

Résultats PISA 2012 à la loupe

Analyse qualitative de réponses d'élèves luxembourgeois en mathématiques et pistes didactiques

Joëlle Vlassis, Sylvie Gamo

Université du Luxembourg

& Joseph Bertemes

Ministère de l'éducation nationale, de l'enfance et de la jeunesse

Symposium EVADIDA - Outils didactiques pour la conception et l'analyse de dispositifs
d'évaluation

ADMEE 2015 - Liège

Plan de la communication

- Contexte Luxembourgeois
- Quelques résultats globaux PISA 2012 pour le Luxembourg
- Présentation de notre étude
 - méthode
 - présentation de la situation "Débit d'une perfusion"
 - résultats généraux
 - analyses qualitatives
- Conclusions et perspectives pour l'enseignement

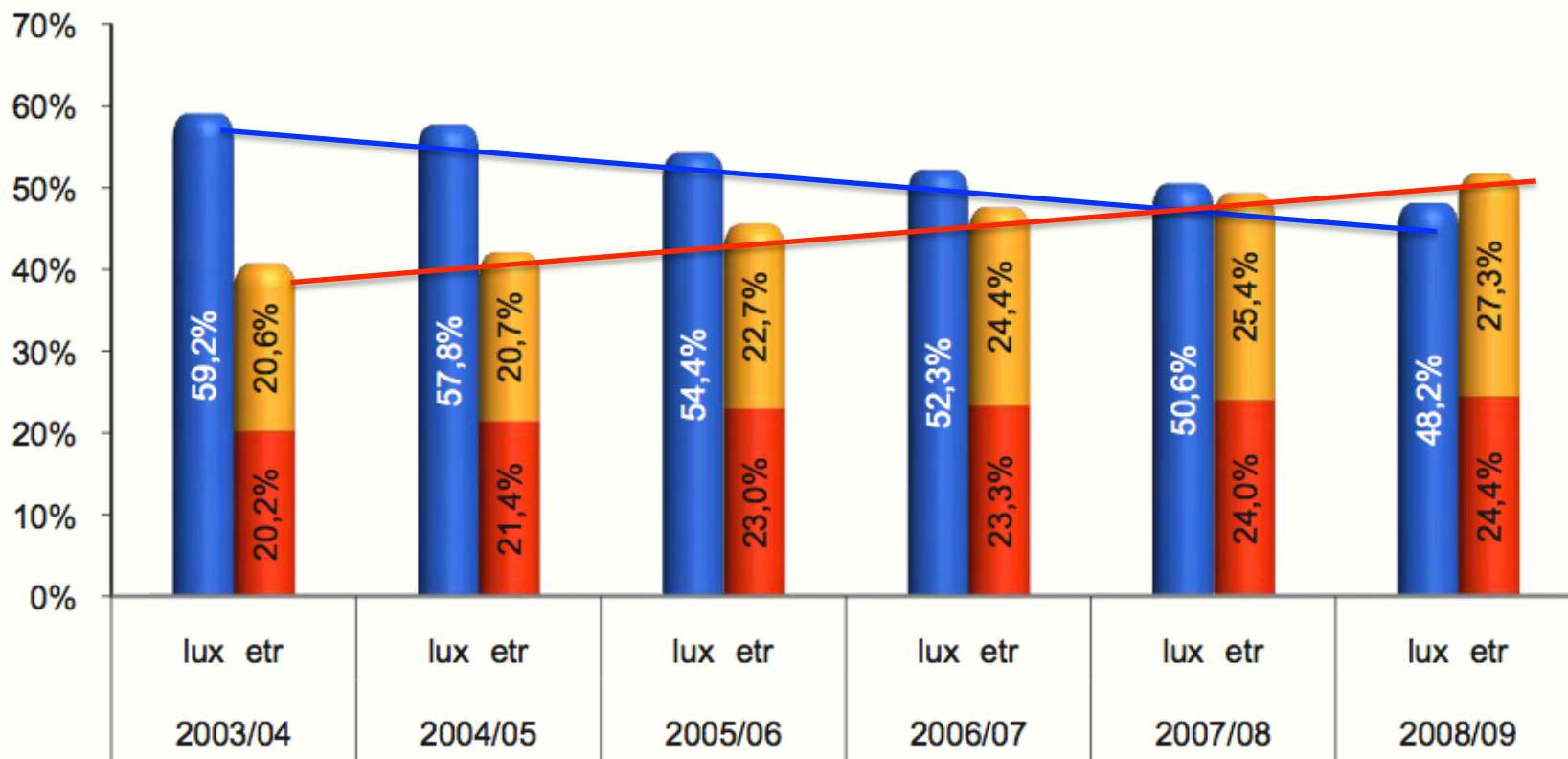
Objectifs de la communication

Proposer une démarche originale dans l'analyse des données PISA, non plus dans une perspective quantitative d'évaluation de systèmes éducatifs, mais dans une perspective qualitative et didactique, au départ de l'analyse des productions des élèves, en vue de :

- comprendre, au delà des contacts quantitatifs de réussite ou d'échec, ce que les écrits des élèves nous disent quant à l'origine de leurs difficultés;
- tracer des pistes didactiques pour les enseignants.

CONTEXTE LUXEMBOURGEOIS

Le Luxembourg, un pays multiculturel



Une immigration en constante augmentation qui se répercute dans les classes

Préscolaire : 44% d'étrangers Primaire : 49,4% Secondaire général : 20%

Secondaire technique et professionnel : 50%

Source : MEN, L'enseignement luxembourgeois en chiffres, année scolaire 2012-2013

Le Luxembourg, un pays multilingue

Les langues à l'école luxembourgeoise

Préscolaire

→ Luxembourgeois

Primaire

→ Allemand à partir de la 1ère année

Français à partir de la seconde moitié de la 2e année

Secondaire

→ Général/technique : Français

→ Professionnel : Allemand

Le multilinguisme à l'école représente un réel défi pour les élèves non luxembourgeois, qui souvent parlent une langue différente à la maison.

Filières au secondaire

Dès la fin du primaire, les élèves sont orientés dans trois grandes filières au secondaire :

- ES : Enseignement Secondaire (*général*)
- EST : Enseignement Secondaire Technique
- EST-prép : Enseignement Secondaire Technique
Préparatoire (*enseignement professionnel*)

Lors l'étude PISA 2012,

- toutes les filières étaient concernées.
- les épreuves ont été remises soit en Allemand, soit en français selon les préférences des élèves.

**QUELQUES RESULTATS GLOBAUX
PISA 2012
POUR LE LUXEMBOURG**

PISA 2012 Luxembourg : résultats globaux

Résultats généraux

2006 – 2012 :

Pas d'amélioration en math
au contraire des langues et des
sciences

	Math	Lang.	Scien.
2012	490	488	491
2009	492	472	484
2006	490	479	486

Résultats généraux 2012 :

- Les trois scores sont inférieurs à ceux de l'OCDE.
- Dans les trois domaines, environ ¼ des élèves n'atteint pas le niveau de base (niveau 2). Le luxembourg est l'un des pays où ce % est plutôt élevé (pays européens + G8)

PISA 2012 Luxembourg : Résultats garçons-filles

2012	Math	Lang.	Scien.
Moyenne	490	488	491
Garçons	502	473	500
Filles	477	503	481

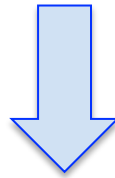
- En mathématiques et en sciences, les garçons réussissent nettement mieux que les filles.
- Cette différence de performance en mathématiques place le Luxembourg à la tête des pays où cette différence est la plus marquée.

De nombreuses recherches ont cependant montré que la performance et l'aptitude en mathématiques ne dépend significativement pas du sexe. Elle serait davantage d'origine socio-culturelle (Budde, 2009). Cependant, il se trouve que pour quelques pays, dont le Luxembourg, des différences de réussite persistent entre les filles et les garçons (Else-Quest, Hyde, & Linn, 2010).

- Cela pourrait être lié à des facteurs affectifs et motivationnels.

Les résultats PISA 2012 interpellent ...

- Les résultats en mathématiques ne progressent pas.
- La différence filles- garçons, spécifique au Luxembourg, est préoccupante.



Demande de la part du Ministère de l'Education Nationale, pour une étude qualitative de quelques items publiés ... afin de tenter de mieux cerner une part du phénomène et de tracer des pistes de réflexion pour les enseignants.

PRESENTATION DE NOTRE ETUDE

Méthode

- Choix de deux situations : - Cargo à voile (3 questions)
- Débit d'une perfusion (2 questions)
- Pourquoi ce choix?
 - des contextes fort différents : scientifique - professionnel
 - des connaissances mathématiques très contrastées

Cargo à voile : contenus arithmétiques et géométriques centrés sur la résolution de problèmes. Enoncé très long à lire.

Débit d'une perfusion : contenus situés dans le domaine algébrique : analyse d'une formule mathématique. Enoncé très court
- Analyses
 - *Analyse a priori* réalisée en relation avec les curricula luxembourgeois.
 - *Résultats généraux, par filière, par genre*
 - *Résultats qualitatifs* : sur la base d'une trentaine de copies d'élèves, analyse des stratégies de résolution des élèves (correctes et erronées) ainsi que des types d'erreurs rencontrés.

Situation "Débit d'une perfusion"

Les perfusions intraveineuses servent à administrer des liquides et des médicaments aux patients.



Les infirmières doivent calculer le débit D d'une perfusion en gouttes par minute.

Elles utilisent la formule $D = \frac{dv}{60n}$

où d est le facteur d'écoulement en gouttes par millilitre (ml)

v est le volume (en ml) de la perfusion

n est le nombre d'heures que doit durer la perfusion.

Analyse a priori de la question 1

Une infirmière veut doubler la durée d'une perfusion.

Décrivez avec précision la façon dont D change

si n (*nb heures*) est doublé et si d et v ne changent pas.

$$D = \frac{dv}{60n}$$

Nature de la tâche à réaliser par l'élève

Il s'agit d'expliquer l'impact de la modification de la variable n (qui doit être doublée) sur le résultat D .

- Plus précisément, la tâche de l'élève consiste tout d'abord à comprendre l'énoncé et en l'occurrence à appliquer sur la variable concernée n l'opération « fois 2 » (« n est doublé »).
- Ensuite, l'élève doit comprendre l'effet de la modification d'une variable sur le résultat et développer une explication sur la façon dont D change.

Cette modalité de réponse où il s'agit de fournir une argumentation est peu habituelle, de même que l'analyse de la formule demandée (envisager l'effet de la modification d'une variable)

Analyse a priori de la question 1

Une infirmière veut doubler la durée d'une perfusion.

Décrivez avec précision la façon dont D change

si n (*nb heures*) est doublé et si d et v ne changent pas.

$$D = \frac{dv}{60n}$$

Stratégies correctes possibles :

- de type sémantique, basées sur le sens, en relation avec le contexte.
- de type arithmétique, en remplaçant les lettres par des nombres et/ou en se basant sur sa compréhension de l'opération de division.
- de type algébrique : Elle implique d'envisager la formule comme une égalité. Il s'agit alors de considérer que diviser le dénominateur par 2 revient à multiplier l'expression par $\frac{1}{2}$ et au final de se dire que pour conserver l'égalité, il s'agit de multiplier également le premier membre (D) par $\frac{1}{2}$ également ou autrement dit, de le diviser par 2.

Relation au curriculum :

- Les formules et l'argumentation sont au programme de l'ES et l'EST
- Elles ne sont ni l'une ni l'autre au programme de l'EST-PREP

Analyse a priori de la question 2

Les infirmières doivent aussi calculer le volume v de la perfusion en fonction du débit de perfusion D .

Une perfusion d'un débit de 50 gouttes par minute doit être administrée à un patient pendant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre.

$$D = \frac{dv}{60n}$$

Quel est le volume en ml de cette perfusion ?

Nature de la tâche à réaliser par l'élève :

La tâche de l'élève est constituée de deux phases.

1. Les élèves doivent tout d'abord modéliser la situation, en l'occurrence « traduire » les données de l'énoncé dans la formule.
2. Il s'agit ensuite de résoudre une équation pour trouver le volume de la perfusion (v) en ml. Une fois les données placées dans la formule, l'équation que les élèves devaient résoudre était la suivante :

$$50 = \frac{25 \cdot v}{60 \cdot 3}$$

Analyse a priori de la question 2

Les infirmières doivent aussi calculer le volume v de la perfusion en fonction du débit de perfusion D .

Une perfusion d'un débit de 50 gouttes par minute doit être administrée à un patient pendant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre.

$$50 = \frac{25 \cdot v}{60 \cdot 3}$$

Quel est le volume en ml de cette perfusion ?

Stratégies correctes possibles

- Méthode formelle de résolution basée sur les propriétés de l'égalité
- Méthode arithmétique de substitution
- Méthode arithmétique de recouvrement :
Cette méthode consiste à poser dans un premier temps comme inconnue, non pas l'inconnue elle-même, mais l'expression contenant cette inconnue.

Analyse a priori de la question 2

Les infirmières doivent aussi calculer le volume v de la perfusion en fonction du débit de perfusion D .

Une perfusion d'un débit de 50 gouttes par minute doit être administrée à un patient pendant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre.

Quel est le volume en ml de cette perfusion ?

$$50 = \frac{25 \cdot v}{60 \cdot 3}$$

Méthode arithmétique de recouvrement : *exemple*

Il s'agit de poser dans un premier temps, $[25 \cdot v]$ comme inconnue

$$50 = \frac{[25 \cdot v]}{60 \cdot 3} \Rightarrow 50 = \frac{[25v]}{180} \Rightarrow 50 = \frac{9000}{180}$$

... si $25 \cdot v$ doit être égal à 9000 alors $v = 9000 : 25$ et donc $v = 360$

Analyse a priori de la question 2

Les infirmières doivent aussi calculer le volume v de la perfusion en fonction du débit de perfusion D .

Une perfusion d'un débit de 50 gouttes par minute doit être administrée à un patient pendant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre.

$$D = \frac{dv}{60n}$$

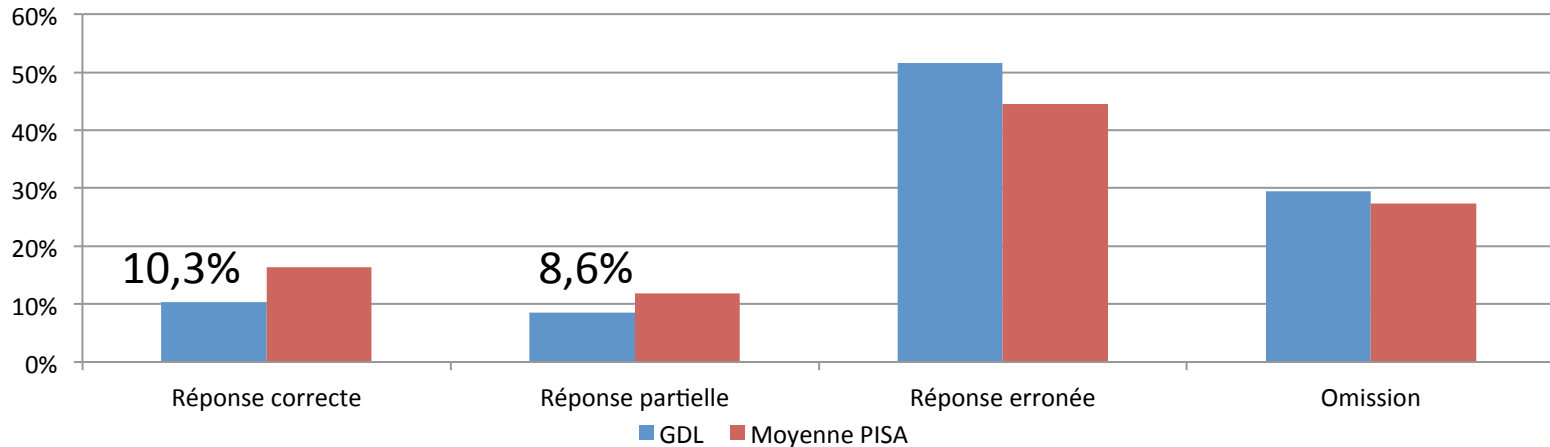
Quel est le volume en ml de cette perfusion ?

Relation au curriculum

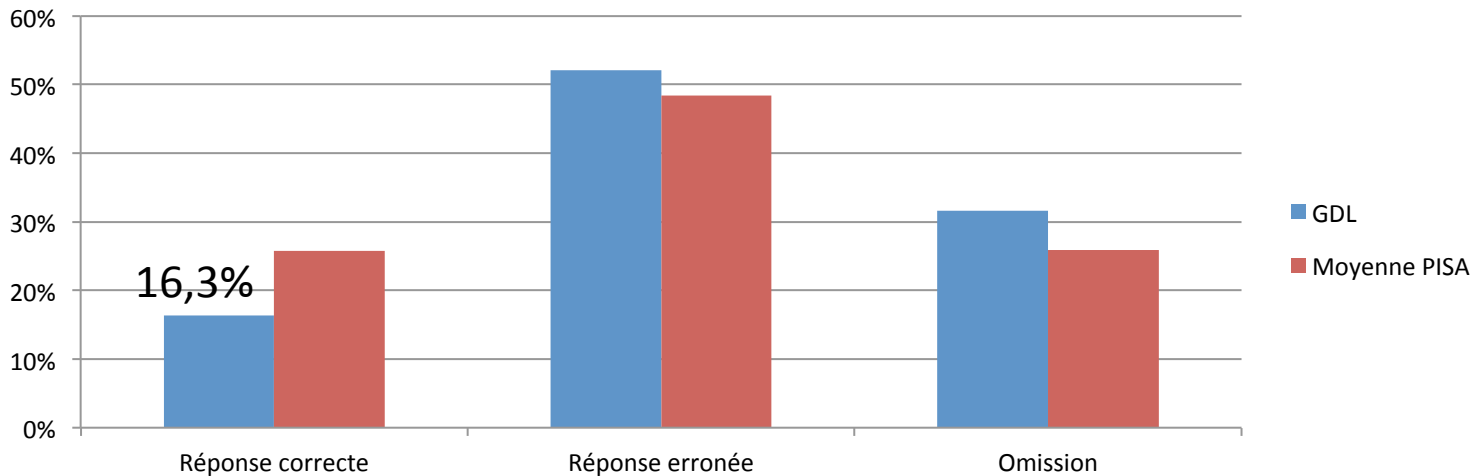
- Les deux étapes, la modélisation et la résolution d'équations figurent pleinement dans les programmes de l'ES et l'EST.
- La modélisation d'une situation n'est pas observée dans le programme de l'EST-PREP.
- La résolution d'équations est préconisée dans les trois filières d'enseignement.

Résultats globaux aux deux questions

Question 1



Question 2



Différence garçons-filles dans les 2 situations

CARGO A VOILE

	% réussite globale	% réussite Garçons	% réussite Filles	Différences
Question 1	52,1 %	58,7 %	45,3 %	13
Question 2	44,1 %	48,6 %	39,5 %	9,1
Question 3	13,1 %	18,1 %	8,0 %	10,1

DEBIT D'UNE PERFUSION

	% réussite globale	% réussite Garçons	% réussite Filles	Différences
Question 1	10,3 %	12,6 %	8,0 %	4,6
Question 2	16,3 %	14,2 %	18,3 %	4,1

Différence F-G significativement moindre dans la situation "Débit d'une perfusion" ($p < 0,05$)

Que répondent les élèves à la question 1?

Réponses correctes

- de type sémantique

"Quand n [*nb heures*] est doublé, le même nombre de d et v [*volume de la perfusion*] coule pendant $2 \cdot n$, donc pendant le double de temps.

Le débit D est alors divisé par 2 afin que la même quantité coule en double temps".

$$D = \frac{dv}{60n.2}$$

- de type arithmétique

Quand n se double, dv est divisé par un nombre deux fois plus grand, et le résultat devient donc deux fois plus petit. d et v restent inchangés parce qu'ils sont indépendants du nombre en dessous.

Réponse partielle de type arithmétique

" D diminue parce qu'il est multiplié par un nombre plus grand"

Que répondent les élèves à la question 1?

Réponses incorrectes

- Affirmer que le résultat D sera doublé

"Quand le nombre d'heures se double, le facteur de gouttes double aussi"

- Multiplier 60 par 2 au dénominateur

Près de la moitié des élèves de l'analyse se contente de multiplier n par 2 dans la formule sans avancer d'autres explications

$$D = \frac{d_{12}}{60 \cdot n \cdot 2} = \frac{d_{12}}{120 \cdot n}$$

- ✓ Ces élèves témoignent ainsi d'une bonne compréhension du terme « doublé » de l'énoncé qu'ils appliquent correctement à la variable n , ...
- ✓ mais n'en tirent aucune conclusion à propos de l'effet sur D puisqu'ils ne vont pas au-delà de la « simple » transformation dans la formule.
- ✓ Ces élèves ne semblent pas envisager que, toutes choses étant égales par ailleurs, si une variable est modifiée dans une formule cela entraîne une modification du résultat.

Que répondent les élèves à la question 2?

Réponses correctes

Utilisation d'une méthode de résolution algébrique.

Réponses incorrectes

- Erreurs dans le processus de modélisation

$$50 = \frac{25v}{3n}$$

Elève 1

$$50 = 8,3$$

$$50 : 8,3 \approx 602$$

$$50 = \frac{25}{3}$$

Volumen der Infusion: 8,3 ml

Elève 2

Pour ces élèves, la résolution se passe comme si la lettre n'avait aucune importance. Ils divisent 25 par 3 pour obtenir 8,3

Rappel de la modélisation correcte :

$$50 = \frac{25 \cdot v}{60 \cdot 3}$$

Que répondent les élèves à la question 2?

Réponses incorrectes

- Erreurs dans la résolution d'équations

$$D = \frac{dv}{60n} \quad \Leftrightarrow v = \frac{d}{60n \cdot D}$$
$$\Leftrightarrow v = \frac{25}{60 \cdot 3 \cdot 50} =$$

Volumen der Infusion: ... $2,7 \times 10^{-3}$ ml

L'élève tente de produire une transformation directe de la formule en voulant isoler v . Il propose

$$v = \frac{d}{60 \cdot n \cdot D} \text{ plutôt que } v = \frac{D \cdot 60 \cdot n}{d}$$

- Solutions 9000 ml ou 4500 ml

Ces deux réponses correspondent à une multiplication des nombres de l'énoncé :

Pour 9000 ml, les élèves ont multiplié $50 \cdot 60 \cdot 3$, en omettant le nombre 25.

Pour 4500 ml, les élèves ont multiplié $25 \cdot 60 \cdot 3$ en omettant, cette fois, le nombre 50.

Ces élèves ont développé une démarche superficielle de résolution consistant à opérer avec les nombres de l'énoncé.

Il semble que ces élèves aient également « oublié » la lettre dans le processus de résolution.

CONCLUSIONS

- Les difficultés des élèves luxembourgeois à ces questions concernent trois domaines au moins :
 1. Les concepts de base en algèbre, notamment le sens de la lettre, ou de la compréhension des variables dans une formule ou encore des conventions.
 2. Les techniques comme la résolution des équations
 3. Les compétences "générales" telles que la modélisation/mise en équation ou l'argumentation.
- L'ensemble de ces trois compétences sont cependant dans le curriculum de l'ES et l'EST.
- Cependant, il faut souligner que le programme d'algèbre est très peu explicite : seulement, 1,5 page consacrée au domaine "*dépendances et variations*" pour la 2^e et la 4^e années du secondaire.

Perspectives en algèbre

Des travaux récents (Becker & Rivera, 2008 ; Russel, Schifter & Bastable, 2011 ; Mason, 2011) ont mis en évidence l'intérêt de développer des **problèmes de généralisation**. Le processus de généralisation se situe en effet au cœur même de l'algèbre, dont il constitue une des fonctions premières.

La généralisation ne figure cependant pas dans le curriculum d'algèbre du secondaire au Luxembourg.

Deux intérêts majeurs dans les activités de généralisation :

- La généralisation implique une réflexion et une communication exposant les régularités au-delà des exemples spécifiques. Le focus n'est plus tant sur les cas ou les situations eux-mêmes que sur les patterns, les structures et les relations.
- Généraliser c'est aussi exprimer ces régularités oralement et par écrit. La généralisation est particulièrement reconnue pour les possibilités d'argumentation et de modélisation utilisant un langage informel tout d'abord, qui tendra à devenir progressivement formel par la suite (Radford, 2011). Elle permet l'introduction au symbolisme algébrique.

Perspectives en algèbre

Projet PROBAL : Problem based teaching in algebra in secondary school

Joëlle Vlassis & Isabelle Demonty

Ce projet vient de démarrer en septembre 2014.

Deux principales finalités :

- Concevoir et expérimenter un programme de développement professionnel visant à développer, en collaboration avec un petit groupe d'enseignants volontaires, une approche par problèmes en algèbre afin de donner du sens aux premiers apprentissages algébriques.
- Analyser les changements dans les croyances et les pratiques des enseignants participant au dispositif.

En écho aux résultats PISA 2012, le choix des contenus spécifiques se sont orientés vers la **généralisation** et les **problèmes de mise en équation**.

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Résultats PISA 2012 à la loupe

Analyse qualitative de réponses d'élèves luxembourgeois en mathématiques et pistes didactiques

Joëlle Vlassis, Sylvie Gamo

Université du Luxembourg

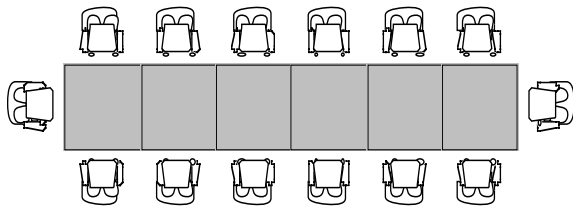
& Joseph Bertemes

Ministère de l'éducation nationale, de l'enfance et de la jeunesse

Symposium EVADIDA - Outils didactiques pour la conception et l'analyse de dispositifs
d'évaluation

ADMEE 2015 - Liège

Un exemple : un tour de table



Il s'agit de faire trouver le nombre de chaises quel que soit le nombre de tables

Formules possibles :

$$2n + 2$$

$$(n + 1) \cdot 2$$

$$(n - 2) \cdot 2 + 6$$

Les élèves ne produisent pas nécessairement directement les formules sous leur forme conventionnelle correcte. Souvent, ils mêlent des mots aux symboles mathématiques.

La production de différentes formules pour un même problème entraîne inévitablement la question « Qui a raison ? ». Le processus de vérification peut être réalisé à trois niveaux.

- En remplaçant la lettre par un nombre et aboutir à une même solution numérique pour les différentes formules.
- En simplifiant les expressions en appliquant la distributivité (solution 2) puis en réduisant les termes semblables (solution 3) et aboutir ainsi à une même formule simplifiée.
- Il est également possible pour les élèves de se servir du dessin pour argumenter leur solution.

Intérêt des activités de généralisation

- Ces réflexions entraînent la production de formules algébriques dont l'expression mathématique va être négociée.
- Elles impliquent aussi un va et vient entre la lettre, les nombres et le dessin, qui va donner du sens à la formule elle-même, aux techniques de calcul algébrique mais aussi aux symboles utilisés : la lettre peut remplacer plusieurs nombres et le signe d'égalité peut être placé entre deux formules correctes dont l'une ne sera pas considérée comme le résultat de l'autre, mais comme une expression égale à l'autre.
- En résumé, cet exemple illustre comment ce type d'activité permet de développer tant la compréhension des concepts et des symboles que des compétences telles que l'argumentation ou la modélisation.