



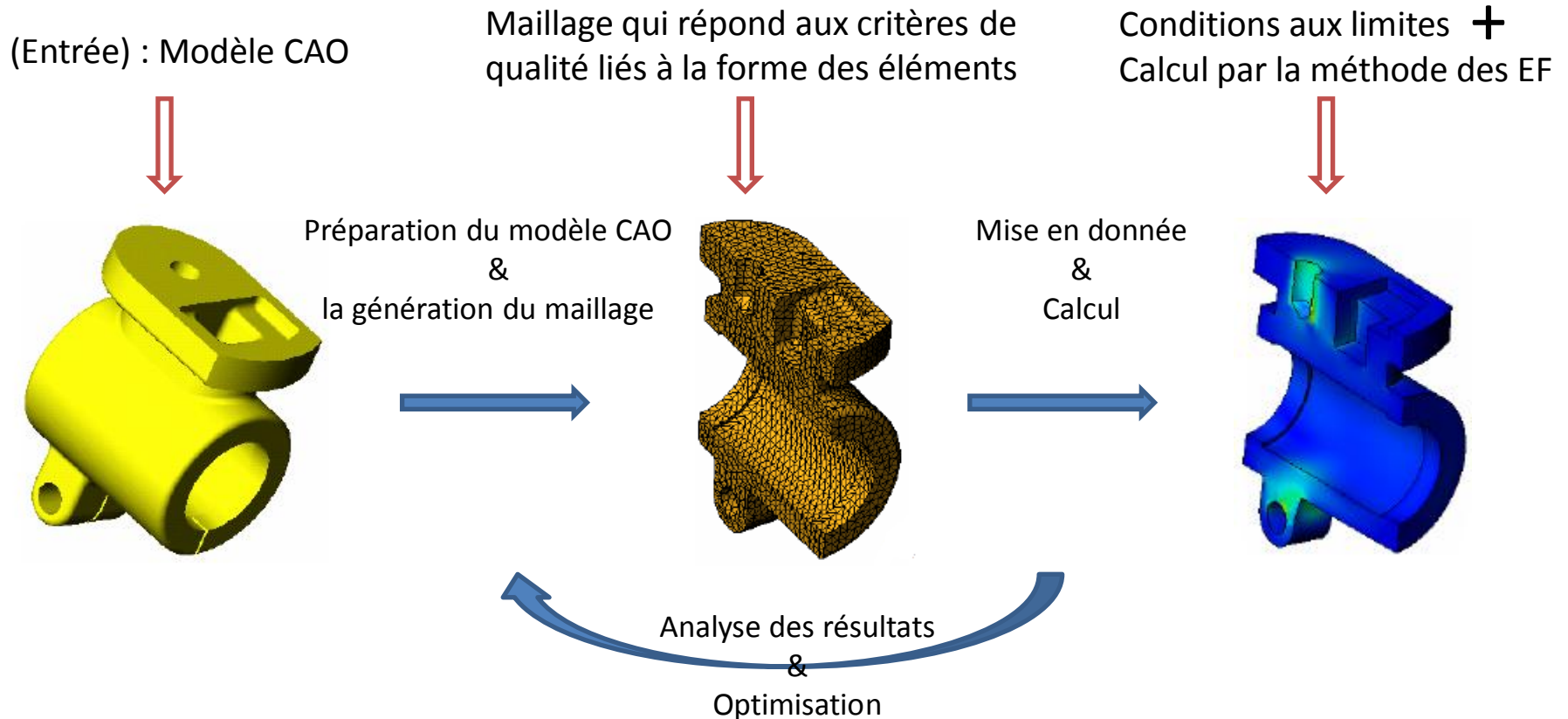
Analyse par la méthode XFEM d'ordre supérieur sur des géométries non-conformes au maillage: Représentation implicite d'objets à partir de la représentation paramétrique

M. Moumnassi, S. Bordas, R. Figueredo, P. Sansen

21^{ème} Congrès français de mécanique

Bordeaux, 26 au 30 août 2013

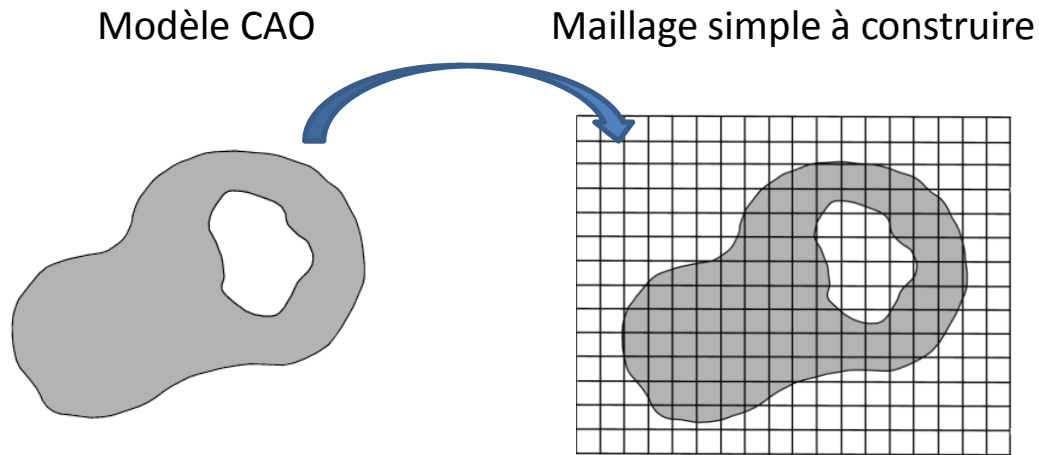
Introduction



Selon des statistiques publiées par [Cottrell et al. (2009)], environ 80% du temps humain lors d'un processus d'analyse éléments finis est consacré à la préparation du modèle CAO et la génération du maillage.

Motivations

Analyse sur des géométries non-conformes au maillage



Conditions aux limites +
Calcul éléments finis

Peut-on avoir la précision
et les taux de convergence
comme dans le cas du
maillage conforme ?

Représentation par les
frontières : fonctions
paramétriques

Conversion
→

Représentation volumique
par **Level set**
[Osher & Sethian (1988)]

Calcul
→

Analyse éléments finis
XFEM
[Moës et al. (1999)]

Plan de la présentation

- **Représentation géométrique par Level sets**
- **La méthode des éléments finis étendus (XFEM)**
- **Analyse par XFEM dans le cas de l'interpolation linéaire et d'ordre supérieur**
- **Conclusions et Perspectives**

La méthode des Level sets [Osher and Sethian (1988)]

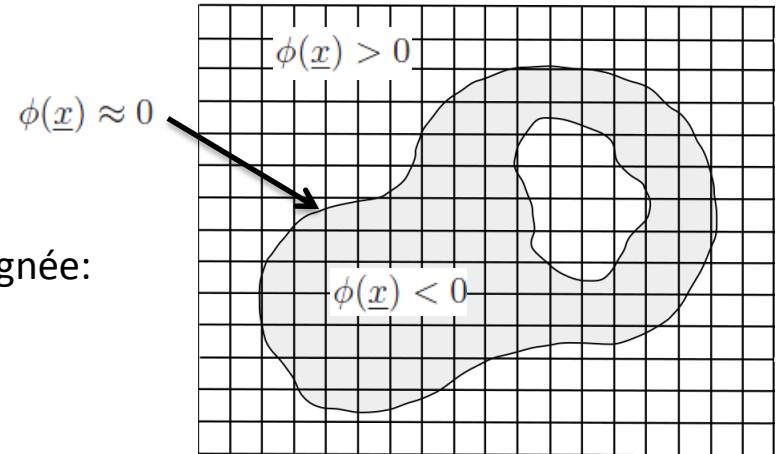
- Représentation implicite de la frontière:

$$\Gamma = \{\underline{x} : \phi(\underline{x}) = 0\}$$

- La version la plus utilisée est le champ de distance signée:

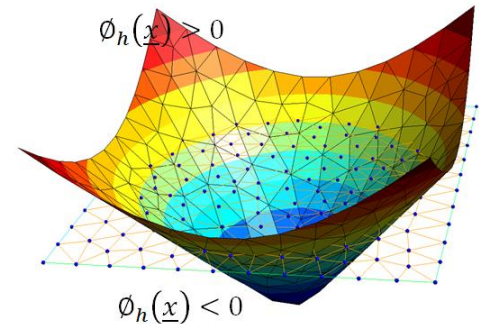
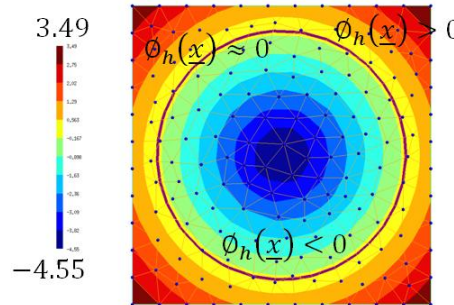
$$\phi(\underline{x}) = d(\underline{x}) = \text{sign}(\underline{x}) \cdot \min \{|\underline{x} - Q| : Q \in \Gamma\}$$

$$\text{sign}(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \underline{x} \in \text{extérieur} \\ -1 & \text{si } \underline{x} \in \text{intérieur} \end{cases}$$



- $\phi(\underline{x})$ est discrétisée par le maillage EF:

$$\phi_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) \phi_i$$



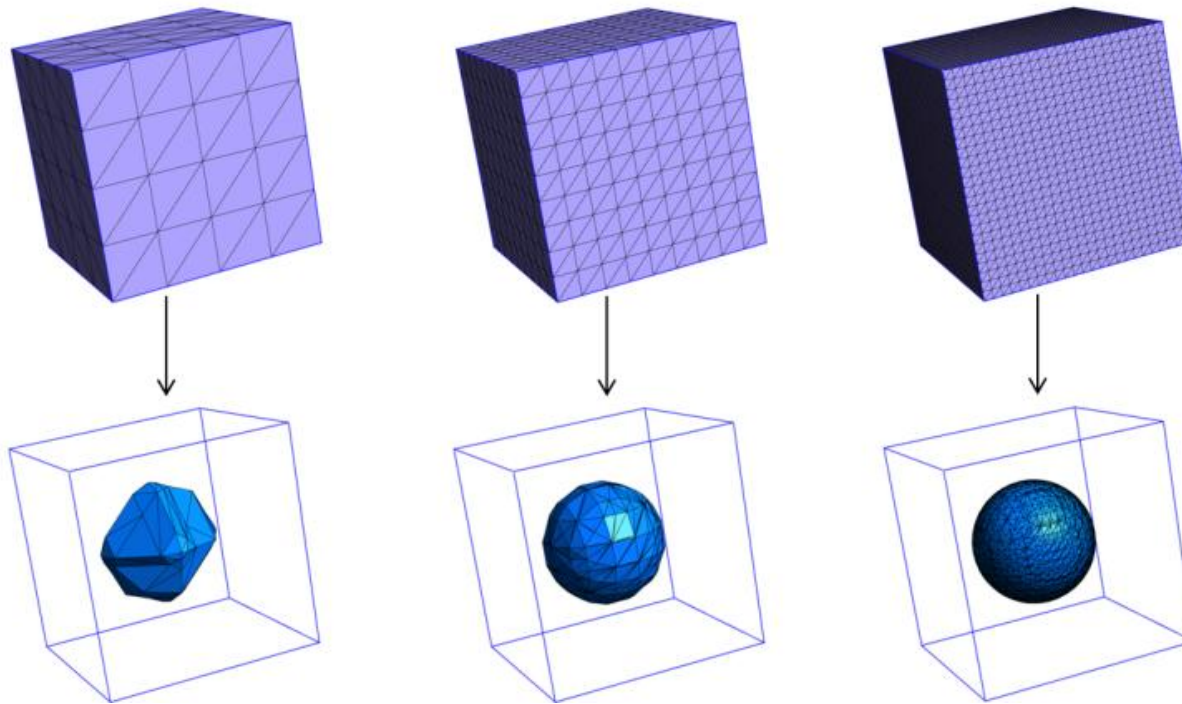
- $\phi(\underline{x}, t)$ présente l'intérêt d'être régie par la loi d'évolution:

$$\frac{\partial \phi(\underline{x}, t)}{\partial t} + \nabla \phi(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Hamilton-Jacobi})$$

Représentation géométrique par Level set

Inconvénients 1/2

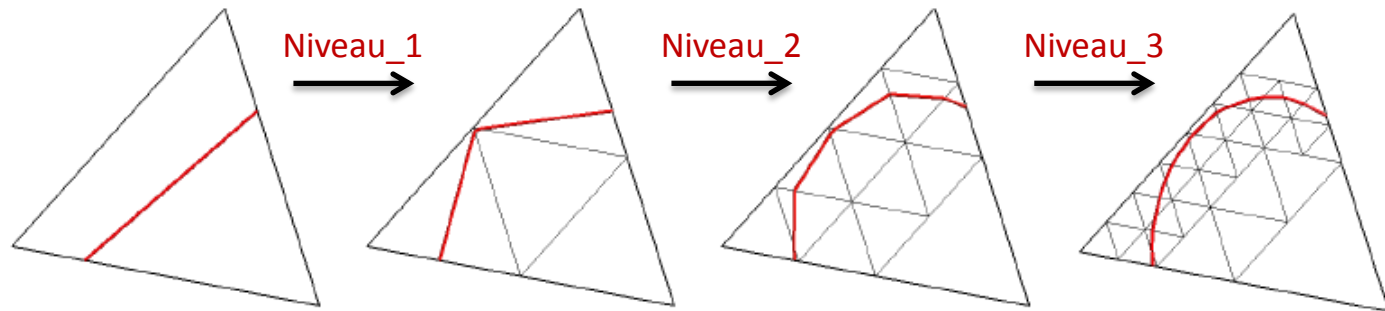
- L'approximation du domaine dépend de la taille des éléments du maillage EF



Approximation géométrique d'une sphère sur trois maillages de densité croissante

Techniques de raffinement basées sur un sous-maillage

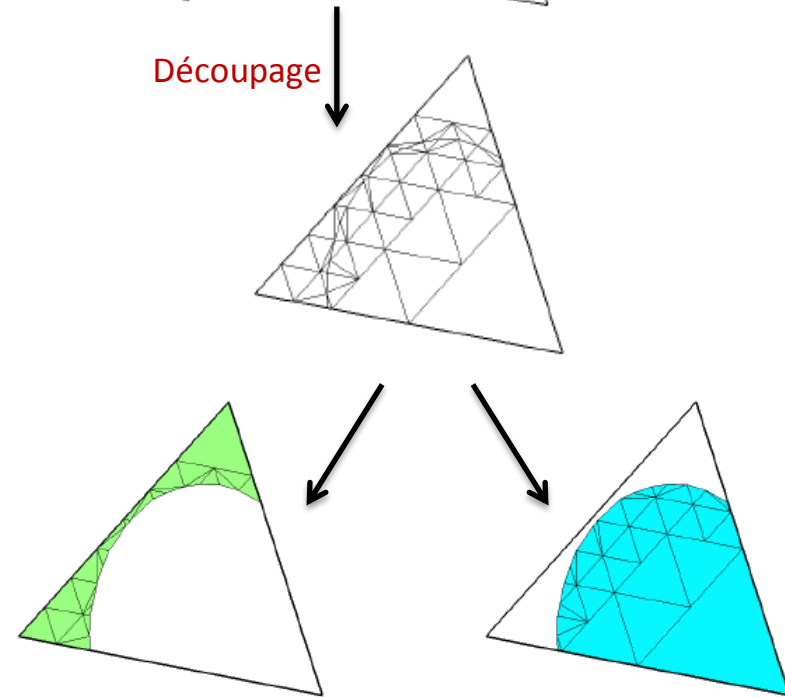
Sous-maillage gradué (SMG) en 2D



Si **une représentation fine de la frontière courbe** est nécessaire:

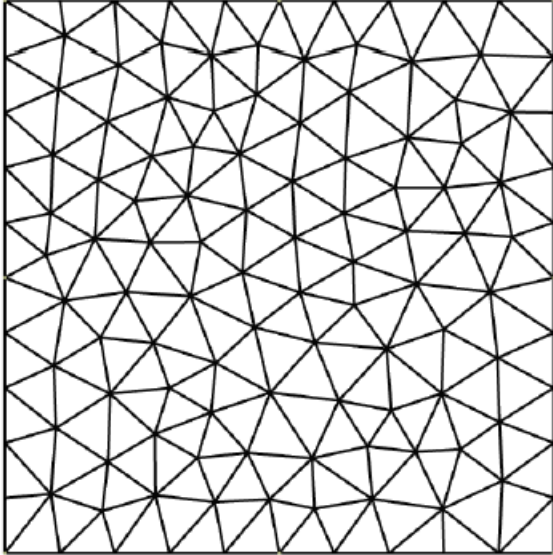
- chaque élément de frontière est subdivisé en quatre sous-triangles
- traiter chaque niveau de sous-maillage par l'algorithme de conversion
- appliquer la technique de découpage pour subdiviser les sous-éléments du dernier niveau

Découpage

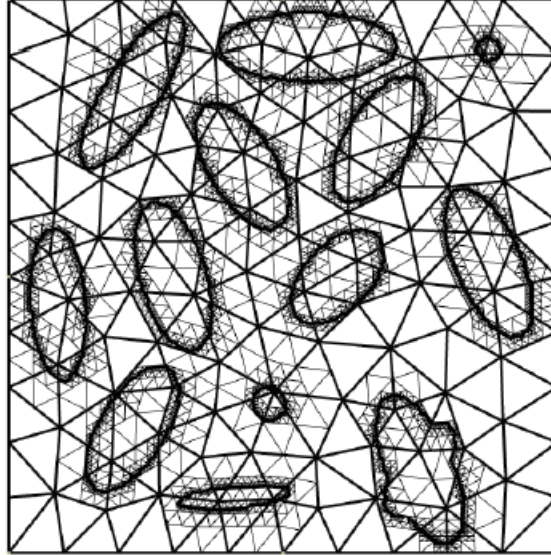


Techniques de raffinement basées sur un sous-maillage

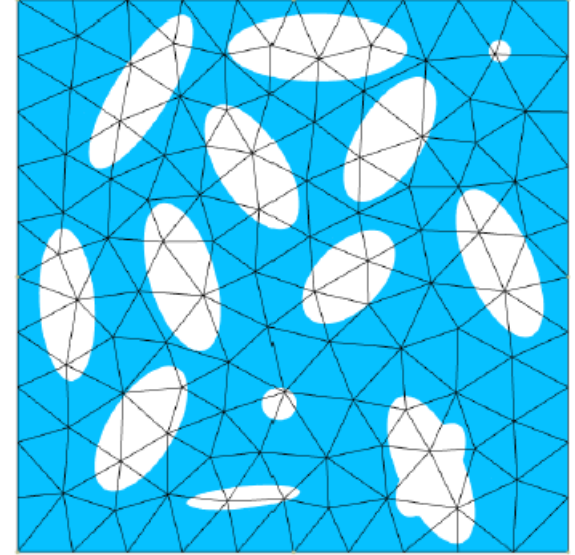
Sous-maillage gradué (SMG) en 2D



Maillage grossier de l'approximation EF



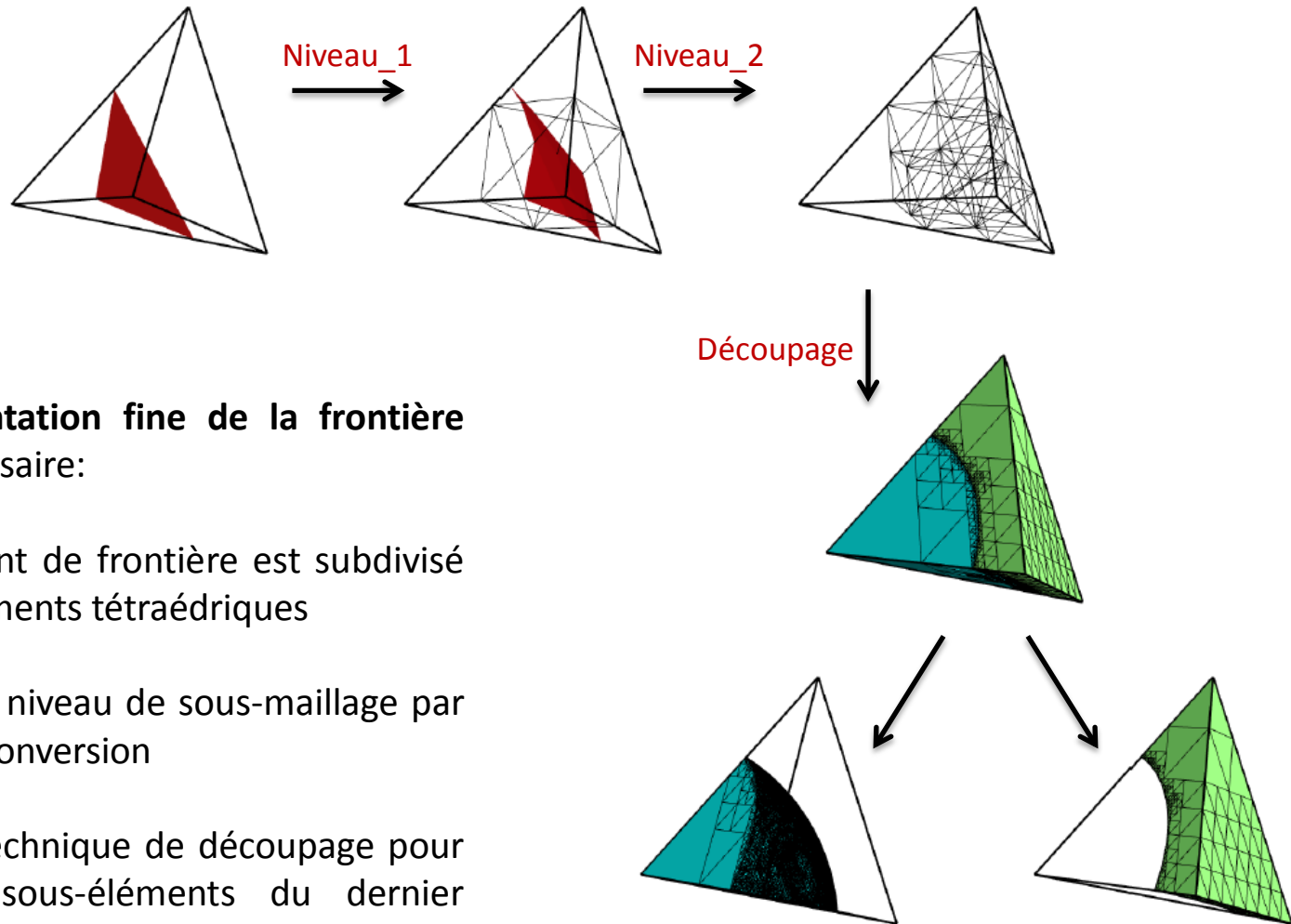
Raffinement par SMG de niveau ($n = 7$)



Approximation géométrique

Techniques de raffinement basées sur un sous-maillage

Sous-maillage gradué (SMG) en 3D

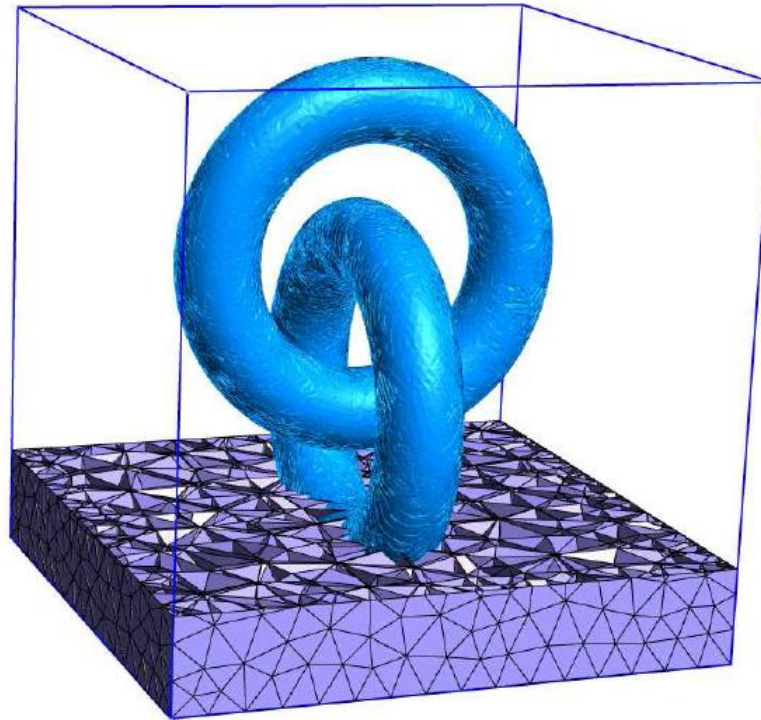


Si **une représentation fine de la frontière courbe** est nécessaire:

- chaque élément de frontière est subdivisé en huit sous-éléments tétraédriques
- traiter chaque niveau de sous-maillage par l'algorithme de conversion
- appliquer la technique de découpage pour subdiviser les sous-éléments du dernier niveau

Techniques de raffinement basées sur un sous-maillage

Sous-maillage gradué (SMG) en 3D

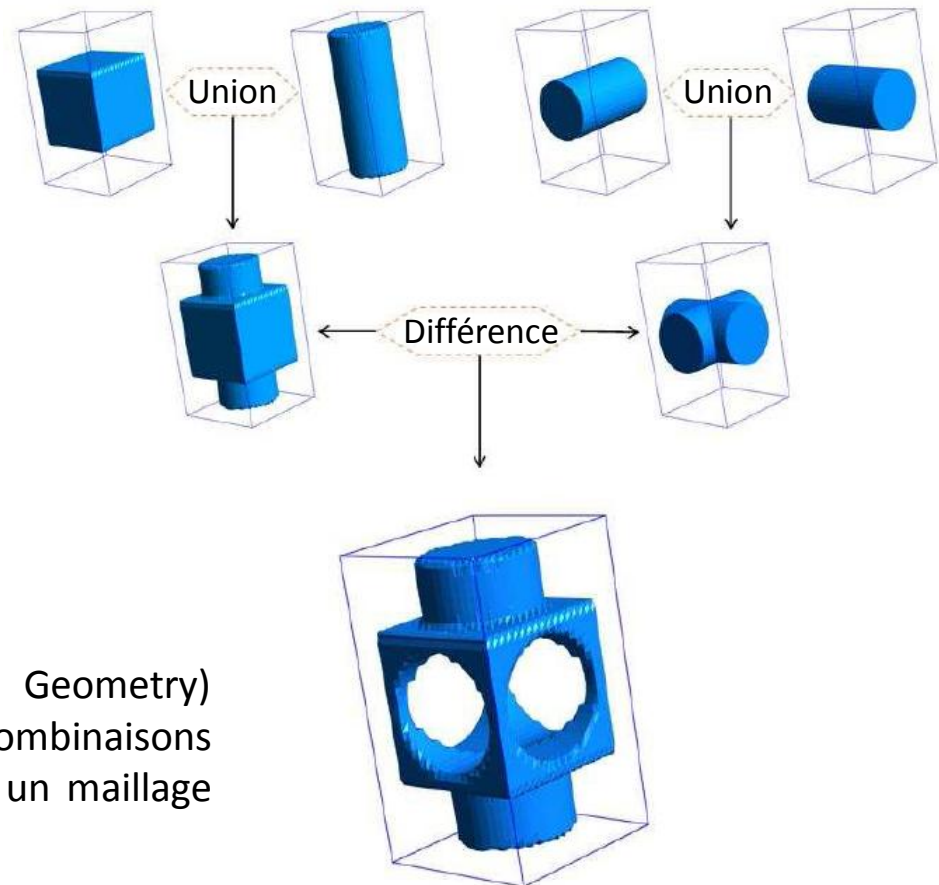


Approximation géométrique d'une microstructure contenant des inclusions en forme de tore indépendamment de la taille du maillage EF

Représentation géométrique par Level set

Inconvénients 2/2

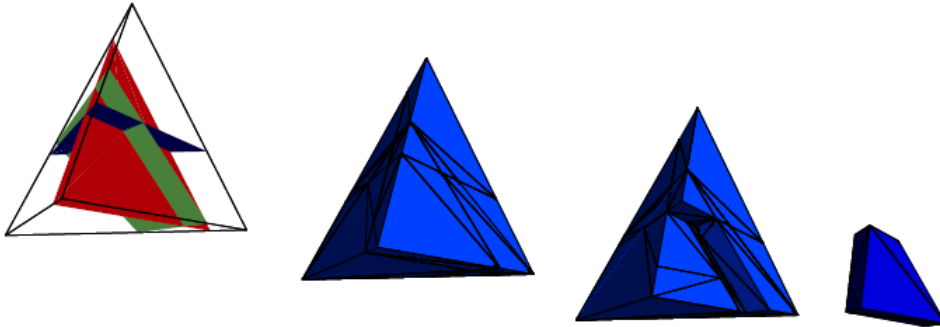
- La représentation implicite ne permet pas de préserver **les arêtes vives et les coins** d'une pièce mécanique



Exemple d'arbre CSG (Constructive Solid Geometry) d'une pièce mécanique résultant de combinaisons booléennes d'un cube et 3 cylindres dans un maillage tétraédrique structuré

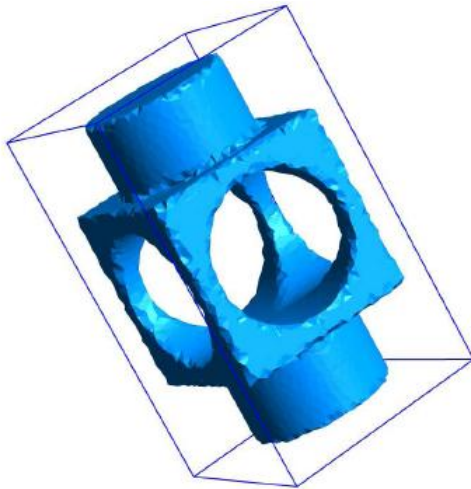
Représentation implicite avec plusieurs Level sets

➤ Technique récursive de découpage

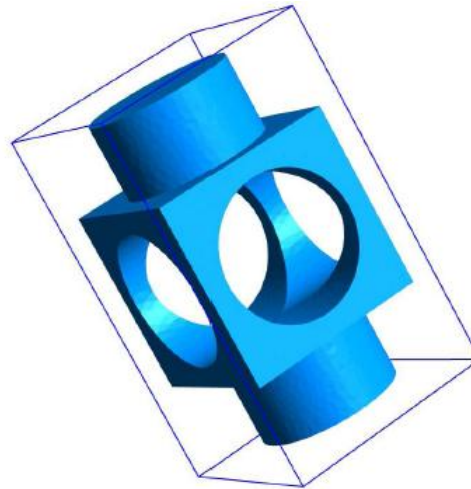


Cette technique est conçue comme une extension de la technique de subdivision standard utilisée dans XFEM

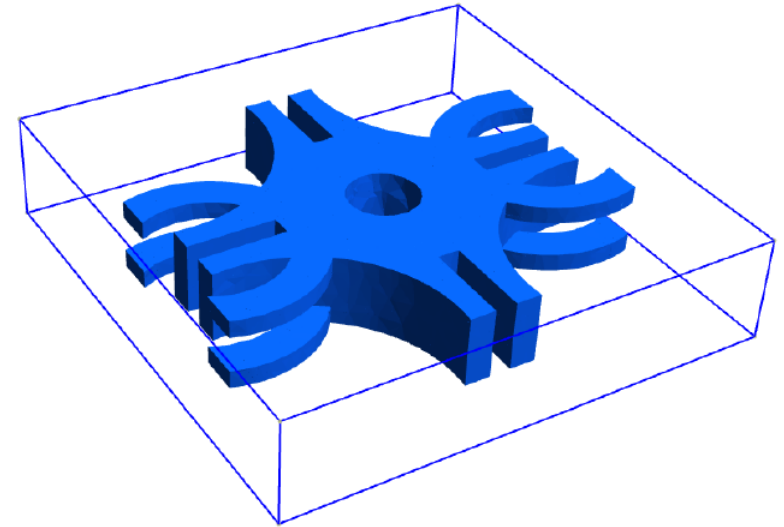
➤ Exemples de représentation de formes



Représentation implicite par une unique Level set construite à partir de la combinaison booléenne de demi-espaces (8-plans et 3-cylindres)



Représentation implicite en utilisant plusieurs Level sets construites séparément et la technique de découpage



Plan de la présentation

- Représentation géométrique par Level sets
- **La méthode des éléments finis étendus (XFEM)**
- Analyse par XFEM dans le cas de l'interpolation linéaire et d'ordre supérieur
- Conclusions et Perspectives

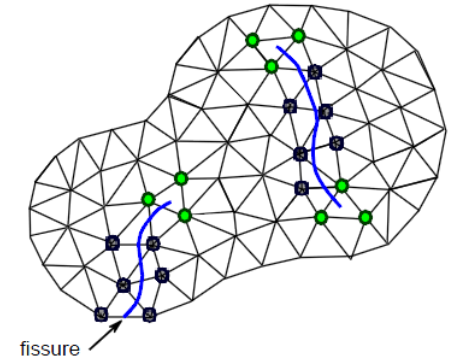
Méthode des Eléments finis étendus (XFEM)

[Moës et al. (1999)]

XFEM a été originalement développée pour l'étude des fissures

⇒ autorise au maillage de ne plus être conforme à la fissure

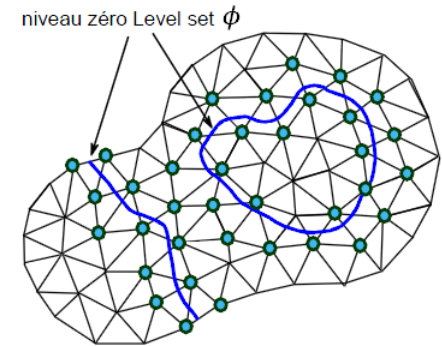
⇒ permet d'éviter la lourde tâche de remaillage



□ Modélisation des interfaces matériau-vide

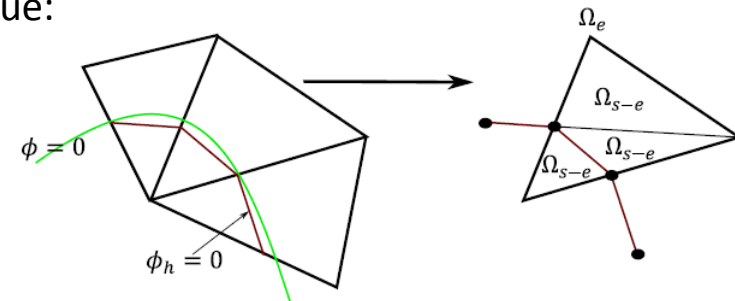
➤ Approximation du champ de déplacement [Sukumar et al. (2001)]

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i V(\phi(\underline{x})) \quad \text{avec} \quad V(\phi(\underline{x})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(\underline{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \phi(\underline{x}) < 0 \end{cases}$$



➤ Subdivision des éléments frontière et intégration numérique:

$$\int_{\Omega_e} f(\underline{x}) V(\phi(\underline{x})) d\Omega_e = \sum_{\text{sous-éléments}} \int_{\Omega_{s-e}} f(\underline{x}) V(\phi(\underline{x})) d\Omega_{s-e}$$



Intégration numérique

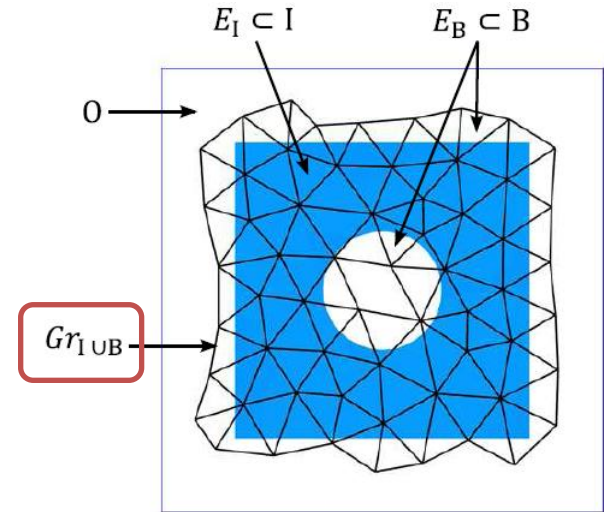
Intégrales de domaine

➤ La fonction indicatrice:

$$\Lambda_{I \cup B} = \begin{cases} 1 & \text{si } (E_I, E_\Delta) \in \Omega_h \\ 0 & \text{si } E_\Delta \notin \Omega_h \end{cases}$$

➤ La formule de quadrature d'une fonction régulière:

$$\int_{Gr_{I \cup B}} \Lambda_{I \cup B} f \, d\Omega = \int_I f \, d\Omega + \int_B \Lambda_{I \cup B} f \, d\Omega$$



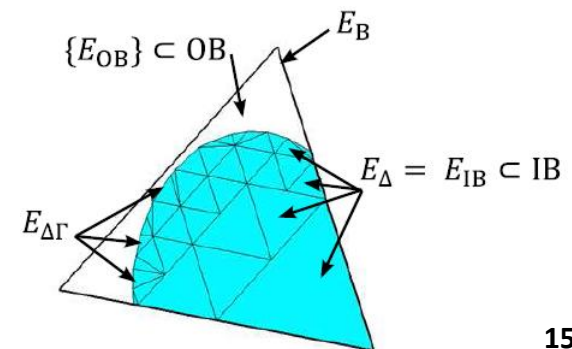
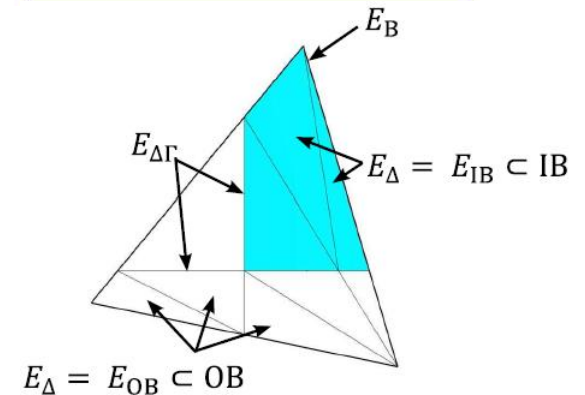
Intégrales de frontière

➤ La fonction indicatrice:

$$\Xi_B = \begin{cases} 1 & \text{si } E_{\Delta\Gamma} \in \Gamma_h \\ 0 & \text{si } E_{\Delta\Gamma} \notin \Gamma_h \end{cases}$$

➤ La formule de quadrature d'une fonction régulière:

$$\int_{B(\Gamma)} \Xi_B f \, d\Gamma = \sum_{E_{B\Gamma}} \int_{E_{B\Gamma}} \Xi_B f \, d\Gamma = \sum_{E_{B\Gamma}} \sum_{E_{\Delta\Gamma}} \int_{E_{\Delta\Gamma}} \Xi_B f \, d\Gamma$$



Plan de la présentation

- Représentation géométrique par Level sets
- La méthode des éléments finis étendus (XFEM)
- **Analyse par XFEM dans le cas de l'interpolation linéaire et d'ordre supérieur**
 - ❑ Analyse de convergence en maillage non-conforme à la frontière de la géométrie
 - ❑ Analyse de convergence en maillage non-conforme aux frontières courbes
- Conclusions et Perspectives

Maillage non-conforme à la frontière de la géométrie

Le problème de Laplace

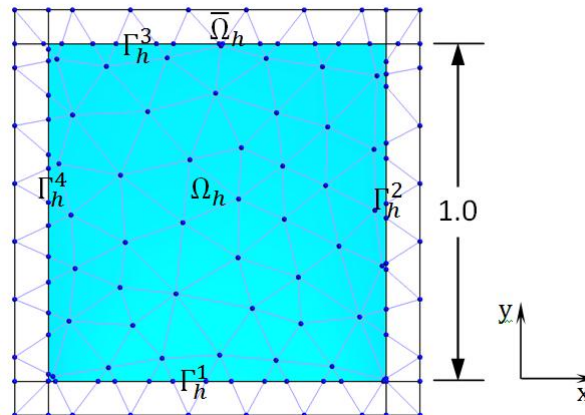
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } (x, y) \in \Omega_h :=]0, 1[\times]y^*, 1[\text{ avec } y^* \in [0, 1[\\ u = u^{ex}(x, y^*) & \text{sur } y = y^* \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u^{ex} \cdot \mathbf{n}_o & \text{sur } (x = 0, 1; y^* < y < 1) \text{ et } y = 1 \end{cases}$$

Solution analytique:

$$u^{ex}(x, y) = [\cosh(\pi y) - \coth(\pi) \sinh(\pi y)] \sin(\pi x)$$

CL de Dirichlet:

- la méthode par pénalisation
- la méthode de Nitsche [Hansbo & Hansbo (2002)]
- la méthode des multiplicateurs de Lagrange [Moës et al. (2006); Géniaut et al. (2007); Béchet et al. (2009)]



Maillage non-conforme à la frontière de la géométrie

- les conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sous forme faible par l'approche des multiplicateurs de Lagrange

trouver $(u_h, \lambda_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{L}_h$ tels que :

$$\int_{Gr_{I \cup B}} \Lambda_{I \cup B} \nabla v_h \cdot \nabla u_h \, d\Omega + \int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B v_h \lambda_h \, d\Gamma = \int_{B(\Gamma_N)} \Xi_B v_h t_N \, d\Gamma$$

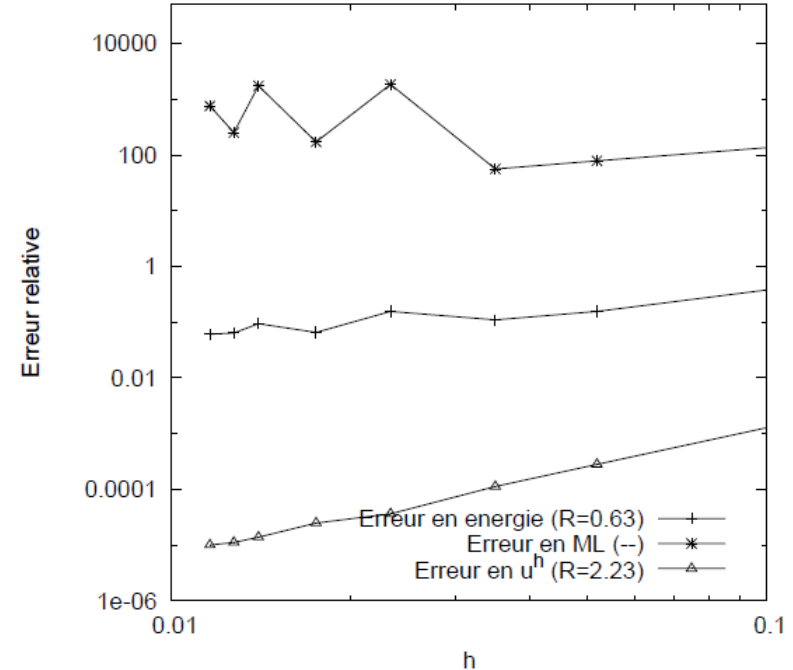
$$- \int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B \mu_h u_h \, d\Gamma = - \int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B \mu_h u_D \, d\Gamma \quad \text{pour tous } (v_h, \mu_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{L}_h$$

Erreurs relatives:

$$\mathcal{E}(\Omega_h, \nabla u) = \left(\frac{\int_{Gr_{I \cup B}} \Lambda_{I \cup B} \nabla (u^h - u^{ex}) \cdot \nabla (u^h - u^{ex}) \, d\Omega}{\int_{Gr_{I \cup B}} \Lambda_{I \cup B} \nabla u^{ex} \cdot \nabla u^{ex} \, d\Omega} \right)^{1/2}$$

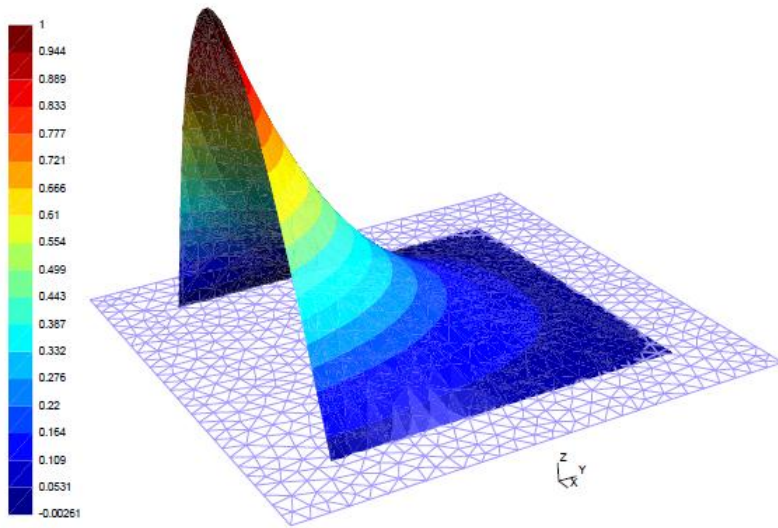
$$\mathcal{L}^2(\Gamma_h, u) = \left(\frac{\int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B (u^h - u^{ex})^2 \, d\Gamma}{\int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B (u^{ex})^2 \, d\Gamma} \right)^{1/2}$$

$$\mathcal{L}^2(\Gamma_h, \lambda) = \left(\frac{\int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B (\lambda^h - \nabla_n u^{ex})^2 \, d\Gamma}{\int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B (\nabla_n u^{ex})^2 \, d\Gamma} \right)^{1/2}$$

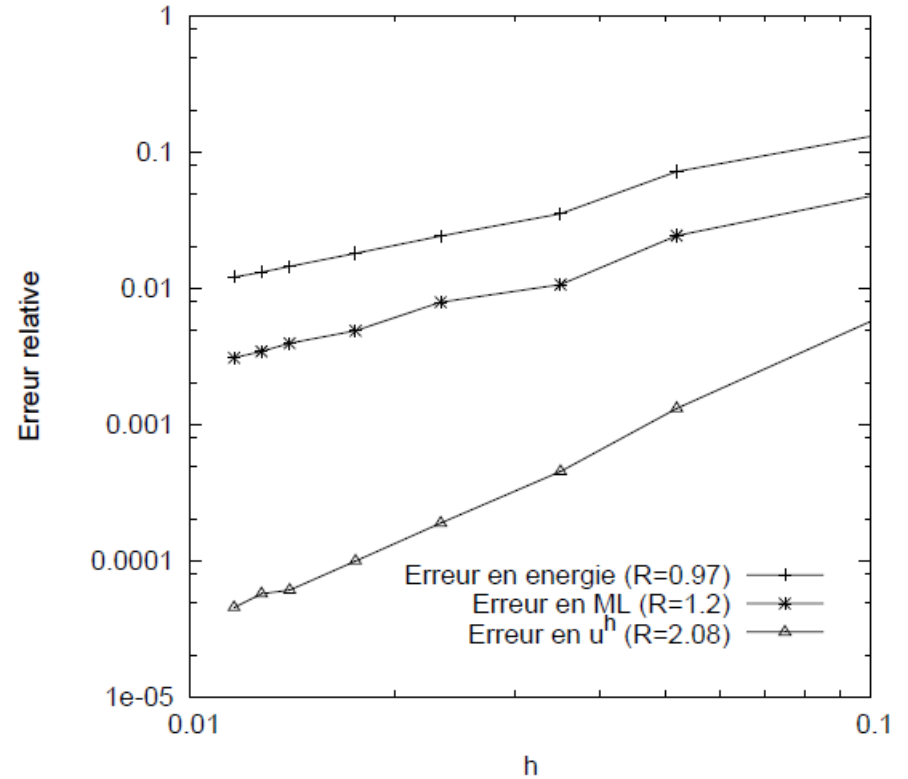


Maillage non-conforme à la frontière de la géométrie

➤ Domaine implicite carré



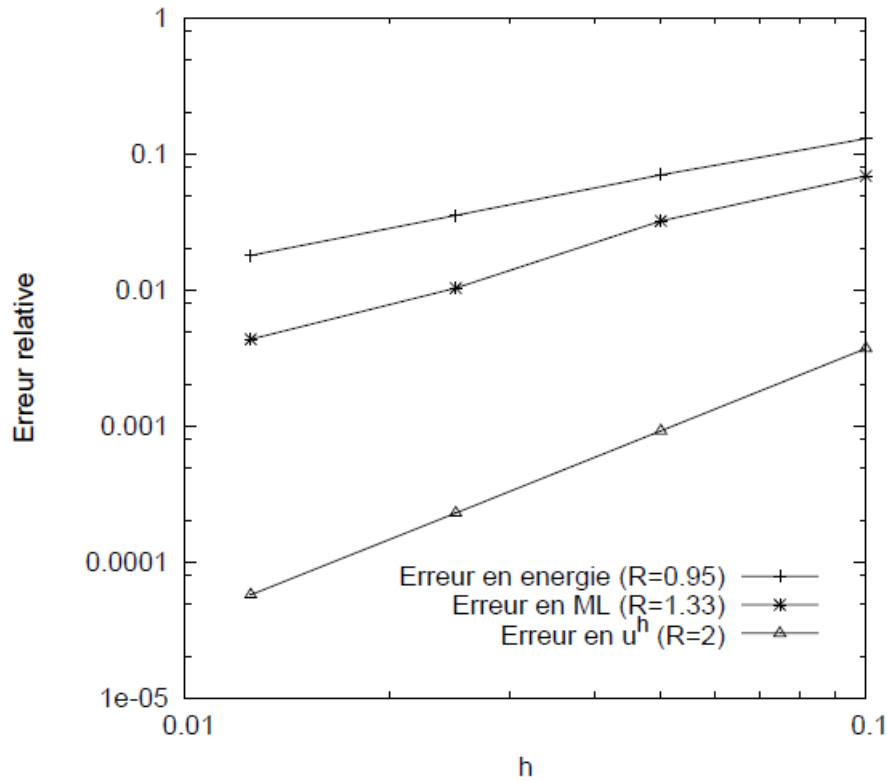
Solution XFEM du problème de Laplace



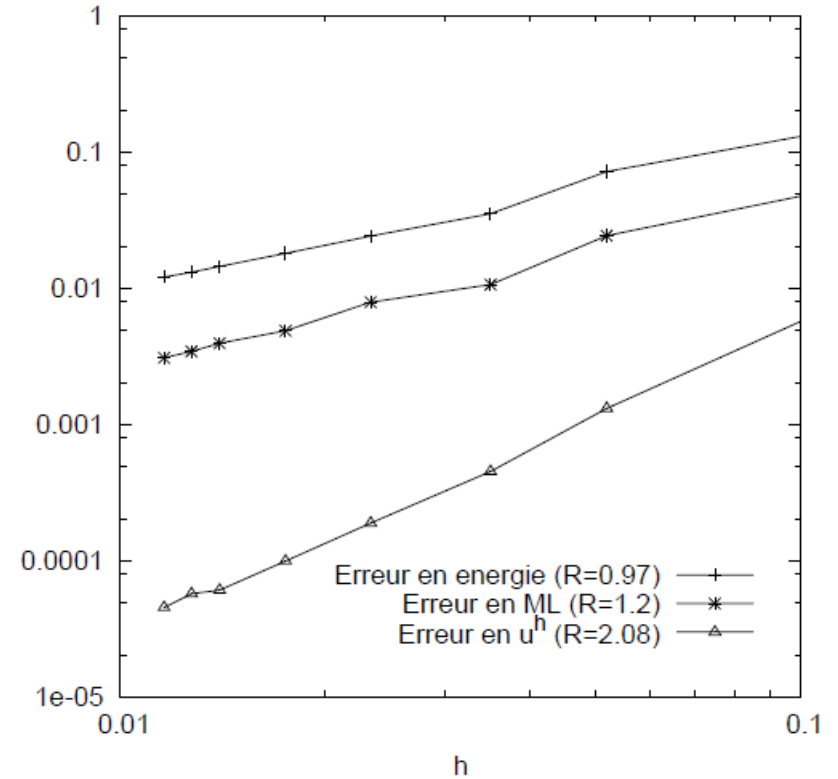
Convergence de la méthode **XFEM**

Maillage non-conforme à la frontière de la géométrie

➤ Domaine implicite carré



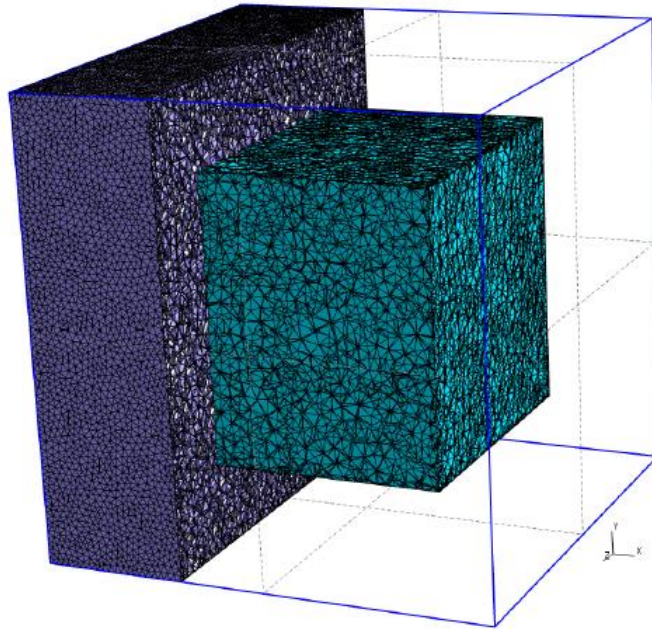
Convergence de la méthode des EF
avec **maillage conforme**



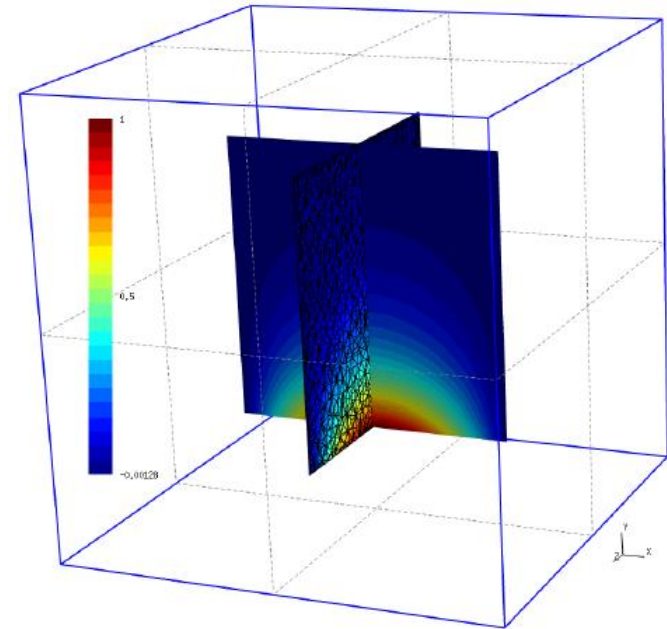
Convergence de la méthode **XFEM**

Maillage non-conforme à la frontière de la géométrie

Problème de Laplace en 3D



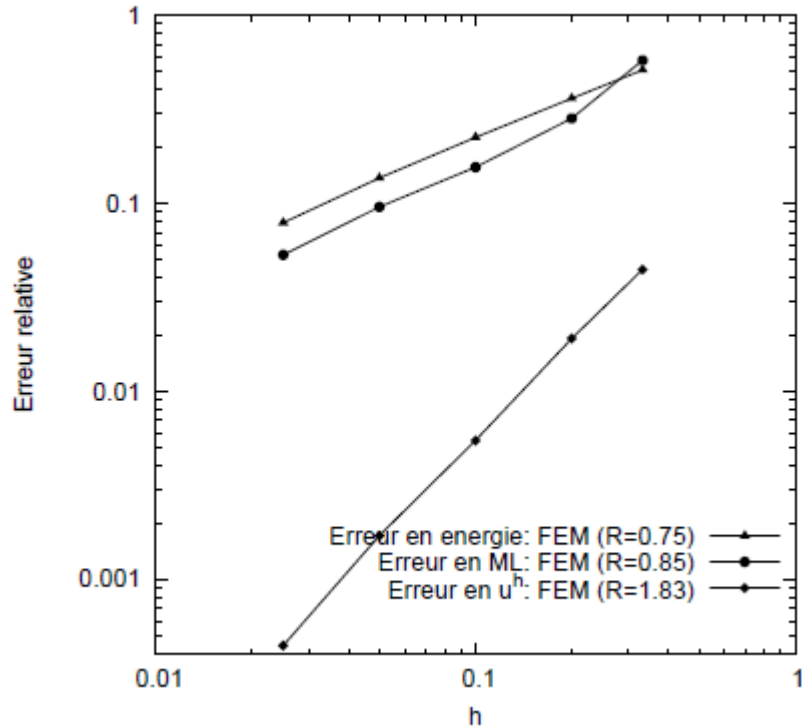
Domaine non-conforme au maillage



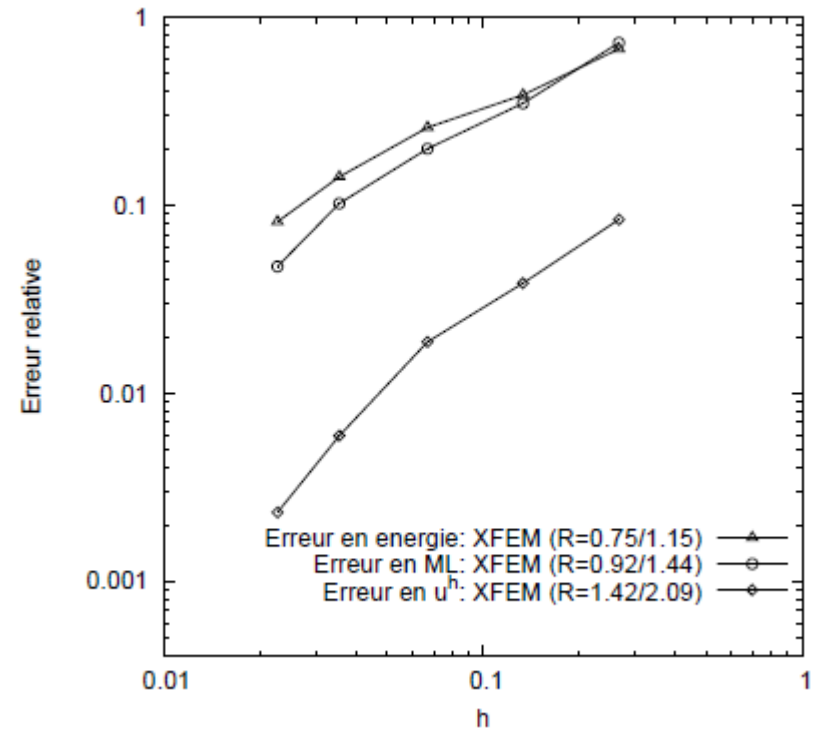
Solution XFEM du champ potentiel

Maillage non-conforme à la frontière de la géométrie

Problème de Laplace en 3D



Convergence de la méthode des EF
avec **maillage conforme**



Convergence de la méthode **XFEM**

Maillage non-conforme aux frontières courbes

➤ **Tube cylindrique sous pression:** Calcul EF en élasticité linéaire

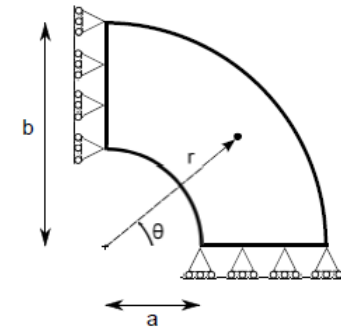
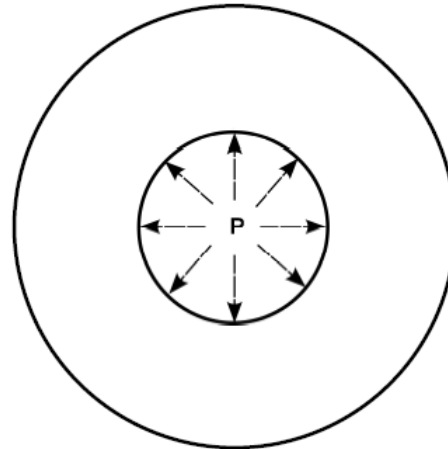
Solution analytique:

- les composantes du tenseur des contraintes:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0$$

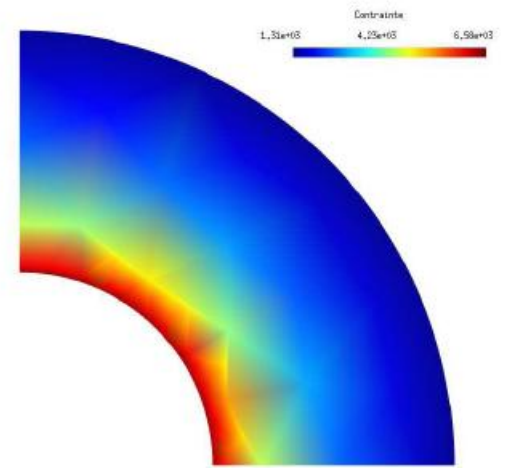
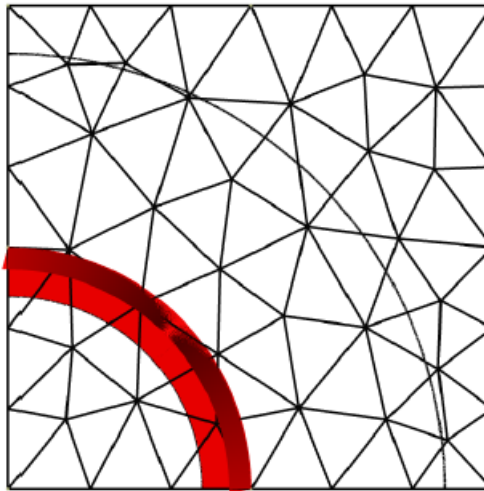
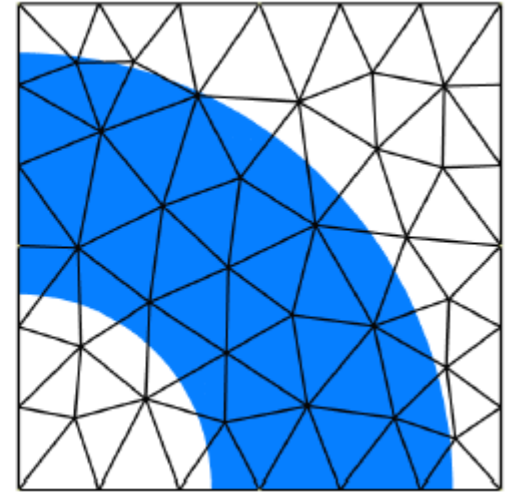
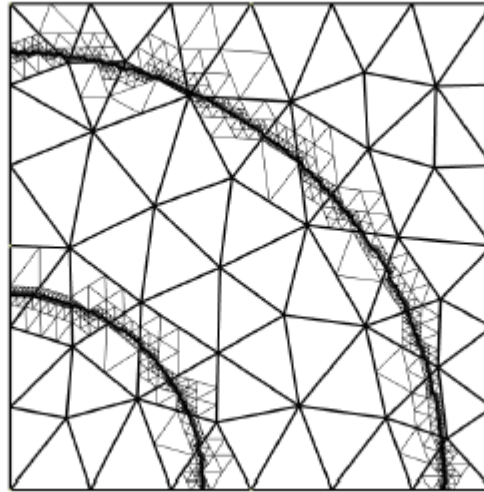
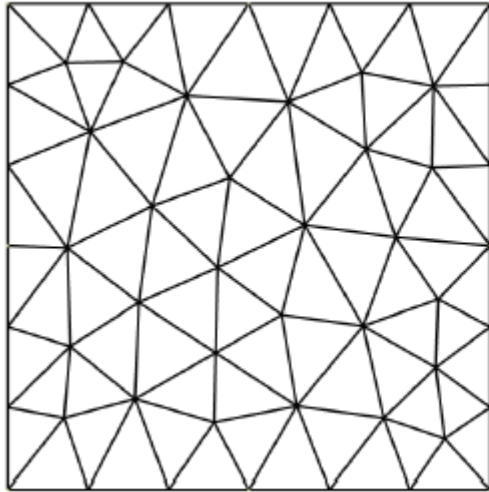


Erreur relative en énergie:

$$\mathcal{E}(\Omega_h) = \left(\frac{\int_{Gr_{IUB}} \Lambda_{IUB} \epsilon(u^h - u^{ex}) : C : \epsilon(u^h - u^{ex}) d\Omega}{\int_{Gr_{IUB}} \Lambda_{IUB} \epsilon(u^{ex}) : C : \epsilon(u^{ex}) d\Omega} \right)^{1/2} \Longrightarrow \text{Convergence en } O(h^p)$$

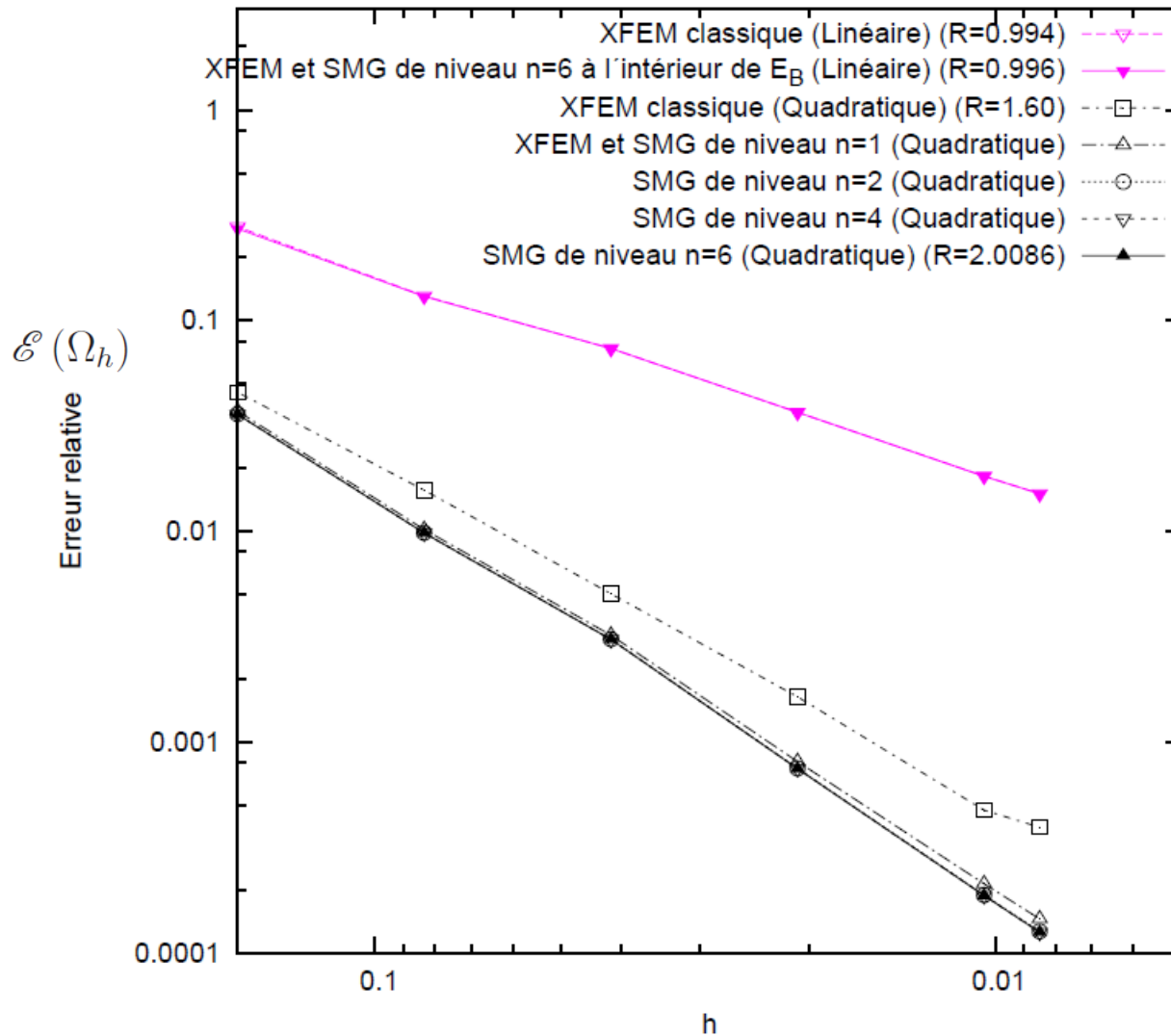
Maillage non-conforme aux frontières courbes

➤ **Tube cylindrique sous pression:** Calcul EF en élasticité linéaire



Maillage non-conforme aux frontières courbes

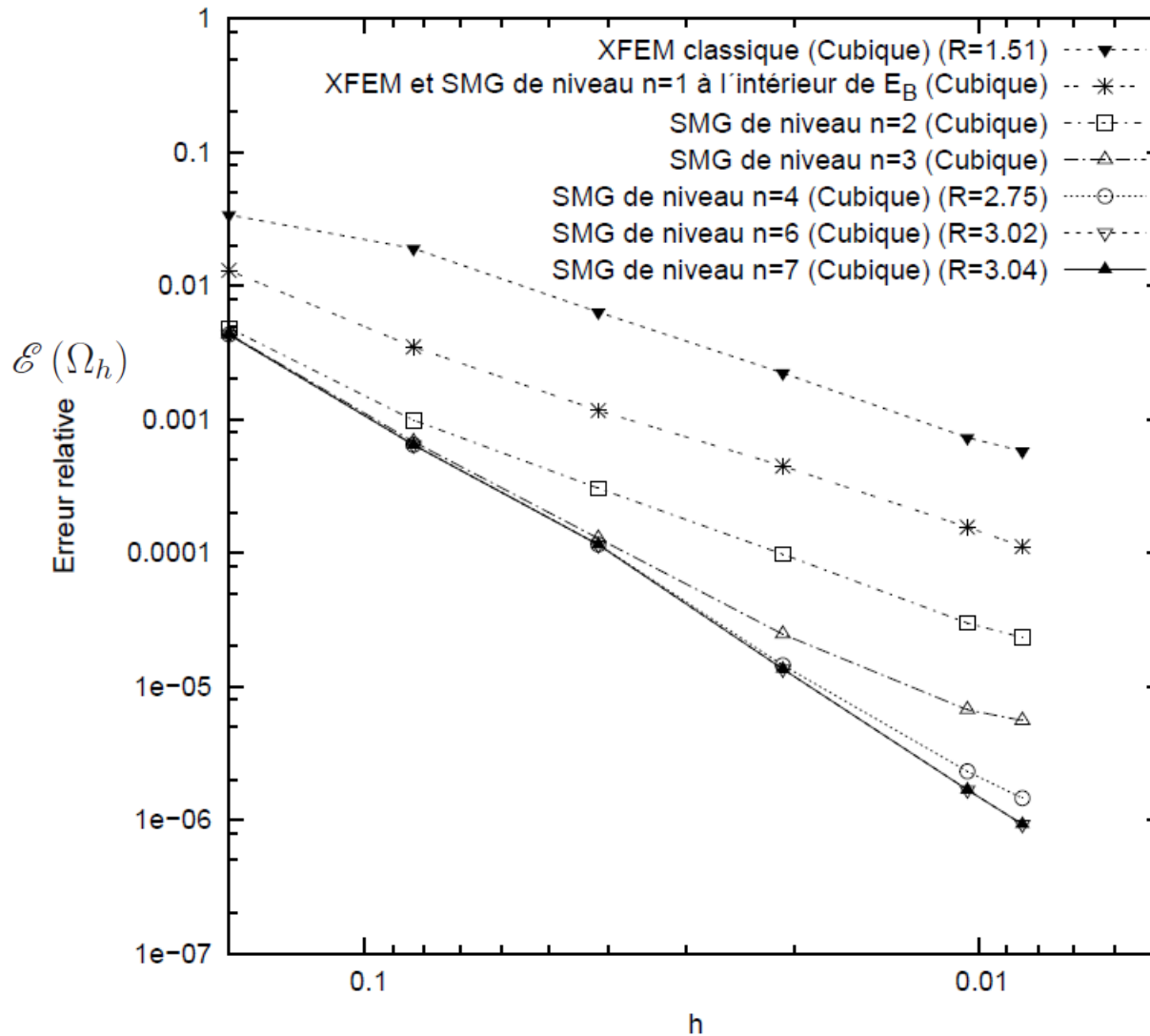
➤ Tube cylindrique sous pression en 2D



⇒ Convergence en $O(h^p)$

Maillage non-conforme aux frontières courbes

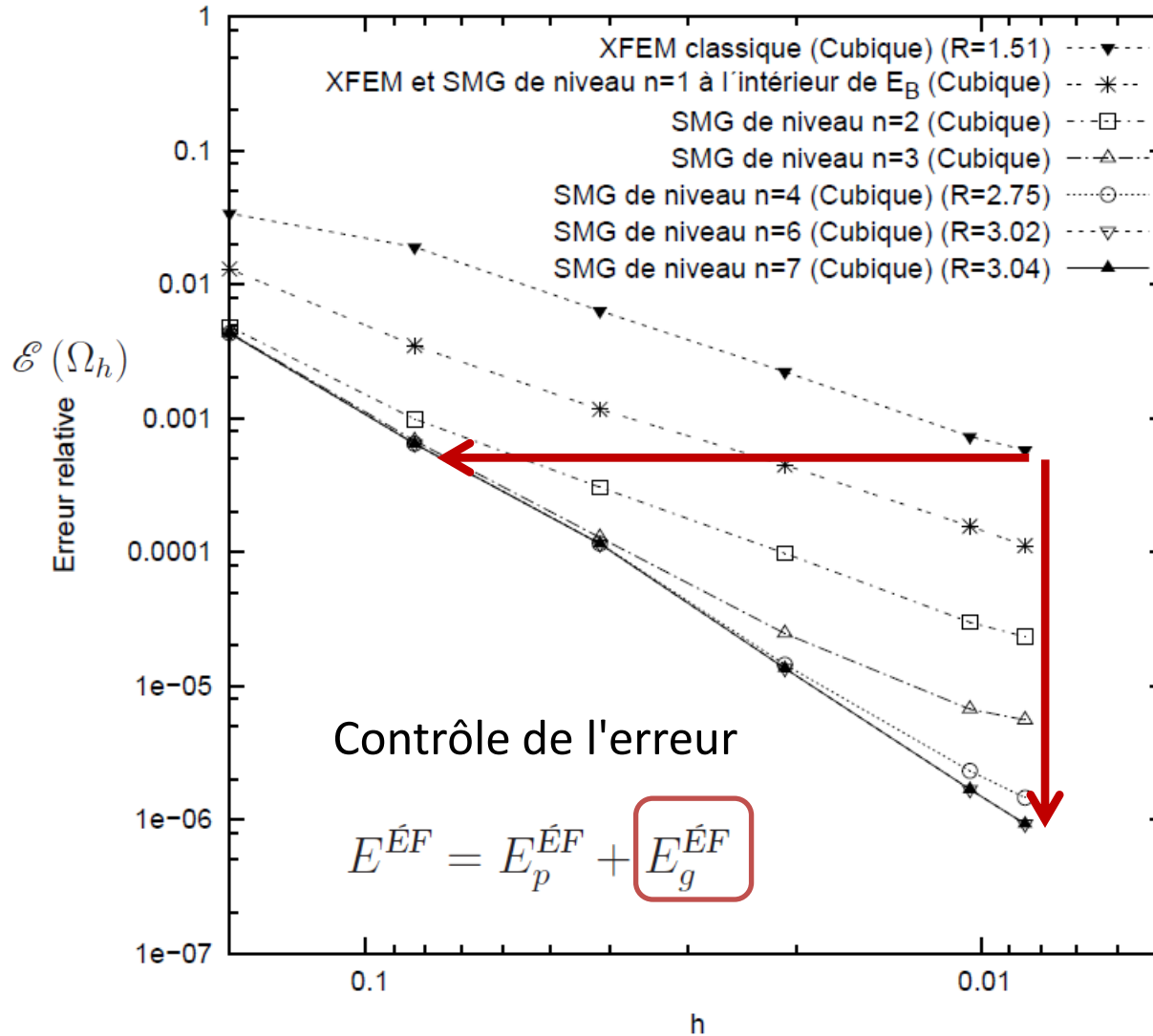
➤ Tube cylindrique sous pression en 2D



⇒ Convergence en $O(h^p)$

Maillage non-conforme aux frontières courbes

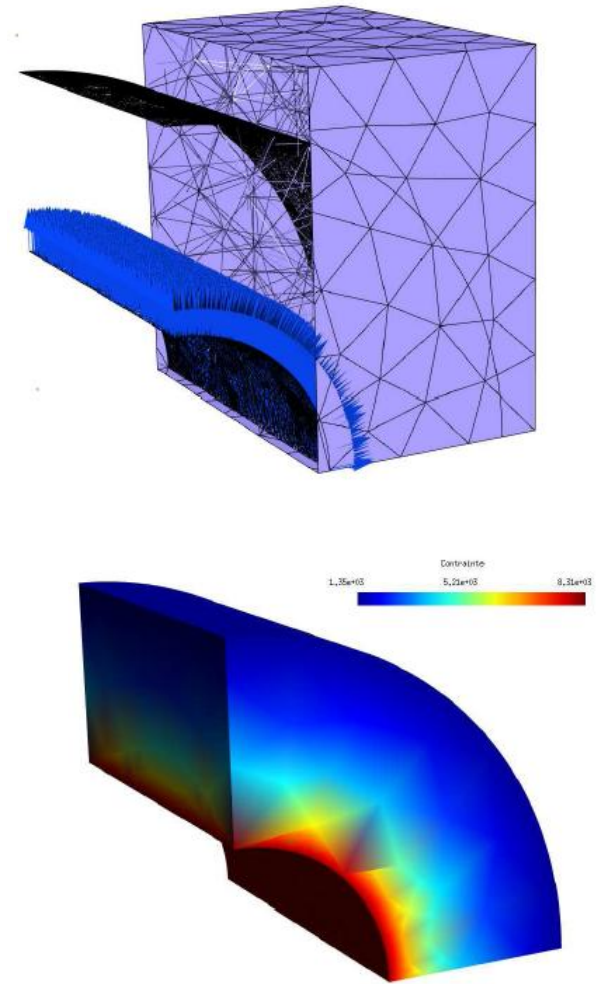
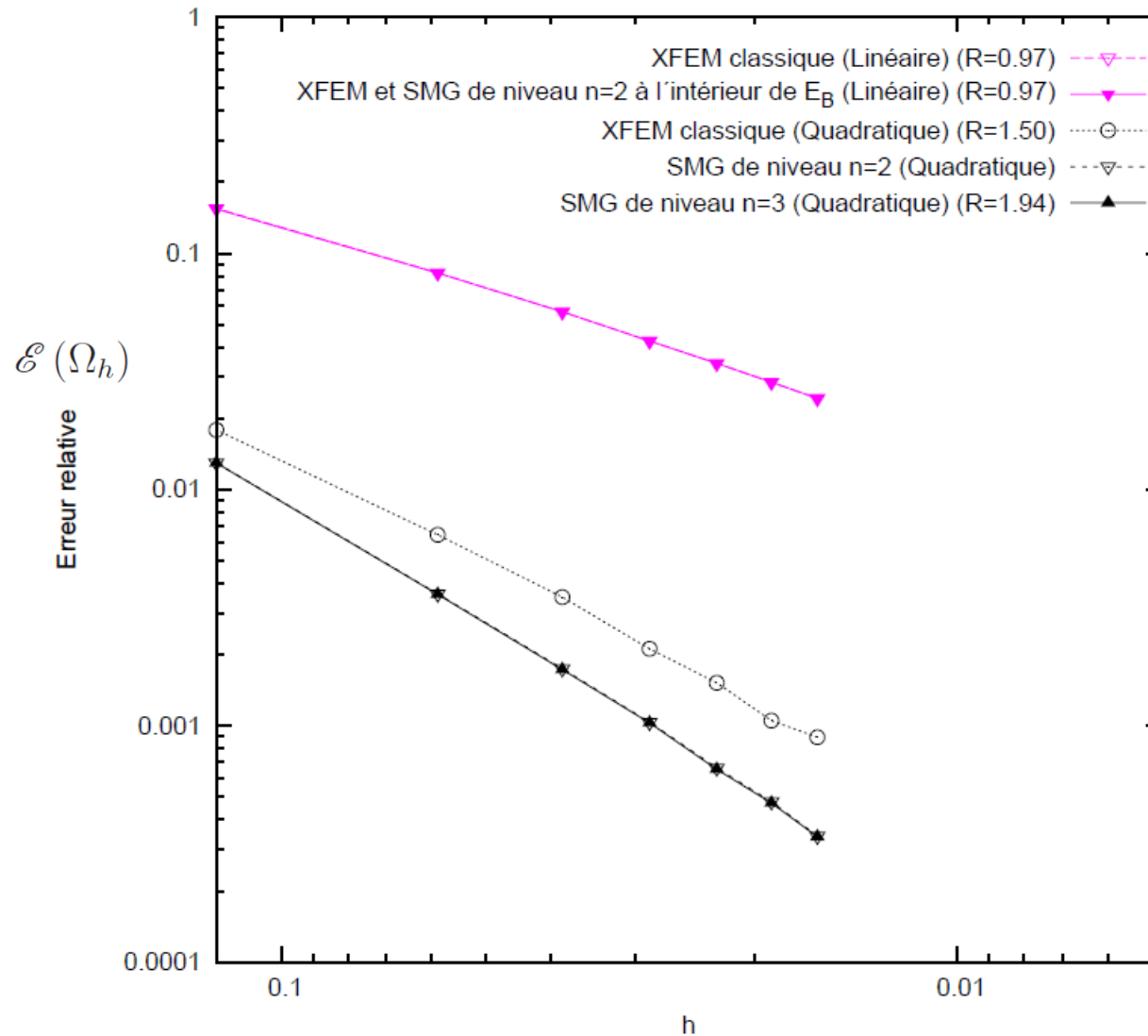
➤ Tube cylindrique sous pression en 2D



⇒ Convergence en $O(h^p)$

Maillage non-conforme aux frontières courbes

➤ Tube cylindrique sous pression en 3D



Conclusions 1/2

Représentation implicite par Level sets:

- ✓ Modélisation géométrique indépendante de la taille des éléments du maillage EF



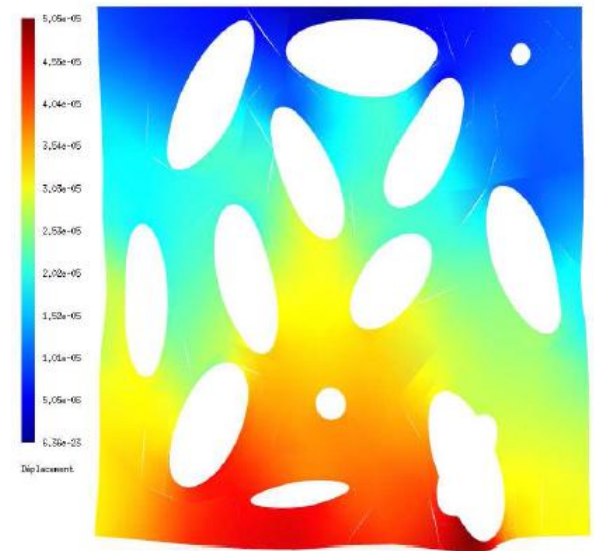
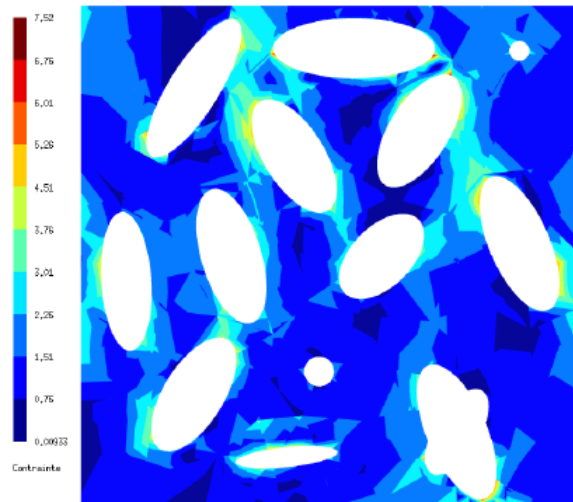
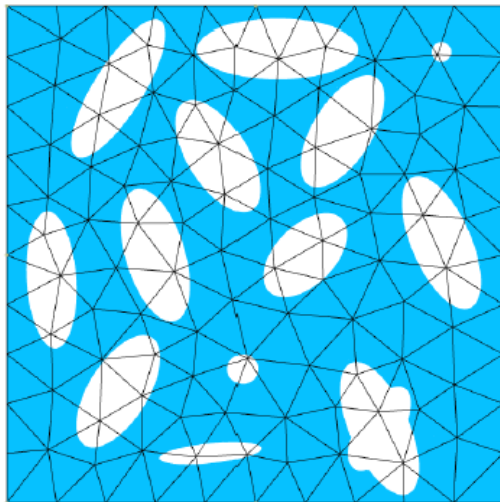
arêtes vives + frontières courbes

Analyse par la méthode XFEM:

- ✓ Validation de l'approche sur des géométries totalement indépendantes du maillage
- ✓ Confirmation de l'ordre de convergence optimal pour les frontières courbes et XFEM d'ordre supérieur

Conclusions 2/2

- ✓ La technique SMG et XFEM permettent d'éviter la problématique des éléments courbes non valides dans le cas d'un maillage d'ordre supérieur conforme aux frontières [George and Borouchaki (2011), Johnen et al. (2011)]



Perspectives

- Modélisation des interfaces matériaux courbes par XFEM d'ordre supérieur
- Appliquer les CL de Dirichlet sur des frontières courbes par XFEM d'ordre supérieur
- Tester cette approche dans un cas industriel en comparant le temps de calcul lié à l'opération globale avec le processus standard (CAO-calcul)
- Optimisation topologique à partir des fichiers CAO et XFEM d'ordre supérieur

Merci pour votre attention

Méthode des Eléments finis étendus (XFEM)

[Moës et al. (1999)]

XFEM a été originalement développée pour l'étude des fissures

- ⇒ permet d'éviter la lourde tâche de remaillage
- ⇒ autorise au maillage de ne plus être conforme à la fissure

Principe:

Concept de la Partition de l'Unité [Melenk and Babuška (1996)]

$$u^h(\underline{x}) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i}_{\text{approx EF classique}} + \underbrace{\sum_{i \in I^*} N_i(\underline{x}) \cdot \psi(\underline{x}) a_i}_{\text{enrichissement}}$$

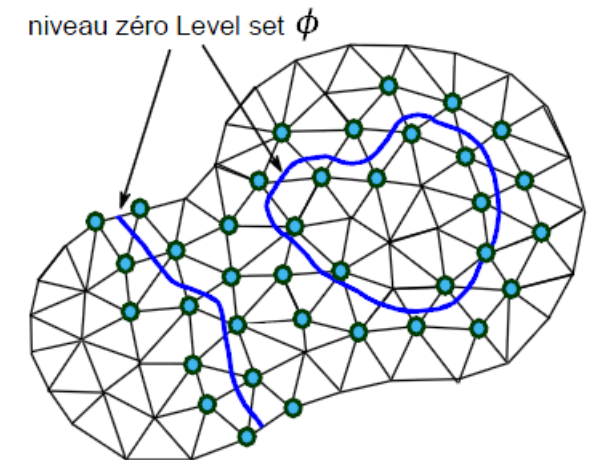
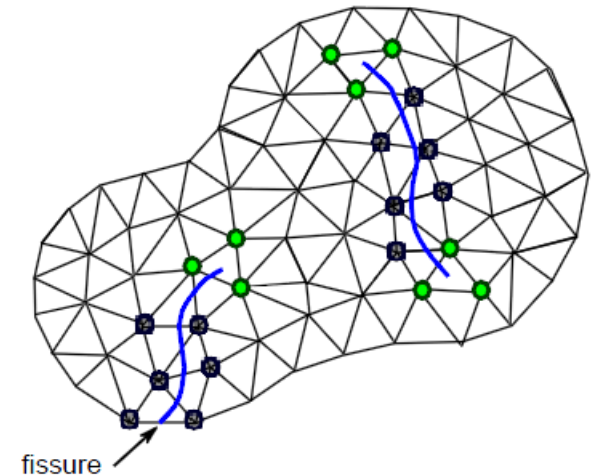
Fissure: Approximation enrichie du champ de déplacement:

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i + \sum_{i \in I_{\Gamma}^*} N_i(\underline{x}) H(\underline{x}) a_i + \sum_{j=1}^4 \sum_{i \in I_{\text{pointe}}^*} N_i(\underline{x}) F_j(\underline{x}) b_i^j$$

Interfaces matériau-matériau:

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{i \in I_{\phi}^*} |\phi_i(\underline{x})| N_i(\underline{x}) - \left| \sum_{i \in I_{\phi}^*} \phi_i(\underline{x}) N_i(\underline{x}) \right|$$

[Moës et al. (2003)]

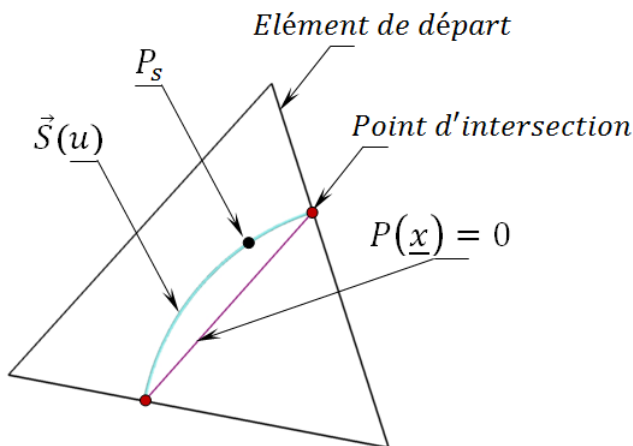


Conversion d'une fonction paramétrique vers une représentation Level set

Algorithme 1/2 [Moumnassi et al. (2011)]

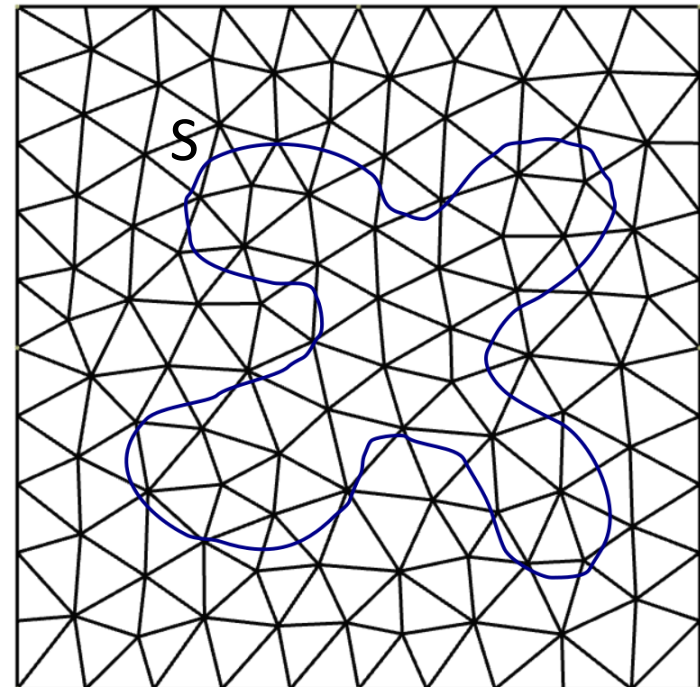
Entrées:

- fonction paramétrique $\vec{S}(u)/\vec{S}(u, v)$
- maillage triangulaire/tétraédrique
- une valeur initiale $(u_s)/(u_s, v_s) \Rightarrow \vec{P}_s$
- un vecteur initial \underline{n}_s



Sorties:

- une bande d'éléments ω
- Level set ϕ_h
- un maillage polygonal Γ_h



Conversion d'une fonction paramétrique vers Level set

Algorithme 2/2 [Moumnassi et al. (2011)]

La construction du niveau zéro de la Level set s'effectue de proche en proche, d'un élément déjà traité vers ses éléments voisins

