also $= \alpha$ sind. Damit folgt somit auch, daß $\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle CBE$ rechte Winkel sind.

Setzt man nun an, daß in dem Dreieck ADF , und damit also auch auf den Radius AD des Sektors ADC $\sigma_t = 0$ und hiermit gemäß Gl. (1) $\sigma_r = -\frac{2C}{1-k}$ (= gew. Druckfestigkeit) ist, so wird nach leichter Rechnung für den um $\frac{\pi}{2}$ gegen AD verdrehten Radius AC :

$$\sigma_t = -\frac{C}{k} (e^{\pi \operatorname{tg} \delta} - 1) \quad (13 a)$$

und

$$\sigma_r = -\frac{C}{k} \left(\frac{1+k}{1-k} e^{\pi \operatorname{tg} \delta} - 1 \right). \quad (13 b)$$

Diese Spannungen herrschen aber gleichmäßig in dem ganzen Dreieck ABC . Der Ausdruck (13 b) gibt also die Druckspannung der Oberfläche zwischen A und B an, ist daher das gesuchte Härtemaß.

Führt man in (13 b) die gewöhnliche Druckfestigkeit $= \sigma_d = \frac{2C}{1-k}$ ein, so ergibt sich für die „plastische Härte“ die Formel:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_d}{2k} \left((1+k) e^{\frac{\pi k}{\sqrt{1-k^2}}} - (1-k) \right). \quad (14)$$

Für den speziellen plastischen Körper erhält man durch dieselben Überlegungen im Anschluß an Gl. (9a) oder auch durch Grenzübergang aus Gl. (14):

$$\sigma_h = \sigma_d \left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (14a)$$

Ist k von Null verschieden, wie es z. B. bei Gemengen von harten Körnern mit einem plastischen Bindemittel vorkommt, bei denen neben den plastischen Bewegungen des Bindemittels auch die Reibung der harten Körner an einander eine Rolle spielt, so steigt das Verhältnis $\sigma_h : \sigma_d$ mit wachsendem k stark an (vgl. die Tabelle am Schluß der Arbeit).

Anmerkungen:

1) Die vorstehenden Überlegungen lassen sich unmittelbar auch auf die Festigkeit einer abgestumpften Schneide vom Keilwinkel ϑ anwenden (anstelle von Fig. 1 ist eine Figur zu setzen, bei der der Linienzug $F'ABG$ an den Stellen A und B geknickt ist, und bei dem die Linien $F'A$ und BG den Winkel ϑ mit einander bilden). Die Schneidenfestigkeit wird, wie unschwer zu erkennen ist, gewonnen, wenn in Gl. (14) ϑ an die Stelle von π gesetzt wird.

2) Wirkt der Stempeldruck nicht senkrecht zur Oberfläche bzw. bei der abgestumpften Schneide von Anm. 1) nicht in der Winkelhalbierenden, sondern irgendwie schräg, so wird das Dreieck ABC (Fig. 1) ebenfalls schräg, und zwar so, daß die Winkelhalbierende des Winkels ACB in der Krafrichtung verbleibt. Dadurch würden die beiden Sektoren verschiedene Winkel aufweisen, also auch verschiedene Spannungen σ_1 und σ_2 für die Linien AC und BC ergeben. Das ist wegen des Gleichgewichts in ABC nicht möglich, vielmehr ergibt sich, daß nur in dem Sektor mit dem kleineren Winkel und dem anschließenden Dreieck der plastische Zustand eintritt, auf der andern Seite von ABU dagegen die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Die Formänderung vollzieht sich hier ganz einseitig.

3) Wenn die Bedingung des plastischen Zustandes nicht die Form von Gl. (1) hat, sondern die Enveloppe der Figur 2 gekrümmt ist, so gelten die Entwicklungen des vorstehenden Absatzes immer noch für Sektoren von infinitesimalem Winkel, denn auf jedem Radius ist ja der Spannungszustand und daher auch die Größe k konstant. Man erhält z. B. durch Differenzieren von (12):

$$\frac{d\sigma_2}{d\vartheta} = 2(\sigma_2 - C/k) \operatorname{tg} \vartheta = 2 \cdot \frac{k\sigma_2 - C}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Nun läßt sich aber jederzeit für ein bestimmtes Plastizitätsgesetz k als Funktion von σ_2 darstellen, so daß sich der Winkel des Sektors, der jetzt $= \frac{\pi}{2} + \alpha_h - \alpha_d$ ist (α_h Gleitwinkel für die Härte-

spannung, α_d Gleitwinkel für die Druckfestigkeit) durch eine Quadratur ergibt. Anstelle von (14) tritt also jetzt die Beziehung

$$\int_{\sigma_d}^{\sigma_k} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sigma_s - C} \cdot d\sigma_s = \pi + 2(\alpha_k - \alpha_d). \quad (14b)$$

5. Es bleiben noch die Bewegungen des plastischen Körpers unter der Wirkung des Stempels zu klären. Nimmt man den Stempel als starr an, und seine Oberfläche als genügend rau, um Gleitung zu verhindern, dann werden beim Tieferdringen des Stempels die einmal mit ihm in Berührung gelangten Oberflächenteile des plastischen Körpers sich parallel und gleichförmig nach unten weiter bewegen, was zur Folge hat, daß das Gebiet ABC in Fig. 1 sich wie ein starrer Körper bewegt. Eine infinitesimale Bewegung dieser Art erzeugt, wie eine nähere Betrachtung lehrt, in den Sektoren Verschiebungen in der Richtung der Tangente an die logarithmischen Spiralen, wobei die Verschiebungen auf jedem einzelnen Radius konstant und, wegen der Volumbeständigkeit, der Länge des Radius umgekehrt proportional ist. Die Außendreiecke werden dadurch wie starre Körper längs der Linien DF und EG hinaus geschoben. Die zur Oberfläche lotrechte Komponente dv dieser Verschiebung verhält sich wegen der Kontinuität zu der Stempelverschiebung ds umgekehrt wie \overline{AF} zu \overline{OA} .

Da $\overline{OA} : \overline{AC} = \sin \alpha$, $AD : AF = 1/2 \cos \alpha$ und $\overline{AC} : \overline{AD} = e^{-\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \delta}$ ist (logarithmische Spirale mit dem Neigungswinkel $\frac{\pi}{2} - 2\alpha = \delta$, vgl. Fig. 2), so wird

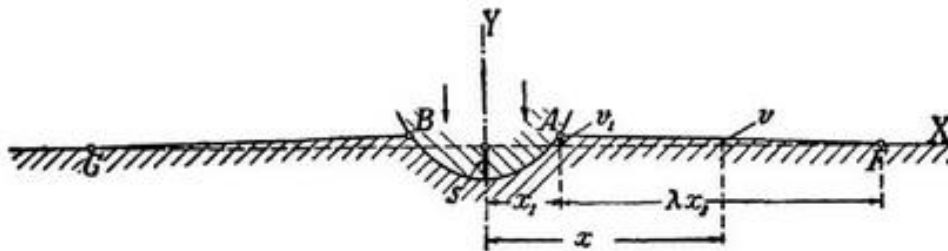
$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha e^{-\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \quad (15)$$

(wegen $\cos 2\alpha = \sin \delta = k$, Gl. (2)).

Für endliche Bewegungen ist wohl zu beachten, daß während des Weiterdringens des Stempels die Breite AB des gepreßten Streifens fortwährend zunimmt und somit die Feldergrenzen der Figur 1 sich dauernd verschieben. Dabei stellt sich dem Eindringen das vorher herausgequollene Material entgegen, so daß die Breite AB für einen bestimmten Weg s größer ausfällt, als sich aus der elementaren geometrischen Betrachtung ergeben würde. Die Gestalt der durch einen Stempelweg s bei einem Abrundungsradius r des Stempels eintretenden Verlagerung der Oberfläche läßt sich wie folgt berechnen.

Da alle Formänderungswege als klein gegen den Radius r angesehen werden, und also auch nur kleine Neigungen gegen die ursprüngliche Oberfläche vorkommen, können die Wirkungen der tangentialen Verschiebungen u auf die Oberflächengestalt gegen die der Verschiebungen v (senkrecht zur Oberfläche) vernachlässigt werden. Es wird daher hier nur v berechnet. Die Gleichung der Stempeloberfläche sei $y = x^2/2r$, woraus sich (vgl. Fig. 3) für die Verschiebung der Oberfläche des plastischen Körpers innerhalb der Strecke \overline{AB} mit $s =$ Stempelweg ergibt

$$(16) \quad v = x^2/2r - s.$$



Figur 3 (Zeichnung stark überhöht!)

Wird mit x_1 die derzeitige Länge der Strecke \overline{OA} bezeichnet, so ist $\overline{AF} = \lambda x$ mit

$$(17) \quad \lambda = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial s}} = 2 \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} e^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}}.$$

Dann ist für $x > (\lambda + 1)x_1$: $v = 0$.

Für $x_1 < x < (\lambda + 1)x_1$ ist daher unter Berücksichtigung von Gl. (16)

$$(18) \quad v = \frac{\partial v}{\partial s}(s - s') = (s - s')/\lambda$$

zu setzen, wobei s' die Stempelverschiebung ist, bei der die Hebung der Stelle x gerade begann, bei der somit die Druckfläche den Halbmesser $x' = \frac{x}{\lambda + 1}$ hatte.

Aus Gl. (16) folgt für die zu $x = x_1$ gehörige Verschiebung v_1 (vgl. Fig. 3)

$$(19) \quad s + v_1 = x_1^2/2r.$$

Wir vermuten, daß das Zahlenverhältnis von s und v_1 unveränderlich ist und setzen

$$(20) \quad s = \mu x_1^2/2r,$$

ebenso

$$(21) \quad s' = \mu x^2/2r(\lambda + 1)^2.$$

Die Gleichungen (19) und (20) und die auf $x = x_1$ angewandten Gleichungen (18) und (21) reichen nur gerade aus, um nach Fortschaffung von s, s' und $x_1^2/2r$ eine Beziehung zwischen μ und λ allein herzustellen, womit unsere Annahme, die zu Gl. (20) führte, bewiesen ist. Es wird

$$(22) \quad \mu = \frac{\lambda(\lambda+1)^2}{(\lambda+1)^2-1}$$

und hiermit unter Benützung von (18) und (21):

$$(23) \quad v = \frac{s}{\lambda} - \frac{x^2}{2r} \cdot \frac{1}{(\lambda+1)^2-1}$$

für $x_1 < x < (\lambda+1)x_1$, wobei gemäß (20) $x_1 = \sqrt{2rs/\mu}$ ist.

Die Verschiebung der freien Oberfläche liefert hier in erster Annäherung also ein affines Abbild der Stempelform mit im Verhältnis $(\lambda+1):1$ vergrößerter Abszisse und im Verhältnis $1:\lambda$ verkleinerter Ordinate. Diese Beziehung scheint für symmetrische Stempelprofile mit flacher und mit Ausnahme der Stelle $x = 0$ nirgends das Vorzeichen wechselnder Neigung allgemein zu gelten.

Die höchste Erhebung am Rand des Eindruckes wird in unserem Beispiel wegen Gl. (19) und (20)

$$(24) \quad v_1 = (1-\mu) \frac{x_1^2}{2r} = s \cdot \frac{1-\mu}{\mu} = s \cdot \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}$$

Anmerkung:

Erfolgt die Stempelbewegung nicht senkrecht, sondern schräg, so wird die Erhebung zu beiden Seiten des Stempels ungleich hoch, während die Kraft in erster Ordnung ungeändert ihre senkrechte Richtung beibehält; erst wenn die Schräge der Verschiebung den Gleitwinkel α überschreitet und die Erhebung auf der einen Seite völlig ausbleibt, ergeben sich schräge Kraftrichtungen, vgl. Anm. 2 zu Nr. 4.

Tabelle.

δ	α	k	σ_A/σ_d	λ	μ	v_1/s
0°	45°	0	2,571	2,000	0,6923	0,4445
10°	40°	0,1736	3,499	3,144	0,7695	0,2995
20°	35°	0,3420	5,194	5,059	0,8387	0,1923
30°	30°	0,5000	8,701	8,579	0,8966	0,1153
40°	25°	0,6428	17,558	16,924	0,9413	0,0624

Zusammenfassung.

Für Stoffe, die bei Überschreitung der Elastizitätsgrenze ein plastisches Verhalten aufweisen, das durch eine lineare Beziehung zwischen der größten und kleinsten Hauptspannung gekennzeichnet wird, wird der Spannungszustand beim Eindringen eines harten Körpers im ebenen Problem angegeben, ebenso der zugehörige Formänderungszustand. Einige Erweiterungen werden in Anmerkungen zugefügt.

24 Reissner's publication of 1924

Reissner, H. (1924) "Zum Erddruckproblem." *Proc., 1st Int. Congress for Applied Mechanics*, C. B. Biezeno and J. M. Burgers, eds., Delft, The Netherlands, 295–311.

Zum Erddruckproblem

von H. REISSNER, Charlottenburg-Berlin.

Die erste Grundaufgabe der Erddrucktheorie besteht in der Ermittlung der Spannungszustände des Grenzgleichgewichts im kohäsionslosen, schweren Erdkörper. Diese Grundaufgabe ist bisher nur in zwei Fällen gelöst worden, nämlich von RANKINE für den Spannungszustand des seitlich unbegrenzten, parallel zur Oberfläche gleichmässigen Erdkörpers und von KÖTTER für den unendlich langen und den kreisförmigen Spalt. Der im allgemeinen wesentliche Einfluss des Eigengewichts erschwert die Auffindung der Spannungszustände ganz ausserordentlich, dagegen ist die Ermittlung von Spannungszuständen infolge von Oberflächenkräften allein einfacher und von BOUSSINESQ für verschiedene Oberflächenbedingungen durchgeführt worden. Auch die PRANDTL'schen, HENCKY'schen und E. SCHMIDT'schen Lösungen für den allgemein und speziell plastischen, gewichtslosen Körper gehören in die Kategorie dieser letzteren Aufgabenstellung.

In den folgenden Betrachtungen soll die oben gestellte Aufgabe für das *ebene* Problem auf mehrere Arten vollständig formuliert und die bisherigen nebst einigen neuen Lösungen im Zusammenhange diskutiert werden.

Der *Grenzzustand des Reibungsgleichgewichts* an einem Punkte eines Erdkörpers wird erreicht, wenn in einem Flächenelement die resultierende Spannung p grade den Reibungswinkel ρ mit der Flächennormalen, in allen andern Flächenelementen aber einen kleineren Winkel einschliesst. Mit Hilfe der Hauptspannungen $\sigma_I > \sigma_{II} > 0$ drückt sich diese Bedingung so aus:

$$\sigma_I = \sigma_{II} \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \quad \dots \dots \dots (1)$$

oder mit Hilfe der gewöhnlichen Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ :

$$\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{\sigma_I + \sigma_{II}} \right)^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}{(\sigma_x + \sigma_y)^2} = \sin^2 \rho \quad \dots \dots \dots (1a)$$

wo alle Spannungen Druckspannungen sein müssen, und die dritte Hauptspannung σ_{III} ihrer Grösse nach zwischen den beiden massgebenden Hauptspannungen liegen soll.

An zwei Flächenelementen, den sogenannten *Gleitflächenelementen*, wird grade der Reibungswinkel ρ zwischen resultierender Spannung p und Flächennormale eingeschlossen und sie bilden mit den Flächenelementen der Hauptspannungsrichtungen die Winkel $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$, sodass die Hauptspannungsrichtungen die Winkel zwischen den Gleitflächen halbieren (Abb. 1).

Die resultierende Spannung p an den Gleitflächen hat den Wert:

$$p = \sigma_I \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) = \sigma_I \frac{\cos \rho}{1 + \sin \rho} \quad \dots \dots \dots (2)$$

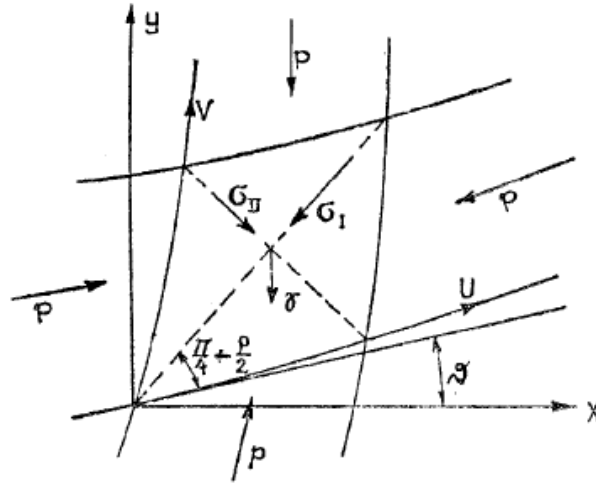


Abb. 1.

Der Winkel α der Hauptspannungstrajektorien mit der X - bzw. Y -Achse, ist gegeben durch:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \dots \dots \dots (3)$$

und der Winkel ϑ der einen Schaar von Gleitlinien mit der X -Achse nach Abb. 1 durch:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \cot \rho}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cos \rho} \dots \dots \dots (3a)$$

I. Die Airy'sche Funktion als Ausgangspunkt.

Allgemeines.

Es möge zunächst der Grenzzustand bezogen auf kartesische Koordinaten mit Hilfe der AIRY'schen Spannungsfunktion untersucht werden. Die Gleichgewichtsbedingungen (vergl. Abb. 2):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\gamma \quad (4)$$

(γ = spezifisches Gewicht des Erdkörpers), werden von einer Spannungsfunktion z befriedigt, wenn man — mit den in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen üblichen Bezeichnungen p, q, r, s, t , für die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von z — ansetzt:

$$\sigma_x = t, \quad \sigma_y = r - \gamma y, \quad \tau = -s.$$

Die Funktion z selbst genügt nach Gleichung (1a) die partielle Differentialgleichung:

$$F \equiv (r - \gamma y - t)^2 - (r - \gamma y + t)^2 \sin^2 \rho + 4s^2 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung legt es nahe nach den sogenannten *Charakteristiken zweiter Art* und ihrer Beziehung zu den Gleitlinien zu

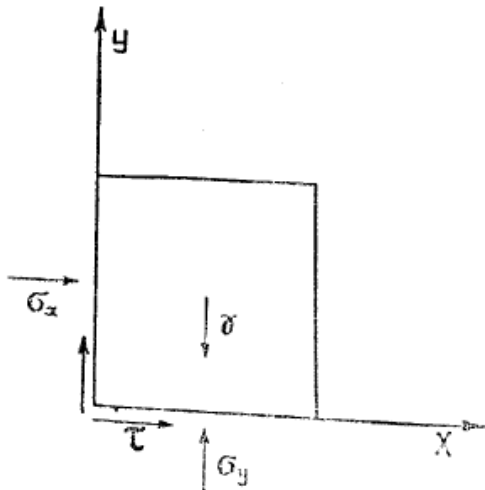


Abb. 2.

bedeuten. Diese Oberflächenspannungen pflanzen sich längs der beiden Schaaren von Gleitlinien, d. h. unter den Winkeln $\pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)$ zur Y -Achse nach vorwärts und rückwärts unverändert und sich überlagernd fort.

Die fingierte Belastung der ideellen Fortsetzung der Geländeoberfläche.

Die Oberfläche sollte nun allerdings unbelastet sein, sodass also für ein seitlich unbegrenztes Gelände der RANKINE'sche Spannungszustand keine Nachbarlösungen zulässt. Ist jedoch eine z. B. senkrechte Wand angenommen, so gilt diese Grenzbedingung nur für den wirklich vorhandenen Teil des Erdreichs, während hinter der Wand eine Fortsetzung des Erdreichs fingiert werden kann, und die Oberfläche dieses fingierten Bereiches beliebig belastet gedacht werden darf, und zwar so, dass sogar die im Erdreich sonst unzulässigen Zugspannungen auftreten dürfen, wenn nur in dem als wirklich vorausgesetzten Bereich keine Zugspannungen vorkommen. Ferner müssen sich längs der Gleitlinie, welche sich von der Mauerkrone aus in das Innere des wirklichen Erdkörpers erstreckt, die Spannungen stetig an diejenigen des ungestörten Erdkörpers anschliessen, d. h. die Belastungsfläche muss an der Mauerkrone mit der Oberflächenbelastung Null beginnen.

Nachbarzustände können also nur in dem Bereich zwischen der von der Wandoberkante ausgehenden, fallenden Gleitlinie (Linie 3 in Abb. 3) und der Wand auftreten; wie wir später sehen werden, krümmen sich dort die Gleitlinien derart, dass sie mit stetiger Tangente und Krümmung in die graden Gleitlinien ausserhalb des Störungsbereichs übergehen.

Beschränkt man sich auf genügend nahe zum ursprünglichen Zustand benachbarte Spannungszustände, dann besteht die durch die Lösung der Gleichung (8) gegebene Variation des Spannungszustandes in einer Ueberlagerung einer beliebigen Zusatzspannung $\sigma'_x, \sigma'_y = \frac{1}{a^2} \sigma'_x$ und $\tau' = \frac{1}{a} \sigma'_x$, welche nur die Bedingungen zu erfüllen hat, dass sie sich erstens längs jeder der Gleitlinien, welche von der fingierten Oberfläche durch die Wand in das Innere des wirklichen Erdkörpers laufen, ungeändert fortpflanzt und zweitens auf der höchsten von der Mauerkrone ausgehenden Gleitlinie Null wird.

Man erkennt nun leicht, dass wenn die Wand als vollkommen glatt betrachtet wird, die Schubspannung τ' Null bleiben muss, und dass deshalb auch die mit ihr zwangsläufig verknüpften Normalspannungen σ'_x und σ'_y Null bleiben, sodass man den Satz aussprechen darf:

Für seitlich unbegrenztes wagerechtes Gelände und für wagerechtes Gelände und senkrechte glatte Wand gibt es in der Nachbarschaft des RANKINE'schen Spannungszustandes der ebenen Gleitflächen keinen anderen widerspruchsfreien Spannungszustand.

Schreibt man dagegen der Wand Rauigkeit zu, dann ergibt die obige Lösung unendlich viele benachbarte, widerspruchsfreie, im Grenzgleichgewicht befindliche Spannungszustände. Zu Widersprüchen gelangt man bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder nur, wenn man gemäss einem wichtigen Untersuchungsziel der Erddrucktheorie nach dem kleinsten für rauhe Wand möglichen Erddruck fragt, weil dieses Minimum Zusatzspannungen verlangt, die in dem oben angegebenen Sinne nicht mehr klein sind.

Diese Frage nach dem Minimum verlangt also die Berücksichtigung der in r, t und s quadratischen Glieder.

Man kann diese Glieder als Störungsfunktion ansehen und kann — nach dem RIEMANN'schen Integrationsverfahren für die durch äussere Kräfte belastete Saite — die Gleichung (5a) in eine Integralgleichung verwandeln.

Die Gesamtspannung normal zur Wand ergibt sich also im Falle des Wanddruckminimums der ersten Näherung zu:

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{x1} = \sigma_{x0} \frac{1 + \sin \rho}{1 + 2 \sin \rho}.$$

Für den gesamten Wanddruck bis zur Tiefe h findet man:

$$E = E_0 \frac{1 + \sin \rho}{1 + 2 \sin \rho} = 0,750 E_0 \text{ für } \rho = 30^\circ,$$

wo: $E_0 = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\cos \rho}{(1 + \sin \rho)^2}$ den RANKINE'schen Erddruck bedeutet.

Man beachte, dass hierbei gekrümmte Gleitflächen innerhalb des früher definierten Störungsprismas entstehen und dass die COULOMB'sche Theorie, welche bei rauher Wand fälschlich grade Gleitflächen beibehält, bekanntlich den Wert: *)

$$E_{Coulomb} = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\cos^2 \rho}{(1 + \sqrt{2} \sin \rho)^2} = E_0 \left(\frac{1 + \sin \rho}{1 + \sqrt{2} \sin \rho} \right)^2,$$

und für $\rho = 30^\circ$, $E_{Coulomb} = 0,778 \cdot E_0$ liefert.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass die Bedingung des Grenzgleichgewichts an allen Punkten mit Ausnahme der Oberfläche nur bis auf lineare Glieder erfüllt ist.

Um den Fehler der Vernachlässigung der quadratischen Glieder zu verkleinern, werde nun die zweite Näherung wie folgt eingeführt:

In den durch Gleichung (5d) gegebenen Wert von χ werde der aus der oben berechneten Zusatzspannung σ_{x1} entnommene Wert von r^0_1 eingesetzt. Es wird:

$$r^0_1 = \sigma_{x1} \frac{2}{a^2} = -2 \gamma y_1 \frac{\sin \rho}{1 + 2 \sin \rho} = +2 \gamma \frac{x}{a} \frac{\sin \rho}{1 + 2 \sin \rho}.$$

Das in der zweiten Näherungslösung auftretende Flächenintegral $\frac{a}{2} \iint_{A_0 B_0 C_0} \chi \, df$ (Abb. 3) kann jetzt berechnet werden und ergibt sich zu:

$$\frac{a}{2} \iint_{A_0 B_0 C_0} \chi \, df = \frac{a}{2} \iint_{FD A_0 C_0} \chi \, df = \frac{5}{24} \gamma \frac{\sin \rho \cos^2 \rho}{(1 + \sin \rho)^2 (1 + 2 \sin \rho)^2} y_1^3.$$

Die zusätzliche Normalspannung an der Wand σ_{x2} wird:

$$\sigma_{x2} = \frac{5}{4} \gamma \frac{\sin \rho \cos^2 \rho}{(1 + \sin \rho)^2 (1 + 2 \sin \rho)^2} y_1,$$

wobei es sehr bemerkenswert ist, dass sich das Gesetz der linearen Zunahme nach der Tiefe nicht ändert, sodass die gesamte Normalspannung bis zur zweiten Näherung den Wert erhält:

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = \gamma y_1 a^2 \left(1 - \frac{\sin \rho}{1 + 2 \sin \rho} + \frac{5}{4} \frac{\sin \rho}{(1 + 2 \sin \rho)^2} \right).$$

Wählt man wiederum als Zahlenbeispiel $\rho = 30^\circ$ so wird:

$$\sigma_x = \gamma y_1 a^2 \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{5}{32} \right) = 0,907 \gamma y_1 a^2.$$

*) Siehe z. B. MÜLLER-BRESLAU, Erddruck auf Stützmauern, 1906, S. 14.

In demselben Verhältnis steht dann auch der gesamte Erddruck:

$$E = 0,907 \cdot E_0.$$

Während die erste Näherung bei vollkommen rauher Wand einen etwas kleineren Wert ergibt als die COULOMB'sche in sich bekanntlich nicht widerspruchsfreie Theorie, nämlich $0,750 E_0$ gegen $E_{Coulomb} = 0,775 E_0$, liefert die zweite zuverlässigere Näherung erheblich mehr, nämlich $0,907 E_0$. Daher erklärt es sich wohl auch, wenn alle Experimentatoren das Auftreten des grösseren Wanddruckes unter Beibehaltung der COULOMB'schen Theorie durch eine unvollkommene Rauigkeit der Wand erklärt haben.

In Wirklichkeit ist das Auftreten grösserer als der COULOMB'schen Drucke im unteren Grenzzustande nicht auf die mangelnde Rauigkeit der Wand, sondern auf die in sich folgerichtige Beibehaltung ebener Gleitflächen beim nicht RANKINE'schen Spannungszustand zurückzuführen.

Die erste Näherungslösung ging von derjenigen fingierten Oberflächenbelastung aus, welche den kleinsten Wanddruck liefert.

Die zweite Näherung und auch die etwa folgenden zeigen, dass der kleinste Wanddruck erster Näherung in zweiter Näherung nicht auf den kleinsten Wanddruck zweiter Näherung führt.

Man müsste also die Frage formulieren, welche fingierte Oberflächenbelastung auf dem ideellen Gelände hinter der Wand bei der ersten Näherung anzusetzen ist, um in zweiter oder höherer Näherung einen unteren Grenzwert des Erddruckes zu erhalten. Die Lösung dieses COULOMB-KÖTTER'schen Variationsproblems erfordert offenbar eine besondere Untersuchung.

II. Die Gleitfläche als Ausgangspunkt.

In der oben gezeigten Weise müssten weiter gewonnen werden: die Spannungszustände der höheren Näherungen, die Zusatzspannungen für andere Wand- und Geländeanordnungen und die diesen Zusatzspannungen entsprechenden Gleitflächen im gestörten Gebiet zwischen Wand und fallender RANKINE'scher Fläche.

Eine solche Weiterführung der Integration auf dem bisher eingeschlagenen Wege erscheint zwar durchaus nicht aussichtslos, ist aber immerhin doch so mühevoll, dass man versuchen wird, auch auf anderen Wegen an das Ziel heranzukommen. Dazu leitet ausserdem noch der Umstand, dass die in dem Vorhergehenden befolgte und weitergeführte RANKINE'sche Methode die sich der kartesischen Koordinaten bedient, bisher weniger Aufschluss über die wichtigen Fragen des Erddruckes gegeben hat, als die COULOMB-KÖTTER'sche Methode, welche von den Gleitlinien als der Wurzel der Erscheinungen ausgeht. So wird man dazu geführt, *statt der kartesischen Koordinaten die Gleitlinienschaaren selbst als krummlinige Koordinaten einzuführen*, ein Kunstgriff, der aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bekannt und neuerdings mit grossem Erfolge in den Untersuchungen von PRANDTL, HENCKY und E. SCHMIDT und CARATHÉODORY über den speziell plastischen Körper angewandt worden ist.

Die Massau-Köttterschen Gleichungen.

Die Einführung dieser Gleitlinien als Koordinatenlinien kann nun auf folgende Weise vor sich gehen: Bezeichnet man die Gleitlinien durch die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ derart, dass $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ je eine Gleitlinie darstellen, so kann das Längenelement irgend einer Kurve in der Ebene der u und v bekanntlich in der Form geschrieben werden:

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + 2 F du dv.$$

Sollen sich, wie in der Einleitung nachgewiesen, die Linien $u = const.$ und $v = const.$ überall unter den Winkeln $\frac{\pi}{2} - \rho$ bzw. $\frac{\pi}{2} + \rho$ schneiden, so nimmt das Linienelement die besondere Form an:

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + 2 UV \sin \rho du dv. \dots \dots \dots (9)$$

Nach Abb. 1 werde nun noch der Winkel ϑ der Gleitlinie $u = const.$ mit der X -Achse eingeführt und zwar positiv gerechnet, wenn die X -Achse durch den positiven Quadranten in die Richtung der wachsenden u gedreht wird.

Beachtet man nämlich, dass $U du$ und $V dv$ die Längenelemente in Richtung der wachsenden u und v sind, so kann man aus Abb. 1 ablesen:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = U \cos \vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -V \sin (\vartheta - \rho), \quad \frac{\partial y}{\partial u} = U \sin \vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = +V \cos (\vartheta - \rho). \quad (9a)$$

Eine einfache Umformung ergibt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} V \cos \rho = \frac{\partial V}{\partial u} \sin \rho - \frac{\partial U}{\partial v}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial v} U \cos \rho = -\frac{\partial U}{\partial v} \sin \rho + \frac{\partial V}{\partial u}. \dots \dots (10)$$

Ebenfalls nach Abb. 1 können nun die Gleichgewichtsbedingungen in Richtung der wachsenden u und v abgelesen werden in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p U}{\partial v} + \frac{\partial p V}{\partial u} \sin \rho + p V \cos \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial u} &= -\gamma UV \cos \rho \cos (\rho - \vartheta) \\ \frac{\partial p V}{\partial u} + \frac{\partial p U}{\partial v} \sin \rho - p U \cos \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial v} &= -\gamma UV \cos \rho \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

Führt man nun die geometrischen Gleichungen (10) in diese Gleichgewichtsbedingungen ein, so ergeben sich Beziehungen, die man wohl mit Recht als die MASSAU-KÖTTER'schen Gleichungen*) bezeichnen kann, nämlich:

$$\frac{1}{U} \left[\frac{\partial p}{\partial u} - 2 p \operatorname{tg} \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right] = -\gamma \sin (\vartheta - \rho), \quad \frac{1}{V} \left[\frac{\partial p}{\partial v} + 2 p \operatorname{tg} \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right] = -\gamma \cos \vartheta. \quad (12)$$

Gerade Gleitlinien und der Rankine'sche Spannungszustand.

Der RANKINE'sche Zustand der in Richtung der Oberfläche gleichförmigen Spannung wird erhalten, wenn man beide Schaaren von Gleitlinien gradlinig annimmt, also setzt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0, \quad U = V = 1.$$

Die Gleichungen (12) geben dann:

$$p = p_0 - \gamma [u \sin (\vartheta - \rho) + v \cos \vartheta] \dots \dots \dots (13)$$

wo p_0 der Druck in der Tiefe $u = 0, v = 0$ bezeichnet.

Soll an der Oberfläche $p = p_a$ sein, so gilt dort:

$$u \sin (\vartheta - \rho) + v \cos \vartheta = \frac{p_0 - p_a}{\gamma}.$$

Diese Oberfläche schneidet die v -Achse für $u = 0$ und die u -Achse für $v = 0$ in den Punkten:

*) Vergl. F. KÖTTER, Berl. Akad. Ber. 1903, S. 229—233; MASSAU, loc. cit., p. 151.

$$v_a = - \frac{p_a - p_0}{\gamma \cos \vartheta}, \quad u_a = - \frac{p_a - p_0}{\gamma \sin (\vartheta - \rho)}.$$

Aus der Abb. 4 liest man für den Winkel φ zwischen Geländeoberfläche und der einen Gleitlinienschaar ab:

$$\frac{u_a}{\sin \varphi} = \frac{v_a}{\cos (\rho - \varphi)} \quad \text{oder:} \quad \cot \varphi = \operatorname{tg} \vartheta - 2 \operatorname{tg} \rho,$$

und damit für den Winkel ψ zwischen der Vertikalen und der Geländeoberfläche:

$$\psi = \varphi + \vartheta - \rho.$$

v_a bzw. u_a kann man als Mass der Mauerhöhe ansehen und durch v_a bzw. u_a den Druck p_0 am Mauerfuss ausdrücken, nämlich:

$$p_0 = p_a + \gamma v_a \cos \vartheta = p_a + \gamma u_a \sin (\vartheta - \rho).$$

Die Neigung der Geländeoberfläche ergibt sich, wie man sieht, unabhängig vom Oberflächendruck p_a und längs den Parallelen zur Oberfläche ist ρ konstant.

Im Uebrigen gestatten die abgeleiteten Formeln natürlich auch alle andere bekannten, bei dem RANKINE'schen Spannungszustand auftretenden Tatsachen zu verifizieren.

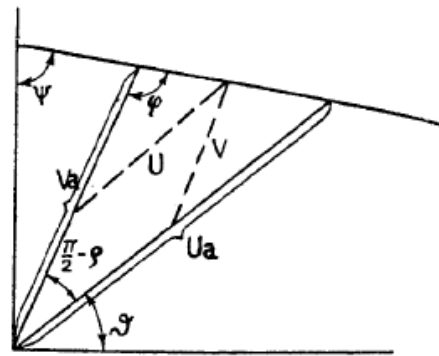


Abb. 4.

Der gewichtslose Sandkörper.

Für den Sandkörper mit vernachlässigbarem Eigengewicht, bei welchem also die Oberflächendrucke den überwiegenden Einfluss haben, ist es nicht schwierig Spannungszustände und Gleitlinien des Grenzgleichgewichts anzugeben, wie dies in besonderen Fällen schon BOUSSINESQ gezeigt hat. Auch die PRANDTL'schen Gleitlinien der Schneidewirkung des allgemein plastischen Körpers sind von derselben Art.

Allgemein kann man über den gewichtslosen Sandkörper folgendes zeigen:

Die KÖTTER'schen Gleichungen (12) vereinfachen sich zu den Beziehungen:

$$\frac{\partial (\ln p - 2 \vartheta \operatorname{tg} \rho)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial (\ln p + 2 \vartheta \operatorname{tg} \rho)}{\partial v} = 0,$$

oder:

$$\ln p - 2 \vartheta \operatorname{tg} \rho = \frac{\Phi}{2}, \quad \ln p + 2 \vartheta \operatorname{tg} \rho = \frac{\Omega}{2},$$

wenn Φ eine reine Funktion von v und Ω eine solche von u bedeuten.

Die Trennung der Unbekannten p und ϑ ergibt:

$$\ln p = \Omega + \Phi, \quad 2 \vartheta \operatorname{tg} \rho = \Omega - \Phi,$$

wonach:

$$p = e^{\Omega + \Phi} = \Omega_1 \Phi_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0.$$

Die letzte Gleichung stimmt überein mit der von HENCKY *) für das orthogonale Gleitliniensystem eines rein plastischen Körpers aufgestellten Gleichung.

*) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 3, 1923, S. 241—251.

Die geometrischen Beziehungen (10) liefern dann die Bestimmung der Koeffizienten U und V des Linienelements, nämlich:

$$\frac{1}{2} \Omega' V \cot \rho \cos \rho = \frac{\partial V}{\partial u} \sin \rho - \frac{\partial U}{\partial v}, \quad - \frac{1}{2} \Phi' U \cot \rho \cos \rho = \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v} \sin \rho,$$

oder wenn man $\frac{1}{2} \Omega' \cot \rho \cos \rho = \Omega_2$, $-\frac{1}{2} \Phi' \cot \rho \cos \rho = \Phi_2$ setzt:

$$\frac{\partial V}{\partial u} \sin \rho - \frac{\partial U}{\partial v} = V \Omega_2, \quad \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v} \sin \rho = U \Phi_2.$$

Gradliniges Gleitlinienbüschel des gewichtslosen Sandkörpers. Das Fundamentproblem.

Die Lösung dieses Gleichungssystems wird besonders einfach, wenn man die eine Gleitlinienschaar, etwa $v = \text{const.}$ gradlinig vorschreibt, also mit $\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = 0$, $\Omega_2 = 0$ setzt, wodurch übrigens der Druck $p = c \Phi_1$, also eine reine Funktion von v wird, demnach auf den graden Gleitlinien $v = \text{const.}$ konstant ist.

Die Gleichungen (10) ergeben damit weiter:

$$U = \Omega'_3 e^{\varphi_2 v \frac{\sin \rho}{\cos^2 \rho}}, \quad V = \frac{\Omega_3}{\cos^2 \rho} \frac{d\Phi_2 v}{dv} e^{\varphi_2 v \frac{\sin \rho}{\cos^2 \rho}} + \Phi_3,$$

wo Ω_3 und Φ_3 wiederum willkürliche Funktionen von u bzw. v allein sind.

Man kommt zu einer besonders anschaulichen Lösung, wenn man als Koordinaten einführt den Winkel $\varphi = v$ der gradlinigen Gleitlinien mit der Horizontalen und die Abstände der Schnittpunkte der anderen Gleitlinienschaar von einem festen Punkte auf der horizontalen Gleitlinie $r_0 = u$. Damit ist:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 1, \quad \vartheta = \varphi, \quad \Phi_2 = \cos \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \cos \rho, \quad \Omega'_3 = 1, \quad \Omega_3 = r_0,$$

$$U = e^{\varphi \lg \rho}, \quad V = \frac{r_0}{\cos \rho} e^{\varphi \lg \rho} + \Phi_3.$$

Sollen sich alle Gleitlinien der gradlinigen Schaar in einem Punkte schneiden, so ist $\Phi_3 = 0$ zu setzen und man gelangt zu dem BOUSSINESQ'schen Fall des gewichtslosen Sandkörpers zwischen starren Ebenen und zu dem Analogfall der PRANDTL'schen *) Gleitlinien des plastischen Körpers. Die zweite Schaar besteht dann offenbar aus logarithmischen Spiralen.

Die oben abgeleitete Gleichung für den Druck ergibt schliesslich:

$$p = \text{const.} e^{-2 \varphi \lg \rho}.$$

Die Abb. 5 und 6 zeigen, welchen verschiedenen Anordnungen man durch den obigen Ansatz entsprechen kann. (Die Erweiterung des obigen Ansatzes durch Wahl einer Funktion Φ_3 in V würde schliesslich ein *Büschel von graden Gleitlinien*, die sich nicht in einem Punkte schneiden, sondern eine gewisse Kurve umhüllen, ergeben).

Die Gleitlinien dieser Fälle haben auffallende Uebereinstimmung mit den Gleitlinienphotographien, die KURDJUMOFF **) bei dem Hereindrücken von Stempeln in Sand

*) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 1, 1921, S. 15—28.

**) Zivilingenieur, 1892.

erhalten hat und die das Fundamentproblem beleuchten sollten. Die Anwendbarkeit auf das Fundamentproblem ist freilich beschränkt wegen der im allgemeinen nicht zulässigen Vernachlässigung des Eigengewichts.

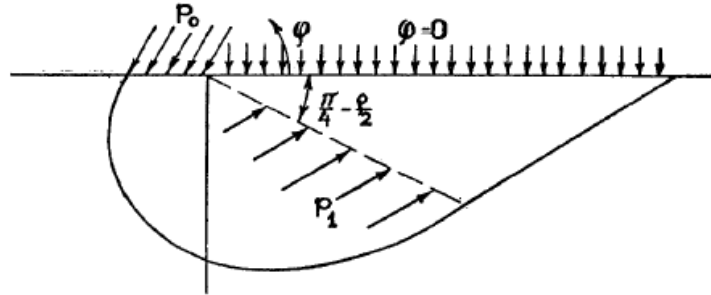


Abb. 5.

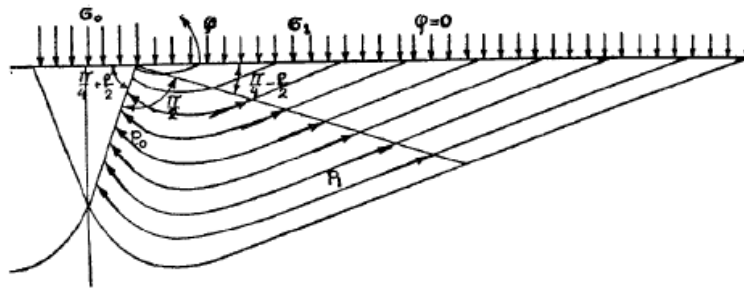


Abb. 6.

Die Abb. 5 und 6 zeigen die beiden auch von KURDJUMOFF experimentell gefundenen Möglichkeiten des unsymmetrischen und des symmetrischen Ausweichens des gewichtslosen Erdkörpers unter einem Stempel (Fundament). Dort wo auf die Oberfläche lotrechte Drucke wirken, müssen die büschelförmigspiraligen Gleitlinien durch einen sich stetig anschliessenden RANKINE'schen Spannungszustand mit zweifach gradlinigen Gleitlinien in einem halbrhomischen Gebiet abgelöst werden.

Die Rechnung nach den oben abgeleiteten Formeln ergibt für die beiden Fälle des unsymmetrischen und des symmetrischen Nachgebens folgendes:

Unsymmetrischer Fall:

$$\sigma_1 = p_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right), \quad p_1 = c e^{2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \operatorname{tg} \rho}, \quad p_0 = c e^{2 \pi \operatorname{tg} \rho}, \quad \sigma_0 = p_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right),$$

also:

$$\sigma_0 = \sigma_1 (1 + \sin \rho) e^{2 \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{\rho}{2} \right) \operatorname{tg} \rho}.$$

Symmetrischer Fall:

$$\sigma_1 = p_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right), \quad p_1 = c e^{2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \operatorname{tg} \rho}, \quad p_0 = c e^{2 \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{\rho}{2} \right) \operatorname{tg} \rho}, \quad \sigma_0 = p_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right),$$

also:

$$\sigma_0 = \sigma_1 \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} e^{\pi \operatorname{tg} \rho}.$$

Für $\rho = 30^\circ$ ergibt der unsymmetrische Fall:

$$\sigma_0 = \sigma_1 \cdot 1,5 \cdot e^{\frac{10}{6} \frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 30,8 \cdot \sigma_1.$$

Für denselben Reibungswinkel ergibt der symmetrische Fall:

$$\sigma_0 = \sigma_1 \cdot 3 \cdot e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} = 18,4 \cdot \sigma_1.$$

Man wird nun allerdings diese Ergebnisse auf den wirklichen, immer mit Eigengewicht behafteten Sandkörper nur anwenden dürfen, wenn die Stempel- bzw. Fundamentbreite erheblich kleiner ist als die Gründungstiefe, damit die Veränderlichkeit der Eigengewichtsspannungen innerhalb des Gleitlinienbildes nicht merklich ist. RANKINE setzt bekanntlich für diesen Fall zwei nebeneinander befindliche mit einander im Gleichgewicht stehende Grenz-zustände voraus und erhält:

$$\sigma_0 = \sigma_1 \left(\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \right)^2,$$

also für $\rho = 30^\circ$: $\sigma_0 = 9 \cdot \sigma_1$.

Das RANKINE'sche Gleitlinienbild der Abb. 7 mit gebrochenen Gleitlinien stellt einen widerspruchsfreien Spannungszustand mit oder ohne Eigengewicht dar, ergibt aber erheblich kleinere mögliche Fundamentpressungen als die stetigen Gleitlinien der Abb. 5 und 6. Es ist übrigens bekannt, dass die RANKINE'sche Berechnung zu un-günstig ist, und die obigen Spannung-zustände mit stetig gekrümmten Gleit-linien ergeben erheblich grössere zu-lässige Fundamentpressungen und be-deuten eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit. Insbesondere ist das un-symmetrische Gleitlinienbild geeignet die Fundamentpressung einer seitlich belasteten Futtermauer oder eines Gewölbekämpfers wiederzugeben, da es sich hier um einen passiven Erddruck handelt und bei einem solchen der grösste mögliche Wert der massgebende ist. Auch hier ist allerdings für die theoretische Trag-fähigkeit des Bodens eine gewisse Gegenbelastung etwa durch die Gründungstiefe erforderlich.

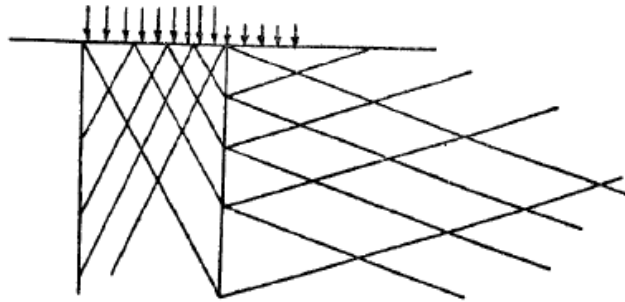


Abb. 7.

Unmöglichkeit des gradlinigen Gleitlinienbüschels bei Eigengewicht.

Versucht man nun das *gradlinig-büschelförmige System* auf den Fall des *mit Eigengewicht behafteten Erdkörpers* auszudehnen, so zeigt es sich, dass das nicht möglich ist, da die Gleich-gewichtsbedingungen verlangen, dass *entweder beide Gleitlinienschaaren gradlinig oder beide gekrümmt* sind, was allerdings nicht ausschliesst, dass einzelne Gleitlinien einer gekrümmten Schaar gradlinig sind.

Aus den Gleichungen (12) folgt nämlich:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} p = \gamma \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial u} V \cos \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} U \sin (\vartheta - \rho) \right] \dots \dots \dots (14)$$

Diese Gleichung lässt ohne weiteres erkennen, dass das Verschwinden der Krümmung der einen Schaar, z. B. von $\frac{1}{U} \frac{\partial \vartheta}{\partial u}$, auch das Verschwinden der anderen Krümmung $\frac{1}{V} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ nach sich zieht.

Wenn es nun auch nicht möglich ist, bei Eigengewicht die eine Gleitlinienschaar büschelförmig gradlinig zu machen, so müsste es wenigstens möglich sein, zwei Individuen einer büschelförmig krummlinigen Schaar gradlinig zu machen, um auf diese Weise nach Art der Abb. 6 einen möglichen Grenzspannungszustand zwischen zwei RANKINE'sche Zuständen einspannen zu können, und dadurch Aufgaben wie die oben behandelte Fundamentaufgabe, und auch andere Wanddruckaufgaben, bei Eigengewicht durchführen zu können.

Beispiel für einen allgemeineren möglichen Grenzzustand.

Die Lösung dieser Aufgabe ist mir nicht gelungen. Ueberhaupt ist es schwierig, ausser dem RANKINE'schen weitere widerspruchsfreie Grenzzustände bei Berücksichtigung des Eigengewichts aufzufinden.

Bisher habe ich nur einen weiteren Fall aufbauen können, nämlich denjenigen, bei dem die geometrischen Gleichungen (10) dadurch linear werden, dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ konstant gesetzt werden.

Man setze also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} &= a, & \frac{\partial \vartheta}{\partial v} &= b, \\ \vartheta &= a u + b v + c. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) haben dann als lineare Differentialgleichungen das Integral:

$$U = A e^{c_1 u + c_2 v}, \quad V = B e^{c_1 u + c_2 v},$$

mit:

$$\frac{A}{B} = \frac{c_1 \sin \rho - a \cos \rho}{c_2}, \quad \frac{c_1 c_2 + a b}{c_1 b - c_2 a} = \operatorname{tg} \rho \quad \dots \dots \dots (15)$$

Die Ansätze für ϑ , U und V müssen nun aber nicht nur die geometrischen Gleichungen (10), sondern auch die Gleichgewichtsbedingungen (12) erfüllen, wodurch weitere notwendige Beziehungen zwischen den Grössen a , b , A , B , c_1 und c_2 entstehen, welche folgende Gestalt erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{B(c_2 + 2b \operatorname{tg} \rho)}{b[b^2 + (c_2 + 2b \operatorname{tg} \rho)^2]} &= \frac{A[(c_1 - 2a \operatorname{tg} \rho) \sin \rho + a \cos \rho]}{a[a^2 + (c_1 - 2a \operatorname{tg} \rho)^2]} \\ \frac{B}{b^2 + (c_2 + 2b \operatorname{tg} \rho)^2} &= \frac{A[a \sin \rho - (c_1 - 2a \operatorname{tg} \rho) \cos \rho]}{a[a^2 + (c_1 - 2a \operatorname{tg} \rho)^2]} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Aus (15) und (16) erhält man mit den Abkürzungen $\frac{c_1}{a} = \operatorname{tg} \rho_1$, $\frac{c_2}{a} = \operatorname{tg} \rho_2$:

$$\begin{aligned} \frac{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}{8 \operatorname{tg} \rho} \pm \sqrt{\left(\frac{8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1}{8 \operatorname{tg} \rho}\right)^2 + 2 \operatorname{tg}^2 \rho - 1} &= \operatorname{tg} \rho_1, & \frac{b}{c_2} &= -\operatorname{tg}(\rho + \rho_1), \\ \frac{1 + (\operatorname{tg} \rho_1 - 2 \operatorname{tg} \rho)^2}{(\operatorname{tg} \rho_1 \operatorname{tg} \rho - 1)(3 \operatorname{tg} \rho - \operatorname{tg} \rho_1)[\operatorname{tg}^2(\rho + \rho_1) + \{1 - 2 \operatorname{tg} \rho \operatorname{tg}(\rho + \rho_1)\}^2] \cos^2 \rho} &= \operatorname{tg} \rho_2. \end{aligned}$$

Es gibt also für einen gegebenen Wert a zwei partikuläre Integrale, da $\operatorname{tg} \rho_1$ zwei Werte besitzt. Die Lösung hat offenbar nur einen Sinn, wenn b reell ist. Die entsprechende Bedingung zeigt, dass es einen Bereich von Reibungswinkeln ρ gibt, für welche die Lösung imaginär wird, nämlich der Bereich zwischen den beiden Wurzeln für $\operatorname{tg}^2 \rho_1$, der Gleichung:

$$(8 \operatorname{tg}^2 \rho - 1)^2 + 64 \operatorname{tg}^2 \rho (2 \operatorname{tg}^2 \rho - 1) = 0.$$

Soll die Lösung reell sein, so muss der absolute Wert von $\operatorname{tg} \rho$ entweder kleiner als 0,1138 oder grösser als 0,635 sein.

Der obere Wert entspricht etwa dem Böschungswinkel normalen Erdreichs. Nimmt man diesen oberen Wert, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \rho_1 = 0,438, \quad \operatorname{tg} \rho_2 = 0,760,$$

demnach:

$$c_1 = 0,438a, \quad c_2 = 0,760a, \quad b = -1,12a, \quad B = -1,25A.$$

Die Darstellung der Gleitkurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ in kartesischen Koordinaten hätte etwa nach den Gleichungen (9a) zu erfolgen, scheint aber keine einfachen Kurvengleichungen zu ergeben. Man sieht jedenfalls, dass die Krümmungen $\frac{1}{U} \frac{\partial \vartheta}{\partial u}$ und $\frac{1}{V} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ mit wachsendem u und v , d. h. nach oben abnehmen, wenn a positiv angenommen wird, und im Unendlichen in den RANKINE'schen Zustand gradliniger Gleitlinien übergehen.

Die Gleitlinie des aktiven und passiven Erddrucks.

Der andere von der Gleitlinienbeziehung (10) ausgehende Weg bietet mehr Aussicht das Ziel zu erreichen.

KÖTTER hat nämlich einesteils gezeigt, dass nach Gleichung (12) die Form der vom Mauerfuss ausgehenden Gleitlinie allein schon die Druckverteilung an ihr bestimmt und hat andererseits zuerst erkannt, dass diejenige Gleitlinie die massgebende ist, welcher der untere (aktive) bzw. der obere (passive) Grenzwert des Wanddrucks entspricht. Es kommt also darauf an, von allen, den Oberflächenbedingungen nicht widersprechenden Gleitlinien, diese massgebende zu finden. In dieser Weise kann man das KÖTTER'sche Variationsproblem des Erddrucks formulieren, wobei die Schwierigkeit darin besteht, die Mannigfaltigkeit der möglichen vom Mauerfuss aus ansteigenden Gleitlinien zu bilden. Für den Fall des horizontal begrenzten, schweren Erdkörpers, auf den wir uns hier, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, beschränkt haben, war im ersten Abschnitt wahrscheinlich gemacht worden, dass die gesuchte Gleitlinie mit der Richtung der RANKINE'schen graden Linie ausserhalb des Winkelraums zwischen der Wand und der von der Mauerkrone aus fallenden RANKINE'schen Gleitlinie zusammenfallen muss, dass dagegen das Gleitlinienstück innerhalb jenes Winkelraums in einem gewissen Bereich willkürlich ist, je nachdem, welche fingierten Zug- oder Druckspannungen man auf der hinter der Wand liegenden fingierten Oberflächenfortsetzung annimmt.

Freilich ist die Aufgabestellung so lange nicht genügend bestimmt, als nicht über die Beweglichkeit der Wandstützung eine weitere Aussage gemacht wird.

Man kann eine solche Stützung mit eindeutigem Grenzwert des Erddrucks entweder so anordnen, dass die genannte Stützkraft nach Richtung und Angriffspunkt festgelegt ist und so lange abnimmt bzw. zunimmt, bis der Grenzwert erreicht ist (Abb. 8) oder man kann die Stützung zwar mit unbestimmter Lage und Richtung der Gesamtstützkraft einrichten, aber nur eine von den Komponenten variabel, d. h. die Wand nur in einer bestimmten Richtung beweglich machen und nach dem unteren bzw. oberen Grenzwert dieser Komponente fragen (Abb. 9).

Aus diesen Grundaufgaben lässt sich dann auch die allgemeinere, unmittelbar der Anwendung entsprechende erledigen, wann der aktive Wanddruck zusammen mit dem Eigengewicht der Mauer den passiven Fundamentdruck grade überwindet.

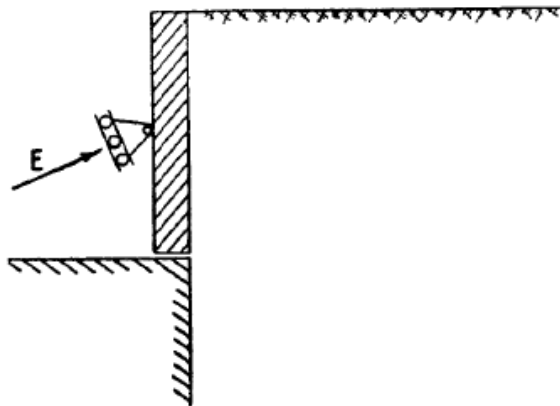


Abb. 8.

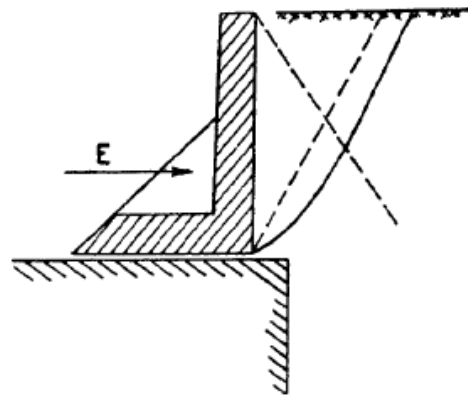


Abb. 9.

Im Anschluss an das durchgerechnete Beispiel des ersten Teils müsste hier die zweite Anordnung zugrunde gelegt und in dem obigen Zusammenhang die folgende bestimmte Frage gestellt werden:

Für wagerechte, unbelastete Geländeoberfläche und senkrechte Wand soll diejenige Gleitlinie gefunden werden, welche nach der KÖTTER'schen Gleitlinienbeziehung (10) die kleinste Horizontalkomponente des Wanddrucks liefert. Die Mannigfaltigkeit der mit der Oberflächenbedingung verträglichen Gleitlinien ist willkürlich innerhalb des Rahmens der Lösung der AIRY'schen Spannungsgleichung (5) in dem Winkelraum zwischen der Wand und der von der Wandoberkante fallenden RANKINE'schen Gleitlinie und muss sich mit stetiger Tangente und stetigem Druck an die RANKINE'sche Gleitlinie ausserhalb des genannten Winkelraums anschliessen.

Die genauere Betrachtung dieser Aufgabestellung scheint zu ergeben, dass sie auch wieder zurückführt auf die im ersten Teil gestellte, aber nur in den beiden ersten Näherungen beantwortete Frage nach derjenigen fingierten Oberflächenbelastung hinter der Wand, welche unter Berücksichtigung der höheren Näherungen den kleinsten Wanddruck vorgeschriebener Richtung liefert.

25 Literature

- Bolton, M. D. (1979) Guide to Soil Mechanics, Macmillian Press, London, p. 330
- Boonstra, G.C. (1940) Eenige beschouwingen over den puntweerstand van paalen. (Some considerations of the base resistance of piles). *De Ingenieur*, 55, Febr., pp. 33-45
- Boussinesq, M.J. (1885) *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*, Gauthier-Villard, Paris.
- Brinch Hansen, J. A (1970) Revised and extended formula for bearing capacity, *Bulletin No 28*, Danish Geotechnical Institute Copenhagen, pp. 5-11.
- Caquot, A. I. (1934). "Équilibre des massifs à frottement interne," *Stabilité des terres pulvérulentes et cohérentes*, Gauthier-Villars, Paris.
- Caquot, A., and Kerisel, J. (1953) Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulent. *Proc. Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Zurich, Switzerland, 16–27 August 1953, Vol. 1, pp. 336–337.
- Caquot, A., and Kerisel, J. (1966) *Traité de Mécanique des sols*, Gauthier-Villars, Paris, pp. 349, 353
- Chen, W.F. (1975) *Limit analysis and soil plasticity*, Elsevier.
- Das, B. M. (1999) *Shallow foundations, bearing capacity and settlement*, CRC Press, New York , p. 89.
- De Beer, E.E. (1967) Proefondervindelijke bijdrage tot de studie van het grensdragvermogen van zand onder funderingen op staal; Bepaling van de vormfactor sb, *Annales des Travaux Publics de Belgique*, 68, No.6, pp.481-506; 69, No.1, pp.41-88; No.4, pp.321-360; No.5, pp.395-442; No.6, pp.495-522
- De Beer, E.E. (1970) Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand. *Géotechnique*, 20, N°4, pp. 387-411.
- Fang, Hsai-Yang (1990) *Foundation Engineering Handbook*, Kluwer, Norwell-USA / Dordrecht-NL
- Flamant, A. (1892) Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. *Comptes Rendus*, Acad. Sci. Paris, vol. 114, p. 1465.
- Hjiaj, M., Lyamin, A. V., and Sloan, S. W. (2004) Bearing capacity of a cohesive-frictional soil under non-eccentric inclined loading, *Computers and Geotechnics* 31, pp. 491–516
- Jumikis, A.R. (1956) Rupture surfaces in sand under oblique loads, *J. of Soil Mechanics and Foundation Design*, ASCE, Vol.82, No.SM 1
- Keeverling Buisman, A. S. (1935). De Weerstand van Paalpunten in Zand. *De Ingenieur*, 50 (Bt. 25–28), pp. 31–35. [In Dutch.]
- Keeverling Buisman, A. S. (1940). *Grondmechanica*, Waltman, Delft, the Netherlands, p. 243
- Khitas, N. E. H., Mellas, M., Benmeddour, D. and Mabrouki, A. (2016) Bearing capacity of strip footings resting on purely cohesive soil subjected to eccentric and inclined loading, *4th Int. Conf. on New Development in Soil Mech. and Geotechn. Eng.*, Nicosia, pp.181-186

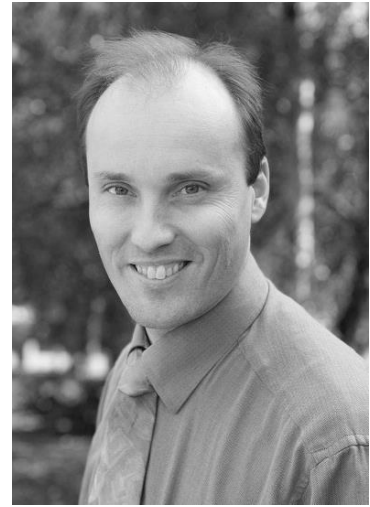
- Knudsen, B. S. and Mortensen, N. (2016) Bearing capacity comparison of results from FEM and DS/EN 1997-1 DK NA 2013, *Northern Geotechnical Meeting 2016*, Reykjavik, pp 577-586
- Lambe, T.W. and Whitman, R.V. (1969), *Soil Mechanics*, John Wiley and Sons Inc., New York.
- Loukidis, D., Chakraborty, T., and Salgado, R. (2008) Bearing capacity of strip footings on purely frictional soil under eccentric and inclined loads, *Can. Geotech. J.* 45, pp 768–787
- Lundgren, H. & Mortensen, K. (1953) Determination by the theory of Plasticity of the bearing capacity of Continuous Footings on Sand, *Proc. 3rd Int. Conf. Soil Mech.*, Volume 1, Zürich, p. 409
- Meyerhof, G. G. (1951) The ultimate bearing capacity of foundations, *Géotechnique*, 2, pp. 301-332
- Meyerhof, G. G. (1953) The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads, in *Proc. III intl. Conf. on Soil Mechanics Found. Eng.*, Zürich, Switzerland, 1, pp. 440-445
- Meyerhof, G. G. (1963) Some recent research on the bearing capacity of foundations, *Canadian Geotech. J.* , 1(1), pp. 16-26
- Meyerhof, G. G. (1965) Shallow foundations, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division ASCE*, Vol. 91, No. 2, March/April 1965, pp. 21-32
- Michalowski, R. L. (1997) “An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis.” *Soils and Foundations*, 37(4), pp. 57–64.
- Muhs, H. und Weiß, K. (1972) Versuche über die Standsicherheit flach gegründeter Einzelfundamente in nichtbindigem Boden, *Mitteilungen der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo) an der Technischen Universität Berlin*, Heft 28, p. 122
- NEN 9997-1 (NL) (Eurocode) *Geotechnical design of structures - Part 1: General rules*, pp. 107-113
- Prandtl, L. (1920) “Über die Härte plastischer Körper.” *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl.*, pp. 74–85.
- Selig, E.T. and McKee, K.E. (1961) Static behavior of small footings, *J. of Soil Mechanics and Foundation Design*, ASCE, Vol.87, No.SM 6
- Reissner, H. (1924) “Zum Erddruckproblem.” *Proc., 1st Int. Congress for Applied Mechanics*, C. B. Biezeno and J. M. Burgers, eds., Delft, the Netherlands, pp. 295–311.
- Tapper, L., Martin, C.M. , Byrne, B.W. Lehane, B.M. (2015) Undrained vertical bearing capacity of perforated shallow foundations, *Frontiers in Offshore Geotechnics*, Fig. 7, p. 816
- Terzaghi, K. (1943) *Theoretical soil mechanics*, J. Wiley, New York.
- Türedi, Y. and Örnek, M. (2016) Investigation of stress distributions under circular footings, *4th Int. Conf. on New Development in Soil Mech. and Geotechn. Eng.*, Nicosia, pp. 231-238
- Van Baars, S. (2014) The inclination and shape factors for the bearing capacity of footings, *Soils and Foundations*, Vol.54, No.5, October 2014
- Van Baars, S. (2015) The Bearing Capacity of Footings on Cohesionless Soils, *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, ISSN 1089-3032, Vol 20

- Van Baars, S. (2016) Failure mechanisms and corresponding shape factors of shallow foundations, *4th Int. Conf. on New Development in Soil Mech. and Geotechn. Eng.*, Nicosia, pp. 551-558
- Van Mierlo, J.C. and Koppejan, A.W. (1952) “Lengte en draagvermogen van heipalen”, *Bouw*, No. 3
- Vesic, A. S. (1967) *A study of bearing capacity of deep foundations*, Final Report Project B-189, Georgia Institute of Technology, Atlanta, pp. 231-236
- Vesic, A. S. (1973) Analysis of ultimate loads of shallow foundations. *J. Soil Mech. Found. Div.*, 99(1), pp. 45–76.
- Vesic, A.S. (1975) Bearing capacity of shallow foundations, H.F. Winterkorn, H.Y. Fang (Eds.), *Foundation Engineering Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New York (1975), pp. 121–147
- Yu, H.S., Salgado, R., Sloan, S.W., Kim, J.M. (1998) Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability, *Journ. Geotechnical and Geoenvironmental Eng.*, Jan. 1998, Vol 124, No 1, pp. 1–11
- Zhu, M. and Michalowski, R.L. (2005) Shape Factors for Limit Loads on Square and Rectangular Footings, *Journal of geotechnical and geoenvironmental Engineering*, ASCE, Febr., pp. 223-231

26 Background of the author

Prof. dr. ir. Stefan Van Baars (1968) studied Civil Engineering at the Delft University of Technology and specialised in two fields: Geotechnical Engineering and Hydraulic Engineering. He obtained his PhD degree in 1996 in Delft. His research entitled “Discrete element analysis of granular materials” has been awarded Summa Cum Laude. This research has been extended with a post-doc research at the University of Sydney.

After Sydney, Stefan Van Baars worked first for the Dutch Ministry of Transport and Public Works on bored tunnels, thereafter for the Dutch contracting company Strukton on pile foundations and building pits for the high speed train and returned in 2001 to the faculty of Civil Engineering of



the Delft University of Technology as an assistant professor. The first three years he worked for the chair of Structural Hydraulic Engineering and the last six years for the chair of Soil Mechanics. In this position he visited twice the University of Grenoble (Sabbatical leave at Université Joseph Fourier and Invited Professor at the Ecole National de Polytechnique Grenoble). In 2010 he was appointed as full professor of Foundation Engineering and Soil Mechanics at the University of Luxembourg.