Géométrie des courbes et des surfaces moyennant la théorie des repères mobiles d'Élie Cartan

Tiffany Covolo et Norbert Poncin

2007-2008

Ce texte est la base d'un cours de Bachelor sur la géométrie des courbes et surfaces. Contrairement à la majorité des références, il utilise la théorie des repères mobiles d'Élie Cartan. Il a été présenté comme mémoire de Bachelor par Tiffany Covolo et est le résultat d'un cours dirigé donné par Norbert Poncin et s'appuyant principalement sur [IL03], [Lel63] et [Shi08].

Table des matières

Introduction

La *théorie d'Élie Cartan* constitue une approche alternative à la Géométrie différentielle. Développée au début du XX^e siècle, durant l'entre-deux-guerres, cette théorie est basée sur les repères mobiles, notion introduite par G. Darboux, et les systèmes d'équations aux différentielles totales, qui étaient en plein développement à la suite de l'apparition du calcul différentiel absolu de Ricci-Curbastro.

La notion de repère mobile, introduite de manière naturelle grâce à la notion de systèmes de coordonnées (il suffit de penser aux repères mobiles associés aux coordonnées sphériques ou aux coordonnées cylindriques, très utilisés en Mécanique), est en fait bien plus générale. A un repère mobile de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}^n$ sont associées deux formes tensorielles, appelées formes fondamentales, $(\omega^i)_i$ et $(\eta_i^k)_{ki}$, définies à partir du déplacement infinitésimal du repère. Il se trouve que *ces formes fondamentales caractérisent le mouvement du repère mobile*, résultat fondamental de la théorie du repère mobile qui fait de cette dernière un puissant outil d'investigation pour une vaste famille de questions.

Avec cette théorie nous disposons d'un moyen efficace et élégant pour traiter notamment le *problème d'équivalence* entre deux structures géométriques (e.g. deux courbes, deux surfaces, ...), i.e. celui de leur coïncidence à équivalence près. La notion d'équivalence dépend bien sûr de la géométrie considérée. Dans les cas que nous allons traiter dans cette thèse (le cas des courbes de l'epace affine euclidien $\mathcal{E}^3$ (section 3.2), le cas des hypersurfaces de $\mathcal{E}^n$ (section 3.3)) "équivalence" est au sens d' "égalité à une isométrie affine près". La méthode de Cartan consiste alors à définir en chaque point $P = c(s)$, $s \in \mathbb{R}$, d'une courbe $c : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3$, respectivement en chaque point $P = f(u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$, d'une surface $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}^3$ (ou plus généralement d'une hypersurface de $\mathcal{E}^n$), un repère adapté au problème considéré et à trouver, à partir de ce repère, un ensemble d'invariants qui fournissent des conditions nécessaires, et qui constituent également une condition consuffisante à l'équivalence.

Dans le cas spécifique des courbes de l'espace $\mathcal{E}^3$ (section 3.2), la méthode de Cartan consiste à définir en chaque point $P = c(s)$, $s \in \mathbb{R}$, d'une courbe $c : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3$, un repère orthonormé orienté. De manière plus précise, ce repère mobile sera le trièdre de Frenet $(c(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$, formé par le vecteur tangent unitaire $\mathbf{T}(s)$, le vecteur normal principal unitaire $\mathbf{N}(s)$ et le vecteur binormal unitaire $\mathbf{B}(s)$. Les formules de Frenet permettent d'entrevoir que les dérivées des vecteurs du repère mobile sont en étroite relation avec des invariants : la courbure et la torsion de la courbe considérée. Ces invariants fournissent des conditions nécessaires d'équivalence. Par les résultats de la théorie du repère mobile, nous montrerons que ces deux invariants constituent aussi une condition suffisante (Théorème fondamental de la théorie des courbes de $\mathcal{E}^3$).

De la même manière, pour des hypersurfaces de $\mathcal{E}^n$, ces conditions nécessaires et suffisantes sont données par les deux premières formes fondamentales I et II (Théorème de Bonnet), décrivant respectivement la géométrie intrinsèque de l'hypersurface (*i.e.* sa métrique) et la géométrie extrinsèque de l'hypersurface (*i.e.* encodant sa "courbure", la façon dont l'hypersurface est plongée dans l'espace ambiant). Dans le cas particulier des surfaces de $\mathcal{E}^3$, ce résultat nous conduit au Théorème de Gauss (Theorema Egregium), qui se réduit alors à un simple corollaire. De plus, on entrevoit par ces raisonnements des notions importantes de la Géométrie différentielle, comme la dérivée covariante, que nous ne traiterons que très brièvement, mais qu'un lecteur intéressé n'aura pas de peine à trouver expliquée de manière plus détaillée dans un manuel de Géométrie différentielle. L'utilité de la théorie des repères mobiles ne se borne donc pas au cas dans l'espace $\mathcal{E}^n$ traité ici, mais s'étend aussi aux variétées abstraites.

Bien évidemment, la méthode de Cartan, ses applications et ses extensions, en particulier sa gé-

néralisation à l'étude des sous-variétés des espaces homogènes, sont généralement formulées dans le langage de la Géométrie différentielle contemporaine. Cette thèse par contre, constitue un retour à la source. Élaborée avant la fin du cours d'introduction à la Géométrie différentielle, elle est rédigée d'un point de vue de l'Analyse, plutôt que du point de vue géométrique proprement dit.

Nous supposons toutefois que le lecteur dispose de connaissances de base en Géométrie différentielle, ainsi qu'en Algébre linéaire, et d'une connaissance élémentaire du calcul tensoriel, du calcul différentiel extérieur et des systèmes d'équations différentielles ordinaires (ODE). Dans ce texte, les objets considérés sont généralement supposés être de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, même si l'hypothèse C^1 ou C^2 est suffisante ; néanmoins, dans certains problèmes, comme par exemple les équations aux dérivées partielles, nous donnerons les conditions précises. En outre, nous privilégions dans ce texte les notations de la Physique mathématique par rapport à celles de la Géométrie différentielle, si elles conduisent à des points de vue plus simples et néanmoins mathématiquement satisfaisant, et nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein, pour alléger les notations.

Chapitre 1

Cadre mathématique

L'idée à la base de la théorie d'Élie Cartan est de "rapporter l'espace considéré à un repère mobile variable $\mathcal{R}$ dépendant d'un ou de plusieurs paramètres". Avant d'aborder cette théorie, il est donc naturel de s'attarder sur quelques considérations sur l'espace étudié, qui dans notre cas est l'espace $\mathbb{R}^n$, et sur la notion de repère mobile.

1.1 Espace euclidien en coordonnées cartésiennes

Comme annoncé dans l'introduction, nous nous plaçons désormais dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cet ensemble est muni d'une structure naturelle d'*espace vectoriel* réel de dimension n, donnée par

$$\lambda X = (\lambda X^1, \ldots, \lambda X^n) \text{ et } X + Y = (X^1 + Y^1, \ldots, X^n + Y^n),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où $X = (X^1, \ldots, X^n)$ et $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ désignent deux éléments arbitraires de $\mathbb{R}^n$. De plus, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est canoniquement un *espace affine* réel de dimension n associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. La structure affine est définie par l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (X, Y) \to \overrightarrow{XY} := Y - X \in \mathbb{R}^n.$$

Si l'on fixe l'origine $O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, la bijection correspondante entre l'espace affine $\mathbb{R}^n$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ associé est donnée par

$$\varphi_O : \mathbb{R}^n \ni X \to \overrightarrow{OX} = X - O = X \in \mathbb{R}^n.$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ possède également un produit scalaire naturel, $X \cdot Y = \sum_i X^i Y^i$, dont les bases orthonormées (BON) sont la base canonique $(E_i)_i$ de $\mathbb{R}^n$, $E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (où l'élément 1 occupe la i-ème position), ainsi que celles $(c_i)_i$, $c_i = A^k{}_i E_k$, déduites de la base canonique par une matrice orthogonale A.

Nous pouvons néanmoins partir tout aussi bien d'un produit scalaire arbitraire, *i.e.* d'une *forme bilinéaire* quelconque g de $\mathbb{R}^n$, qui est *symétrique et définie positive*. Ce 2-tenseur covariant $g \in \otimes^0_2 \mathbb{R}^n$ est appelé le *tenseur métrique* de $\mathbb{R}^n$. Nous poserons souvent $g(X, Y) =: X \cdot Y$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$, à condition que la confusion avec le produit scalaire canonique mentionné ci-dessus ne soit pas possible. Les BON par rapport au produit scalaire g sont les bases $(c_i)_i$ vérifiant $g(c_i, c_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Dans la suite, *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *muni du tenseur métrique* g fixé, sera appelé l'*espace vectoriel euclidien* de dimension n. Nous le désignerons par E^n. Par *espace affine euclidien* de dimension n, nous entendrons systématiquement *l'espace affine* $\mathbb{R}^n$ *muni de la métrique*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (X, Y) \to d(X, Y) := g(Y - X, Y - X) \in \mathbb{R}_+,$$

induite par le tenseur métrique g de E^n. L'espace affine euclidien à n dimensions sera noté $\mathcal{E}^n$. Dans la suite, nous écrirons aussi E^n et $\mathcal{E}^n$, afin de souligner que nous considérons $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel ou affine, même si la structure euclidienne n'est pas impliquée.

Rappelons aussi qu'une BON $(c_i)_i$ de E^n et un repère orthonormé (RON) $(P,(c_i)_i)$ de $\mathcal{E}^n$ permettent d'associer à tout n-uplet de réels $(x^1,\ldots,x^n)$ un vecteur $X = x^i c_i$ et un point X défini par $\overrightarrow{PX} = x^i c_i$, respectivement, et sont ainsi souvent appelés un *système de coordonnées cartésiennes.* Dans tout système de coordonnées cartésiennes, le produit scalaire est donné par

$$X \cdot Y = g(X,Y) = x^i y^j g(c_i,c_j) = x^i y^j \delta_{ij} = \sum_i x^i y^i.$$

Les expressions correspondantes de la norme et de la distance associées s'ensuivent.

1.2 Espace euclidien en coordonnées rectilignes

Le tenseur métrique g induit un isomorphisme d'espace vectoriel $\flat$ entre E^n et son dual E^{n*}, donné par

$$\flat : E^n \ni X \to X^* := g(X,\cdot) \in E^{n*}.$$

Le tenseur g étant défini positif, cette application est bien bijective. Si $(e_i)_i$ est une base quelconque fixe de E^n, nous parlerons encore d'un *système de coordonnées rectilignes*, le tenseur métrique est caractérisé par ses coordonnées $g_{ij} = g(e_i,e_j)$. La matrice $(g_{ij})_{ij}$ représente l'isomorphisme $\flat$ dans la base $(e_i)_i$ de E^n et la base duale $(\varepsilon^i)_i$ de $(e_i)_i$ dans E^{n*}. Les coordonnées $(x^i)_i$ de X dans la base $(e_i)_i$ et celles $(x_i^*)_i$ de X^* dans la base $(\varepsilon^i)_i$ sont donc liées par les relations

$$x_i^* = g_{ij}\, x^j \text{ et } x^i = g^{ij} x_j^*,$$

où $(g^{ij})_{ij} = (g_{ij})_{ij}^{-1}$. L'isomorphisme $\flat$ abaissant ainsi les indices et son inverse $\sharp := \flat^{-1}$ montant les indices, on parle des *isomorphismes musicaux bémol* ($\flat$) *et dièse* ($\sharp$).

Par cet isomorphisme $\sharp$ nous pouvons donc rapporter la base duale $(\varepsilon^i)_i$ dans l'espace de départ et ainsi obtenir une nouvelle base $(e^i)_i$ de cet espace, qui sera définie par

$$e^i \cdot e_j = \varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j \ .$$

Chaque vecteur X de E^n admet donc, en plus des coordonnées contravariantes $(x^i)_i$ dans la base $(e_i)_i$, des coordonnées covariantes $(x_i)_i$ dans la base $(e^i)_i$.

L'expression du produit scalaire dans une base quelconque $(e_i)_i$ est alors

$$X \cdot Y = g(X,Y) = g_{ij}\, x^i y^j \ .$$

Pour trouver les expressions du produit vectoriel et du produit mixte, dans le cas où n=3, considérons en plus de la base quelconque $(e_i)_i$ une base fixe orthonormale $(c_i)_i$ de même orientation. Si $(A^i_j)_{ij}$ désigne la matrice de passage de $(c_i)_i$ à $(e_i)_i$, nous avons donc

$$e_i = A^j_i c_j \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g_{ij} = e_i \cdot e_j = A^k_i c_k \cdot A^l_j c_l = A^k_i A^l_j c_k \cdot c_l = A^k_i A^l_j \delta_{kl} = A_{li} A^l_j = \tilde{A}_{il} A^l_j = (\tilde{A}A)_{ij} \\ \Rightarrow g = \det(g_{ij}) = (\det(A))^2 \\ \Rightarrow \sqrt{g} = \det(A) \\ \Rightarrow (e_i \wedge e_j) \cdot e_k = \det(A)\, \mathcal{E}_{ijk} = \sqrt{g}\, \mathcal{E}_{ijk} \ . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$e_i \wedge e_j = \sqrt{g}\, \mathcal{E}_{ijk} e^k \ .$$

De la même manière, on obtient

$$e^i \wedge e^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \mathcal{E}^{ijk} e_k \; .$$

Ceci montre en plus que la base $(e_i)_i$ et la base $(e^i)_i$ ont la même orientation. L'expression du produit vectoriel dans une base quelconque $(e_i)_i$ est alors

$$X \wedge Y = \sqrt{g}\, \mathcal{E}_{ijk} x^i y^j e^k$$

et celle du produit mixte est

$$(X \wedge Y) \cdot Z = \sqrt{g}\, \mathcal{E}_{ijk} x^i y^j z^k \; .$$

1.3 Espace euclidien en coordonnées curvilignes

Dans maintes situations, il est avantageux d'utiliser des coordonnées plus générales que des coordonnées cartésiennes ou rectilignes. On pensera par exemple aux coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, définies par

$$\begin{cases} X^1 = r \sin\theta \cos\varphi \\ X^2 = r \sin\theta \sin\varphi \\ X^3 = r \cos\theta \end{cases}$$

et fournissant un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre les ouverts

$$\Omega =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\quad et \quad \Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R}).$$

De manière plus générale, on appelle *système de coordonnées curvilignes*, tout diffeomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathbb{R}^n \supset \Omega \ni u = u(X) \rightleftarrows X = X(u) \in \Omega' \subset \mathbb{R}^n$$

entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^n$. Les réels $u = (u^1, \ldots, u^n)$ sont les coordonnées du point $X = X(u)$ dans le système de coordonnées curvilignes considéré.

Dans les paragraphes précédents, les coordonnées ont été définies moyennant un repère. Ici, nous disposons de coordonnées et allons en déduire un repère. En Mécanique, on utilise souvent par exemple le repère orthonormé direct mobile $(X, e_r, e_\theta, e_\varphi)$ canoniquement associé aux coordonnées sphériques et obtenu par dérivation de $X = X(r, \theta, \varphi)$ par rapport aux coordonnées r, θ, φ. De manière plus générale, si $X = X(u)$ désigne un système arbitraire de coordonnées curvilignes, les champs de vecteurs

$$e_j = e_j(u) := \partial_{u^j} X \in E^n, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad u \in \Omega,$$

forment en chaque point $u \in \Omega$ une base de E^n, car la matrice jacobienne $(\partial_{u^j} X^i)_{ij}$ est non singulière dans Ω. Le repère[1] $\mathcal{R} = (X, e_i) = (X(u), e_i(u))$, $u \in \Omega$, de $\mathcal{E}^n$ est appelé *repère mobile naturel associé au système de coordonnées curvilignes* $X = X(u)$.

Les composantes d'un champ de vecteurs $V = V(u) \in E^n$, $u \in \Omega$, ou d'un champ de tenseurs $t = t(u) \in \otimes^p_q E^n$, $u \in \Omega$, peuvent être lues dans la base $e_i = e_i(u)$, $u \in \Omega$, de E^n ou dans celle que cette dernière induit dans $\otimes^p_q E^n$, respectivement. Aussi, la valeur en un point u_0 fixé du champ considéré est à décomposer dans la base correspondante obtenue pour cette valeur fixée u_0 de u. Dans ce cas, comme le repère mobile naturel $\mathcal{R}$ n'est pas nécessairement orthonormé, les résultats du paragraphe 1.2 doivent être appliqués.

Signalons également que si $X = X(u)$ et $X = X(v)$ sont deux systèmes de coordonnées curvilignes définis sur des ouverts Ω et U respectivement, les règles de calcul pratiques bien connues donnent,

$$e'_j = \partial_{v^j} X = \partial_{u^k} X \, \partial_{v^j} u^k = (\partial_v u)^k{}_j \, e_k,$$

si bien que la matrice de passage de la base mobile e_i associée aux coordonnées $X = X(u)$ à la base mobile e'_i associée aux coordonnées $X = X(v)$ est la matrice jacobienne $A = A(v) = \partial_v u$ du diffeomorphisme de transition $u = u(v) \rightleftarrows v = v(u)$.

1. Afin d'alléger les notations, nous écrirons e_i au lieu de $(e_i)_i$

Chapitre 2

Théorie du repère mobile

2.1 Formes tensorielles fondamentales associées à un repère mobile

Dans le paragraphe 1.3, nous avons vu comment construire un repère mobile à partir d'un système de coordonnées. Toutefois, la notion de repère mobile est un concept bien plus général, qui peut être défini indépendamment de la notion de système de coordonnées.

Définition 1. *Un repère mobile $\mathcal{R}$ d'origine P de l'espace $\mathcal{E}^n$ est défini par $n+1$ fonctions vectorielles P, e_i $(i = 1, \ldots, n)$ dépendant de p paramètres $(u^1, \ldots, u^p) =: u$, u variant dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^p$.*

Le cas précedemment traité d'un repère mobile défini à partir d'un système de coordonnées, n'est alors qu'un cas particulier où $p = n$, les coordonnées jouant le rôle de paramètres du repère mobile.

Considérons maintenant les déplacements infinitésimaux du repère $\mathcal{R}$, *i.e.* les variations dP, de_i des fonctions qui le définissent. En dimension finie, si E et F sont deux espaces vectoriels, nous avons

$$E^* \otimes F = \mathcal{L}_2(E \times F^*, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(E, (F^*)^*) = \mathcal{L}(E, F),$$

de sorte que les éléments de $E^* \otimes F$ se décomposent dans une base quelconque de F avec des coefficients dans E^*. Ici, nous avons $P, e_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, E^n) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \otimes E^n$ et $dP, de_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, E^{p*}) \otimes E^n = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \otimes E^{p*} \otimes E^n = \mathcal{C}^\infty(\Omega, E^{p*} \otimes E^n)$. Ces différentielles se décomposent donc dans la base $du^i \otimes e_j$ de $E^{p*} \otimes E^n$ (les du^i forment une base du $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$-module des 1-formes) avec des coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Dans la suite, nous omettons d'ordinaire le produit tensoriel et écrivons simplement $du^i\ e_j$.
Ainsi,

$$\begin{cases} dP = \omega^i e_i = \rho^i_j du^j e_i \ , \\ de_i = \eta^k_i e_k = \Gamma^k_{ij} du^j e_k \ , \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec des notations évidentes.

Les $n + n^2$ 1-formes différentielles ω^i, η^k_i se comportent respectivement comme les composantes d'un vecteur et d'un tenseur une fois covariant et une fois contravariant. En effet, soit un autre repère mobile $\mathcal{R}' = (P', e'_i)$. Il est lié au premier par une transformation affine inversible. On suppose que le second repère est également mobile et dépend des mêmes paramètres et que la transformation affine inversible est fixe. On a donc

$$P' = P + \overrightarrow{PP'} \text{ et } e'_j = A^i_j e_i \quad (\overrightarrow{PP'} \text{ et } A^i_j \text{ constants}).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} dP' = dP\,, \\ de'_j = A^i_j de_i\,, \end{cases}$$

ces grandeurs étant calculées au même point $u = (u^1, \ldots, u^p)$. Comme

$$\begin{cases} dP' = \omega'^j e'_j\,, \\ de'_j = \eta'^{\,l}_{\,j} e'_l\,, \end{cases}$$

on a

$$\omega^i e_i = \omega'^j e'_j = \omega'^j A^i_j e_i \quad \Rightarrow \quad \omega^i = A^i_j \omega'^j,$$

si bien que les 1-formes ω^i et ω'^i vérifient effectivement la loi vectorielle.

De manière analogue, avec $(A'^j_i)_{ji} = (A^j_i)^{-1}_{ji}$,

$$\eta^k_i e_k = A'^j_i \eta'^{\,l}_{\,j} e'_l = A'^j_i \eta'^{\,l}_{\,j} A^k_l e_k \quad \Rightarrow \quad \eta^k_i = A'^j_i A^k_l \eta'^{\,l}_{\,j}\,,$$

ce qui montre que les 1-formes η^k_i et $\eta'^{\,k}_{\,i}$ vérifient bien la loi tensorielle.

La donnée d'un repère mobile implique donc la connaissance d'un jeu de $n + n^2$ 1-formes différentielles sur l'ouvert de variation des paramètres dans $\mathbb{R}^p$, soit de deux formes tensorielles $(\omega^i)_i$ et $(\eta^i_j)_{ij}$, appelées *formes fondamentales*. Dans la suite, on se propose d'étudier si, inversement, on peut, pour tout jeu de $n + n^2$ 1-formes différentielles sur un ouvert simplement connexe D de $\mathbb{R}^p$, trouver un repère mobile dont la variation infinitésimale correspond aux formes considérées.

2.2 Détermination d'un repère mobile à partir des formes fondamentales

2.2.1 Formes fondamentales à une variable

Dans $\mathcal{E}^n$, soit un repère mobile $\mathcal{R} = (P, e_i)$ dépendant d'un unique paramètre t à valeurs dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. La variation infinitésimale du repère est donnée par

$$\begin{cases} dP = \omega^i e_i = \rho^i dt\ e_i\,, \\ de_i = \eta^k_i e_k = \Gamma^k_i dt\ e_k\,. \end{cases}$$

Dans ce cas, il est plus simple de considérer ces équations sous la forme

$$\begin{cases} d_t P = \rho^i e_i\,, \\ d_t e_i = \Gamma^k_i e_k\,. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

On voudrait, à partir des fonctions numériques $\rho^i, \Gamma^k_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, déterminer le repère variable $\mathcal{R} = (P, e_i)$ satisfaisant au système (2.2.1), *i.e.* résoudre ce système différentiel. Pour cela, rapportons l'espace à un repère fixe (O, r_i) et posons

$$P(t) = x^j(t) r_j \quad \text{ et } \quad e_i(t) = A^j_i(t) r_j\,.$$

Le système (2.2.1) devient alors

$$d_t x^j = \rho^i A^j_i\,, \tag{2.2.2}$$

$$d_t A^j_i = \Gamma^k_i A^j_k\,, \tag{2.2.3}$$

système différentiel linéaire que nous allons résoudre.

Considérons d'abord le système différentiel de n^2 équations (2.2.3). Comme le système est linéaire, par le théorème fondamental des équations différentielles ordinaires (ODE), la continuité des fonctions Γ_i^k suffit à assurer l'existence et l'unicité d'une solution, coïncidant avec des valeurs initiales $(e_i)_0$, *i.e.* $(A_i^k)_0$, données en un point $t_0 \in I$. Les fonctions A_i^k ainsi trouvées permettent de résoudre les n équations restantes (2.2.2) par simple intégration. La solution obtenue sera unique si on choisit des valeurs initiales $(x^j)_0$ au point t_0,

$$x^j(t) = \int_{t_0}^{t} \rho^i(u) A_i^j(u) du + x^j(t_0) \,.$$

Néanmoins, il reste à vérifier que les $e_i(t) = A_i^k(t)\ r_k$ ainsi trouvés forment bien une base de $\mathbb{R}^n$, *i.e.* qu'ils sont linéairement indépendants pour tout $t \in I$. Or, comme $(r_i)_i$ est une base de $\mathbb{R}^n$, cela est équivalent à vérifier que $\det(A_i^k) \neq 0,\ \forall t \in I$.
Posons

$$\Delta(t) = \det(A_i^k(t)) = [e_1(t), \ldots, e_n(t)] \,,$$

où $[e_1(t), \ldots, e_n(t)]$ est le produit mixte des vecteurs $e_1(t), \ldots, e_n(t)$, défini dans l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$ orienté. Alors,

$$\begin{aligned} d_t\Delta &= d_t[e_1, \ldots, e_n] \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \Gamma_k^i [e_1, \ldots, e_{k-1}, e_i, e_{k+1}, \ldots, e_n] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k^k\ \Delta \end{aligned}$$

La fonction $\sum_{k=1}^n \Gamma_k^k$, dépendant du paramètre t, est continue sur I, donc il existe une solution unique pour toute valeur initiale $\Delta(t_0)$:

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} \Gamma_k^k(u) \right) du \right).$$

On voit que la fonction Δ ne peut s'annuler en un certain point $t \in I$, sans être identiquement nulle. Ainsi, pour que $\Delta(t) \neq 0$ partout, il suffit de choisir une valeur initiale $(A_i^k)_0$ en t_0 telle que $\Delta(t_0) \neq 0$, *i.e.* de choisir des valeurs initiales $(e_i)_0$ qui forment une base de $\mathbb{R}^n$.

On remarque aussi que, comme $\Delta = \det(A_i^k)$ ne s'annule pas et est continu sur I, il y garde un signe constant. La base $(e_i)_i$ donnée par $e_i = A_i^k r_k$ aura toujours la même orientation (celle de la base $(r_i)_i$, si Δ est positif, l'orientation opposée, si Δ est négatif) et donc le repère mobile $\mathcal{R}$ garde une orientation constante sur I.

Théorème 1. *Étant données $n+n^2$ fonctions numériques $(\rho^i), (\Gamma_i^k)$ continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, il existe un seul système de $n+1$ fonctions vectorielles (P, e_i) de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui vérifient le système d'équations différentielles* (2.2.1) *et déterminent un repère variable $\mathcal{R}$, coïncidant avec un repère donné $\mathcal{R}_0$ pour un certain $t_0 \in I$.*

2.2.2 Formes fondamentales à plusieurs variables

Dans $\mathcal{E}^n$, soit un repère mobile $\mathcal{R} = (P, e_i)$ dépendant de p paramètres $(u^1, \ldots, u^p) = u$, u appartenant à un domaine D de $\mathbb{R}^p$, *i.e.* à un ouvert simplement connexe. La variation infinitésimale du repère est donnée par le système

$$\begin{cases} dP = \omega^i e_i = \rho_a^i du^a e_i \,, \\ de_i = \eta_i^k e_k = \Gamma_{ia}^k du^a e_k \,, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

avec $i, k = 1, \ldots, n$ et $a = 1, \ldots, p$. Comme pour le cas précédent, on veut, données les 1-formes différentielles ω^i et η_i^k, déterminer le repère variable $\mathcal{R}$, *i.e.* résoudre le système différentiel (2.2.4).

L'existence d'une solution implique que nécessairement les conditions $d^2P = 0$ et $d^2e_i = 0$ sont vérifiées. Ces conditions s'écrivent aussi sous la forme [1]

$$d\omega^k + \eta_i^k \wedge \omega^i = 0\,, \tag{2.2.5}$$
$$d\eta_i^k + \eta_j^k \wedge \eta_i^j = 0\,. \tag{2.2.6}$$

En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= d^2P = d(\omega^i e_i) = d(\omega^i \otimes e_i) \\ &= (d\omega^i) \otimes e_i - \omega^i \wedge d(e_i) \\ &= (d\omega^i) \otimes e_i - \omega^i \wedge (\eta_i^k \otimes e_k) \\ &= \left(d\omega^k - \omega^i \wedge \eta_i^k\right) \otimes e_k = \left(d\omega^k + \eta_i^k \wedge \omega^i\right) \otimes e_k\,. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(e_i) = d(\eta_i^j e_j) = d(\eta_i^j \otimes e_j) \\ &= (d\eta_i^j) \otimes e_j - \eta_i^j \wedge de_j \\ &= (d\eta_i^j) \otimes e_j - \eta_i^j \wedge (\eta_j^k \otimes e_k) \\ &= \left(d\eta_i^k - \eta_i^j \wedge \eta_j^k\right) \otimes e_k = \left(d\eta_i^k + \eta_j^k \wedge \eta_i^j\right) \otimes e_k\,. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le système d'équations aux différentielles totales

$$de_i = \eta_i^k e_k,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.2.7}$$

Rappelons qu'on appelle *système d'équations aux différentielles totales*, tout système d'équations du type

$$dy^i = f_a^i(u, y)du^a, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\},$$

où $y = (y^1, \ldots, y^N)$ est une fonction vectorielle inconnue $y : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^N$, D ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^p$, où $u = (u^1, \ldots, u^p)$ est un système de coordonnées dans D, et où, finalement, $f = (f_a^i)_{ia}$ est une fonction matricielle donnée $f : D \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{Np}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Ces systèmes, qui sont d'importance surtout en Physique et ont été étudiés en Mathématiques dès le début du 20-ième siècle, sont des systèmes particuliers d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Si nous choisissons une base fixe $(r_i)_i$ de $\mathbb{R}^n$, si bien que $e_i = A_i^j r_j$, nous voyons que le système (2.2.7) s'écrit

$$dA_i^j = \eta_i^k A_k^j = \Gamma_{ia}^k A_k^j du^a, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2.2.8}$$

et est donc un *système d'équations linéaires aux différentielles totales*. Comme nous supposons que la forme fondamentale $(\eta_i^k)_{ki}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les données sont ici de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 2. *Un système linéaire aux différentielles totales du type* (2.2.7)*, considéré dans un ouvert simplement connexe D et contenant des 1-formes différentielles η_i^j de classe $\mathcal{C}^1$, est* complètement intégrable (*i.e. admet, pour toute condition initiale $u_0 \in D$ et $(e_i)_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$, une solution de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de u_0*) si et seulement si *la condition d'intégrabilité* (2.2.6) *est satisfaite.*

On ne propose ici qu'une esquisse de la preuve de ce théorème d'intégration dû à E. Cartan [2], mais on précisera le résultat dans le cas particulier qui nous intéresse.

1. Ces équations sont connues dans la littérature sous le nom d'équations de Maurer-Cartan pour le groupe affine.
2. Voir [Car28] ou [Tho34] pour des systèmes plus généraux.

Dans un ouvert simplement connexe D de $\mathbb{R}^p$, considérons le système (2.2.7), avec des données qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient la condition d'intégrabilité. Fixons un élément u_0 dans D et une base $(e_i)_0$ dans $\mathbb{R}^n$ et désignons par u^* un point provisoirement fixe dans D.

Choisissons un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\varphi : \mathbb{R} \supset I \ni t \to \varphi(t) \in D \subset \mathbb{R}^p,$$

qui passe par u_0 en $t_0 \in I$ et par u^* en $t^* \in I$ (où I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$).

En posant $E_i = E_i(t) := e_i(\varphi(t))$, $t \in I$, on a, pour tout $t \in I$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} de_i|_{\varphi(t)} &= \Gamma^k_{ia}(\varphi(t))du^a e_k(\varphi(t)) \\ \Leftrightarrow \; dE_i|_t &= \Gamma^k_{ia}(\varphi(t))d_t\varphi^a dt E_k(t) \\ \Leftrightarrow \; d_t E_i &= \Gamma^k_{ia}(\varphi(t))\, d_t\varphi^a E_k(t)\,. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Vu les hypothèses de dérivabilité, les coefficients de ce système linéaire (2.2.9) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans I (respectivement de classe $\mathcal{C}^0$ sur I, si on suppose les données et l'arc de classe $\mathcal{C}^1$). On a donc existence et unicité d'une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ (repectivement de classe $\mathcal{C}^1$) dans I vérifiant une condition initiale $(E_i)_0$ donnée au point t_0.

On connaît en particulier $e_i(\varphi(t^*)) = E_i(t^*)$, mais ce vecteur pourrait dépendre de l'arc considéré. Aussi, choisissons un autre arc

$$\psi : \mathbb{R} \supset I \ni t \to \psi(t) \in D \subset \mathbb{R}^p,$$

qui passe par les mêmes points u_0 en $t_0 \in I$ et u^* en $t^* \in I$. On peut montrer, grâce à la condition d'intégrabilité (2.2.6), que $e_i(\varphi(t^*))$ ne change pas si l'on fait varier continuement l'arc φ dans D. De plus, comme le domaine D est simplement connexe, on peut déformer φ continuement en ψ, si bien que $e_i(\varphi(t^*)) = e_i(\psi(t^*))$. Le vecteur e_i ne dépend donc pas de l'arc considéré, mais seulement du point $\varphi(t^*) = \psi(t^*) = u^*$. Les vecteurs $(e_i)_i$ ainsi construits (sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) et) sont solution unique du système (2.2.7) vérifiant la condition initiale donnée $(e_i)_0$ au point u_0. De plus, comme les vecteurs $(E_i)_i$ forment une base qui garde une orientation constante (par les résutats du paragraphe 2.2.1), les $(e_i)_i$ forment aussi une base de l'espace E^n qui garde une orientation constante sur D.

Les fonctions $(e_i)_i$ étant connues, on considère maintenant l'équation différentielle restante

$$dP = \omega^i e_i\,. \tag{2.2.10}$$

Prouver l'existence d'une solution, revient alors à prouver que cette 1-forme différentielle est exacte. Or, comme D est un ouvert simplement connexe, la condition (2.2.5) est suffisante [3]. De plus, la solution est unique, si l'on se donne une condition initiale P_0 au point u_0.

Nous avons donc l'analogue du résultat trouvé au paragraphe 2.2.1 :

Théorème 3. *Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^p$. Étant données $n + n^2$ 1-formes différentielles $(\omega^i), (\eta^k_i)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D vérifiant le système* (2.2.5)-(2.2.6)*, il existe un et un seul uplet de $n + 1$ fonctions vectorielles (P, e_i) de classe $\mathcal{C}^1$ sur D qui vérifient le système d'équations* (2.2.4) *et déterminent un repère variable $\mathcal{R}$, coïncidant avec un repère donné $\mathcal{R}_0$ pour un certain $u_0 \in D$.*

3. Par le Lemme de Poincaré.

2.3 Repères mobiles dans l'espace euclidien

Travailler avec un repère mobile quelconque peut toutefois être gênant. Généralement, on préfère les repères qui, bien que mobiles, *gardent une forme invariable*, *i.e.* les repères qui "se meuvent comme un solide", et même parfois qui sont orthonormés. Mais pour pouvoir dire qu'un repère garde une forme invariable, ou même est orthonormal, il faut que l'espace dans lequel on travaille soit euclidien (*i.e.*, comme on a vu au paragraphe 1.1, soit un espace muni d'un tenseur métrique $(g_{ij})_{ij}$). Dans la suite, nous allons donc nous placer dans l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$.

2.3.1 Repère mobile de forme invariable

Nous dirons qu'un repère mobile $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}^n$ est de *forme invariable*, lorque le mouvement du repère "est" une *isométrie affine directe*, *i.e.* une transformation affine conservant les distances et l'orientation, ou encore la composée d'une translation et d'une transformation linéaire orthogonale de déterminant 1. En effet, une transformation affine $X' = AX + b$ conserve les distances si et seulement si l'application linéaire associée $X' = AX$ conserve le produit scalaire, *i.e.* si et seulement si la matrice A est orthogonale (comme on le vérifie aisément). Toute matrice orthogonale étant de déterminant $\det(A) = \pm 1$, la transformation affine conserve les distances et l'orientation si et seulement si la matrice A appartient au *groupe spécial orthogonal* $\mathrm{SO}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$, *i.e.* est orthogonale et de déterminant $\det(A) = 1$.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{R}$ un repère mobile de $\mathcal{E}^n$ défini par $n+1$ fonctions vectorielles (P, e_i), $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine D de $\mathbb{R}^p$. Alors, le repère $\mathcal{R}$ est de forme invariable si et seulement si $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ est constant, pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.*

Avant de passer à la démonstration de cette proposition, notons que si on pose $de_i = \eta_i^k e_k$ et $\eta_{ij} = g_{ik}\eta_j^k$, la condition "$g_{ij}$ constant" est équivalente, sur un ouvert connexe, à $\eta_{ij} + \eta_{ji} = 0$, pour tout i, j. En effet,

$$g_{ij} \text{ constant}, \forall i, j \quad \Leftrightarrow \quad d(g_{ij}) = 0, \forall i, j$$

Or,

$$\begin{aligned} d(g_{ij}) &= d(e_i \cdot e_j) \\ &= de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j \\ &= \eta_i^k e_k \cdot e_j + e_i \cdot \eta_j^k e_k \\ &= g_{jk}\eta_i^k + g_{ik}\eta_j^k \\ &= \eta_{ji} + \eta_{ij}, \end{aligned}$$

de sorte que nous avons bien la condition équivalente annoncée.

Démonstration. La question concernant l'orientation est claire dès le début. Par hypothèse, $(e_i)_i$ est une base variable de E^n et chaque fonction e_i est continue sur l'ouvert connexe $D \subset \mathbb{R}^p$. Cela implique que, si on se ramène à une base fixe $(r_i)_i$ de E^n, telle que $e_i = A_i^k r_k$, la fonction $\Delta = \det(A_i^k)$ est aussi continue et ne s'annule pas sur D. Or, D étant un ouvert connexe, cette fonction Δ est de signe constant. Ainsi, la base $(e_i)_i$ aura partout la même orientation.

Il reste à montrer que

$$\text{le mouvement du repère "est" une isométrie affine} \Leftrightarrow \ g_{ij} = \text{constant}, \forall i, j$$

L'implication directe est évidente. Pour la réciproque, considérons deux repères $\mathcal{R} = \mathcal{R}(u_1) =: (P, e_i)$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(u_2) =: (P', e'_i)$ $(u_1, u_2 \in D)$, tels que $g'_{ij} = e'_i \cdot e'_j = e_i \cdot e_j = g_{ij}$. A chaque point M de $\mathcal{E}^n$ défini par $\overrightarrow{PM} = x^i e_i$ on fait correspondre le point M' défini par $\overrightarrow{P'M'} = x^i e'_i$. L'application

$f : \mathcal{E}^n \longrightarrow \mathcal{E}^n$ qui envoie M sur M' ainsi construite est une application affine qui amène $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. En effet, l'application l définie par

$$l(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{P'M'}$$

est visiblement linéaire et amène e_i sur e'_i, pour tout i. D'autre part, on a

$$\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = x^i e_i \cdot x^j e_j = x^i x^j g_{ij} = x^i x^j g'_{ij} = x^i e'_i \cdot x^j e'_j = \left\|\overrightarrow{P'M'}\right\|^2$$

et donc cette transformation conserve la norme et par conséquent le produit scalaire. Nous avons ainsi trouvé une isométrie affine qui amène $\mathcal{R} = \mathcal{R}(u_1)$ sur $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(u_2)$. □

2.3.2 Repère mobile orthonormé

La Proposition 1 n'est toutefois pas directement utilisable en pratique, car les fonctions g_{ij} sont généralement inconnues. Néanmoins, dans le cas où on impose au repère d'être orthonormal, on peut prouver un résultat utile pour la suite.

Proposition 2. *Soient n fonctions vectorielles $(e_i)_i$, $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine D de $\mathbb{R}^p$, définissant une base variable de E^n. Cette base est orthonormée si et seulement si les formes différentielles η_i^k définies par $de_i = \eta_i^k e_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ satisfont au système*

$$\eta_i^k + \eta_k^i = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

et la base $(e_i(u_0))_i$ est orthonormale pour une certaine valeur $u_0 \in D$.

Démonstration. Prouvons la proposition directe. Si la base $(e_i(u))_i$ est orthonormale pour tout $u \in D$, alors $g_{ij}(u) = \delta_{ij}$ pour tout $u \in D$. Ainsi,

$$0 = d(g_{ij}) = g_{ik}\eta_j^k + g_{jk}\eta_i^k = \eta_j^i + \eta_i^j .$$

Quant à la proposition réciproque, notons que les g_{ij} satisfont au système différentiel

$$d(g_{ij}) = g_{ik}\eta_j^k + g_{jk}\eta_i^k \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Comme $\eta_i^k + \eta_k^i = 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, ce système admet une solution particulière : $(\gamma_{ij})_{ij} = (\delta_{ij})_{ij}$. Cette solution satisfait à la condition initiale $\gamma_{ij}(u_0) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, donc, par unicité de la solution, on a $\gamma_{ij} = g_{ij}$. Finalement, la base $(e_i)_i$ est bien (partout) orthonormale. □

Cette proposition, regroupée avec le Théorème 1 et le Théorème 3 du paragraphe précédent, nous permet d'énoncer deux résultats principaux, que nous allons utiliser dans les prochains chapitres :

Théorème–clef 1. *Étant données $n+n^2$ fonctions numériques $(\rho^i)_i$, $(\Gamma_i^k)_{ki}$ continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, satisfaisant au système*

$$\Gamma_i^k + \Gamma_k^i = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

il existe un unique système de $n+1$ fonctions vectorielles (P, e_i) de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui vérifient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} d_t P = \rho^i e_i\,, \\ d_t e_i = \Gamma_i^k e_k \end{cases}$$

et déterminent un repère variable orthonormé $\mathcal{R}$, coïncidant avec un repère orthonormal donné $\mathcal{R}_0$, pour un certain $t_0 \in I$.

Théorème–clef 2. *Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^p$. Étant données $n + n^2$ 1-formes différentielles $(\omega^i)_i, (\eta_i^k)_{ki}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, satisfaisant, pour tout $i, j = 1, \dots, n$, à*

$$\begin{aligned} &d\omega^i + \eta_k^i \wedge \omega^k = 0\,, \\ &d\eta_j^i + \eta_k^i \wedge \eta_j^k = 0\,, \\ &\eta_i^j + \eta_j^i = 0\,, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

il existe un unique système de $n + 1$ fonctions vectorielles (P, e_i) de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, qui vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} dP = \omega^i e_i =: \rho_a^i du^a e_i\,, \\ de_i = \eta_i^k e_k =: \Gamma_{ia}^k du^a e_k \end{cases}$$

et déterminent un repère variable orthonormé $\mathcal{R}$, coïncidant avec un repère orthonormal donné $\mathcal{R}_0$, pour un certain $u_0 \in D$.

Remarquons qu'un changement de repère initial $\mathcal{R}_0$ correspond à un changement de repère fixe de $\mathcal{E}^n$, par rapport auquel est donné le mouvement du repère $\mathcal{R}$, donc à une isométrie affine de $\mathcal{E}^n$. Par conséquent, *les formes fondamentales* (vérifiant les hypothèses d'un des deux théorèmes principaux) *déterminent le repère mobile "à isométrie affine près"*.

Chapitre 3

Applications de la théorie du repère mobile

La théorie du repère mobile est un puissant outil d'investigation, notamment dans des questions d'équivalence entre objects géométriques, *i.e.* d'égalité à une transformation adéquate près. Dans le contexte de l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$, considéré dans ce chapitre, cette transformation est une isométrie affine. Nous discuterons dans la suite le cas des courbes de $\mathcal{E}^3$ et le cas des hypersurfaces de $\mathcal{E}^n$ (donc en particulier des surfaces de $\mathcal{E}^3$).

3.1 Variétés, variétés plongées, surfaces et courbes

Définissons tout d'abord le cadre approprié pour notre étude. Comme précédemment, tous les objects considérés ci-dessous seront, sauf mention contraire, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 2. *Dans* $\mathbb{R}^n$*, une* portion paramétrée de variété *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et de dimension* $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$*, est un couple* (D, f)*, où* D *est un ouvert simplement connexe de* $\mathbb{R}^p$ *et* $f : D \ni u \to f(u) \in \mathbb{R}^n$ *une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Cette notion est très générale et admet des situations génantes pour notre étude, comme l'existence de points multiples (*i.e.* de points $f(u) = f(u')$, avec $u \neq u'$) ou de points singuliers. Afin d'éviter ces difficultées, nous poserons des hypothèses supplémentaires :

1. *Hypothèse d'injectivité* : on suppose que f est *injectif*, afin d'exclure les points multiples.
2. *Hypothèse de régularité* : on suppose que f est une *immersion* (*i.e.* la dérivée $\partial_u f$, $u \in D$, est injective). Ainsi, le rang de $\partial_u f$, $u \in D$, est égal à p, ce qui garantit que les "vecteurs tangents" $\partial_{u^i} f$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, sont linéairement indépendants en tout point $u \in D$, et empêche donc l'apparition de points singuliers.

On est donc amené à étudier ce qu'on appelle les *variétés plongées locales*.

Définition 3. *Une* variété plongée locale de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension p*, est un couple* (D, f)*, où* D *est un ouvert simplement connexe de* $\mathbb{R}^p$ *et où*

$$f : \mathbb{R}^p \supset D \ni u \to f(u) \in f(D) =: D' \subset \mathbb{R}^n$$

est une immersion bijective de classe $\mathcal{C}^\infty$*, dont l'inverse* $f^{-1} : D' \to D$ *est continue (lorsque* D' *et* D *sont munis de la topologie induite).*

Toutefois, il n'existe souvent pas de paramétrage unique (D, f) pour une variété considérée, ce pour quoi on est amené à la notion plus générale de *variété plongée (globale)* dans $\mathbb{R}^n$, obtenue par recollements de variétés plongées locales.

Définition 4. *Une* variété plongée dans $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension p, *est une partie $M \subset \mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $P \in M$, il existe des ouverts $U \ni P$ de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega \ni 0$ de $\mathbb{R}^p$, ainsi qu'un homeomorphisme*

$$f : \mathbb{R}^p \supset \Omega \ni u \to f(u) \in U \cap M \subset \mathbb{R}^n,$$

qui soit de classe $\mathcal{C}^\infty$, une immersion en 0 et associe P à 0.

Ainsi, une variété plongée locale est une variété plongée qui admet un seul paramétrage (D, f). D'autre part, une variété plongée est une variété abstraite dont les cartes sont les inverses $(f(\Omega), f^{-1})$ des paramétrages (Ω, f), voir p.ex. [Pon08]. Par conséquent, *tous les résultats usuels de Géométrie différentielle sont applicables, aussi bien pour une variété plongée locale que pour une variété plongée globale*. En particulier, la notion d'espace tangent T_PM à une variété abstraite M en un point $P \in M$ fournit celle d'*espace tangent à une variété plongée*. On sait, voir [Pon08], que si M est une variété plongée dans $\mathbb{R}^n$ de dimension p, si $P \in M$, et si (Ω, f) est un paramétrage de M au voisinage de $P = f(u)$, l'espace tangent est donné par

$$T_PM = (\partial_u f)(\mathbb{R}^p).$$

L'espace tangent est indépendant de la paramétrisation choisie. De plus, il est clair à partir de cette définition que les vecteurs linéairement indépendants $(\partial_{u^i} f)_i$ engendrent T_PM et sont donc des vecteurs tangents qui forment une base de T_PM.

Rappelons aussi qu'une variété est *orientable*, si elle admet un atlas dont les difféomorphismes de transition sont à Jacobien strictement positif. Dans le cas des variétés plongées, ceci signifie que si (Ω, f) et (ω, g) sont deux paramétrages tels que $f(\Omega) \cap g(\omega) \neq \emptyset$, alors le *difféomorphisme de changement de paramétrisation*

$$\phi := g^{-1} \circ f : \mathbb{R}^p \supset f^{-1}(f(\Omega) \cap g(\omega)) \to g^{-1}(f(\Omega) \cap g(\omega)) \subset \mathbb{R}^p$$

est à Jacobien $\det \partial_u \phi > 0$, pour tout $u \in f^{-1}(f(\Omega) \cap g(\omega))$.

Les variétés plongées de dimension $p = n - 1$ sont les *hypersurfaces* de $\mathcal{E}^n$. De manière plus précise, on fixe une origine O dans $\mathcal{E}^n$, on considère les paramétrages comme des applications à valeurs dans E^n, et on pose $f(u) = \overrightarrow{OP}$ ou même $f(u) = P$. Dans le cas $n = 3$, nous parlons simplement de *surfaces* de $\mathcal{E}^3$. De plus, nous utiliserons les appellations *hypersurface locale* et *surface locale*. L'hypothèse de régularité se traduit alors par le fait que les vecteurs $\partial_{u^1} f, \ldots, \partial_{u^{n-1}} f$ sont linéairement indépendants en tout point $u = (u^1, \ldots, u^{n-1}) \in D$.

Cette définition de surface de $\mathcal{E}^3$ comme variété plongée de dimension 2 est bien appropriée, car le problème majeur de ce cas est souvent l'impossibilité de trouver une paramétrisation globale de la "surface", et donc la nécessité de considérer des recollements de "portions paramétrées de surfaces".

Par contre, dans le cas des courbes de $\mathcal{E}^3$, la principale difficulté n'est généralement pas le paramétrage de la totalité de la "courbe", mais plutôt l'impossibilité—en particulier pour des raisons mécaniques—d'écarter l'existence de points multiples (il suffit de penser à l'arc de courbe comme la trajectoire d'un point mobile : exclure les points multiples reviendrait alors à exclure la possibilité que le point mobile repasse par un même point). Il ne s'agit donc pas ici de recoller des variétés plongées locales de dimension 1, mais d'assouplir les hypothèses ajoutées à la définition d'une portion paramétrée de variété de dimension 1. Aussi, nous ne garderons que l'hypothèse de régularité, indispensable en vue d'une théorie intéressante, ce qui nous conduit à la notion d'*arc paramétré régulier de courbe* ou simplement d'*arc régulier de courbe*.

Définition 5. *Un* arc régulier de courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{E}^n$ *est un couple (I, f) formé d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et d'une immersion de classe $\mathcal{C}^\infty$ $f : I \ni t \to f(t) \in E^n$.*

L'hypothèse de régularité signifie ici que le “vecteur tangent” $d_t f$ est non nul, quel que soit $t \in I$. D'ordinaire, nous supperosons même que l'arc de courbe est *birégulier*, *i.e.* que $d_t f$ et $d_t^2 f$ sont linéairement indépendants en tout point $t \in I$.

Dans le cas des variétés plongées locales, les changements de paramétrisation apparaissent naturellement suite au recollement de ces variétés, tandis que dans le cas des arcs réguliers de courbes, nous devons les introduire de manière explicite.

Définition 6. *Si (I, f) et (J, g) sont deux arcs réguliers, on dit que (I, f) est* équivalent *à (J, g), s'il existe un difféomorphisme $\phi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que $f \circ \phi = g$. Une classe d'équivalence de cette relation est appelée un* arc géométrique de courbe.

La dérivée $d_t\phi \neq 0$ étant continue sur l'intervalle J, elle y garde un signe constant, qui donne le sens de variation du difféomorphisme ϕ. Toute classe d'arcs réguliers reliés par des difféomorphismes croissants est un *arc géométrique orienté*. Rappelons aussi que tout arc régulier (I, f) d'un arc géométrique $\mathcal{C}$ est appelé une *paramétrisation* de $\mathcal{C}$. Une *paramétrisation par abscisse curviligne s* est une paramétrisation (I, f), telle que $||d_s f|| = 1$, quel que soit $s \in I$. Il est bien connu que tout arc géométrique admet des paramétrisations par abscisse curviligne, et que, si (I, f) en est une, toute autre est de la forme

$$I - c \ni s \to f(s + c) \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad -I + c \ni s \to f(-s + c) \in \mathbb{R},$$

où c désigne une constante arbitraire. Enfin, comme $d_s\|d_s f\|^2 = 2\, d_s^2 f \cdot d_s f$, la non-annulation de la dérivée seconde $d_s^2 f$ implique la birégularité de l'arc considéré, et vice-versa, bien sûr.

3.2 Arcs géométriques de l'espace euclidien $\mathcal{E}^3$

L'objectif de cette section est l'étude du problème fondamental de l'équivalence de deux courbes de $\mathcal{E}^3$, *i.e.* de leur coïncidence à une isométrie affine directe, ou encore un “mouvement solide”, près. Il est intuitivement clair que la condition nécessaire est suffisante d'équivalence est ici l'égalité des “courbures” et “torsions” de ces courbes. Les idées communes de ces deux grandeurs impliquent que la courbure est positive ou nulle et la torsion est positive, négative ou nulle. On remarquera dès le début qu'une réflexion ne modifie pas la “courbure”, mais change le signe de la “torsion”.

Pour traiter ce thème nous reprenons l'idée de base de la théorie du repère mobile et rapportons la courbe considérée à un repère mobile naturel adapté au mieux à la géométrie de la courbe.

3.2.1 Trièdre de Frenet

Soit un *arc géométrique orienté $\mathcal{C}$ de l'espace euclidien orienté $\mathcal{E}^3$, considérons une paramétrisation (I, f) de cet arc par abscisse curviligne, $P = f(s)$, $s \in I$, et supposons cet arc birégulier et au moins de classe $\mathcal{C}^3$*. En vertu de la remarque ci-dessus, on a donc en particulier $d_s^2 P \neq 0$, quel que soit $s \in I$.

Le *repère de Frénet* est le ROND mobile $\mathcal{R} = (P, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$, où $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ est le *trièdre de Frénet* défini par

$$\mathbf{T} = d_s P \ , \quad \mathbf{N} = \tfrac{d_s \mathbf{T}}{\|d_s \mathbf{T}\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \, .$$

Le trièdre de Frénet est bien une base orthonormale directe de E^3, car quel que soit $s \in I$, on a :

- $\mathbf{T}(s)$ est le *vecteur unitaire tangent* à l'arc $\mathcal{C}$ au point $P = f(s)$ (dont le sens “concorde” avec l'orientation de l'arc).
- $\mathbf{N}(s)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{T}(s)$. En effet, $1 = \|\mathbf{T}\|^2 = d_s P \cdot d_s P$ et en dérivant on obtient $0 = 2\, d_s^2 P \cdot d_s P = 2\, \|d_s \mathbf{T}\|\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}$, si bien que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$.
- $\mathbf{B}(s)$ est un vecteur orthogonal à $\mathbf{T}(s)$ et à $\mathbf{N}(s)$ et unitaire, car

$$\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{T} \wedge \mathbf{N}\| = \|\mathbf{T}\|\ \ \|\mathbf{N}\|\ \left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = 1 \, .$$

– $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ est directe par construction.

Le vecteur $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{B}$) est appelé *vecteur normal principal* (resp. *vecteur binormal*) de $\mathcal{C}$ au point P.

Quant à l'indépendance du repère de Frenet de la paramétrisation par abscisse curviligne considérée, notons que si (I, f) et (J, g) sont deux telles paramétrisations, telles que

$$P = g(t) = f(\phi(t)) = f(\pm t + c) = f(s),$$

on a

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = \pm\mathbf{T}(s),\ \tilde{\mathbf{N}}(t) = \mathbf{N}(s),\ \tilde{\mathbf{B}}(t) = \pm\mathbf{B}(s), \tag{3.2.1}$$

où les vecteurs "tildés" sont ceux induits par g. Dans le cas considéré ici d'un arc orienté, la dérivée de ϕ vaut 1 et les repères de Frenet induits par f et g coïncident.

Intuitivement il est clair que l'intensité $\|d_s\mathbf{T}\|$ de la variation de $\mathbf{T}$ par rapport à s "mesure" la "courbure" de $\mathcal{C}$ au point P. D'où la définition suivante (dans laquelle les hypothèses sur $\mathcal{C}$ faites au début de cette section ne sont pas toutes nécessaires) :

Définition 7. *Soit un arc géométrique $\mathcal{C}$ paramétrisé par l'abscisse curviligne $P = f(s)$, $s \in I$, de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$. La* courbure *de $\mathcal{C}$ au point P est le scalaire $\kappa(s) := \|d_s\boldsymbol{T}\| \in \mathbb{R}_+$ ($\kappa_P\mathcal{C}$ en fait).*

La courbure de $\mathcal{C}$ peut donc être considérée comme une fonction $\kappa \in \mathcal{C}^{k-2}(I, \mathbb{R})$. La combinaison de la précédente définition avec celle du vecteur normal principal N (ici la birégularité est de nouveau de mise) conduit directement à la *première formule de Frénet* :

$$d_s\mathbf{T} = \kappa\mathbf{N}\,. \tag{3.2.2}$$

Il s'ensuit que κ s'exprime en fonction des vecteurs du trièdre de Frenet (ici la classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 3$, est de nouveau de mise),

$$\kappa = d_s\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = -\mathbf{T}\cdot d_s\mathbf{N}\,.$$

Comme $\mathbf{B}$ est de norme constante et que $d_s\mathbf{B} = \mathbf{T}\wedge d_s\mathbf{N}$, la dérivée $d_s\mathbf{B}$ est orthogonale à $\mathbf{B}$ et à $\mathbf{T}$, donc colinéaire à $\mathbf{N}$. Le facteur de colinéarité est $\pm\|d_s\mathbf{B}\|$. Un moment de réflexion suffit pour entrevoir que la valeur $\pm\|d_s\mathbf{B}\|$ "mesure" la "torsion" de $\mathcal{C}$ au point P. D'où la définition :

Définition 8. *Soit un arc géométrique $\mathcal{C}$ paramétrisé par l'abscisse curviligne $P = f(s)$, $s \in I$, de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 3$, et birégulier. La* torsion *de $\mathcal{C}$ en P est le coefficient de colinéarité $\tau(s) \in \mathbb{R}$ (en fait $\tau_P\mathcal{C}$) de $d_s\boldsymbol{B}$ à $\boldsymbol{N}$.*

La torsion de $\mathcal{C}$ peut donc être considérée comme une fonction $\tau \in \mathcal{C}^{k-3}(I, \mathbb{R})$, et on a évidemment la *deuxième formule de Frenet*

$$d_s\mathbf{B} = \tau\mathbf{N}\,. \tag{3.2.3}$$

On notera que, contrairement à la courbure, la torsion peut être positive ou négative, et que, dans le cas des arcs de courbes planes, elle est nulle. La torsion τ s'exprime également en fonction des vecteurs du trièdre de Frenet,

$$\tau = d_s\mathbf{B}\cdot\mathbf{N} = -\mathbf{B}\cdot d_s\mathbf{N}.$$

Par dérivation de la relation $\mathbf{N} = \mathbf{B}\wedge\mathbf{T}$, on vérifie facilement que la dérivée du vecteur normal principal $\mathbf{N}$ est donnée par la *troisième formule de Frenet*,

$$d_s\mathbf{N} = -\kappa\mathbf{T} - \tau\mathbf{B}. \tag{3.2.4}$$

Remarquons pour terminer que la courbure et la torsion sont bien indépendantes de la paramétrisation par abscisse curviligne utilisée pour les définir. Ces conclusions découlent directement des raisonnements sous-jacents aux formules (3.2.1) reliant les repères de Frenet $(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{B}})$ et $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.

3.2.2 Théorème fondamental de la théorie des courbes

En gros, nous démontrerons dans cette section que deux arcs géométriques de $\mathcal{E}^3$ diffèrent par une isométrie affine directe si et seulement s'ils ont même courbure et même torsion.

Théorème 4. *Si deux arcs géométriques orientés $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ (biréguliers et de classe $\mathcal{C}^3$ au moins) sont équivalents, alors $\kappa = \kappa^*$ et $\tau = \tau^*$.*

Démonstration. Soit un arc géométrique orienté birégulier $\mathcal{C}$, de classe $\mathcal{C}^3$ au moins, défini par une paramétrisation (I, f) par abscisse curviligne. Considérons un second arc géométrique orienté $\mathcal{C}^*$, équivalent à $\mathcal{C}$, *i.e.* défini par une paramétrisation (I, f^*), où $f^* = \psi \circ f$ et où ψ désigne une isométrie affine directe. Ainsi,

$$P^* = f^*(s) = \psi(f(s)) = \psi(P) = AP + b,$$

$A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^3$ (A et b constants par rapport à s). Par conséquent, l'arc géométrique $\mathcal{C}^*$ est lui-aussi birégulier, au moins de classe $\mathcal{C}^3$ et paramétrisé par abscisse curviligne. Considérons maintenant les repères de Frenet respectifs $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ et $(\mathbf{T}^*, \mathbf{N}^*, \mathbf{B}^*)$. On a alors :

$$\mathbf{T}^* = d_s P^* = A\, d_s P = A\mathbf{T}\,.$$

Une nouvelle dérivation fournit

$$\kappa^* \mathbf{N}^* = \kappa\, A\mathbf{N}\,.$$

Comme $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, cette transformation préserve la norme, si bien que

$$\kappa^* = \kappa \quad \text{et} \quad \mathbf{N}^* = A\mathbf{N}\,.$$

Aussi,

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{T}^* \wedge \mathbf{N}^* = A\mathbf{T} \wedge A\mathbf{N} = A\mathbf{B}\,,$$

car une matrice $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ transforme une BOND en une BOND. Finalement,

$$\tau^* \mathbf{N}^* = d_s \mathbf{B}^* = A\, d_s \mathbf{B} = \tau A\mathbf{N} = \tau \mathbf{N}^*,$$

de sorte que l'on a bien

$$\tau^* = \tau.$$

□

Théorème 5. *Deux arcs géométriques orientés (biréguliers et de classe $\mathcal{C}^3$), qui ont même courbure et même torsion, sont équivalents, ou encore, un arc géométrique orienté est défini, à isométrie affine directe près, par sa courbure et sa torsion.*

De plus, étant données des fonctions $\kappa \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}_+^*)$ et $\tau \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, où I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, il existe, à une isométrie affine directe près, un seul arc géométrique orienté de classe $\mathcal{C}^3$ (nécessairement birégulier) de $\mathcal{E}^3$, qui a κ pour courbure et τ pour torsion.

On remarquera que la seconde affirmation de ce théorème contient un résultat d'existence, alors que dans la première, on considère l'arc comme donné.

Notre preuve du Théorème 5 sera basée sur la théorie du repère mobile.

Démonstration. Soit un arc géométrique $\mathcal{C}$, birégulier, orienté, de classe $\mathcal{C}^3$ et de paramétrisation par abscisse curviligne $P = f(s)$, $s \in I$. Nous pouvons construire le ROND mobile de Frenet $\mathcal{R} = (P, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ d'origine les points P de l'arc considéré. Les fonctions vectorielles P, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{B}$ qui déterminent le repère satisfont au système différentiel formé essentiellement par les formules de Frenet

$$\begin{cases} d_s P = \mathbf{T}\,, \\ d_s \mathbf{T} = \kappa \mathbf{N}\,, \\ d_s \mathbf{N} = -\kappa \mathbf{T} - \tau \mathbf{B}\,, \\ d_s \mathbf{B} = \tau \mathbf{N}\,, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

où κ et τ désignent la courbure et la torsion de $\mathcal{C}$ respectivement. Le système d'équations (3.2.5) correspond au cas—déjà étudié au chapitre précédent—d'un repère mobile ne dépendant que d'un seul paramètre s à valeurs dans un intervalle I. En reprenant les notations du paragraphe 2.2.1, nous avons ici

$$e_1 = \mathbf{T}, \;\; e_2 = \mathbf{N} \;\text{ et }\; e_3 = \mathbf{B}\,,$$

$$(\Gamma_i^k)_{k,i\in\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\rho^i)_{i\in\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le Théorème–clef 1 affirme que les fonctions κ et τ déterminent le mouvement du ROND $\mathcal{R} := (P, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ et en particulier celui de son origine, si l'on spécifie le ROND $\mathcal{R}_0 := (P_0, \mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$ avec lequel $\mathcal{R}$ coïncide à un instant initial s_0. Un changement de position initiale correspondant à une isométrie affine directe, l'arc est déterminé, à isométrie affine directe près, par les fonctions κ et τ.

Passons à la preuve de la seconde partie du théorème. Le Théorème–clef 1 assure en fait l'existence et l'unicité d'un ROND $\mathcal{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système (3.2.5), pour chaque ROND initial $\mathcal{R}_0$. Nous examinerons si $\mathcal{R}$ est bien le trièdre de Frenet d'un arc géométrique ayant toutes les propriétés spécifiées dans l'énoncé et admettant les fonctions κ et τ données comme courbure et torsion. Le vecteur $\mathbf{N}$ et la fonction κ étant de classe $\mathcal{C}^1$, il découle de (3.2.5) que $\mathbf{T}$ (resp. P) est de classe $\mathcal{C}^2$ (resp. $\mathcal{C}^3$). Il résulte alors du système (3.2.5) que $d_sP \neq 0$, que $\|d_sP\| = 1$ et que $d_s^2P \neq 0$, si bien que la fonction $P \in \mathcal{C}^3(I, E^3)$ définit un arc géométrique orienté $\mathcal{C}$ de classe $\mathcal{C}^3$, paramétré par abscisse curviligne et birégulier. De plus, le système (3.2.5) entraîne que $\mathbf{T}$ est "le" vecteur tangent, que κ est la courbure de $\mathcal{C}$, que $\mathbf{N}$ est le vecteur normal principal (et donc que $\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$ est le vecteur binormal) et que finalement τ est la torsion de $\mathcal{C}$. □

3.3 Hypersurfaces de l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$

Nous pouvons trouver un résultat analogue au théorème fondamental de la théorie des courbes de $\mathcal{E}^3$, dans le cas des surfaces de $\mathcal{E}^3$ (Théorème fondamental de la théorie des surfaces), et même plus généralement dans le cas des hypersurfaces de $\mathcal{E}^n$ (Théorème de Bonnet). On étudiera donc dans cette section les hypersurfaces de $\mathcal{E}^n$, ou parfois les hypersurfaces locales de $\mathcal{E}^n$ (repectivement les surfaces ou les surfaces locales de $\mathcal{E}^3$), utilisant ainsi le cadre mathématique décrit au paragraphe 3.1.

3.3.1 Première forme fondamentale

Pensons d'abord à la *géométrie intrinsèque* d'une hypersurface M de $\mathcal{E}^n$, i.e. apprécions-la du point de vue d'une personne vivant dans l'hypersurface et ne pouvant en sortir (pour suivre le raisonnement plus facilement, on peut considérer le cas particulier d'une surface M de $\mathcal{E}^3$).

Pour mesurer des longueurs sur cette (hyper)surface, ses habitants ont besoin d'un produit scalaire, qui est défini sur les espaces tangents T_PM à la surface, $P \in M$ (car un produit scalaire est défini dans un espace vectoriel). Comme T_PM est un sous-espace vectoriel réel de dimension $p = n - 1$ de E^n, un tel produit scalaire est donné par la restriction g_P du produit scalaire g de E^n à T_PM, qui est un 2-tenseur covariant $g_P \in \otimes_2^0 T_PM \simeq \mathcal{L}_2(T_PM \times T_PM, \mathbb{R})$ sur T_PM, symétrique, défini positif et dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de $P \in M$. Ce champ de 2-tenseurs covariants (ou champ de produits scalaires) est appelé *première forme fondamentale* de la surface M. Un tel champ de produits scalaires sur une variété abstraite M est appelé une *structure riemannienne* sur M.

Dans la suite, on notera I_P le produit scalaire g_P (*première forme fondamentale de M au point P*) et I le champ de ces produits scalaires (*première forme fondamentale de M*), *i.e.*

$$\mathrm{I} : M \ni P \to (\mathrm{I}_P : T_PM \times T_PM \ni (X, Y) \to g_P(X, Y) = X \cdot Y \in \mathbb{R})\,.$$

Si $f : \Omega \ni u \to f(u) \in M$ est un paramétrage de M au voisinage de $P = f(u)$, alors $\mathrm{I}_P = g_P \in \mathcal{L}_2(T_PM \times T_PM, \mathbb{R})$ est caractérisé dans la base $(\partial_{u^i} f)_i$ de T_PM par la matrice de composantes

$$\mathrm{I}_{P,ij} = g_P(\partial_{u^i} f, \partial_{u^j} f) = \partial_{u^i} f \cdot \partial_{u^j} f\,.$$

Dans le cas des surfaces de $\mathcal{E}^3$, on utilisera les notations traditionnelles introduites par Gauss :

$$(\mathrm{I}_{P,ij})_{ij} = (g_{P,ij})_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Deuxième forme fondamentale

Examinons à présent la *géométrie extrinsèque* d'une hypersurface, i.e. regardons l'(hyper)surface du point de vue d'une personne vivant dans l'espace ambiant dans lequel cette dernière est plongée. Considérons, pour plus de facilité, une surface de $\mathcal{E}^3$. Intuitivement, on remarque que la forme de la surface est étroitement liée aux variations du vecteur normal unitaire à cette surface : plus ce vecteur varie vite dans une certaine direction, plus la surface est "courbée" dans cette direction.

Vecteur normal canonique

Définition 9. *Étant donnée une hypersurface M de $\mathcal{E}^n$, on appelle* vecteur normal *à M en un point $P \in M$, tout vecteur de E^n qui est orthogonal (pour le produit scalaire g de E^n) à l'espace tangent $T_PM \subset E^n$. L'ensemble N_PM des vecteurs normaux à M en P est un sous-espace vectoriel réel de dimension 1 de E^n, appelé* espace normal *à M au point P.*

Si $f : \Omega \ni u \to f(u) \in M$ est un paramétrage de M au voisinage de $P = f(u)$, le produit vectoriel $\mathfrak{n} := \partial_{u^1} f \wedge \ldots \wedge \partial_{u^{n-1}} f$ dans E^n (supposé orienté) des $n-1$ vecteurs de base de T_PM, est un vecteur normal, non unitaire en général. Vu l'hypothèse de régularité, ce vecteur est non nul et constitue donc une base de N_PM. En particulier, dans le cas des surfaces ($n = 3$), ce vecteur normal à M en P est le produit vectoriel $\mathfrak{n} := \partial_{u^1} f \wedge \partial_{u^2} f$. En fait $\mathfrak{n}$ ne change pas de sens dans un changement de paramétrisation, si l'hypersurface considérée est orientable et orientée.

Si M est une hypersurface orientée de l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$, également orienté, on peut définir géométriquement un *vecteur normal canonique* en chaque point $P \in M$, qui varie de manière lisse avec $P \in M$. En effet, il suffit de considérer le vecteur normal $\nu_P \in N_PM$, qui est de norme 1 et tel que, si $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base positive de T_PM, alors $(e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu)$ est une base positive de E^n.

Dans un paramétrage $f : \Omega \ni u \to f(u) \in M$ d'une hypersurface M de $\mathcal{E}^n$ au voisinage de $P = f(u)$, ce vecteur normal canonique est donné par

$$\nu_P = \frac{\mathfrak{n}}{\|\mathfrak{n}\|}\,.$$

Nous avons ainsi un repère mobile naturel de $\mathcal{E}^n$, d'origine les points de l'hypersurface considérée : $\mathcal{R} = (P, \partial_{u^1} P, \ldots, \partial_{u^{n-1}} P, \nu_P)$.

Shape operator

Revenons à la motivation du début du paragraphe. En chaque point $P \in M$, la forme d'une surface M dans l'espace ambiant $\mathcal{E}^3$ semble être donnée par les variations en P du vecteur normal canonique ν dans les directions des vecteurs tangents V_P à la surface M au point P. Ce raisonnement se généralise au cas des hypersurfaces.

Comme ν est un champ de vecteurs, *i.e.* $\nu \in \mathcal{C}^\infty(M, E^n)$, sa variation dans la direction d'un vecteur tangent V_P à la surface M au point P est donnée par la dérivée directionnelle $(d\nu)_P(V_P)$, notion introduite dans le cas des variétés abstraites (voir p.ex. [Pon08]). Cette dérivée contient donc l'information sur la forme de M au point P. D'autre part, ce type de dérivée peut être calculé moyennant

les vitesses de courbes. De fait, si α est une courbe de M, telle que $\alpha(0) = P$ et $d_t\alpha|_0 = V_P$, nous pouvons écrire

$$(d\,\nu)_P(V_P) = (d\,\nu)_{\alpha(0)}(d_t\alpha|_0) = d_t(\nu \circ \alpha)|_0 \in E^n.$$

Il est alors facile de voir que $(d\,\nu)_P(V_P) \in T_PM$, car

$$(d\nu)_P(V_P) \cdot \nu_P = d_t(\nu \circ \alpha)|_0 \cdot (\nu \circ \alpha)|_0 = \frac{1}{2}d_t[(\nu \circ \alpha) \cdot (\nu \circ \alpha)]|_0 = 0,$$

car $\nu_{\alpha(t)}$ est un vecteur de norme constante.

Nous avons alors la définition suivante :

Définition 10. *On appelle* opérateur forme (*shape operator*) *de l'hypersurface orientée M au point P, l'application $\mathrm{Sp}_P : T_PM \to T_PM$ définie par $\mathrm{Sp}_P(V_P) = -(d\nu)_P(V_P)$.*

L'opérateur forme Sp_P est alors clairement un endomorphisme de T_PM. Considérons à présent la forme bilinéaire

$$\mathrm{II}_P : T_PM \times T_PM \ni (X, Y) \to \mathrm{II}_P(X, Y) = \mathrm{Sp}_P(X) \cdot Y = -(d\,\nu)_P(X) \cdot Y \in \mathbb{R},$$

qui encode la forme de M au point P au même titre que Sp_P, et est appelée *deuxième forme fondamentale* de l'hypersurface orientée M au point P. Comme la première forme fondamentale I_P, cette seconde forme fondamentale II_P est à son tour *symétrique*. De fait, soient $X, Y \in T_PM$ et soit $f : \Omega \ni u \to f(u) \in M$ une paramétrisation de M au voisinage de P. Posons $X = X^i\partial_{u^i}f$ et $Y = Y^j\partial_{u^j}f$, et observons que $\nu \cdot \partial_{u^j}f = 0$ implique que

$$\partial_{u^i}\nu \cdot \partial_{u^j}f = -\nu \cdot \partial_{u^i}\partial_{u^j}f. \tag{3.3.1}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{II}_P(X, Y) = -X^iY^j\,(d\,\nu)_P(\partial_{u^i}f) \cdot \partial_{u^j}f = -X^iY^j\,\partial_{u^i}\nu \cdot \partial_{u^j}f = X^iY^j\,\nu \cdot \partial_{u^i}\partial_{u^j}f,$$

de sorte qu'en commutant les dérivées partielles portant sur f et en revenant en arrière, on obtient que $\mathrm{II}_P(X, Y) = \mathrm{II}_P(Y, X)$. On appelle alors le champ de ces formes bilinéaires symétriques II_P, la *deuxième forme fondamentale* II de M.

Si $f : \Omega \ni u \to f(u) \in M$ est un paramétrage de M au voisinage de $P = f(u)$, alors l'applicalion bilinéaire symétrique $\mathrm{II_P}$ est caractérisée dans la base $(\partial_{u^i}f)_i$ de T_PM par la matrice symétrique

$$\mathrm{II}_{P,ij} = -\partial_{u^i}\nu \cdot \partial_{u^j}f = \nu \cdot \partial_{u^i}\partial_{u^j}f,$$

voir Equation (3.3.1). Dans le cas des surfaces de $\mathcal{E}^3$, on a les notation traditionnelles :

$$(\mathrm{II}_{P,ij})_{ij} = (\psi_{P,ij})_{ij} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Théorème de Bonnet

Considérons une hypersurface locale orientée M de $\mathcal{E}^n$, paramétrisée par (D, f), où D désigne un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^{n-1}$ et où $f : \mathbb{R}^{n-1} \supset D \ni u \to f(u) \in M \subset \mathbb{R}^n$ est une immersion bijective de D dans M, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'inverse continu. Nous avons alors un repère mobile naturel $\mathcal{R}_u = (P, e_i)$, d'origine les points de l'hypersurface, défini par

$$P = f(u),$$

$$e_a = \partial_{u^a}f \quad (a = 1, \ldots, n-1) : \text{base de } T_PM,$$

$$\text{et} \quad e_n = \nu_P : \text{base de } N_PM.$$

A partir d'un tel repère, nous pouvons trouver facilement la première et la deuxième forme fondamentale de l'hypersurface, $\mathrm{I}_P = g_P$ et $\mathrm{II}_P = \psi_P$, $\forall P \in M$, *i.e.* trouver leurs composantes $g_{P,ij} = g_{ij}(u)$ et $\psi_{P,ij} = \psi_{ij}(u)$ dans cette base comme fonctions de u, par les définitions du paragraphe précédent. Il est alors facile de voir, par un raisonnement analogue à celui dans le cas des courbes (voir paragraphe 4), que *si deux hypersurfaces locales de $\mathcal{E}^n$ sont équivalentes, alors les deux premières formes fondamentales respectives coïncident.* Par recollement des hypersurfaces locales, ce résultat est aussi valable dans le cas plus général des hypersurfaces (globales). Notre objectif est de vérifier si la réciproque est aussi vraie.

Remarque 1. *Dans la suite on utilisera les lettres a, b, c pour les indices variant de 1 à $n-1$, tandis que les lettres i, j, k correspondront comme toujours à ceux variant de 1 à n.*

La variation infinitésimale du repère $\mathcal{R}_u$ est donnée par les différentielles dP et de_i. On a $dP = \partial_{u^a} f du^a$ et $de_i = \eta_i^k e_k = \Gamma_{ia}^k du^a e_k$. Avec les notations du Chapitre 2, on a donc ici

$$\omega^a = du^a \quad \text{et} \quad \omega^n = 0. \tag{3.3.2}$$

De plus, les formes fondamentales ω^i et η_i^k vérifient les conditions de compatibilité (2.2.5) et (2.2.6). Considérons en particulier (2.2.5) :

$$d\omega^i + \eta_k^i \wedge \omega^k = 0.$$

Or ici $\omega^a = du^a$ et $\omega^n = 0$, donc $d\omega^i = 0$, et ainsi

$$\begin{aligned} & \eta_a^i \wedge \omega^a = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Gamma_{ab}^i du^b \wedge du^a = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{a<b} (\Gamma_{ab}^i - \Gamma_{ba}^i) du^a \wedge du^b = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Gamma_{ab}^i = \Gamma_{ba}^i, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

i.e. les Γ_{ab}^i, appelés *symboles de Christoffel*, sont symétriques par rapport aux indices inférieurs.

Posons maintenant

$$\eta_{ai} = g_{ad}\eta_i^d \quad \text{et} \quad \Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma_{bc}^d,$$

si bien que

$$\eta_b^a = g^{ad}\eta_{db} \quad \text{et} \quad \Gamma_{bc}^a = g^{ad}\Gamma_{dbc},$$

où $(g^{ab})_{ab}$ est la matrice inverse de la matrice $(g_{ab})_{ab}$, et

$$\Gamma_{abc} = g_{ad}\Gamma_{bc}^d = g_{ad}\Gamma_{cb}^d = \Gamma_{acb}, \tag{3.3.4}$$

par (3.3.3). D'autre part,

$$\begin{aligned} dg_{ab} &= d(e_a \cdot e_b) = de_a \cdot e_b + e_a \cdot de_b \\ &= \Gamma_{ac}^i du^c e_i \cdot e_b + \Gamma_{bc}^i du^c e_a \cdot e_i = g_{bd}\Gamma_{ac}^d du^c + g_{ad}\Gamma_{bc}^d du^c \\ &= \Gamma_{bac} du^c + \Gamma_{abc} du^c = (\Gamma_{abc} + \Gamma_{bac}) du^c, \end{aligned}$$

où l'on peut remplacer les sommes sur i par des sommes sur d car $e_n \cdot e_b = 0$, et

$$dg_{ab} = \partial_{u^c} g_{ab} du^c,$$

de sorte que

$$\Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} = \partial_{u^c} g_{ab}. \tag{3.3.5}$$

De (3.3.4) et (3.3.5) on obtient alors

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}\left(\partial_{u^c} g_{ab} - \partial_{u^a} g_{bc} + \partial_{u^b} g_{ca}\right), \tag{3.3.6}$$

ce qui permet de déterminer les fonctions Γ^a_{bc}, et par conséquent les formes η^a_b, connaissant les composantes $g_{ab} = g_{ab}(u) = \mathrm{I}_P(\partial_{u^a} f, \partial_{u^b} f)$, *i.e.* connaissant la première forme fondamentale I_P.

Notons que les η^k_i, qui ne sont à présent pas encore connus, sont les η^a_n, les η^n_a et η^n_n. On voit facilement que ces η^k_i restants peuvent être obtenus à partir des η_{an} (et de la première forme fondamentale). En effet, $\eta^a_n = g^{ad}\eta_{dn}$,

$$\eta^n_a = g_{in}\eta^i_a = e_n \cdot de_a = -e_a \cdot de_n = -g_{ai}\eta^i_n = -g_{ab}\eta^b_n = -\eta_{an}$$

et

$$\eta^n_n = g_{in}\eta^i_n = e_n \cdot de_n = \frac{1}{2}d(e_n \cdot e_n) = 0.$$

Or,

$$-du^b\,\mathrm{II}_P(e_b, e_a) = du^b (d\nu)_P(\partial_{u^b} f) \cdot \partial_{u^a} f = du^b \partial_{u^b}\nu \cdot \partial_{u^a} f = d\nu \cdot \partial_{u^a} f = de_n \cdot e_a = \eta_{an}, \tag{3.3.7}$$

de sorte que les η_{an} et par là les η^k_i restants peuvent être déterminés, connaissant les composantes $\psi_{ab} = \psi_{ab}(u) = \mathrm{II}_P(\partial_{u^a} f, \partial_{u^a} f)$, *i.e.* connaissant la deuxième forme fondamentale II_P.

Ainsi, *la connaissance des deux formes fondamentales* I *et* II *de M détermine entièrement les formes différentielles ω^i* (voir Equation (3.3.2)) *et η^k_i*, $i, k = 1, \ldots, n$, qui vérifient, rappelons-le, les conditions de compatibilité (2.2.5) et (2.2.6). Par le Théorème 3, elle détermine donc le mouvement du repère $\mathcal{R}_u$, lorsque sa position est connue en un point u_0. En particulier, la connaissance des formes I et II détermine la fonction $P = f(u)$, si les vecteurs initiaux $f(u_0)$ et $e_i(u_0)$, $i = 1, \ldots, n$, vérifiant $g_{ij}(u_0) = e_i(u_0) \cdot e_j(u_0)$ sont donnés. Remarquons que le mouvement du repère est donné par rapport à un repère fixe de $\mathcal{E}^n$. Si nous changeons le repère initial, il suffit, pour retrouver la même description du mouvement, de déplacer le repère fixe de la même manière, ce qui correspond à une isométrie affine.

Nous avons donc le résultat :

Théorème de Bonnet. *Une hypersurface de $\mathcal{E}^n$ est entièrement déterminée, à une isométrie affine près, par la connaissance de ses deux premières formes fondamentales.*

Remarque.

1. En fait, nous avons démontré le théorème pour une hypersurface locale de $\mathcal{E}^n$. Mais on peut généraliser ce résultat aux hypersurfaces globales, par les recollements de ces hypersurfaces locales.
2. On remarque que le théorème de Bonnet ne comporte pas de résultat d'existence, contrairement à son analogue relatif aux courbes de $\mathcal{E}^3$ (voir Théorème 5). Le Théorème de Bonnet part de l'existence d'une hypersurface ayant les formes fondamentales I et II, qui sont supposées connues au sens de la preuve ci-dessus. Cette connaissance des formes fondamentales, ne fait que déterminer que l'application $P = f(u)$ de M dans $\mathcal{E}^n$, si bien qu'il serait plus judicieux d'affirmer que l'immersion f de M dans $\mathcal{E}^n$ est déterminée par les formes fondamentales. De plus, si l'on veut qu'il existe une hypersurface ayant des formes I et II données, on ne peut se les donner arbitrairement, car les formes différentielles ω^i, η^k_i, qu'elles déterminent, doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité bien connues. Dans le cas des surfaces de $\mathcal{E}^3$, les conditions à satisfaire par les formes fondamentales sont données par les Équations de Codazzi et de Gauss (voir p.ex. [Shi08]).

3.4 Dérivée covariante

Le raisonnement que nous avons fait au paragraphe précédent nous amène à une notion très importante en Géométrie différentielle : la *dérivée covariante* sur une variété abstraite. Ce concept provient de ce que l'on appelle la différentielle absolue (d'un vecteur tangent à la variété), notions développées par Gregorio Ricci-Curbastro et son élève Tullio Levi-Civita à la fin du XIX[e] siècle.

Considérons tout d'abord une hypersurface locale M de $\mathcal{E}^n$, de paramétrisation (D, f). Nous utiliserons ici les mêmes notations que dans le paragraphe précédent. De plus, nous noterons $\Gamma(TM)$, où TM désigne comme d'ordinaire le fibré tangent de la variété M, le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module des champs de vecteurs de M, ou encore des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré vectoriel TM. Comme M est une hypersurface locale, si $X \in \Gamma(TM)$, le champ $X = X^a \partial_{u^a} f$ est un vecteur variable, fonction $\mathcal{C}^\infty$ des paramètres u^a. La différentielle de ce vecteur est alors donnée par

$$\begin{aligned} dX &= (dX^a)\partial_{u^a} f + X^a d(\partial_{u^a} f) \\ &= (dX^a)\partial_{u^a} f + X^a(\eta_a^b \partial_{u^b} f + \eta_a^n \nu) \\ &= \partial_{u^b} X^a du^b \partial_{u^a} f + X^a(\Gamma_{ac}^b du^c \partial_{u^b} f + \eta_a^n \nu) \\ &= \underbrace{(\partial_{u^c} X^b + X^a \Gamma_{ac}^b) du^c \partial_{u^b} f}_{\text{partie tangentielle de } dX} + \underbrace{X^a \eta_a^n \nu}_{\text{partie normale de } dX} \end{aligned}$$

Nous noterons ∇X la partie tangentielle de la différentielle dX, si bien que

$$\nabla_{\partial_{u^c} f} X = (\partial_{u^c} X^b + X^a \Gamma_{ac}^b)\partial_{u^b} f \tag{3.4.1}$$

et

$$\nabla X = \nabla_{\partial_{u^c} f} X du^c.$$

Examinons cette nouvelle application $\nabla_{\partial_{u^c} f}$. Par la définition que nous venons de poser, elle envoie un champ de vecteurs tangents à l'hypersurface M sur un nouveau champ de vecteurs tangents à M. Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_{u^c} f} : \quad & \Gamma(TM) && \to \Gamma(TM) \\ & X^b \partial_{u^b} f = X && \mapsto \nabla_{\partial_{u^c} f} X = (\partial_{u^c} X^b + X^a \Gamma_{ac}^b)\partial_{u^b} f\,. \end{aligned}$$

Cette application possède clairement les propriétés d'une dérivée, car elle est locale, linéaire et vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla_{\partial_{u^c} f}(hX) = (\partial_{u^c} h)X + h\nabla_{\partial_{u^c} f} X,$$

pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On peut alors définir la notion de dérivée d'un champ de vecteurs X dans la direction d'un champ de vecteurs $Y = Y^c \partial_{u^c} f$, par

$$\nabla_Y X = Y^c \nabla_{\partial_{u^c} f} X,$$

ce qui est, insistons-y, une propriété "naturelle" d'une dérivée directionnelle. L'application bilinéaire

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

est donc bien une dérivée directionnelle, dite dérivée covariante, qui, par rapport à la structure de module de $\Gamma(TM)$, jouit des propriétés

$$\begin{aligned} &\nabla_{hY} X = h\nabla_Y X, \\ &\nabla_Y(hX) = (dh)(Y)X + h\nabla_Y X, \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. On remarquera qu'il découle de ce qui précède que la dérivée covariante ∇ est complètement déterminée par la donnée des symboles de Christoffel Γ_{ac}^b, qui sont à leur tour donnés par la première forme fondamentale $(g_{ab})_{ab}$, voir paragraphe 3.3.3.

Sur une variété abstraite M, on définit une *dérivée covariante* comme application bilinéaire

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

qui vérifie les conditions (3.4.2). On peut prouver, voir [Pon05], que toute variété admet des dérivées covariantes, en les construisant localement et en les recollant ensuite moyennant une partition de l'unité. Il résulte des propriétés (3.4.2) qu'une dérivée covariante est locale par rapport à X et Y et que localement, dans une paramétrisation, on a

$$\nabla_{Y^c \partial_{u^c} f}(X^b \partial_{u^b} f) = Y^a(\partial_{u^a} X^b + X^c \Gamma^b_{ac})\partial_{u^b} f.$$

Une dérivée covariante est donc localement encore caractérisée par ses symboles de Christoffel, qui, sur une variété abstraite sans structure additionnelle, ne sont cependant plus canoniques. Si la variété M est munie d'une structure pseudo-riemannienne ou riemannienne (variété abstraite munie d'un champ g de 2-tenseurs covariants, symétriques et définis positifs), il est naturel d'imposer aux dérivées covariantes d'être "compatibles" avec la métrique g considérée. Si de plus, on exige que la torsion soit nulle, voir [Pon05], il existe sur M une seule dérivée covariante, appelée *dérivée covariante de Levi-Civita*, et les symboles de Christoffel de cette dérivée sont donnés par la formule usuelle

$$\Gamma^b_{ac} = g^{bl}\Gamma_{lac} = g^{bl}\frac{1}{2}\left(\partial_{u^c} g_{la} - \partial_{u^a} g_{lc} + \partial_{u^l} g_{ac}\right),$$

voir (3.3.6).

La notion de dérivée covariante sur une variété permet entre autres de définir sur cette dernière une notion de transport parallel. Ces concepts sont basiques en Géométrie différentielle et trouvent une importante application en Relativité générale.

3.5 Surfaces de $\mathcal{E}^3$ - Théorème de Gauss

Les surfaces sont des cas particuliers d'hypersurfaces de $\mathcal{E}^n$ lorsque $n = 3$. Tous les résultats qu'on a démontrés pour les hypersurfaces sont donc valables pour ce cas particulier. Mais, outre le théorème fondamental de la théorie des surfaces (théorème de Bonnet dans le cas $n = 3$), pour les surfaces de $\mathcal{E}^3$ il y a un autre résultat "remarquable" : le *Théorème de Gauss*, aussi appelé "*Theorema Egregium*". Nous montrerons maintenant ce théorème, qui, en dépit de sa célébrité, va s'avérer être un simple corollaire de nos précédentes investications basées sur la méthode du repère mobile de Cartan.

3.5.1 Courbure de Gauss

Considérons une surface orientée M de $\mathcal{E}^3$ et l'opérateur forme Sp_P au point $P \in M$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_P : \quad T_PM &\to T_PM \\ X_P &\mapsto \mathrm{Sp}_P(X_P) = -(d\nu)_P(X_P), \end{aligned}$$

où ν est le vecteur normal canonique de M.

L'espace T_PM est en espace vectoriel de dimension 2, pour tout $P \in M$, par conséquent, l'endomorphisme symétrique Sp_P est caractérisé, dans toute base de T_PM, par une matrice symétrique 2×2. Il est bien connu qu'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormée de *vecteurs principaux* (ou *vecteurs propres*) et que dans cette base, sa matrice est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les *valeurs principales* (ou *valeurs propres*) corréspondantes. Ici, Sp_P est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien (T_PM, g_P) et donc, dans la base orthonormée de vecteurs propres, Sp_P est caractérisé par la matrice

$$\begin{pmatrix} k_1(P) & 0 \\ 0 & k_2(P) \end{pmatrix}.$$

L'information relative à la "forme" de M au point P contenue dans l'opérateur forme est donc encodée dans ces deux valeurs propres $k_1(P)$ et $k_2(P)$ de Sp_P, qui sont appelées *courbures principales*. On a alors les définitions suivantes :

Définition 11. *On appelle* courbure de Gauss *de la surface orientée M au point P, la valeur*

$$\mathcal{K}_P = \det(\mathrm{Sp}_P) = k_1(P) \cdot k_2(P).$$

On appelle courbure moyenne *de la surface orientée M au point P, la valeur*

$$\mathcal{H}_P = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Sp}_P) = \frac{1}{2}\left(k_1(P) + k_2(P)\right).$$

Ces deux valeurs $\mathcal{K}_P$ et $\mathcal{H}_P$ sont bien définies, car le déterminant et la trace de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base utilisée pour les calculer. En effet, si $l \in \mathrm{End}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, B sa matrice dans une base $(e_i)_i$ et B' sa matrice dans une autre base $(e'_i)_i$. Soit A la matrice de passage de la base $(e_i)_i$ à la base $(e'_i)_i$. Alors

$$B = AB'A^{-1}$$

et donc

$$\det(B) = \det(AB'A^{-1}) = \det(A)\det(B')\det(A^{-1}) = \det(A)\det(B')(\det(A))^{-1} = \det(B'),$$

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB'A^{-1}) = \mathrm{tr}(B'A^{-1}A) = \mathrm{tr}(B').$$

3.5.2 Théorème de Gauss

Suivant la définition de la coubure de Gauss $\mathcal{K}_P = \det(\mathrm{Sp}_P)$, et comme $\mathrm{Sp}_P(X_P) = -(d\nu)_P(X_P)$, on s'attend à ce qu'elle dépende de la position ν de la surface M considérée dans l'espace ambiant. En fait, il n'en est rien : la courbure de Gauss ne dépend nullement de la façon dont la surface M est plongée dans l'espace ambiant, mais seulement de la manière dont sont mesurées les distances sur cette surface M, c'est-à-dire de la métrique $g : M \ni P \to g_P \in \otimes_2^0 T_P M$ de M. C'est ce que stipule le *Théorème "remarquable" de Gauss.*

Remarque 2. *Nous utiliserons aussi dans cette section la distinction entre les indices $a, b, c, \ldots$ et les indices $i, j, k, \ldots$ Ici, les premiers prendront les valeurs 1 et 2, tandis que les seconds vaireront entre 1 et 3.*

Théorème de Gauss (Theorema Egregium). *La courbure de Gauss $\mathcal{K}$ est déterminée seulement par la première forme fondamentale* I, *i.e. elle ne dépend que de la métrique de la surface.*

Démonstration. Soit M une surface orientée de $\mathcal{E}^3$ et P un point quelconque de cette surface. On considère l'espace euclidien $(T_P M, g_P)$ et une base orthonormée (e_1, e_2) de cet espace. On a ainsi un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}^3$ par rapport à la métrique $g : \mathcal{R} = (P, e_1, e_2, e_3)$, où $e_3 = \nu_P$. On a alors $de_i = \eta_i^k e_k$ et, comme la base $(e_i)_i$ est orthonormale, $\eta_i^k + \eta_k^i = 0$. En particulier,

$$de_3 = d\nu = \eta_3^1 e_1 + \eta_3^2 e_2 = -\eta_1^3 e_1 - \eta_2^3 e_2. \tag{3.5.1}$$

D'autre part, si (D, f) est un paramétrage de M au voisinage du point P,

$$dP = \partial_{u^a} f du^a \quad \text{(dans la base "naturelle" } (\partial_{u^a} f)_a \text{ de } T_P M\text{)},$$
$$dP = \omega^b e_b = \rho_a^b du^a e_b \quad \text{(dans la base orthonormée } (e_1, e_2) \text{ de } T_P M\text{)}$$

et donc

$$\partial_{u^a} f = \rho_a^b e_b.$$

La matrice $A' = (\rho_a^b)_{ba}$ est alors la matrice de passage de la base (e_a) à la base $(\partial_{u^a} f)$ et est de ce fait évidemment invesible. Posons alors $A = (A')^{-1}$. Par conséquent,

$$\omega^a(e_c) = \rho_b^a du^b(e_c) = A'^a_b du^b(A_c^d \partial_{u^d} f) = A'^a_b A_c^d du^b(\partial_{u^d} f) = A'^a_b A_c^d \delta_d^b = A'^a_b A_c^b = \delta_c^a,$$

c'est-à-dire $(\omega^a)_a$ est la base de T_P^*M duale de la base $(e_a)_a$ de T_PM.

Les formes différentielles ω^i et η_i^k vérifient naturellement les conditions de compatibilité (2.2.5) et (2.2.6), en particulier :

$$0 = d\omega^3 + \eta_k^3 \wedge \omega^k = \eta_1^3 \wedge \omega^1 + \eta_2^3 \wedge \omega^2 \quad (\text{car } \omega^3 = 0) \tag{3.5.2}$$

$$\text{et} \quad 0 = d\eta_1^2 + \eta_k^2 \wedge \eta_1^k = d\eta_1^2 + \eta_3^2 \wedge \eta_1^3 \quad (\text{car } \eta_i^i = 0). \tag{3.5.3}$$

On peut décomposer ces 1-formes différentielles locales de M dans la base $(\omega^a)_a$.

$$\eta_1^3 = \lambda_{1a}\omega^a \quad et \quad \eta_2^3 = \lambda_{2b}\omega^b.$$

Si nous remplaçons dans (3.5.2), il vient

$$0 = \lambda_{1a}\omega^a \wedge \omega^1 + \lambda_{2b}\omega^b \wedge \omega^2 = \lambda_{12}\omega^2 \wedge \omega^1 + \lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 = (\lambda_{21} - \lambda_{12})\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$i.e. \quad \lambda_{12} = \lambda_{21}. \tag{3.5.4}$$

La substitution dans (3.5.3) et l'application de (3.5.4) donnent

$$\begin{aligned} d\eta_1^2 &= (\lambda_{2b}\omega^b) \wedge (\lambda_{1a}\omega^a) \\ &= \lambda_{2b}\lambda_{1a}\omega^b \wedge \omega^a \\ &= (\lambda_{21}\lambda_{12} - \lambda_{22}\lambda_{11})\,\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= ((\lambda_{12})^2 - \lambda_{11}\lambda_{22})\,\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

D'autre part, en utilisant l'Équation (3.5.1), on obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_P(e_a) \cdot e_b &= -(d\nu)_P(e_a) \cdot e_b \\ &= -(-\eta_1^3 e_1 - \eta_2^3 e_2)(e_a) \cdot e_b \\ &= (\lambda_{1c}\omega^c e_1 + \lambda_{2d}\omega^d e_2)(e_a) \cdot e_b \\ &= (\lambda_{1c}\delta_a^c e_1 + \lambda_{2d}\delta_a^d e_2) \cdot e_b \\ &= \lambda_{1a}\delta_{1b} + \lambda_{2a}\delta_{2b} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathrm{Sp}_P \simeq \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'Équation (3.5.5) s'écrit finalement

$$d\eta_1^2 = -\det(\mathrm{Sp}_P)\,\omega^1 \wedge \omega^2 = -\mathcal{K}_P\,\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{3.5.6}$$

Or, nous avons vu dans la preuve du Théorème de Bonnet (voir 3.3.3) que les formes ω^1, ω^2 et η_1^2 sont déterminées par la première forme fondamentale [1], et par conséquent il en est de même pour la 2-forme différentielle $d\eta_1^2$ et la base $\omega^1 \wedge \omega^2$ du module des 2-formes différentielles. Aussi, la composante $\mathcal{K}_P$ est déterminée, sur toute partie paramétrée de M et donc partout, uniquement par la première forme fondamentale de M, *i.e.* par la métrique de la surface. □

1. En fait, dans la preuve du Théorème de Bonnet, nous avons travaillé dans la base naturelle $(\partial_{u^a} f)_a$ de T_PM et la base duale $(du^a)_a$ de T_P^*M, alors qu'ici nous travaillons dans les bases $(e_a)_a$ et $(\omega^a)_a$. On peut redémontrer le Théorème de Bonnet dans le cas des surfaces ($n = 3$) utilisant ces autres bases, retrouvant ainsi le même résultat concernant les 1-formes différentielles ω^1, ω^2 et η_1^2 (voir [Lel63], pp. $190 - 192$).

Bibliographie

[BG87] Berger M., Gostiaux B, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses universitaires de France, Paris (1987)

[Car28] Cartan E., *La Géométrie des espaces de Riemann*, Mémorial des Sciences Mathématiques, vol. 9 (1925)

[Dar72] Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, tomes 1-4, New York, Chelsea (1972)

[IL03] Ivey T.A. et Landsberg J.M., *Cartan for Beginners : Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, Graduate Studies in Mathematics, volume 61, American Mathematical Society (2003)

[Lel63] Lelong-Ferrand J., *Géométrie Différentielle*, Masson et C^{ie} Editeurs (1963)

[Pon05] Poncin N., *Méthodes géométriques et mathématique physique*, cours de Master, Universités du Luxembourg et de Metz (2005)

[Pon08] Poncin N., *Physique mathématique : Mécanique*, cours de Bachelor, Université du Luxembourg (2008)

[Pon08] Poncin N., *Géométrie différentielle*, cours d'introduction, Université du Luxembourg (2008)

[Shi08] Shifirn T., *Differential Geometry : A First Course in Curves and Surfaces*, preliminary version, University of Georgia (2008)

[Tho34] Thomas T. Y., Systems of Total Differential Equations Defined over Simply Connected Domains, *Annals of Mathematics*, Second Series, vol. 35, 4 (1934), pp. 730-734