线性不确定随机系统时滞相关的鲁棒 H_∞ 滤波

李玉梅[1,2] ，关新平[1] ,罗小元[1]

1. 燕山大学 电气工程学院，秦皇岛 066004; 2. 新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046

摘要： 研究了一类带有时变状态时滞和参数不确定性的连续时间线性随机系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题。目的是设计一个线性滤波器使滤波误差动态系统是指数均方稳定的并满足给定的 H_∞ 性能指标。应用描述符系统模型转换，建立了新的 Lyapunov-Krasovskii 函数。通过引入自由加权矩阵消除了 Lyapunov 矩阵和系统矩阵的乘积项，从而无需在滤波器设计过程中对 Lyapunov 矩阵作任何约束，这在很大程度上降低了滤波器设计的保守性。基于 LMI 方法，针对精确已知随机系统和带有结构不确定性的随机系统分别提出了时滞相关的鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分性条件，所获得的结果比现有结果具有更小的了保守性。最后，仿真结果表明所提出的设计方法是有效的并且是现有方法的改善。

关键词：鲁棒 H_∞ 滤波；随机系统；指数均方稳定；时变时滞；线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号： TP13 **文献标识码：A**

Delay-dependent robust H_∞ filtering for linear stochastic systems with uncertainties

Li Yumei[1,2] , Guan Xinping[1] ， Luo Xiaoyuan[1]

(1.Institute of Electrical Engineering，Yanshan University, Qinhuangdao,066004, China;

2.Department of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumuqi, 830046, China)

Abstract： This paper investigates the robust H_∞ filtering problem for continuous –time linear stochastic systems with time-vary state delay and parameter uncertainty. The aim is to design a linear filter such that the filtering error dynamics system is exponentially stable in mean square and assuring a prescribed H_∞ performance level .Applying the descriptor model transformation, construct a new Lyapunov-Krasovskii functional . By introducing some free weighting matrices, avoiding any product term of Lyapunov matrices and system matrices，so it is not necessary for system matrices to do any constraint in the process of the design of filters, to a great extent , which make the design of filters have less conservative. For system without uncertainty and with uncertainty case, to guarantee the existence of desired robust H_∞ filters, sufficient conditions are proposed respectively in terms of linear matrix inequalities (LMIs), The results obtained are less conservative than existing ones. Numerical examples demonstrate the proposed approaches are effective and are an improvement over previous ones**.**

Keywords：robust H_∞ filtering； stochastic systems； exponentially stable in mean square；time-vary delay； linear matrix inequalities(LMI)

——————————————————————————————————————

收稿日期： 修回日期：

基金项目：国家自然科学基金（60704009, 60404004）项目资助

作者简介：李玉梅（1975-），女，博士，主要从事随机系统和时滞系统的研究，email: zwzlym@163.com

1 引言

状态估计是一种非常重要的研究课题并且已经取得了一定的实际应用价值。其中最重要的估计方法之一就是鲁棒 H_∞ 滤波[1-7]。所谓的鲁棒 H_∞ 滤波就是设计一个滤波器根据系统的输入输出信息来重构系统的状态向量，或估计系统状态向量的某个线性组合，并保证从扰动输入到估计误差的传递函数的 H_∞ 范数小于给定的常数 γ ；相比卡尔曼滤波，H_∞ 滤波的一个最大优点是它不需要精确知道外界扰动的物理性质，而仅仅假设外界扰动是能量有界的。伊藤随机微分方程是最有用的随机模型之一，在飞行器设计，化工生产，分布式网络和控制系统中具有重要的应用价值。近年来，这种随机系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题已引起了学术界的广泛关注。文 [3-[4]分别研究了线性和非线性系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题，文[5-6]研究了非线性不确定系统的 H_∞ 滤波，文[7]研究了降阶的 H_∞ 滤波；然而，文[3-5]及 [7]未涉及时滞问题；文[4-6]中 Lyapunov 矩阵 P 受到对角阵的约束（即取 $P \le \alpha I$ ，I 为单位阵)。时滞现象存在于许多物理过程中，并且它是导致系统不稳定和性能差的主要因素。文[8]研究了时滞系统的 $L_2 - L_\infty$ 滤波但给出的是时滞无关时滞速率相关的充分性条件。

本文研究了带有结构不确定性参数和时变状态时滞的连续时间线性随机系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题。首先将文[9]的描述符方法从确定性系统推广到随机系统的情况，将随机系统表示成等价形式的描述符随机系统，基于这种等价描述符系统建立了一个新的 Lyapunov-Krasovskii 函数。其次，通过使用一些零方程，引入了一些自由加权矩阵。并且将描述变量 $q(t)$ 和 $g(t)$ 看作状态向量，使得所得结论不含 Lyapunov 矩阵和系统矩阵的乘积项，因此无需在滤波器设计过程中对 Lyapunov 矩阵作任何约束，这在很大程度上降低了滤波器设计的保守性。基于 LMI 算法，针对精确已知随机系统和带有结构不确定性的随机系统分别给出了 H_∞ 滤波器存在的时滞相关的充分性条件，并使给定的 H_∞ 性能指标 γ 的最小值比现有的结果具有更小的保守性。在所得结论中如果我们将矩阵 $Q, Z, R, Y_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ 取为零矩阵，则可以得到随机系统的 H_∞ 滤波器存在的时滞无关的充分性条件。因此本文中提到的设计方法包括了时滞相关和时滞无关 H_∞ 滤波器的设计问题。这在状态估计、信号传输和检测中为获取所需信号排出外界干扰提供了可行性方法，具有实际的应用价值。仿真结果表明论文所提出的方法是有效可行的，并且是现有方法的改善。

为了方便,本文采用了下列记号：$trA(A^T)$ 表示矩阵 A 的迹（ 转置)，$A \ge 0 (A > 0)$ 表示 A 是实对称半正定（实对称正定）矩阵，R^n 记 n 维欧拉空间, $R^{m\times n}$ 记维数为 $m \times n$ 的实数矩阵的集合，$E\{\cdot\}$ 表示数学期望. $L_2[0,\infty)$ 为定义在 $[0,\infty)$ 上的平方可积的向量函数空间,

2 问题的提出和假设

考虑下列随机时滞系统

$$\begin{aligned} dx(t) &= [(A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + (A_{0d} + \Delta A_{0d}(t))x(t-h(t)) \\ &\quad + (B_0 + \Delta B_0(t))v(t)]dt + [(C_0 + \Delta C_0(t))x(t) \\ &\quad + (C_{0d} + \Delta C_{0d}(t))x(t-h(t))]d\beta(t) \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy(t) &= [(A_1 + \Delta A_1(t))x(t) + (A_{1d} + \Delta A_{1d}(t))x(t-h(t)) \\ &\quad + (B_1 + \Delta B_1(t))v(t)]dt + [(C_1 + \Delta C_1(t))x(t) \\ &\quad + (C_{1d} + \Delta C_{1d}(t))x(t-h(t))]d\beta(t) \qquad (2) \end{aligned}$$

$$z(t) = Lx(t) \qquad (3)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \qquad (4)$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是状态向量，$y(t) \in R^m$ 是测量输出，$\varphi(t)$ 是向量值初始函数，且在区间 $[-\tau, 0]$ 上是连续的。$z(t) \in R^p$ 是待估计的信号向量，$v(t) \in R^m$ 是空间 $L_2[0,\infty)$ 上的噪声信号, $A_i, A_{id}, B_i, C_i, C_{id}, L$ 为适当维数的常数矩阵，$\beta(t)$ 是一维布朗运动满足 $E\{d\beta(t)\} = 0,\ E\{d\beta(t)^2\} = dt$ 。时滞 $h(t)$ 是随时间变化的连续函数且满足 $0 \le h(t) \le \tau$ 和 $\dot{h}(t) \le \mu \le 1$，$\Delta A_i(t)$，$\Delta A_{id}(t), \Delta B_i(t), \Delta C_i(t),\ \Delta C_{id}$ 表示范数有界参数不确定性矩阵并且满足下列各式:

$$[\Delta A_i(t) \quad \Delta A_{id}(t) \quad \Delta B_i(t)] = M_i F(t) E_j \qquad (5)$$

$$[\Delta C_i(t) \quad \Delta C_{id}(t)] = M_i F(t) E_k \qquad (6)$$

$i=0,1;\ j=0,1,2; k=3,4$ 其中 $F(t)\in R^{i\times j}$ 是未知参数矩阵满足：

$$F^T(t)F(t) \le I \qquad (7)$$

本文对估计信号 $z(t)$，建立如下的线性滤波器方程:

$$dx_f(t) = A_f x_f(t)dt + B_f dy(t) \qquad (8)$$

$$z_f(t) = C_f x_f(t) \qquad (9)$$
$$x_f(0)=0$$

其中 $x_f(t)\in R^n$ 是滤波状态向量，矩阵 A_f, B_f, C_f 是要设计的滤波参数。记 $\xi^T(t)=[x^T(t),\ x_f^{\ T}(t)]$，$\tilde{z}(t)=z(t)-z_f(t)$ 可得到如下的滤波误差动态系统：

$$d\xi(t) = [\tilde{A}\xi(t) + \tilde{A}_d\xi(t-h(t)) + \tilde{B}v(t)]dt$$
$$+[\tilde{C}\xi(t) + \tilde{C}_d\xi(t-h(t))]d\beta(t) \qquad (10)$$
$$\tilde{z}(t) = \tilde{L}\xi(t) \qquad (11)$$
$$\xi(t) = [\phi^T(t) \quad 0]^T,\ \ t\in[-\tau,\ 0] \qquad (12)$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0+\Delta A_0 & 0 \\ B_f(A_1+\Delta A_1) & A_f \end{bmatrix}, \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} (A_{0d}+\Delta A_{0d}) & 0 \\ B_f(A_{1d}+\Delta A_{1d}) & 0 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0+\Delta B_0 \\ B_f(B_1+\Delta B_1) \end{bmatrix}, \tilde{L} = \begin{bmatrix} L & -C_f \end{bmatrix} \qquad (13)$$
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0+\Delta C_0 & 0 \\ B_f(C_1+\Delta C_1) & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_d = \begin{bmatrix} C_{0d}+\Delta C_{0d} & 0 \\ B_f(C_{1d}+\Delta C_{1d}) & 0 \end{bmatrix}$$

首先，引入下列定义。

定义1: 如果存在一个正常数 α 使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log E\|x(t)\|^2 \le -\alpha \qquad (14)$$

成立，则滤波误差系统（10）-（12）是指数均方稳定的。

论文的目的是给定一个外界扰动衰减水平 $\gamma>0$ 为随机时滞系统 (1) - (4) 设计一个滤波器，使得估计状态 $\tilde{z}(t)=z(t)-z_f(t)$ 满足 H_∞ 性能指标。设计步骤分如下两步:

1.当外界扰动 $v(t)\equiv 0$ 时，滤波误差系统（10）-（12）是指数均方稳定的。

2.对于给定的外界扰动衰减水平 $\gamma>0$，当 $v(t)\in L_2[0,\infty)$ 非零时，满足初始条件的 H_∞ 性能指标 $\hat{J}=\int_0^\infty(\tilde{z}^T\tilde{z}-\gamma^2v^Tv)dt<0 \qquad (15)$

3 精确已知系统时滞相关的 H_∞ 滤波

在这一部分，我们考虑系统矩阵中不含不确定参数的情况，即 $\Delta A_i(t)=\Delta A_{id}(t)=\Delta B_i(t)=0$ $\Delta C_i(t)=\Delta C_{id}(t)=0$ 。

引理 1: 给定常数 $\tau>0$, 且 $\mu<1$,如果存在矩阵 $P>0, Q\ge 0, Z>0, R>0$ 和适当维数的矩阵 N_i, T_j 和 $Y_i(i=1,2,3,4)$，下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \tau Y_1 & Y_1 \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & \tau Y_2 & Y_2 \\ * & * & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & \tau Y_3 & Y_3 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & \tau Y_4 & Y_4 \\ * & * & * & * & -\tau R & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z \end{bmatrix} < 0 \qquad (16)$$

成立，则滤波误差系统（10）-（12） 在外界扰动 $v(t)\equiv 0$ 时是指数均方稳定的。

其中 $*$ 表示对称转置矩阵，并且有

$$\Gamma_{11} = N_1\tilde{A} + \tilde{A}^T N_1^T + T_1\tilde{C} + \tilde{C}^T T_1^T$$
$$+Q + Y_1 + Y_1^T$$

$$\Gamma_{12} = N_1\tilde{A}_d + \tilde{A}^T N_2^T + T_1\tilde{C}_d + \tilde{C}^T T_2^T - Y_1 + Y_2^T$$
$$\Gamma_{13} = P - N_1 + \tilde{A}^T N_3^T + \tilde{C}^T T_3^T + Y_3^T$$
$$\Gamma_{14} = \tilde{A}^T N_4^T - T_1 + \tilde{C}^T T_4^T + Y_4^T$$
$$\Gamma_{22} = N_2\tilde{A}_d + \tilde{A}_d^T N_2^T + T_2\tilde{C}_d + \tilde{C}_d^T T_2^T - (1-\mu)Q - Y_2 - Y_2^T$$
$$\Gamma_{23} = -N_2 + \tilde{A}_d^T N_3^T + \tilde{C}_d^T T_3^T - Y_3^T$$
$$\Gamma_{24} = \tilde{A}_d^T N_4^T - T_2 + \tilde{C}_d^T T_4^T - Y_4^T$$
$$\Gamma_{33} = -N_3 - N_3^T + \tau R$$
$$\Gamma_{34} = -N_4^T - T_3$$
$$\Gamma_{44} = P - T_4^T - T_4 + \tau Z$$

证明：

设 $q(t) = \tilde{A}\xi(t) + \tilde{A}_d\xi(t-h(t)) + \tilde{B}v(t)$ (17)

$$g(t) = \tilde{C}\xi(t) + \tilde{C}_d\xi(t-h(t)) \quad (18)$$

系统（10）-（12）转化为下列描述符随机系统

$$d\xi(t) = q(t)dt + g(t)d\beta(t) \quad （19）$$

$$\tilde{z} = \tilde{L}\xi(t) \quad （20）$$

建立 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^{4} V_i(t) \quad （21）$$

其中: $V_1(t) = \xi(t)^T P\xi(t)$，

$$V_2(t) = \int_{t-h(t)}^{t} \xi^T(s)Q\xi(s)ds$$

$$V_3(t) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} q^T(s)Rq(s)dsd\theta$$

$$V_4(t) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} trace[g^T(s)Z(g(s)]dsd\theta$$

其中 P,Q,Z,R 为相应维数的正定对称矩阵。

由 Newton-Leibniz 公式有

$$\xi(t) - \xi(t-h(t)) = \int_{t-h(t)}^{t} \dot{\xi}(s)ds = \int_{t-h(t)}^{t} q(s)ds + \int_{t-h(t)}^{t} g(s)d\beta(s) \quad (22)$$

对于适当维数的矩阵 N_i, Y_i 和 T_i $(i = 1,2,3,4)$，有下列的零方程

$$2\left[\xi^T(t)N_1 + \xi^T(t-h(t))N_2 + q^T(t)N_3 + g^T(t)N_4\right] * \left[\tilde{A}\xi(t) + \tilde{A}_d\xi(t-h(t)) + \tilde{B}v(t) - q(t)\right] \equiv 0 \quad (23)$$

$$2\left[\xi^T(t)T_1 + \xi^T(t-h(t))T_2 + q^T(t)T_3 + g^T(t)T_4\right] * \left[\tilde{C}\xi(t) + \tilde{C}_d\xi(t-h(t)) - g(t)\right] \equiv 0 \quad (24)$$

$$2\left[\xi^T(t)Y_1 + \xi^T(t-h(t))Y_2 + q^T(t)Y_3 + g^T(t)Y_4\right] * \left[\xi(t) - \xi(t-h(t)) - \chi - \varsigma\right] \equiv 0 \quad (25)$$

$$\tau\Lambda - \int_{t-h(t)}^{t} \Lambda ds \geq 0 \quad （26）$$

其中 $\chi = \int_{t-h(t)}^{t} q(s)ds$,$\varsigma = \int_{t-h(t)}^{t} g(s)d\beta(s)$

$\Lambda = \eta^T(t)\tilde{Y}R^{-1}\tilde{Y}^T\eta(t)$，

L 为（21）的弱微分生成算子，由伊藤微分公式求出 L_vV 并把（23）-（26）加到 L_vV 中，且当 $Z > 0$ 时，由引理[10]可得

$$-2\eta^T(t)\tilde{Y}\int_{t-h(t)}^{t} g(s)d\beta(s) \leq \eta^T(t)\tilde{Y}Z^{-1}\tilde{Y}^T\eta(t) + \varsigma^T Z\varsigma$$

因此当扰动为零，即 $v(t) \equiv 0$ 时，有

$$L_{v\equiv 0}V \leq \eta^T(t)\Xi\eta(t) - \int_{t-h(t)}^{t} \Theta R^{-1}\Theta^T ds - \int_{t-h(t)}^{t} tr\left[g^T(t)Zg(t)\right]ds + \varsigma^T Z\varsigma$$

其中

$$\eta^T(t)=\left[\xi^T(t),\xi^T(t-h(t)),q^T(t),g^T(t)\ \right]$$
$$\Xi=\Gamma+\tau\tilde{Y}R^{-1}\tilde{Y}^T+\tilde{Y}Z^{-1}\tilde{Y}^T$$
$$\Theta=\eta^T(t)\tilde{Y}+q^T(s)R$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14}\\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24}\\ * & * & \Gamma_{33} & \Gamma_{34}\\ * & * & * & \Gamma_{44}\end{bmatrix},\tilde{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\Y_4\end{bmatrix}\qquad(27)$$

因为 $E\left(\varsigma^T Z\varsigma\right)=E\int_{t-h(t)}^{t}tr\left[g^T(t)Zg(t)\right]ds$，

所以 $EL_{v\equiv 0}V(t)\le E\eta^T(t)\Xi\eta(t)$ （28）

根据 Schur's 补定理，$\Xi<0$ 与 LMI（16）等价。由文[11]引理 1 的证明可知存在常数 $\alpha>0$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log E\|x(t)\|^2\le-\alpha$。因此滤波误差系统（10）-（12）是指数均方稳定的，引理 1 证毕。

注释 1：这里通过应用描述符模型转换简化了随机系统模型，并且将描述变量 $q(t)$ 和 $g(t)$ 视作状态向量，建立了一个以 $q(t)$ 和 $g(t)$ 为状态向量的新的 Lyapunov-Krasovskii 函数。

定理 1：对给定的常数 $\gamma>0$，系统（1）-（4）（不确定项为零时）存在形如（8）-（9）式的 H_∞ 滤波器的充分条件是存在矩阵 $P>0,Q\ge 0,Z>0$，$R>0$，常数 $h_i,e_i,i=1,2,3,4$ 使得不等式

$$\begin{bmatrix}\Gamma & \tau\tilde{Y} & \tilde{Y} & \tilde{K} & \tilde{F}\\ * & -\tau R & 0 & 0 & 0\\ * & * & -Z & 0 & 0\\ * & * & * & -I & 0\\ * & * & * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}<0\qquad(29)$$

成立，且滤波器参数为：

$$A_f=S_4^{-1}X_1,B_f=S_4^{-1}X_2\qquad(30)$$

其中 $\Gamma,\tilde{Y}$ 分别如（16）和（27）中所定义，并且式中

$$N_i=h_i\begin{bmatrix}S_1 & S_2\\ S_3 & S_4\end{bmatrix},T_i=e_i\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_3 & W_4\end{bmatrix}\qquad(31)$$

$$Y_i=\begin{bmatrix}Y_{i1} & Y_{i2}\\ Y_{i3} & Y_{i4}\end{bmatrix},Z=\begin{bmatrix}Z_1 & Z_2\\ * & Z_3\end{bmatrix}\qquad(32)$$

$$i=1,2,3,4$$

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ * & P_3\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\\ * & Q_3\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}R_1 & R_2\\ * & R_3\end{bmatrix}\qquad(33)$$

$$\tilde{L}^T=\begin{bmatrix}L^T\\ -C_f^T\end{bmatrix},\tilde{K}=\begin{bmatrix}\tilde{L}\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\tilde{F}=\begin{bmatrix}N_1\tilde{B}\\N_2\tilde{B}\\N_3\tilde{B}\\N_4\tilde{B}\end{bmatrix}\qquad(34)$$

证明：首先根据引理 1，可以证明扰动 $v(t)\equiv 0$ 时，误差动态系统(10)-(12)是鲁棒均方稳定的，其次，对于任意非零扰动 $v(t)\in L_2[0,+\infty)$ 且

$\xi(t,0)=0$，并对任意的 $T>0$

$$\begin{aligned}\hat{J}(T)&=E\int_0^T(\|\tilde{z}(t)\|^2-\gamma^2\|v(t)\|^2)dt\\ &\le E\int_0^T[\|\tilde{z}(t)\|^2-\gamma^2\|v(t)\|^2+L_vV(\xi(t),t)]dt\\ &\le E\int_0^T\begin{bmatrix}\eta(t)\\v(t)\end{bmatrix}^T\Psi\begin{bmatrix}\eta(t)\\v(t)\end{bmatrix}dt-E\int_0^T\int_{t-h(t)}^{t}\Theta R^{-1}\Theta^T dsdt\end{aligned}$$

其中

$$\Psi=\begin{bmatrix}\tilde{\Xi} & \tilde{F}\\ * & -(\gamma^2 I-D^TD)\end{bmatrix}\qquad(35)$$

$$\tilde{\Xi}=\Gamma+\tau\tilde{N}R^{-1}\tilde{N}^T+\tilde{Y}Z^{-1}\tilde{Y}^T+\tilde{K}\tilde{K}^T$$

将不含不确定项的(13)式和(31)-(34)带入(35)，并且使 $S_4A_f=X_1$，$S_4B_f=X_2,W_4B_f=X_3$，$S_2A_f=X_4,S_2B_f=X_5,W_2B_f=X_6$，

则 $\Psi<0$ 和（28）式等价。因此，

$$\hat{J}(T)\le -\lambda_{\min}(-\Psi)E\int_0^T(\|\xi(t)\|^2+\|v(t)\|^2)dt$$
$$\le -\lambda_{\min}(-\Psi)E\int_0^T\|v(t)\|^2)dt<0$$

由于 $T>0$ 是任意的，故对任意非零 $v(t)\in L_F^2((0,+\infty),R^n)$，$\hat{J}(t)<-\lambda_{\min}(-\Psi)E\int_0^t\|v(t)\|^2)dt<0$ 且滤波参数为 $A_f=S_4^{-1}X_1,\ B_f=S_4^{-1}X_2$，定理 1 证毕。

注释 2：在该滤波器的设计过程中，存在许多自由参数，因此，所寻找的滤波参数集合，当它们非空时，一定是一个很大的集合，这使得在滤波器的设计过程中，为获得进一步的性能要求提供了更大的自由度。

注释 3：最优滤波器可以通过求解以下的优化问题得到

$$\min_{X_i,\,S_j,\,W_j,\,C_f,\,i=1,2,3,4,5,6;\,j=1,2,3,4}\delta$$
$$s.t.(29-30)\text{ with }\gamma^2:=\delta$$

其中最小的 γ 值由 $\gamma^*=\sqrt{\delta^*}$ 给出，δ^* 是 δ 的最优解，并且相应的优化滤波器如（8）-（9）式所示。

4 结构不确定性系统时滞相关的 H_∞ 滤波

在这一部分，我们考虑系统矩阵中带有不确定性参数的情况，并给出如下定理。

定理 2：对给定的常数 $\gamma>0$，系统（1）-（4）存在形如（6）式的 H_∞ 滤波器的充分条件是存在矩阵 $P>0,Q\ge 0,Z>0,R>0,$ 使得不等式

$$\begin{bmatrix}\Pi & \Psi^T & \Lambda^T & \Phi & \Upsilon\\ * & -I & 0 & 0 & 0\\ * & * & -I & 0 & 0\\ * & * & * & -I & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \quad (36)$$

成立，相应的滤波器参数为：

$$A_f=S_4^{-1}X_1,B_f=S_4^{-1}X_2\quad 和\ C_f \qquad (37)$$

其中

$$\tilde{M}=\begin{bmatrix}M_0\\ B_fM_1\end{bmatrix},\ \tilde{E}_0=\begin{bmatrix}E_0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Upsilon=\begin{bmatrix}T_1\tilde{M}\\ T_2\tilde{M}\\ T_3\tilde{M}\\ T_4\tilde{M}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\Phi=\begin{bmatrix}N_1\tilde{M}\\ N_2\tilde{M}\\ N_3\tilde{M}\\ N_4\tilde{M}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\Psi^T=\begin{bmatrix}\tilde{E}_0^T\\ \tilde{E}_1^T\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \tilde{E}_2^T\end{bmatrix},\Lambda^T=\begin{bmatrix}\tilde{E}_3^T\\ \tilde{E}_4^T\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{E}_1=\begin{bmatrix}E_1 & 0\end{bmatrix},\tilde{E}_2=E_2,$$
$$\tilde{E}_3=\begin{bmatrix}E_3 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{E}_4=\begin{bmatrix}E_4 & 0\end{bmatrix}$$

证明：用 $A_0+M_0F(t)E_0$，$A_{0d}+M_0F(t)E_1$，$B_0+M_0F(t)E_2$，$C_0+M_0F(t)E_3$，$C_{0d}+M_0F(t)E_4$ 和 $A_{1d}+B_fM_1F(t)E_1$，$A_1+B_fM_1F(t)E_0$，$B_1+B_fM_1F(t)E_2$，$C_1+B_fM_1F(t)E_3$，$C_{1d}+B_fM_1F(t)E_4$

分别代替公式(29)中 $A_0,A_{0d},B_0,C_0,C_{0d}\ A_1,A_{1d},B_1,C_1,C_{1d}$，可知系统（1）-（4）对应于(29)式的等价条件是

$$\Sigma+\Phi F(t)\Psi+\Psi^TF^T(t)\Phi^T$$
$$+\Upsilon F(t)\Lambda+\Lambda^TF^T(t)\Upsilon^T<0$$

其中 $\Pi,\Phi,\Psi,\Upsilon,\Lambda$ 分别如（29）和（36）所定义。

由引理[12]可知，存在正数 $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ 使得

$$\Gamma+\varepsilon_0\Phi\Phi^T+\varepsilon_0^{-1}\Psi^T\Psi$$
$$+\varepsilon_1\Upsilon\Upsilon^T+\varepsilon_1^{-1}\Lambda^T\Lambda<0$$

取 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$，由 Schur 补引理. 上述不等式等价于（36）式,定理 2 证毕。

注释 4: 由于自由加权矩阵的引入，并且将描述变量 $q(t)$ 和 $g(t)$ 看作状态向量使得定理 1 和定理 2 中不含 Lyapunov 矩阵 P,Q,R,Z 和系统矩阵 $A_i, A_{id}, C_i, C_{id}, B_i, L\ (i=0,1)$ 的乘积项，因此无需在滤波器的设计过程中对 Lyapunov 矩阵作任何约束，这在很大程度上降低了滤波器设计的保守性。

注释 5：在定理 1 和定理 2 中如果我们取矩阵 $Q,Z,R,Y_i\ (i=1,2,3,4)$ 为零矩阵，则可以分别得到精确已知随机系统和结构不确定性随机系统的时滞无关的 H_∞ 滤波。因此本文中提到的设计方法包括了时滞相关和时滞无关 H_∞ 滤波器的设计问题。这在状态估计、信号传输和检测中为获取所需信号排出外界干扰提供了可行性方法，具有实际的应用价值。

5 仿真结果

考虑带有下列参数的随机时滞系统[8]

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 3+0.5\rho\\ -4 & -5\end{bmatrix}, B_0=\begin{bmatrix}-0.4545\\ -0.9090\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A_{0d}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0\\ 0.2 & -0.2+0.3\sigma\end{bmatrix}, A_{1d}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3\end{bmatrix}, B_1=1$$

$$C_0=C_{0d}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}, C_1=C_{1d}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}, \mu=0.3$$

其中 ρ 和 σ 为不确定实参数满足

$$|\rho|\le 1,\ |\sigma|\le 1 \qquad (30)$$

论文的目的是设计一个如（8）-（9）所示的滤波器，使得滤波误差系统（10）-（12）满足指数均方稳定，且满足所指定的 H_∞ 性能指标 γ。首先，假设所给出的系统是精确已知的，即 $\rho=\sigma=0$.（不妨取 $h_1=0.7, h_2=0.41, h_3=0.7$ $h_4=0.2, e_1=0.5, e_2=0.3, e_3=0.1,\ e_4=0.5$）。文[8]获得扰动衰减水平 $\gamma_{\min}=0.6074$，而应用定理 1 的标准取 $\tau=0.1$ 时所得到的 $\gamma_{\min}=8\times10^{-7}$ 它远远小于文[8]中所得到的结果。当我们取 $\gamma=0.6074$ 时，由定理 1 和文[8]得到相应的滤波参数分别为：

$$A_f=\begin{bmatrix}-9.7029 & 1.1090\\ 0.9684 & -9.4364\end{bmatrix}, B_f=\begin{bmatrix}-0.1195\\ -0.1562\end{bmatrix}$$

$$C_f=\begin{bmatrix}0.0399 & 0.0965\end{bmatrix}$$

和

$$A_f=\begin{bmatrix}0.3065 & 2.5820\\ -4.4618 & -5.0860\end{bmatrix}, B_f=\begin{bmatrix}0.1797\\ -0.5045\end{bmatrix}$$

$$C_f=\begin{bmatrix}-2.8091 & -3.4756\end{bmatrix}$$

接着，假设系统带有结构不确定性即 $|\rho|\le 1,\ |\sigma|\le 1$。当不确定性显示出范数有界特征时，系统的参数矩阵可表示为如下形式：

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & -5\end{bmatrix}, B_0=\begin{bmatrix}-0.4545\\ -0.9090\end{bmatrix}$$

$$A_{0d}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0\\ 0.2 & -0.2\end{bmatrix}, B_1=1$$

$$A_{1d}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

$$C_0=C_{0d}=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}, M_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_1=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}, C_1=C_{1d}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

$$E_0=\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$F(t)=\begin{bmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$E_3=E_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}$$

取
$h_1=0.001, h_2=0.21, h_3=0.22, h_4=0.21, e_1=0.7, e_2=0.33, e_3=0.1, e_4=0.43$，文[8]获得扰动衰减水平 $\gamma_{\min}=2.2407$,而应用定理 2 的标准取 $\tau=0.001$ 时所得到的 $\gamma_{\min}=10^{-5}$，它远远小于文[8]中所得到的结果。当我们取 $\gamma=2.2407$ 时，由定理 1 和文[8]得到相应的滤波参数分别为：

$$A_f=\begin{bmatrix}-12.7004 & 0.3689\\ 0.1412 & -12.8458\end{bmatrix}, B_f=\begin{bmatrix}0.0861\\ -0.1577\end{bmatrix}$$
$$C_f=\begin{bmatrix}-0.0260 & -0.0127\end{bmatrix}$$

和

$$A_f=\begin{bmatrix}1.1507 & 2.8916\\ -4.3362 & -4.7934\end{bmatrix}, B_f=\begin{bmatrix}0.1441\\ -0.4775\end{bmatrix}$$
$$C_f=\begin{bmatrix}-2.4746 & -3.1639\end{bmatrix}$$

取初始值 $x(0)=[0.1,0], \hat{x}(0)=[0.04,0]$，外部扰动输入 $v(t)$ 取随机信号，$v(0)=0.1$。图 1 和图 5 分别给出了两种情况下系统状态和滤波状态的时间响应，它表明当 $v(t)=0$ 时，滤波误差系统(10)-（12）是指数均方稳定的。图 2 和图 6 分别给出了两种情况下函数

$$w(t)=\int_0^\infty \|\tilde{z}(t)\|^2 dt \Big/ \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt$$ 的

时间响应。图 2 表明精确已知系统的 H_∞ 性能水平的最大值小于 $\sqrt{0.25}=0.5$，小于给定的性能水平 0.6074。

图 6 表明结构不确定系统的 H_∞ 性能水平的最大值小于 $\sqrt{0.05}=0.2236$，小于给定的性能水平 2.2407。图 3、图 4 和图 7、图 8 分别给出了两种情况下扰动 $v(t)\neq 0$ 时，系统状态、定理 1 的滤波状态及文[8]的滤波状态的时间响应，它表明滤波效果达到了理想的状态，并且定理 1 和定理 2 的滤波效果优于文[8]的滤波效果。

6 结论

论文研究了带有结构不确定性参数和时变状态时滞的连续时间线性随机系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题。基于 LMI 方法，设计了一个指数均方稳定的线性滤波器，保证了从外界扰动到估计误差的 L_2 增益小于指定的性能水平 $\gamma>0$。分别给出了精确已知随机系统和带结构不确定性随机系统时滞相关的 H_∞ 滤波存在的充分性条件，并且可以通过解线性矩阵不等式约束的凸优化问题，使滤波器设计转化为最优 H_∞ 滤波器设计问题。基于描述符模型转换系统的应用并引入一些自由加权矩阵使所获得的最小 γ 值与已有文献中相应结果相比具有更小的保守性。仿真结果表明论文中提出的 H_∞ 滤波设计方法与现有方法相比具有更小的保守性。并且该设计方法可以应用于各种带有时变状态时滞的系统的控制问题，包括带有多胞不确定性的随机系统的 H_∞ 滤波和控制，及 H_∞ 输出反馈问题。

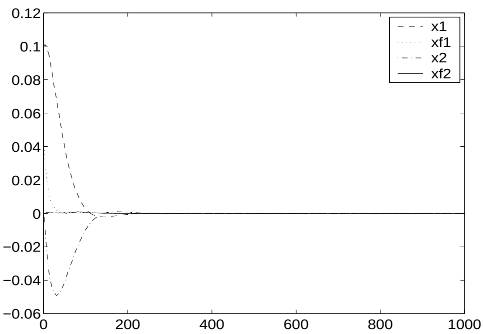

图 1

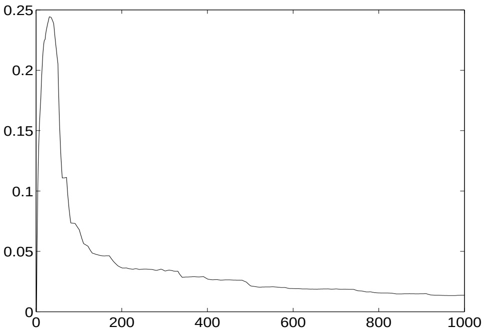

图 2

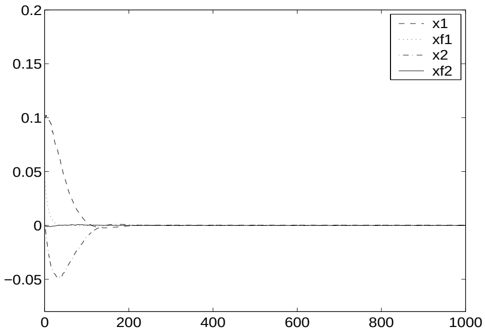

图 5

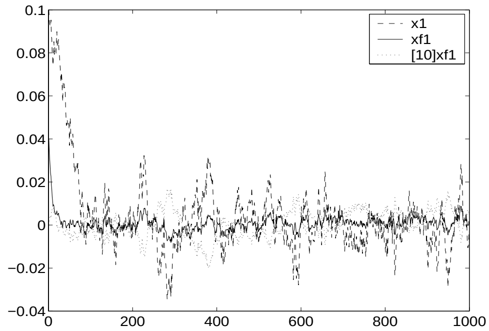

图 3

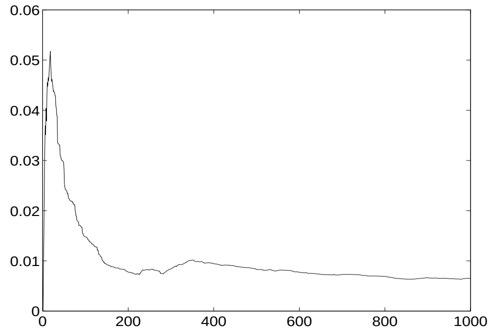

图 6

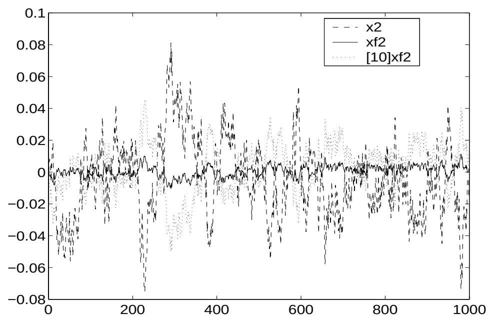

图 4

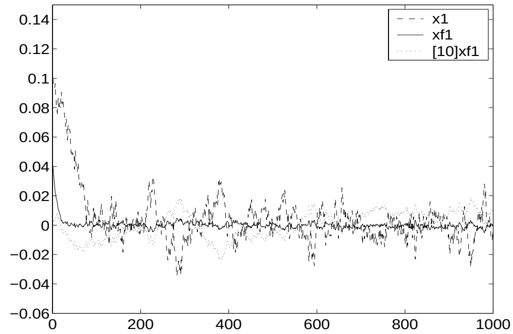

图 7

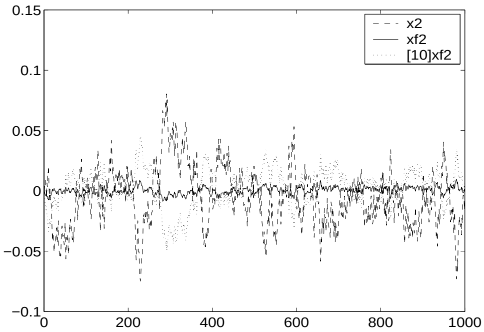

图 8

参考文献：

[1] 关新平, 张群亮. 不确定离散时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波与仿真. 系统仿真学报, 2002,14(8): 1078-1011.

[2] 蔡云泽，何星，许晓明，张卫东. 非线性不确定状态时滞的鲁棒 H_∞ 滤波. 自动化学报，2004，30(4): 592-596.

[3] E. Gershon, D.J.N. Limebeer, U. Shaked, and I. Yaesh. Robust H_∞ Filtering of Stationary Continuous-Time Linear Systems With Stochastic Uncertainties, IEEE Trans. Automat. Contr. 2001, 46(11): 1788-1793.

[4] W. Zhang , B.-S. Chen and C.-S. Tseng. Robust H_∞ filtering for nonlinear stochastic systems, IEEE Trans. Signal Process., 2005, 53: 589-598.

[5] 黄玉林，张维海，李庆华，一类非线性随机不确定系统的鲁棒滤波，山东大学学报，2006, 41(2): 78-84.

[6] 李玉梅，关新平，参数不确定的非线性随机时滞系统的 H_∞ 滤波，系统工程与电子技术，2008, 30(9):1730-1734.

[7] S. Xu and T. Chen. Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems, IEEE Trans. Signal Process., 2002, 50(12): 2998-3007.

[8] H. Gao, J. Lam, C. Wang , Robust energy-to-peak filter design for stochastic time-delay systems, Syst. Contr. Lett., 2006, 55: 101-111.

[9] E. Fridman, U. Shaked. A descriptor system approach to H_∞ control of time-delay systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 2002, 47: 253-279.

[10] Y. Wang, L. Xie. C.E. De Souza, Robust control of a class of uncertain nonlinear system, Syst. Contr. Lett. , 1992, 19: 139-149,.

[11] Y. Li , X. Guan and D. Peng. Exponential stability criteria for uncertain stochastic systems, Proceedings of 27th Chinese Control Conference (accepted), 2008.

[12] L. Xie, Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. Int. J. Control, 1996, 63: 741-750,.