一类不确定非线性随机时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波

李玉梅[1,2]，关新平[1]

（1. 燕山大学 电气工程学院 河北 秦皇岛 066004; 2. 新疆大学 数学与系统科学学院 新疆 乌鲁木齐 830046）

摘 要： 研究了一类具有状态和外界干扰依赖噪声的不确定非线性随机时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题。假设状态方程带有参数不确定性及随机外界干扰，且不确定性是范数有界的，系统的动态模型是由伊藤微分方程来描述。对所有容许的参数不确定性以及外界干扰，构造一个线性、无时滞、不确定性独立的状态滤波器，使得滤波误差动态系统是指数均值稳定并且独立于时滞的。基于线性矩阵不等式（LMI）方法给出了保证鲁棒 H_∞ 滤波存在的充分性条件。最后，数值仿真结果很好地说明了该方法的有效性。

关键词： 鲁棒 H_∞ 滤波、时滞、非线性随机系统、线性矩阵不等式（LMI）。

Robust H_∞ Filtering for a Class of Uncertain Nonlinear Stochastic Time-delay Systems

Yumei Li [1,2], Xinping Guan [1]

(1.Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao,066004, China;

2.Department of Mathematics and System Science, Xinjian University, Urumuqi, 830046, China)

Abstract: This paper investigates a robust H_∞ filtering design problem for a class of uncertain nonlinear 'stochastic time-delay system with state and exogenous disturbance -dependent noise. Assume the parameter uncertainty is norm-bounded and the system dynamic is modeled by Ito-type stochastic differential equations. The aim of this work is to design a linear, delayless, uncertainties independent state estimator such that for all admissible uncertainties as well as exogenous disturbances, the dynamics of the estimation error is stochastically exponential stable in mean square and independent of the time-delay. Sufficient conditions are proposed to guarantee the existence of desired robust H_∞ filters via linear matrix inequalities(LMI). Numerical example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed approachs.

key words: Robust H_∞ filtering, time-delay , nonlinear stochastic system., linear matrix inequalities(LMI)

基金资助：国家杰出青年基金资助（60525303）；国家自然科学基金资助（60404022）；河北省自然科学基金资助（F2006000270）

作者简介：李玉梅（1975-），女，河南，控制理论与工程，E-mail: zwzlym@163.com

1 引言

状态估计器设计是控制界的一个重要的研究课题，并且在实际中具有极大的应用价值。其中 H_∞ 滤波被认为是最重要的估计方法之一（文献[1]、[2]研究了离散时滞系统，文献[3]、[4]研究了非线性 H_∞ 滤波器的设计问题）。近年来，系统模型由伊藤随机微分方程来描述的随机 H_∞ 滤波和控制问题成为控制界研究的热点问题,并且获得了广泛的关注(参考文献 [5]-[7])；文献[8] -[9]研究了确定性系统的非线性 H_∞ 控制和状态估计器问题。文献[10]和[5]分别讨论了连续时间线性和非线性机不确定系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题。

时滞在控制领域经常遇到并且是引起系统的不稳定和性能差的主要因素,近年来，线性和非线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器的设计和滤波问题引起了广泛的关注（参考文献[11]-[13]）；另外，在实际中为了使滤波过程具有快速收敛性和准确性，通常希望滤波过程具有指数稳定性。如果滤波误差动态系统是随机指数稳定的，那么称这个滤波是指数稳定的。线性和非线性随机系统的指数滤波器的设计也是一个热门的研究课题（如文献[13]、[14] ）然而，很少有学者研究由伊藤随机微分方程描述的非线性不确定随机时滞系统的指数滤波器的设计问题，该问题在实际中有很大的应用。这就是我们研究具有随机指数稳定性和由伊藤随机微分方程描述的不确定非线性随机时滞系统的 H_∞ 滤波问题的动机。

本文研究了不确定非线性随机时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题，假设系统由带有时变范数有界的参数不确定性的状态空间模型来描述，该模型不仅带有白噪声而且带有外界干扰信号。对于所有不确定性和非线性外界干扰，设计了一个线性、无时滞、不确定性独立的状态估计器，使得滤波误差动态系统是随机指数均值稳定、时滞独立的，并且关于不确定外界干扰信号的 L_2 增益小于某个指定的性能水平。基于 LMI 算法，给出了保证鲁棒 H_∞ 滤波存在的充分性条件。最后，数值仿真说明了该方法的有效性和可行性。

为了方便，采用下面的一些记号：

$Tr(A)(A^T)$： 表示矩阵 A 的迹（转置）。

$A \ge 0 (A > 0)$： 表示矩阵 A 是半正定（正定）的。

I： 表示单位阵。

$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$： 表示 x 的欧拉范数。

$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$： $\lambda\max(\lambda\min)$ 表示矩阵 A 的最大（最小）特征值。

$L_F^2([0,\infty);R^n)$： 定义在 $[0,\infty]$ 上关于流 F_t 适应的 R^n 值的随机过程 $\phi(\cdot)$ 的空间，且满足

$\|\phi(t)\|^2_{L^2_F} = E\int_0^\infty \|\phi(t)\|^2 dt < \infty$

2 问题描述和假设

考虑下列由伊藤微分方程描述的一类不确定非线性随机时滞系统：

$$\begin{aligned} dx(t) &= [(A+\Delta A(t))x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-h(t)) \\ &+ f(x(t))+(B+\Delta B(t))v]dt+g(t,x(t),x(t-h(t)))d\beta(t) \\ x(t) &= \varphi(t), t\in[-h,0] \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} dy(t) &= [(C+\Delta C(t))x(t)+(D+\Delta D(t))v]dt \\ z(t) &= Lx(t) \end{aligned} \tag{2}$$

其中：$x(t)\in R^n$ 是系统的状态，$y(t)\in R^m$ 是系统的可测输出，$f(\cdot): R^n \to R^n$ 是未知的非线性函数且 $f(0)\equiv 0, h>0$ 表示系统时滞，$\varphi(t)$ 是连续向量值初始函数，并且 $\varphi := \{\varphi(s): -h\le s\le 0\}\in L^2_{F0}([-h,0],R^n)$。系统（1）有唯一解，记作 $x(t,\varphi)$，它是平方可积的，$z(t)\in R^r$ 是待估计的状态，$v(t)\in L^2_F([0,\infty);R^n)$ 代表了外界干扰信号。A, A_d, B, C, D, L 是具有相应维数的常数矩阵，$\Delta A(t), \Delta A_d(t), \Delta B(t), \Delta C(t), \Delta D(t)$ 是未知矩阵，表示范数有界参数不确定性并且满足下列各式：

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t)\\ \Delta C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}F(t)N_1,\begin{bmatrix}\Delta B(t)\\ \Delta D(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}F(t)N_3,\left[\Delta A_d(t)\right]=M_1F(t)N_2 \tag{3}$$

其中：$F(t)\in R^{i\times j}$ 是一个具有勒贝格可测元素的未知参数矩阵并且满足：

$$F^T(t)F(t)\le I \tag{4}$$

M_1, M_2, N_1, N_2, N_3 是具有相应维数的已知实常数矩阵。

变量 $\beta(t)$ 是一个定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 上的 m 维标准布朗运动，该空间带有自然流 $\{F_t\}_{t\ge 0}$。$g(\cdot): R_+\times R^n\times R^n \to R^{n\times m}, i=0,1$ 是随机干扰，并且满足局部李普西兹连续性及线性增长性条件，而且 g 满足[9]

$$\begin{aligned} & tr\left[g^T(t,x(t),x(t-h(t)),g(t,x(t),x(t-h(t))\right] \\ & \le a_1\|x(t)\|^2 + a_2\|x(t-h(t))\|^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中：$a_1>0, a_2>0$ 是已知的常系数。为了稳定性目的，本文假设 $g(t,0,0)\equiv 0$。所以（1）具有一个平凡解 $x(t,0)\equiv 0$。

此外，本文作了如下假设：

假设 1：存在 $\lambda > 0$，使未知非线性函数 $f(x(t))$ 满足下面的有界性条件：

$$\|f(x(t))\| \le \lambda \|x(t)\|, \forall x \in R^n \tag{6}$$

构造如下线性滤波器方程：

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= A_f \hat{x}(t)dt + B_f d\hat{y}(t) \\ x(0) &= 0 \\ \hat{z}(t) &= L_f \hat{x}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

其中：$\hat{x}(t) \in R^n, \hat{z}(t) \in R^r$ 是常数矩阵，A_f, B_f 是所要设计的滤波参数。

记 $\xi^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \hat{x}^T(t) \end{bmatrix}$ 且 $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ 得到下列增广系统：

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= \left[\widetilde{A}(t)\xi(t) + \widetilde{A}_d(t)\xi(t-h(t)) + \widetilde{B}(t)v + f(\xi(t))\right]dt \\ &+ \widetilde{g}(t,\xi(t),\xi(t-h(t))d\beta(t) \\ \widetilde{z}(t) &= \widetilde{L}\xi(t) \end{aligned} \tag{8}$$

其中：

$$\tilde{A}(t) = \tilde{A}_1 + \Delta\tilde{A}_1(t)，\ \tilde{A}_d(t) = \tilde{A}_{d1} + \Delta\tilde{A}_{d1}(t)，\ \tilde{B}(t) = \tilde{B}_1 + \Delta\tilde{B}_1(t) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \widetilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta\widetilde{A}_1(t) &= \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ B_f \Delta C(t) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ B_f M_2 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} N_1 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{M}F(t)\widetilde{N}_1 \\ \Delta\widetilde{A}_d(t) &= \begin{bmatrix} \Delta A_d(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} N_2 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{M}_1 F(t)\widetilde{N}_2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix}, \widetilde{L} = \begin{bmatrix} L - L_f \end{bmatrix} \\ \Delta\widetilde{B}_1(t) &= \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ B_f \Delta D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ B_f M_2 \end{bmatrix} F(t)\widetilde{N}_3 = \widetilde{M}_2 F(t)\widetilde{N}_3 \\ \widetilde{g}(t,\xi(t),\xi(t-h(t))) &= \begin{bmatrix} g(t,\xi(t),\xi(t-h(t))) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

观察系统（8），让 $\xi(t,\eta)$ 表示从初始值 $\xi(\theta) = \eta(\theta), -h \le \theta \le 0$，$L^2_{F0}([-h,0], R^{2n})$ 出发的状态轨迹。显然系统（8）允许有一个相应于初始值 $\eta = 0$ 的平凡解 $\xi(t,0) \equiv 0$。

首先给出下面的定义：

定义 1：对于系统（8）和每一个 $\eta \in L^2_{F0}([-h,0]; R^{2n})$，如果存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 使得：

$$E\|\xi(t,\eta)\|^2 \le \alpha e^{-\beta t} \sup_{-h\le\theta\le 0} E\|\eta(\theta)\|^2 \tag{12}$$

成立，则系统（8）的平凡解是指数均值稳定的

本文的目的是为不确定非线性随机时滞系统（1）设计一个滤波器。主要是寻找滤波器参数 A_f, B_f, L_f 使得对所有容许不确定参数和随机外界干扰，当 $v(t) \equiv 0$ 时增广系统（8）是指数均值稳定，并且独立于时滞 h 的。特别是对于一个指定的干扰衰减水平 $\gamma > 0$，满足如下的性能指标：当 $v(t) \neq 0$，$v(t) \in L^2_F((0,\infty), R^n)$ 时，

$$\hat{J} = \int_0^\infty (\tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 v^T v) dt < 0 \tag{13}$$

3 主要结果和证明

本节将给出 H_∞ 滤波存在的充分性条件。对此，先给出如下引理

引理 1：假设存在常数 $\xi_i > 0, \lambda > 0, \alpha_j > 0, i = 1,2,3,4,5; j = 1,2$ 以及正定矩阵 $P > 0$，使得下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_1 & \tilde{A}_{d1}^T P & P\tilde{M} & P\tilde{M}_1 \\ P\tilde{A}_{d1} & -\varepsilon_2 P & 0 & 0 \\ \tilde{M}^T P & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 \\ \tilde{M}_1^T P & 0 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

$$P \le \rho I \tag{15}$$

成立，则当 $v(t) \equiv 0$ 时增广系统（8）是指数均值稳定的。

其中：$\tilde{\psi}_1 = P\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1^T P + (2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2 + \sum_{i=1}^{2} a_i)\rho I + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)P + \varepsilon_1^{-1}\tilde{N}_1^T \tilde{N}_1 + \varepsilon_3^{-1}\tilde{N}_2^T \tilde{N}_2$

证明：定义李亚普诺夫函数为：$V(\xi(t)) = \xi(t)^T P \xi(t) + \int_{-h} \xi(s)^T Q \xi(s) ds$

其中 $P > 0$ 是（14）的一个解且 $Q > 0$ 满足下式：

$$Q := \varepsilon_2^{-1}\tilde{A}_{d1}^T P \tilde{A}_{d1} + \varepsilon_3^{-1}\tilde{N}_2^T \tilde{N}_2 + \alpha_2 \rho I \tag{16}$$

L_t 是系统（8）的弱微分算子，由伊藤微分公式有：

$$L_{v=0}V(\xi(t),t) = 2\xi(t)^T P\left[\widetilde{A}(t) + \widetilde{A}_d(t)\xi(t-h(t)) + \widetilde{f}(\xi(t))\right] + Tr\left[g^T Pg\right] \\ + \xi(t)^T Q\xi(t) - \xi^T(t-h(t))Q\xi(t-h(t)) \tag{17}$$

把（9）-（11）代入（17）利用引理［16］与假设（1）与（5），得到下面的估计式：

$$2\xi^T P\widetilde{A}(t)\xi \le \xi^T(P\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_1^T P + \varepsilon_1 P\widetilde{M}\widetilde{M}^T P + \varepsilon_1^{-1}\widetilde{N}_1^T\widetilde{N}_1)\xi \tag{18}$$

$$2\xi^T(t)P\widetilde{A}_d\xi(t-h(t)) \le \xi^T(t)(\varepsilon_2 P + \varepsilon_3 P\widetilde{M}_1\widetilde{M}_1^T P)\xi(t) \\ + \xi^T(t-h(t))(\varepsilon_2^{-1}\widetilde{A}_{d1}^T P\widetilde{A}_{d1} + \varepsilon_3^{-1}\widetilde{N}_2^T\widetilde{N}_2)\xi(t-h(t)) \tag{19}$$

$$2\xi^T P\widetilde{f}(\xi(t)) \le \varepsilon_4\xi^T P\xi + 2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2\rho\|\xi(t)\|^2 \tag{20}$$

$$Tr\left[g^T Pg\right] \le \rho(\alpha_1\|\xi(t)\|^2 + \alpha_2\|\xi(t-h(t))\|^2) \tag{21}$$

把（18）-（21）与（16）代入（17）得到：

$$L_{v=0}V(\xi(t),t) \le \xi^T(t)\prod\xi(t) \le -\lambda_{\min}(-\prod)\|\xi(t)\|^2 \tag{22}$$

其中：

$$\prod := P\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_1^T P + \varepsilon_1 P\widetilde{M}\widetilde{M}^T P + \varepsilon_3 P\widetilde{M}_1\widetilde{M}_1^T P \\ + (2\varepsilon_4^{-1}\lambda + \sum_{i=1}^{4}\alpha_i)\rho I + \varepsilon_1^{-1}\widetilde{N}_1^T\widetilde{N}_1 + \varepsilon_3^{-1}\widetilde{N}_2^T\widetilde{N}_2 \\ + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)P + \varepsilon_2^{-1}\widetilde{A}_{d1}^T P\widetilde{A}_{d1} < 0 \tag{23}$$

由 schur's 补引理，$\prod$ 等价于 LMI（14），然后由伊藤微分公式，有：

$$dV(\xi(t),t)\big|_{v=0} \le -\lambda_{\min}(-\prod)\|\xi(t)\|^2 dt + 2\xi^T(t)Pgd\beta \tag{24}$$

下面证明增广系统是指数均值稳定的。采用文献[14]和[15]中的技术手段来处理（24）。

假定 β 为下列方程的唯一解：

$$\lambda_{\max}(Q)e^{\beta h} + \beta\lambda_{\max}(P) - \lambda_{\min}(-\prod) = 0 \tag{25}$$

其中：$\prod$ 和 Q 分别由式（23）和（16）定义，P 是（14）的正定解，h 是未知时滞。

从（24）可以得到：

$$d\left[e^{\beta t}V(\xi(t),t)\big|v=0\right] = e^{\beta t}\left[\beta V(\xi(t),t)dt + dV(\xi(t),t)\right] \\ = e^{\beta t}\left\{\left[\beta\xi^T(t)P\xi(t) + \beta\int_{t-h(t)}^{t}\xi^T(s)Q\xi(s)ds\right]dt + dV(\xi(t),t)\right\} \\ \le e^{\beta t}\left\{\left[-\lambda_{\min}(-\prod) + \beta\lambda_{\max}(P)\right]\|\xi(t)\|^2 + \beta\lambda_{\max}(Q)\int_{t-h(t)}^{t}\|\xi(s)\|^2 ds\right\}dt \\ + 2e^{\beta t}\xi^T(t)P\left[\widetilde{g}_0(t)d\beta_0(t) + \widetilde{g}_1(t)d\beta_1(t)\right]$$

然后对两边从 $0 \to \mathrm{T}\,(\mathrm{T}>0)$ 积分，可得:

$$e^{\beta T} EV(\xi(T),T\Big|_{v=0} \le EV(\xi(0),0) + \left[-\lambda_{\min}(-\Pi) + \beta\lambda_{\max}(P)\right] E\int_0^T e^{\beta t}\|\xi(t)\|^2 dt$$

$$+\beta\lambda_{\max}(Q) E\int_0^T e^{\beta t}\int_{t-h(t)}^{t} \|\xi(s)\|^2 ds dt$$

注意:

$$E\int_0^T e^{\beta t}\int_{t-h(t)}^{t}\|\xi(s)\|^2 ds dt \le E\int_{-h}^{T}\left(\int_{\max(s,0)}^{\min(s+h,T)} e^{\beta t} dt\right)\|\xi(s)\|^2 ds \le E\int_{-h}^{T} 1/\beta e^{\beta(s+h)}\|\xi(s)\|^2 ds$$

$$\le 1/\beta e^{\beta h} E\int_0^T e^{\beta t}\|\xi(t)\|^2 dt + E\int_{-h}^{0} 1/\beta e^{\beta h}\|\eta(\theta)\|^2 d\theta$$

考虑 β 在式（25）中的定义，我们有:

$$e^{\beta T} EV(\xi(T),T)|v \equiv 0 \le \left[\lambda_{\max}(P) + h\lambda_{\max}(Q)\right] \sup_{-h\le\theta\le o} E\|\eta(\theta)\|^2$$

其中: $\alpha := \lambda_{\min}^{-1}(P)\left[\lambda_{\max}(P) + h\lambda_{\max}(Q) + h\lambda_{\max}(Q)e^{\beta h}\right]$

因为 $T>0$ 是任意的，因此满足式（12）所定义的指数稳定性定义，引理 1 得到证明。

现在给出下列定理:

定理 1: 考虑系统（1），如果存在正数 $\varepsilon_i > 0, \alpha_j > 0, \lambda > 0, i = 1,2,3,4,5; j = 1,2$ 和正定矩阵 $P>0$，

对任意指定的干扰衰减水平 $\gamma > 0$，满足 $\gamma^2 I - \varepsilon_5^{-1} N_3^T N_3 > 0$,并且使得下面的 LMI

$$\begin{bmatrix} X-\rho I & 0 \\ 0 & Y-\rho I \end{bmatrix} < 0 \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix}
\psi_1 & C^T Z_2^T & \varepsilon_2^{-1} A_d^T X & 0 & XM_1 & XM_1 & L^T & XM_1 & XB \\
Z_2 C & \psi_2 & 0 & 0 & Z_2 M_2 & 0 & -L_f^T & Z_2 M_2 & Z_2 D \\
\varepsilon_2^{-1} X A_d & 0 & -\varepsilon_2^{-1} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2^{-1} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
M_1^T X & M_2^T Z_2^T & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
M_1^T X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I & & & \\
L & -L_f & 0 & 0 & & & -I & & \\
M_1^T X & M_2^T Y & 0 & 0 & & & & -\varepsilon_5^{-1} I & \\
B^T X & D^T Z_2^T & 0 & 0 & & & & & \psi_3
\end{bmatrix} < 0 \tag{27}$$

有解 $X>0, Y>0, Z_1 \in R^{m\times m}$，则对任意非零的 $v(\mathrm{t}) \in \mathrm{L}_{\mathrm{F}}^2((0,\infty),\mathrm{R}^n)$，$\mathrm{H}_\infty$ 性能 $\hat{J} < 0$ 成立且相应的

滤波参数为:

$$\mathrm{A}_f = Y^{-1}Z_1, \mathrm{B}_f = Y^{-1}Z_2 \text{ 和 } L_f \tag{28}$$

其中：$\psi_1 = A^T X + XA + (\varepsilon_2+\varepsilon_4)X + \varepsilon_3^{-1}N_2^T N_2 + \left[2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2 + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i\right]\rho I + \varepsilon_1^{-1}N_1^T N_1$

$$\Psi_2 = Z_1 + Z_1^T + (\varepsilon_2+\varepsilon_4)Y + \left[2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2 + \sum_{i=1}^{2}\alpha_i\right]\rho I$$

$$\Psi_3 = -(\gamma^2 I - \varepsilon_5^{-1}N_3^T N_3$$

证明：首先，由引理1，可以推导出当$v(t)\equiv 0$时系统（8）是指数均值稳定的。

其次，证明对于任意非零的$v(t)\in L_F^2((0,+\infty),R^n)$且，$\xi(t,0)=0$时，$\hat{J}<0$成立，注意对任意$T>0$

$$\hat{J}(T) = E\int_0^T[(\xi^T(t)\hat{L}^T\xi(t)-\gamma^2\|v(t)\|^2)dt + dV(\xi(t),t) - dV((\xi(t),t)]$$

$$= E\int_0^T\left[\xi^T(t)\hat{L}^T\tilde{L}\xi(t)-\gamma^2\|v(t)\|^2 + L_v V(\xi(t),t)dt - E\int_0^T L_v V(\xi(t),t)dt\right]$$

$$\le E\int_0^T\begin{bmatrix}\xi^T(t)\hat{L}^T\tilde{L}\xi(t)-\gamma^2\|v(t)\|^2 + \\ L_{v=0}V(\xi(t),t)+2\xi^T(t)P\tilde{B}_1 v(t)+\varepsilon_5\xi^T(t)P\tilde{M}_2\tilde{M}_2^T P\xi(t)+\varepsilon_5^{-1}v^T(t)N_3^T N_3 v(t)\end{bmatrix}dt$$

$$\le E\int_0^T\left\{\xi^T(t)\left[\prod+\varepsilon_5 P\tilde{M}_2\tilde{M}_2^T P+\hat{L}^T\tilde{L}\right]\xi(t)+2\xi^T(t)P\tilde{B}_1 v(t)-v^T(t)\left[\gamma^2 I-\varepsilon_5^{-1}v^T(t)N_3^T N_3\right]v(t)\right\}dt$$

$$= E\int_0^T\begin{bmatrix}\xi(t)\\ v(t)\end{bmatrix}^T N\begin{bmatrix}\xi(t)\\ v(t)\end{bmatrix}dt$$

其中：

$$N = \begin{bmatrix}\Psi_1 & P\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_1^T & \Psi_2\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\Psi_1 = \prod+\varepsilon_5 P\tilde{M}_2\tilde{M}_2^T P+\tilde{L}^T\tilde{L}, \quad \Psi_2 = -(\gamma^2 I-\varepsilon_5^{-1}N_3^T N_3)$$

如果$N<0$,则：

$$\hat{J}(T)\le -\lambda_{\min}(-N)E\int_0^T\left(\|\xi(t)\|^2+\|v(t)\|^2\right)dt \le -\lambda_{\min}(-N)E\int_0^T\|v(t)\|^2)dt<0$$

对于任意非零的$v(t)\in L_F^2((0,+\infty),R^n)$，满足$\hat{J}(t)<-\lambda_{\min}(-N)E\int_0^t\left(\|v(t)\|^2\right)dt<0$，取$P=diag(X,Y)$，则(15)式等价于（26）式。把（10）代入（29）且设$YA_f=Z_1,YB_f=Z_2$，则$N<0$是等价于（27）式的，从我们的假设可得$A_f=Y^{-1}Z_1$，$B_f=Y^{-1}Z_2$。定理1得到证明。

注释1： 在滤波器的设计过程中存在许多自由参数。因此，所设计的滤波器的参数集合当它非空时一

定是很大的，并且它的选取具有很大的自由度。这使得在滤波过程中，为获得进一步的性能要求提供了很大的可能性。

注释 2:通过解下列线性矩阵不等式优化问题的最优解

$$\min_{X,Y,Z_1,Z_2,L_f} \delta$$
$$s.t.(27)-(28)\, with\, \gamma^2 := \delta$$

能很容易的获得使定理 1 条件成立的最小 γ 衰减水平。

γ 的最小值可由 $\gamma^* = \sqrt{\delta^*}$ 得到，其中，δ^* 是 δ 的最优值，最优的滤波器参数可从式（28）获得。

注释 3：定理 1 获得的结论，可以很容易的推广到带有多时滞的非线性随机系统中。

4 数值仿真

考虑带有下列参数的非线性不确定随机时滞系统：

$$A=\begin{bmatrix}-9 & 1\\ -2 & -10\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-0.3\\ -0.42\end{bmatrix}, N_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.4\end{bmatrix}, M_1=\begin{bmatrix}-0.3\\ 0.2\end{bmatrix}$$
$$A_d=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\\ 0.1 & -0.4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0.4\\ -0.2\end{bmatrix}, N_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\end{bmatrix}, M_2=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.5\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 0.5 & -15\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}, N_3=0.5,\ f(x(t))=\begin{bmatrix}\sin x_1\\ \sin x_2\end{bmatrix}$$

$$g(x(t),x(t-h))=0.5x(t)+0.5x(t-h)$$
$$F(t)=\sin t,\ \lambda=\sqrt{2}, h=0.1, \phi(t)=0.1$$

令 $\varepsilon_1=0.6,\varepsilon_2=1,\varepsilon_3=0.7,\varepsilon_4=1.5,\varepsilon_5=1,a_1=a_2=a_3=a_4=0.5,\gamma=0.9$，解线性矩阵不等式（26）-（27）得到下列解

$$X=\begin{bmatrix}0.9943 & -0.11\\ -0.11 & 0.8355\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}0.9435 & -0.2361\\ -0.2361 & 1.1054\end{bmatrix} Z_1=\begin{bmatrix}-7.9981 & 5.9412\\ -5.5014 & -8.1489\end{bmatrix}, Z_2=\begin{bmatrix}-0.0175 & 0.0057\\ -0.0125 & 0.0040\end{bmatrix}$$

由定理 1，可得相应的鲁棒 H_∞ 滤波参数如下：

$$A_f=\begin{bmatrix}-10.2720 & 4.7038\\ -7.1712 & -6.3675\end{bmatrix}, B_f=\begin{bmatrix}-0.0226 & 0.0073\\ -0.0161 & 0.0052\end{bmatrix}, L_f=\begin{bmatrix}0.0515 & -0.0368\end{bmatrix}$$

并且可以获得一个满足上述参数的 γ 的取值范围且最小 $\gamma_{\min}=0.5045$.

5 结论

本文提出了一类具有外界噪声干扰的非线性不确定随机时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波的设计问题。设计了一个线性滤波器使得在具有参数不确定性、有界外界干扰、随机布朗运动和未知时滞条件下，滤波误差动

态系统是鲁棒指数均值稳定的且满足给定的性能指标γ。最后，基于 LMI 工具箱解决了 H_∞ 滤波器的设计问题。并且论证了滤波器存在的充分性条件。同时提出这类非线性不确定随机时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波，当它们存在时通常是一个很大的集合，并且滤波器参数的选取具有很大的自由度。这使得在滤波过程中，为获得进一步的性能要求提供了很大的可能性。

参考文献：

[1] C.-S. Tseng and B.-S. Chen," H_∞ fuzzy estimation for a class of nonlinear discrete-time dynamic systems", IEEE Trans. Signal Process., Nov. 2001,vol. 49, no. 11, pp. 2605-2619.

[2] M. J. Grimble and A. El-Sayed,"Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., Jul. 1990, vol. 38, no. 8, pp. 1092-1104.

[3] C. F. Yung, Y.F. Li, and H.T. Sheu, " H_∞ filtering and solution bound for nonlinear systems", 2001, Int. J. Control, vol. 74, pp.565-570.

[4] N. Berman and U. Shaked ," H_∞ nonlinear filtering", Int. J. Robust Nonlinear Control, 1996, vol. 6, pp. 281-296

[5] W. Zhang, B.-S. Chen, and C.-S. Tseng, "Robust H_∞ filtering for nonlinear stochastic systems", Feb. 2005, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 53, pp. 589-598.

[6] S. Xu and T. chen, "Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems," IEEE Trans. Signal Process., Dec. 2002, vol. 50, no.12, pp. 2998-3007.

[7] C.D. Charalambus, "Stochastic Nonlinear Minimax Dynamic Games with Noisy Measurement", IEEE Trans. Automat. Contr., Feb. 2003, vol. 48, no. 2, pp. 261-266.

[8] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and control via measurement feedback in nonlinear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., Sep. 2003, vol. 37, no. 9, pp. 1283-1293.

[9] W.M. McEneaney, "Robust H_∞ filtering for nonlinear systems," Syst. Contr. Lett., 1998, vol. 33, pp. 315-325.

[10] E. Gershon, D.J.N. Limebeer, U. Shaked, and I. Yaesh, "Robust H☺ Filtering of Stationary Continuous-Time Linear Systems With Stochastic Uncertainties", IEEE Trans. Automat. Contr. ,Nov. 2001, vol. 46, no. 11, pp.1788-1793.

[11] V. Suplin, E. Fridman, U. Shaked, " H☺ Control of Linear Uncertain Time-Delay Systems---A Projection Approach", IEEE Trans. Automat. Contr., Apr. 2006, vol. 51, no. 4, pp. 680-685.

[12] E. Fridman, U. Shaked, and L. Xie, "Robust H☺ Filtering of linear Systems With Time-Varying Delay", IEEE Trans. Automat. Contr., Jan. 2003, vol. 48, no. 1, pp. 159-165.

[13] S. Xu, T. Chen, and James Lam, "Robust H☺ Filtering for Uncertain Markovian Jump Systems With Mode-Dependent Time Delays", IEEE Trans. Automat. Contr., May. 2003, vol. 48, no. 5, pp. 900-907.

[14] Z. Wang and Keith J. Burnham,"Robust Filtering for a Class of Stochastic Uncertain Nonlinear Time-Delay Systems via Exponential State Estimation," IEEE Trans. Signal Process. , Apr. 2001, vol. 49, no. 4, pp. 794-803.

[15] X. Mao, "Robustness of Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations ", IEEE Trans. Automat. Contr., Mar. 1996, vol. 41, no. 3, pp. 442-446.