C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 2011
Théorie des groupes/*Group Theory*
Algèbre homologique/*Homological Algebra*

Homology and K-theory of the Bianchi groups

Alexander D. Rahm

Department of Mathematics, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel

(Transmis le 4 avril 2011)

Abstract. We reveal a correspondence between the homological torsion of the Bianchi groups and new geometric invariants, which are effectively computable thanks to their action on hyperbolic space. We use it to explicitly compute their integral group homology and equivariant K-homology. By the Baum/Connes conjecture, which holds for the Bianchi groups, we obtain the K-theory of their reduced C^*-algebras in terms of isomorphic images of the computed K-homology.
We further find an application to Chen/Ruan orbifold cohomology.

Homologie et K-théorie des groupes de Bianchi

Résumé. Nous mettons en évidence une correspondance entre la torsion homologique des groupes de Bianchi et de nouveaux invariants géométriques, calculables grâce à leur action sur l'espace hyperbolique. Nous l'utilisons pour calculer explicitement leur homologie de groupe à coefficients entiers et leur K-homologie équivariante. En conséquence de la conjecture de Baum/Connes, qui est vérifiée pour ces groupes, nous obtenons la K-théorie de leurs C*-algèbres réduites en termes d'images isomorphes de la K-homologie calculée. Nous trouvons d'ailleurs une application à la cohomologie d'orbi-espace de Chen/Ruan.

1. Version française abrégée

Nous étudions la géométrie d'une certaine classe de groupes arithmétiques (les groupes de Bianchi), à travers une action propre sur un espace contractile. Nous accédons à leur homologie de groupe et leur K-homologie équivariante. En plus de détail, considérons un corps de nombres quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, où m est un entier positif ne contenant pas de carré. Soit $\mathcal{O}_{-m}$ son anneau d'entiers. Les *groupes de Bianchi* sont les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m})$. Les groupes de Bianchi peuvent être considérés cruciaux pour l'étude d'une classe plus large de groupes, les groupes *Kleiniens*, qui ont déjà été étudiés par Henri Poincaré [9]. En fait, chaque groupe Kleinien arithmétique non-cocompact est commensurable avec un groupe de Bianchi [8]. Un éventail d'informations sur les groupes de Bianchi

E-mail address: Alexander.Rahm@Weizmann.ac.il

URL: http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~rahm/

peut être trouvé dans les monographies [5, 6, 8]. Ces groupes agissent d'une manière naturelle sur l'espace hyperbolique à trois dimensions, qui est isomorphe à l'espace symétrique qui leur est associé. Le noyau de cette action est le centre $\{\pm 1\}$ des groupes, ce qui rend utile l'étude du quotient par le centre, $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$, que nous appellerons également un groupe de Bianchi. En 1892, Luigi Bianchi [2] a calculé des domaines fondamentaux pour cette action pour quelques uns de ces groupes. Un tel domaine fondamental est de la forme d'un polyèdre hyperbolique (à quelques sommets manquants près), et nous l'appellerons le *polyèdre fondamental de Bianchi*. Le calcul du polyèdre fondamental de Bianchi a été implémenté sur ordinateur pour tous les groupes de Bianchi [10]. Les images sous $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ des faces de ce polyèdre munissent l'espace hyperbolique d'une structure cellulaire. Pour mieux observer la géométrie locale, nous passons au *complexe cellulaire raffiné*, que nous obtenons en subdivisant cette structure cellulaire jusqu'à ce que les stabilisateurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ fixent les cellules point par point. Nous allons exploiter ce complexe cellulaire de différentes manières, afin de cerner des aspects différents de la géométrie de ces groupes.

Homologie de groupes. Un invariant essentiel des groupes est leur homologie (définie par exemple dans [3]). Nous pouvons la calculer pour les groupes de Bianchi en nous servant du complexe cellulaire raffiné. À ce fin, nous utilisons la suite spectrale équivariante de Leray/Serre qui part de l'homologie des stabilisateurs d'un ensemble représentatif de cellules, et qui converge vers l'homologie du groupe de Bianchi. Nous précisons dans la proposition 2.1, l'homologie entière de $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ dans les cas $m = 19$, 43, 67 et 163, qui constituent tous les cas d'anneaux principaux non-Euclidiens. Les cas d'anneaux Euclidiens sont déjà connus de [13]. Des résultats récents pour des cas de groupe de classe d'idéaux non-trivial se trouvent dans [12]. Nous remarquons que dans les quatre cas d'anneaux principaux non-Euclidiens, la torsion dans l'homologie de $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$, est du même type d'isomorphisme. Pour comprendre ceci, nous considérons, pour un nombre premier ℓ, le sous-complexe de l'espace d'orbites, composé des cellules ayant des stabilisateurs qui contiennent des éléments d'ordre ℓ. Nous l'appellerons le *sous-complexe de ℓ–torsion*. L'énoncé suivant traite la manière dans laquelle son type d'homéomorphisme détermine la suite spectrale équivariante. Il est démontré par la réduction des sous-complexes de torsion effectuée dans [11]. Cette technique utilise le lemme 2.4 pour cerner le type de stabilisateur d'un sommet v qui est adjacent à exactement deux arêtes dont les stabilisateurs admettent de la ℓ–torsion. Ensuite, ces deux arêtes et v sont remplacés par une seule arête. Le théorème 1.2 et quelques informations homologiques sur les groupes finis en question sont utilisés pour vérifier que les morphismes induits en homologie produisent les mêmes termes sur la deuxième page de la suite spectrale équivariante qu'avant le remplacement.

Théorème 1.1 (cf. theorem 2.2)**.** *La partie ℓ–primaire de la deuxième page de la suite spectrale équivariante convergeante vers l'homologie des groupes de Bianchi dépend, hors de sa ligne inférieure, seulement du type d'homéomorphisme du sous-complexe de ℓ–torsion.*

Dans tous les cas d'anneaux principaux non-Euclidiens, les sous-complexes de 2–torsion, respectivement de 3–torsion, sont homéomorphes, ce qui explique les résultats de la proposition 2.1. Derrière le théorème ci-dessus, il y a la correspondance suivante entre les sous-groupes cycliques non-triviaux des stabilisateurs des sommets, et les lignes géodésiques

autour desquelles ils effectuent une rotation. Il convient d'appeler ces lignes des *axes de rotation.*

Théorème 1.2 (cf. theorem 2.3)**.** *Soit v un sommet quelconque dans l'espace hyperbolique. L'action de son stabilisateur sur l'ensemble des axes de rotation passant par v, induite par l'action du groupe de Bianchi, est équivalente à l'action par conjugaison de ce stabilisateur sur ses sous-groupes cycliques non-triviaux.*

Une étude cas par cas [11] pour tous les six types de sous-groupes finis dans les groupes Bianchi nous permet de déduire du théorème 1.2, le lemme 2.4 utilisé pour obtenir le théorème 1.1. Des exemples pour le théorème 1.1 sont donnés pour la 3–torsion homologique de trente-six groupes de Bianchi sur le tableau 1.

***K*-théorie.** Avec l'information sur l'action des groupes de Bianchi, que nous obtenons en nous servant des énoncés et méthodes décrits ci-dessus, nous pouvons calculer l'homologie de Bredon de groupes de Bianchi, et en déduire leur K-homologie équivariante. Des résultats sont présentés dans le théorème 2.5. En conséquence de la conjecture de Baum/Connes, qui est vérifiée pour les groupes de Bianchi [7], nous obtenons la K-théorie des C^*-algèbres réduites des groupes de Bianchi comme images isomorphes.

2. Introduction

We study the geometry of a certain class of arithmetic groups (the Bianchi groups) by means of a proper action on a contractible space. This helps to determine their group homology and their equivariant K-homology. In more detail, we denote by $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, with m a square-free positive integer, an imaginary quadratic number field, and by $\mathcal{O}_{-m}$ its ring of integers. The *Bianchi groups* are the groups $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m})$. The Bianchi groups may be considered as a key to the study of a larger class of groups, the *Kleinian* groups, which dates back to work of Henri Poincaré [9]. In fact, each non-cocompact arithmetic Kleinian group is commensurable with some Bianchi group [8]. A wealth of information on the Bianchi groups can be found in the monographs [5, 6, 8]. These groups act in a natural way on hyperbolic three-space, which is isomorphic to the symmetric space $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}_2$ associated to them. The kernel of this action is the centre $\{\pm 1\}$ of the groups. Thus it is useful to study the quotient of a Bianchi group by its centre, namely $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$, which we also call a Bianchi group. In 1892, Luigi Bianchi [2] computed fundamental domains for this action when $m = 1$, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15 and 19. Such a fundamental domain has the shape of a hyperbolic polyhedron (up to a missing vertex at certain cusps, which represent the ideal classes of $\mathcal{O}_{-m}$), so we will call it the *Bianchi fundamental polyhedron.* The computation of the Bianchi fundamental polyhedron has been implemented for all Bianchi groups [10]. The images under $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ of the facets of this polyhedron equip hyperbolic three-space with a cell structure. In order to view clearly the local geometry, we pass to the *refined cell complex*, which we obtain by subdiving this cell structure until the cell stabilisers fix the cells pointwise. We will see how to exploit this cell complex in different ways, in order to see different aspects of the geometry of these groups.

Group homology. An essential invariant of groups is their homology (defined for instance in [3]). We can compute it for the Bianchi groups using the refined cell complex and the equivariant Leray/Serre spectral sequence which starts from the homology of the

stabilisers of representatives of the cells, and converges to the group homology of the Bianchi groups. We will now state the results for simple integer coefficients in the cases $m = 19$, 43, 67 and 163, which are the non-Euclidean principal ideal domain cases. In contrast to these, the Euclidean principal ideal domain cases are already known from [13]. For some results in class number 2, see [12]. The virtual cohomological dimension of the Bianchi groups is 2. In degrees strictly above 2, we express their homology in terms of the following Poincaré series at the primes $\ell = 2$ and $\ell = 3$:

$$P_m^\ell(t) := \sum_{q=3}^{\infty} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathrm{H}_q\left(\mathrm{PSL}_2\big(\mathcal{O}_{-m}\big);\, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\right) t^q.$$

These two primes are the only numbers which occur as orders of non-trivial finite elements of $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$. So it has been shown [11] that the integral homology of these groups is, in all the mentioned degrees, a direct sum of copies of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Proposition 2.1. *The integral homology of* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$*, for* $m \in \{19, 43, 67, 163\}$*, is of isomorphism type* $\mathrm{H}_q(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m});\, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\beta_1 - 1} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & q = 2, \\ \mathbb{Z}^{\beta_1}, & q = 1, \end{cases}$

where

m	19	43	67	163
β_1	1	2	3	7

gives the Betti number β_1*, and is in all higher degrees a direct sum of copies of* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *and* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*, with the number of copies specified by the Poincaré series*

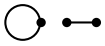
$$P_m^2(t) = \tfrac{-t^3(t^3-2t^2+2t-3)}{(t-1)^2(t^2+t+1)} \text{ and } P_m^3(t) = \tfrac{-t^3(t^2-t+2)}{(t-1)(t^2+1)}.$$

We remark that in these four cases, the torsion in the integral homology of $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ is of the same isomorphism type. To understand this, we consider, for a prime ℓ, the subcomplex of the orbit space consisting of the cells with elements of order ℓ in their stabiliser. We call it the *ℓ–torsion subcomplex*. The following statement on how its homeomorphism type determines the equivariant spectral sequence is proven by the reduction of the torsion subcomplex carried out in [11]. This technique uses lemma 2.4 to determine the possible type of stabiliser of a vertex v with exactly two adjacent edges which have ℓ–torsion in their stabilisers. Then these two edges, together with v, are replaced by a single edge; and theorem 2.3 as well as some homological information about the finite groups in question are used to check that the induced morphisms on homology produce the same terms on the second page of the equivariant spectral sequence as before the replacement.

Theorem 2.2. *The ℓ–primary part of the second page of the equivariant spectral sequence converging to the integral homology of* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ *depends outside the bottom row only on the homeomorphism type of the ℓ–torsion subcomplex.*

Examples for this theorem are given for the prime $\ell = 3$ and thirty-six Bianchi groups in figure 1 (for $\ell = 2$, see [11]). In all the non-Euclidean principal ideal domain cases, the 2–torsion, and respectively 3–torsion subcomplexes are homeomorphic, which explains the results in proposition 2.1. Underlying theorem 2.2, there is the following correspondence between the non-trivial cyclic subgroups of the vertex stabilisers and the geodesic lines around which they effect a rotation, and which we shall call *rotation axes*.

FIGURE 1. Results for the 3–torsion homology, expressed in $P^{\ell}_{m}(t)$

m specifying the Bianchi group	3-torsion subcomplex, homeomorphism type	$P^3_m(t)$
2, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 29, 34, 35, 46, 51, 58, 87, 95, 115, 123, 155, 159, 187, 191, 235, 267		$\frac{-2t^3}{t-1}$
7, 19, 43, 67, 139, 151, 163		$\frac{-t^3(t^2-t+2)}{(t-1)(t^2+1)}$
13, 37, 91, 403, 427		$2\left(\frac{-t^3(t^2-t+2)}{(t-1)(t^2+1)}\right)$
39		$\frac{-2t^3}{t-1}+\frac{-t^3(t^2-t+2)}{(t-1)(t^2+1)}$

Theorem 2.3 ([11])**.** *For any vertex v in hyperbolic space, the action of its stabiliser on the set of rotation axes passing through v, induced by the action of the Bianchi group, is equivalent to the conjugation action of this stabiliser on its non-trivial cyclic subgroups.*

A case by case study [11] for all the six types of finite sub-groups in the Bianchi groups allows us to deduce from theorem 2.3 the following lemma, which is useful in order to obtain theorem 2.2.

Lemma 2.4. *Let v be a vertex in the refined cell complex. Then the number* $\mathbf{n}$ *of orbits of edges in the refined cell complex adjacent to v, with stabiliser in* $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ *isomorphic to $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, is given as follows for $\ell = 2$ and $\ell = 3$.*

Isomorphism type of the vertex stabiliser	$\{1\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{A}_4$
$\mathbf{n}$ for $\ell = 2$	0	2	0	3	2	1
$\mathbf{n}$ for $\ell = 3$	0	0	2	0	1	2.

Here we have written $\mathcal{S}_3$ for the symmetric group on three letters and $\mathcal{A}_4$ for the alternating group on four letters. Note that we obtain the same table for $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ after replacing the edge and vertex stabiliser types by their pre-images under the projection $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{-m}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$, which are respectively: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, the 8-elements quaternion group, the 12-elements binary dihedral group and the binary tetrahedral group.

***K*-theory.** With the above information about the action of the Bianchi groups, we can further compute the Bredon homology of the Bianchi groups, from which we can deduce their equivariant K-homology. The results of the computations [11] are the following.

Theorem 2.5. *Let β_1 be the Betti number specified in proposition* 2.1*. For $\mathcal{O}_{-m}$ principal, the equivariant K-homology of $\Gamma := \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_{-m})$ is isomorphic to*

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=7$	$m=11$	$m\in\{19,43,67,163\}$
$K_0^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma)$	$\mathbb{Z}^6$	$\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^5\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^3$	$\mathbb{Z}^4\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{\beta_1-1}\oplus\mathbb{Z}^3\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$K_1^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z}^3$	$\mathbb{Z}^3$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{\beta_1}$.

The remainder of the equivariant K-homology of Γ is given by Bott 2-periodicity. By the Baum/Connes conjecture, which holds for the Bianchi groups [7], we obtain the K-theory of the reduced C^*-algebras of the Bianchi groups as isomorphic images.

Complex orbifolds. The information we have concerning the action of the Bianchi groups on real hyperbolic three-space provides explicit orbifold structures. These orbifolds serve as models in Cosmology [1].
We can complexify these orbifolds. In [11], the product structure on their Chen/Ruan orbifold cohomology has been determined for all Bianchi groups; and an algorithm has been given to compute the underlying vector space structure. This is a step towards checking Ruan's cohomological crepant resolution conjecture [4], which is of importance in Mathematical Physics and is completely open in 3 complex dimensions outside the global quotient case, hence these orbifolds are interesting test cases.

Acknowledgements. The author thanks Stephen Gelbart for support and encouragement.
He thanks Philippe Elbaz-Vincent, Louis Funar and Anthony Joseph for a careful lecture of the manuscript.
And he would like to thank again all the people acknowledged in [11].

References

[1] Ralf Aurich, Frank Steiner, and Holger Then, *Numerical computation of Maass waveforms and an application to cosmology*, Contribution to the Proceedings of the "International School on Mathematical Aspects of Quantum Chaos II", to appear in Lecture Notes in Physics (Springer) (2004).
[2] Luigi Bianchi, *Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginarî*, Math. Ann. **40** (1892), no. 3, 332–412. MR1510727
[3] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **87**, Springer-Verlag, 1982. MR672956 (83k:20002), Zbl 0584.20036
[4] Weimin Chen and Yongbin Ruan, *A new cohomology theory of orbifold*, Comm. Math. Phys. **248** (2004), no. 1, 1–31. MR2104605 (2005j:57036), Zbl 1063.53091
[5] Jürgen Elstrodt, Fritz Grunewald, and Jens Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR1483315 (98g:11058)
[6] Benjamin Fine, *Algebraic theory of the Bianchi groups*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 129, Marcel Dekker Inc., New York, 1989. MR1010229 (90h:20002)
[7] Pierre Julg and Gennadi Kasparov, *Operator K-theory for the group $SU(n,1)$*, Vol. 463. MR1332908 (96g:19006)
[8] Colin Maclachlan and Alan W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 219, Springer-Verlag, New York, 2003. MR1937957 (2004i:57021)
[9] Henri Poincaré, *Mémoire*, Acta Math. **3** (1966), no. 1, 49–92. Les groupes kleinéens. MR1554613
[10] Alexander D. Rahm, *Bianchi.gp*, Open source program (GNU general public license), 2010. Available at `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00526976/`, this program computes a fundamental domain for the Bianchi groups in hyperbolic 3-space, the associated quotient space and essential information about the integral homology of the Bianchi groups.
[11] ———, *(Co)homologies and K-theory of Bianchi groups using computational geometric models*, Ph.D. Thesis, Institut Fourier, Université de Grenoble et Universität Göttingen, soutenue le 15 octobre 2010. `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00526976/`.
[12] Alexander D. Rahm and Mathias Fuchs, *The integral homology of* PSL_2 *of imaginary quadratic integers with non-trivial class group*, J. Pure and Applied Algebra **215** (2011), 1443–1472.
[13] Joachim Schwermer and Karen Vogtmann, *The integral homology of SL_2 and PSL_2 of Euclidean imaginary quadratic integers*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 4, 573–598. MR728453 (86d:11046), Zbl 0545.20031