第30卷 第9期
2008年9月

系统工程与电子技术
Systems Engineering and Electronics

Vol. 30 No. 9
Sep. 2008

文章编号:1001-506X(2008)09-1730-05

参数不确定的非线性随机时滞系统的H_∞滤波

李玉梅[1,2], 关新平[1]

(1. 燕山大学电气工程学院,河北 秦皇岛 066004;
2. 新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要:研究了一类带有参数不确定性的非线性随机时滞系统的鲁棒H_∞滤波问题。假设参数不确定性是范数有界的并且系统的动态方程是由伊藤微分方程所描述的。对所有容许的参数不确定性以及外界干扰,构造一个线性、无时滞、不确定性及独立的状态滤波器,使滤波误差动态系统是指数均值稳定并且独立于时滞的。针对单时滞系统和多时滞系统两种情况,基于线性矩阵不等式(LMI)方法给出了保证鲁棒H_∞滤波存在的充分性条件。最后,数值仿真结果很好地说明了该方法的有效性。

关键词:H_∞滤波;非线性随机系统;线性矩阵不等式;时滞

中图分类号:TP 13 **文献标志码**:A

H_∞ filtering for a class of nonlinear stochastic systems with time-delay and parameter uncertainty

LI Yu-mei[1,2], GUAN Xin-ping[1]

(*1. Inst. of Electrical Engineering, Yanshan Univ., Qinhuangdao 066004, China;*
2. Dept. of Mathematics and System Science, Xinjiang Univ., Urumuqi 830046, China)

Abstract: A robust H_∞ filtering problem for a class of nonlinear stochastic systems with time-delay and parameter uncertainty is presented. Assume the parameter uncertainty is norm-bounded and the system dynamic is modeled by Ito-type stochastic differential equations. The aim of this work is to design a linear, delayless, uncertainties independent state estimator such that for all admissible uncertainties as well as exogenous disturbances, the dynamics of the estimation error is stochastically exponential stable in mean square and independent of the time-delay. For systems with single delay and multiple delay case, the sufficient conditions are proposed respectively to guarantee the existence of desired robust H_∞ filters via linear matrix inequalities(LMI). A numerical example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: H_∞ filtering; nonlinear stochastic system; linear matrix inequality; time-delay

0 引 言

状态估计器设计是控制界的一个重要的研究课题,并且在实际中具有极大的应用价值。其中H_∞滤波被认为是最重要的估计方法之一。文献[1-4]分别研究了离散系统和连续非线性系统的滤波器的设计问题。文献[5-7]研究了随机系统的鲁棒H_∞滤波问题。时滞在控制领域经常遇到并且是引起系统的不稳定和性能差的主要因素,它在控制设计和信号处理中的重要性不容忽视。文献[8-10]针对不同的时滞系统研究了鲁棒H_∞滤波问题,然而,这些研究都是针对确定性系统的情况。另外,在实际中为了使滤波过程具有快速收敛性和准确性,通常希望滤波过程具有指数稳定性。文献[10-11]研究了指数滤波器的设计。目前还很少有学者研究由伊藤随机微分方程描述的非线性不确定随机时滞系统的指数滤波器的设计问题,该问题在实际中有很大的应用。这就是我们研究具有随机指数稳定性的非线性不确定随机时滞系统的H_∞滤波问题的动机。

这篇论文分别研究了单时滞和多时滞非线性不确定随机时滞系统的鲁棒H_∞滤波问题。假设系统由带有时变范数有界的参数不确定性的状态空间模型描述,该模型不仅带有白噪声而且带有外界干扰信号。设计了一个线性、无时滞、不确定性独立的状态估计器,使得滤波误差动态系统是随机指数均值稳定、时滞独立的,并且关于不确定外界干扰信号的L_2增益小于某个指定的性能水平。针对单时滞

收稿日期:2007-09-16; **修回日期**:2008-05-07。
基金项目:国家杰出青年基金(60525303);国家自然科学基金(60604004)资助课题
作者简介:李玉梅(1975-),女,博士,主要研究方向为随机系统和时滞系统。E-mail:zwzlym@163.com

系统和多时滞系统两种情况，基于 LMI 算法，分别给出了保证鲁棒 H_∞ 滤波存在的充分性条件。最后，数值仿真说明了该方法的有效性和可行性。

为了方便，采用下面的一些记号：$Tr(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹（转置），$\boldsymbol{A}\geqslant 0(\boldsymbol{A}>0)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定（正定）的，$\boldsymbol{I}$ 表示单位阵，$\|\boldsymbol{x}\|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的欧拉范数，$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$，$\lambda\max(\lambda\min)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大（最小）特征值，$L_F^2([0,\infty);R^n)$ 定义在 $[0,\infty)$ 上的随机过程 $\phi(\cdot)$ 的空间且满足

$$\|\boldsymbol{\phi}(t)\|_{L_F^2}^2=E\int_0^\infty\|\boldsymbol{\phi}(t)\|^2\mathrm{d}t<\infty$$

1　问题的描述和假设

考虑下列一类不确定非线性随机时滞系统

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=&[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{x}(t)+\\&(\boldsymbol{A}_d+\Delta\boldsymbol{A}_d(t))\boldsymbol{x}(t-h)+f(\boldsymbol{x}(t))+\\&(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}(t))v]\mathrm{d}t+g(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h))\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(t)\\\boldsymbol{x}(t)=&\boldsymbol{\varphi}(t),t\in[-h,0]\\\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)=&[(\boldsymbol{C}+\Delta\boldsymbol{C}(t))\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D}(t))v]\mathrm{d}t\\\boldsymbol{z}(t)=&\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是系统的状态，$\boldsymbol{y}(t)\in R^m$ 是系统的可测输出，$\boldsymbol{z}(t)\in R^r$ 是待估计的状态，$f(\boldsymbol{x})$ 是非线性函数且 $f(0)\equiv0$，$h>0$ 表示系统时滞，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是连续向量值初始函数，并且 $\varphi:=\{\varphi(s):-h\leqslant s\leqslant0\}\in L_{F0}^2([-h,0]R^n)$。系统(1)有唯一解，记作 $\boldsymbol{x}(t,\varphi)$，它是平方可积的，$v(t)\in L_F^2([0,\infty);R^n)$ 代表了外界干扰信号。$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_d,\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{L}$ 是相应维数的常数矩阵，$\Delta\boldsymbol{A}(t),\Delta\boldsymbol{A}_d(t),\Delta\boldsymbol{B}(t),\Delta\boldsymbol{C}(t),\Delta\boldsymbol{D}(t)$ 表示范数有界参数不确定性的矩阵并且满足下列各式：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{A}(t)\\\Delta\boldsymbol{C}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\\boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{N}_1$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{B}(t)\\\Delta\boldsymbol{D}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\\boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{N}_3$$

$$[\Delta\boldsymbol{A}_d(t)]=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{N}_2\tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{F}(t)\in R^{i\times j}$ 是未知参数矩阵并且满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}\tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3$ 是具有相应维数的已知实常数矩阵。变量 $\beta(t)$ 是一个定义在完备概率空间 (Ω,F,P) 上的 m 维标准布朗运动，$g(\cdot):R_+\times R^n\times R^n\to R^{n\times m}$，$i=0,1$ 是随机干扰，满足局部李普西兹连续性及线性增长性条件，且 g 满足[12]

$$\begin{aligned}tr[&\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h(t))),\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-h(t)))]\leqslant\\&a_1\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+a_2\|\boldsymbol{x}(t-h(t))\|^2\end{aligned}\tag{4}$$

式中：$a_1>0,a_2>0$ 是已知的常系数。为了稳定性目的，本文假设 $g(t,0,0)\equiv0$。所以式(1)具有一个平凡解 $\boldsymbol{x}(t,0)\equiv0$。

此外，本文作了如下假设。

假设 1　存在 $\lambda>0$，使未知非线性函数 $f(\boldsymbol{x}(t))$ 满足下面的有界性条件

$$\|f(\boldsymbol{x}(t))\|\leqslant\lambda\|\boldsymbol{x}(t)\|,\forall\boldsymbol{x}\in R^n\tag{5}$$

构造如下线性滤波器方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{x}(t)&=\boldsymbol{A}_f\hat{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}_f\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{y}}(t)\\\boldsymbol{x}(0)&=0\\\hat{\boldsymbol{z}}(t)&=\boldsymbol{L}_f\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned}\tag{6}$$

式中：$\hat{x}(t)\in R^n$，$\hat{z}(t)\in R^r$ 是常数矩阵，$\boldsymbol{A}_f,\boldsymbol{B}_f$ 是所要设计的滤波参数。

记 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)]$ 且 $\tilde{z}(t)=z(t)-\hat{z}(t)$ 得到下列增广系统：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}(t)=&[\tilde{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{\xi}(t)+\tilde{\boldsymbol{A}}_d(t)\boldsymbol{\xi}(t-h(t))+\\&\tilde{\boldsymbol{B}}(t)v+f(\boldsymbol{\xi}(t))]\mathrm{d}t+\\&\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-h(t))\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}(t)\\\tilde{z}(t)=&\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{\xi}(t)\end{aligned}\tag{7}$$

式中

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(t)=\tilde{\boldsymbol{A}}_1+\Delta\tilde{\boldsymbol{A}}_1(t)$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_d(t)=\tilde{\boldsymbol{A}}_{d1}+\Delta\tilde{\boldsymbol{A}}_{d1}(t),\tilde{\boldsymbol{B}}(t)=\tilde{\boldsymbol{B}}_1+\Delta\tilde{\boldsymbol{B}}_1(t)$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&0\\\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}_f\end{bmatrix},\tilde{\boldsymbol{A}}_d=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_d&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{D}\end{bmatrix},\tilde{\boldsymbol{L}}=[\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_f]$$

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{A}}_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{N}_1\quad0]=\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{F}(t)\tilde{\boldsymbol{N}}_1$$

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{A}}_d(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{N}_2\quad0]=\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{F}(t)\tilde{\boldsymbol{N}}_2$$

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{B}}_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)\tilde{\boldsymbol{N}}_3=\tilde{\boldsymbol{M}}_2\boldsymbol{F}(t)\tilde{\boldsymbol{N}}_3$$

$$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\xi}(t),\boldsymbol{\xi}(t-h(t)))=\begin{bmatrix}g(t,\boldsymbol{\xi}(t)\quad\boldsymbol{\xi}(t-h(t)))\\0\end{bmatrix}\tag{8}$$

首先给出下面的定义。

定义 1　对于系统(7)当 $v(t)\equiv0$ 时，如果存在常数 $\alpha>0$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log\boldsymbol{E}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\leqslant-\alpha\tag{9}$$

成立，则系统(8)是指数均值稳定的。

本文的目的主要是寻找滤波器参数 $\boldsymbol{A}_f,\boldsymbol{B}_f,\boldsymbol{L}_f$ 使得当 $v(t)\equiv0$ 时增广系统(7)是指数均值稳定，并且独立于时滞 h 的。特别是对于一个指定的干扰衰减水平 $\gamma>0$，满足如下的性能指标：

当 $v(t)\neq0,v(t)\in L_F^2((0,\infty),R^n)$ 时，

$$\hat{\boldsymbol{J}}=\int_0^\infty(\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{z}}-\gamma^2v^{\mathrm{T}}v)\mathrm{d}t<0\tag{10}$$

2　主要结果和证明

本节将给出 H_∞ 滤波存在的充分性条件。对此，先给

出如下引理。

引理 1 假设存在常数 $\varepsilon_i>0,\lambda>0,\alpha_j>0,i=1,\cdots,5;j=1,2$ 以及正定矩阵 $P>0$，使得下面的线性矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi} & \tilde{A}_{d1}^{T}P & P\tilde{M} & P\tilde{M}_1 \\ P\tilde{A}_{d1} & -\varepsilon_2 P & 0 & 0 \\ \tilde{M}^{T}P & 0 & -\varepsilon_1^{-1}I & 0 \\ \tilde{M}_1^{T}P & 0 & 0 & -\varepsilon_3^{-1}I \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$P\leqslant \rho I \tag{12}$$

成立，则当 $v(t)\equiv 0$ 时增广系统(7)是指数均值稳定的。

式中

$$\tilde{\Psi}_1 = P\tilde{A}_1+\tilde{A}_1^{T}P+(2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i)\rho I + (\varepsilon_2+\varepsilon_4)P+\varepsilon_1^{-1}\tilde{N}_1^{T}\tilde{N}_1+\varepsilon_3^{-1}\tilde{N}_2^{T}\tilde{N}_2$$

证明 定义李亚普诺夫函数为

$$V(\xi(t)) = \xi(t)^{T}P\xi(t)+\int_{t-h}^{t}\xi(s)^{T}Q\xi(s)\mathrm{d}s$$

式中，$P>0$ 是式(11)的一个解且 $Q>0$ 满足下式

$$Q := \varepsilon_2^{-1}\tilde{A}_{d1}^{T}P\tilde{A}_{d1}+\varepsilon_3^{-1}\tilde{N}_2^{T}\tilde{N}_2+\alpha_2\rho I \tag{13}$$

L_v 是系统(7)的弱微分算子，由伊藤微分公式有

$$L_{v\equiv 0}V(\xi(t),t) = 2\xi(t)^{T}P[\tilde{A}(t)+\tilde{A}_d(t)\xi(t-h(t))+\tilde{f}(\xi(t))]+Tr[g^{T}Pg]+\xi(t)^{T}Q\xi(t)-\xi^{T}(t-h(t))Q\xi(t-h(t)) \tag{14}$$

把式(8)代入式(14)利用引理[16]与假设 1 与(4)，得到下面的估计式：

$$\begin{aligned} &2\xi^{T}P\tilde{A}(t)\xi\leqslant \xi^{T}(P\tilde{A}_1+\tilde{A}_1^{T}P+\varepsilon_1P\tilde{M}\tilde{M}^{T}P+\varepsilon_1^{-1}\tilde{N}_1^{T}\tilde{N}_1)\xi \\ &2\xi^{T}(t)P\tilde{A}_d\xi(t-h(t))\leqslant \xi^{T}(t)(\varepsilon_2P+\varepsilon_3P\tilde{M}_1\tilde{M}_1^{T}P)\xi(t)+\xi^{T}(t-h(t))*(\varepsilon_2^{-1}\tilde{A}_{d1}^{T}P\tilde{A}_{d1}+\varepsilon_3^{-1}\tilde{N}_2^{T}\tilde{N}_2)\xi(t-h(t)) \\ &2\xi^{T}P\tilde{f}(\xi(t))\leqslant \varepsilon_4\xi^{T}P\xi+2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2\rho\,\|\xi(t)\|^2 \\ &Tr[g^{T}Pg]\leqslant \rho(\alpha_1\|\xi(t)\|^2+\alpha_2\|\xi(t-h(t))\|^2) \end{aligned} \tag{15}$$

把式(13)与式(15)代入式(14)得到

$$L_{v\equiv 0}V(\xi(t),t)\leqslant \xi^{T}(t)\Pi\xi(t) \tag{16}$$

其中：

$$\Pi := P\tilde{A}_1+\tilde{A}_1^{T}P+\varepsilon_1P\tilde{M}\tilde{M}^{T}P+\varepsilon_3P\tilde{M}_1\tilde{M}_1^{T}P+(2\varepsilon_4^{-1}\lambda+\sum_{i=1}^{1}\alpha_i)\rho I+\varepsilon_1^{-1}\tilde{N}_1^{T}\tilde{N}_1+\varepsilon_3^{-1}\tilde{N}_2^{T}\tilde{N}_2+(\varepsilon_2+\varepsilon_4)P+\varepsilon_2^{-1}\tilde{A}_{d1}^{T}P\tilde{A}_{d1}$$

由式(16)得

$$EL_{v=0}V(t)\leqslant E\xi^{T}(t)\Pi\xi(t) \tag{17}$$

由 schur's 补引理，$\Pi<0$ 等价于 LMI(11)。

下面证明增广系统(7)是指数均值稳定的。令 $\lambda_0=\lambda_{\min}(-\Pi),\lambda_1=\lambda_{\min}(P)$，由式(17)得

$$EL_{v=0}V(t)\leqslant -\lambda_0E\xi^{T}(t)\xi(t)\leqslant -\lambda_0Ex^{T}(t)x(t) \tag{18}$$

由 $V(t)$ 的定义可知，存在常数 $\alpha_1>0$ 使得

$$\lambda_1\|x(t)\|^2\leqslant V(t)\leqslant \alpha_1\|x(t)\|^2 \tag{19}$$

令 $\alpha_0>0$ 使得 $\alpha_0\alpha_1\leqslant\lambda_0$ (20)

由式(18)及伊藤公式得

$$Ee^{\alpha_0 t}V(t)-Ee^{\alpha_0 t_0}V(t_0)=E\int_{t_0}^{t}L_{v=0}(e^{\alpha_0 s}V(s))\mathrm{d}s\leqslant E\int_{t_0}^{t}e^{\alpha_0 s}(\alpha_0\alpha_1-\lambda_0)\|x(s)\|^2\mathrm{d}s \tag{21}$$

由式(19)和式(20)可知

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log E\|x(t)\|^2\leqslant-\alpha_0$$

成立，故引理 1 得到证明。

定理 1 考虑系统(1)，如果存在正数 $e_1>0,e_2>0,\varepsilon_i>0,\alpha_j>0,\lambda>0$ 和正定矩阵 $X>0$，对任意指定的干扰衰减水平 $\gamma>0$，满足 $\gamma^2I-\varepsilon_5^{-1}N_3^{T}N_3>0,i=1,\cdots,5;j=1,2$ 并且使得下面的 LMIs：

$$\begin{bmatrix} e_1X-\rho I & 0 \\ 0 & e_2X-\rho I \end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ * & \Xi_3 \end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

有解 $X>0,Z_1\in R^{n\times n},Z_2\in R^{n\times m}$，则对任意非零的 $v(t)\in L_F^2((0,\infty),R^n)$，$H_\infty$ 性能 $\tilde{J}<0$ 成立且相应的滤波参数为

$$A_f=X^{-1}Z_1,B_f=X^{-1}Z_2 \text{ 和 } L_f \tag{24}$$

式中

$$\Xi_1=\begin{bmatrix} \Psi_1 & e_2C^{T}Z_2^{T} & e_1\varepsilon_2^{-1}A_d^{T}X & 0 \\ * & \Psi_2 & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2^{-1}e_1X & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2^{-1}e_2X \end{bmatrix}$$

$$\Xi_2=\begin{bmatrix} e_1XM_1 & e_1XM_1 & L^{T} & e_1XM_1 & e_1XB \\ e_2Z_2M_2 & 0 & L_f^{T} & e_2Z_2M_2 & e_2Z_2D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_3=\begin{bmatrix} -\varepsilon_1^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\varepsilon_3^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_5^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_3 \end{bmatrix}$$

这里符号 * 表示对角线上方的对称转置矩阵。

$$\Psi_1=e_1A^{T}X+e_1XA+(\varepsilon_2+\varepsilon_4)e_1X+\varepsilon_3^{-1}N_2^{T}N_2+\left[2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\right]\rho I+\varepsilon_1^{-1}N_1^{T}N_1$$

$$\Psi_2=e_2Z_1+e_2Z_1^{T}+(\varepsilon_2+\varepsilon_4)e_2X+\left[2\varepsilon_4^{-1}\lambda^2+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\right]\rho I$$

$$\Psi_3=-(\gamma^2I-\varepsilon_5^{-1}N_3^{T}N_3)$$

证明 首先，由引理 1，可以推导出当 $v(t)\equiv 0$ 时系统(7)是指数均值稳定的。其次，证明对于任意非零的 $v(t)\in$

$L_F^2((0,\infty),R^n)$ 且 $\xi(t,0)=0$ 时,$\hat{J}<0$ 成立,注意对任意 $T>0$

$$\hat{J}(T)=E\int_0^T[\xi^T(t)\tilde{L}^T\tilde{L}\xi(t)-\gamma^2\|v(t)\|^2+L_vV(\xi(t),t)]dt-$$

$$E\int_0^T L_vV(\xi(t),t)dt\leqslant E\int_0^T\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \nu(t)\end{bmatrix}^T N\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \nu(t)\end{bmatrix}dt$$

式中
$$N=\begin{bmatrix}\Phi_1 & P\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_1^T & \Phi_2\end{bmatrix}$$

$\Phi_1=\Pi+\varepsilon_3P\tilde{M}_2\tilde{M}_2^TP+\tilde{L}^T\tilde{L},\Phi_2=-(\gamma^2I-\varepsilon_5^{-1}N_3^TN_3)$

如果 $N<0$,则

$$\hat{J}(T)\leqslant-\lambda_{\min}(-N)E\int_0^T(\|\xi(t)\|^2+\|\nu(t)\|^2)dt\leqslant$$

$$-\lambda_{\min}(-N)E\int_0^T\|\nu(t)\|)dt<0$$

对于任意非零的 $V(t)$,满足

$$\hat{J}(t)<-\lambda_{\min}(-N)E\int_0^t(\|\nu(t)\|^2)dt<0$$

取 $P=\mathrm{diag}(e_1X,e_2X)$,把式(8)代入 N 且设 $XA_f=Z_1,XB_f=Z_2$,则 $P\leqslant\rho I$ 和 $N<0$,是分别等价于式(22)与式(23)的,从我们的假设可得 $A_f=X^{-1}Z_1,B_f=X^{-1}Z_2$。定理 1 得到证明。

注释 1　在滤波器的设计过程中存在许多自由参数。因此,所设计的滤波器的参数集合当它非空时一定是很大的,并且它的选取具有很大的自由度。这使得在滤波过程中,为获得进一步的性能要求提供了很大的可能性。

注释 2　通过解下列线性矩阵不等式优化问题的最优解

$$\min_{X,Y,Z_1,Z_2,L_f}\delta$$
$$\text{s.t. }(22)-(23)\text{ with }\gamma^2:=\delta$$

能很容易的获得使定理1条件成立的最小 γ 衰减水平。

γ 的最小值可由 $\gamma^*=\sqrt{\delta^*}$ 得到,其中,δ^* 是 δ 的最优值,最优的滤波器参数可从式(24)获得。

定理 1 获得的结论,可以推广到带有多时滞的非线性随机系统中。

考虑下列带有多时滞的非线性随机系统

$$dx(t)=\left[\sum_{i=0}^m(A_i+\Delta A_i(t))x(t-h_i(t))+f(x(t))+(B+\Delta B(t))v\right]dt+$$
$$g(t,x(t),x(t-h_1(t),\cdots,x(t-h_m(t)))d\beta(t)$$
$$x(t)=\varphi(t),t\in[-\bar{h},0]$$
$$dy(t)=[(C+\Delta C(t))x(t)+(D+\Delta D(t))v]dt \quad (25)$$

式中

$$h_0=0,h_i>0,i=1,\cdots,m,\bar{h}=\max\{h_i,i=1,\cdots,m\}$$

不确定性满足下面的条件

$$\Delta A_i(t)=M_iF_i(t)N_i,F_i^T(t)F_i(t)\leqslant I$$
$$\Delta B(t)=E_1F(t)H_1,\Delta C(t)=E_3F(t)N_0$$
$$\Delta D(t)=E_2F(t)H_1$$

另外,还要满足:$trac[g^Tg]\leqslant\sum_{i=m}^m a_i\|x(t-h_i(t))\|$

定理 2　如果存在正数 $e_1,e_2,\varepsilon_0,\varepsilon_i,\lambda,\sigma,\mu,\delta_i,a_i>0$,$i=1,\cdots,m$,和正定矩阵 $X>0$,对任意指定的干扰衰减水平 $\gamma>0$,满足 $(\gamma^2I-\mu^{-1}H_1^TH_1)>0$,并且使得下面的 LMI

$$\begin{bmatrix}e_1X-\rho I & 0\\ 0 & e_2X-\rho I\end{bmatrix}<0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14}\\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} & 0 & 0\\ \Gamma_{13}^T & 0 & \Gamma_{33} & 0\\ \Gamma_{14}^T & 0 & 0 & \Gamma_{44}\end{bmatrix}<0 \quad (27)$$

有解 $X>0,Z_1\in R^{n\times m}$,则对任意的非零 $\nu(t)\in L_F^2((0,\infty),R^n)$,$H_\infty$ 性能 $\hat{J}<0$ 成立且相应的滤波参数为

$$A_f=X^{-1}Z_1,B_f=X^{-1}Z_2\text{ 和 }L_f \quad (28)$$

式中

$$\Gamma_{11}=\begin{bmatrix}\Omega_1 & e_2C^TZ_2^T\\ e_2Z_2C & \Omega_2\end{bmatrix},\Gamma_{14}=\begin{bmatrix}e_1XE_1 & e_1XB\\ e_2Z_2E_2 & e_2Z_2D\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{33}=\mathrm{diag}(-\varepsilon_0^{-1}I-\varepsilon_1^{-1}I\cdots-\varepsilon_m^{-1}I-I)$$

$$\Gamma_{12}=\begin{bmatrix}\delta_1^{-1}e_1A_1^TX & 0 & \cdots & \delta_m^{-1}e_1A_m^TX & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{13}=\begin{bmatrix}e_1XM_0 & e_1XM_1 & \cdots & e_1XM_m & L^T\\ e_2Z_2E_3 & 0 & \cdots & 0 & -L_f^T\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{44}=\begin{bmatrix}-\mu^{-1}I & 0\\ 0 & -(\gamma^2I-\mu^{-1}H_1^TH_1)\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{22}=\begin{bmatrix}-\delta_1^{-1}e_1X & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\delta_1^{-1}e_2X & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & -\delta_m^{-1}e_1X & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\delta_m^{-1}e_2X\end{bmatrix}$$

$$\Omega_1=e_1A_0^TX+e_1XA_0+\left(\sum_{i=1}^m\varepsilon_i+\sigma\right)e_1X+$$
$$\left(2\sigma^{-1}\lambda^2+\sum_{i=0}^m a_i\right)\rho I+\sum_{i=0}^m\varepsilon_i^{-1}N_i^TN_i$$

$$\Omega_2=\left(\sum_{i=1}^m\varepsilon_i+\sigma\right)e_2X+e_2Z_1^T+e_2Z_1+\left(2\sigma^{-1}\lambda^2+\sum_{i=0}^m a_i\right)\rho I$$

定理 2 的证明与定理 1 类似,因此,我们略去证明。

3　数值仿真

考虑带下列参数的非线性不确定随机时滞系统

$$A=\begin{bmatrix}-9 & -8\\ 1 & -20\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-0.2\\ 0.4\end{bmatrix},N_1=[-0.5\quad 0.4]$$

$$A_d=\begin{bmatrix}0.2 & -0.1\\0.1 & -0.3\end{bmatrix},M_1=\begin{bmatrix}-0.4\\0.2\end{bmatrix},M_2=\begin{bmatrix}0.6\\0.5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-7 & 2\\3 & 14\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0.4\\-0.2\end{bmatrix},N_2=[0.1\quad 0.2]$$

$$f(x(t))=\begin{bmatrix}\sin x_1\\ \sin x_2\end{bmatrix},L=[1\quad -1],N_3=0.5$$

$$g(x(t),x(t-h))=a_1x(t)+a_2x(t-h),$$

$$F(t)=\sin t,\lambda=\sqrt{2},h=0.1,\phi(t)=0.1$$

令

$$e_1=0.4,e_2=0.3,\varepsilon_1=0.1,\varepsilon_2=0.2,\varepsilon_3=0.5$$

$$\varepsilon_4=0.6,\varepsilon_5=1,a_1=a_2=0.5,\gamma=0.8$$

由定理 1,可得相应的鲁棒 H_∞ 滤波参数如下

$$A_f=\begin{bmatrix}-14.5916 & -7.6271\\-8.0786 & -21.9176\end{bmatrix}$$

$$B_f=\begin{bmatrix}-0.1908 & -0.0185\\-0.1595 & -0.0153\end{bmatrix}$$

$$L_f=[-0.0500\quad -0.0144]$$

并且 $\gamma_{\min}=0.5391$。图 1、图 2 及图 3 分别给出了 $x_1,\hat{x}_1,x_2,\hat{x}_2$ 的状态轨迹及评估误差的状态轨迹。

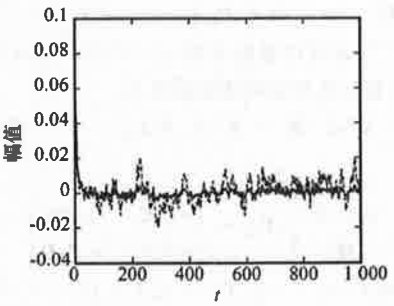

图 1　x_1(dashed)和 $\hat{x}_1$(solid)的状态轨迹

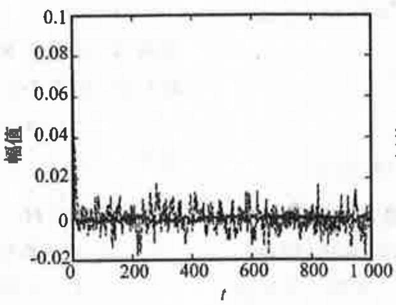

图 2　x_2(dashed)和 $\hat{x}_2$(solid)的状态轨迹

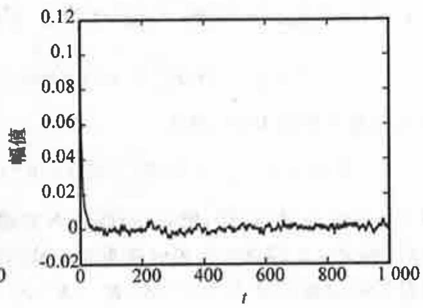

图 3　评估误差 $\tilde{z}$ 的状态轨迹

4　结束语

本文提出了一类具有外界噪声干扰的非线性不确定随机时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波的设计问题。针对单时滞和多时滞非线性不确定随机系统两种情况,分别设计了线性滤波器使得在具有参数不确定、有界外界干扰、随机布朗运动和未知时滞条件下,滤波误差动态系统是鲁棒指数均值稳定的且满足给定的性能指标 γ。基于 LMI 算法,分别给出了保证鲁棒 H_∞ 滤波存在的充分性条件。同时提出这类非线性不确定随机时滞系统的鲁棒滤波,当它们存在时通常是一个很大的集合,并且滤波器参数的选取具有很大的自由度。这使得在滤波过程中,为获得进一步的性能要求提供了很大的可能性。

参考文献:

[1] Tseng C S, Chen B S. H_∞ fuzzy estimation for a class of nonlinear discrete-time dynamic systems[J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2001, 49(11): 2605 - 2619.

[2] Grimble M J, El-Sayed A. Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems[J]. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 1990, 38(8): 1092 - 1104.

[3] Yung C F, Li Y F, Sheu H T. H_∞ filtering and solution bound for nonlinear systems[J]. *Int. J. Control*, 2001, 74: 565 - 570.

[4] McEneaney W M. Robust H_∞ filtering for nonlinear systems [J]. *Syst. Contr. Lett.*, 1998, 33: 315 - 325.

[5] Zhang W, Chen B S, Tseng C S. Robust H_∞ filtering for nonlinear stochastic systems[J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2005, 53: 589 - 598.

[6] Gershon E, et al. Robust H_∞ filtering of stationary continuous-time linear systems with stochastic Uncertainties[J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2001, 46(11): 1788 - 1793.

[7] Xu S, Chen T. Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems[J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, 50(12): 2998 - 3007.

[8] 蔡云泽,何星,等. 非线性不确定状态时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波[J]. 自动化学报, 2004, 30(4): 592 - 596.

[9] Fridman E, Shaked U, Xie L. Robust H_∞ filtering of linear systems with time-varying delay[J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2003, 48(1): 159 - 165.

[10] Xu S, Chen T, et al. Robust H_∞ filtering for uncertain markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2003, 48(5): 900 - 907.

[11] Wang Z, Burnham Keith J. Robust filtering for a class of stochastic uncertain nonlinear time-delay systems via exponential state estimation[J]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2001, 49(4): 794 - 803.

[12] Mao X. Robustness of exponential stability of stochastic differential delay equations[J]. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1996, 41(3): 442 - 446.