

**Théorie des Représentations
du
Groupe Symétrique**

P. Hilger et N. Poncin

2009

Table des matières

Introduction	2
1 Représentations de Groupes Finis	4
1.1 Définitions et exemples	4
1.2 Complète réductibilité – Lemme de Schur	5
1.3 Groupes symétriques d'ordre ≤ 3	7
2 Théorie des Caractères	10
2.1 Caractères	10
2.2 Propriétés des caractères	12
2.3 Le groupe symétrique d'ordre 4	16
2.4 Nombre d'irréductibles	18
3 Représentations Induites – Algèbre de Groupe	21
3.1 Le groupe symétrique d'ordre 5	21
3.2 Puissances extérieures de la représentation standard	23
3.3 Représentations induites	24
3.4 Algèbre de groupe	28
4 Diagrammes de Young – Groupe symétrique d'ordre d	29
4.1 Diagrammes de Young	29
4.2 Formule des caractères de Frobenius	35
4.3 La règle de Littlewood-Richardson	43
Bibliographie	45

Introduction

Le concept de symétrie est fondamental dans beaucoup de domaines de la science et mérite une attention particulière. Par exemple, l'ensemble des symétries de $[n] := \{1, \dots, n\}$ est le groupe des permutations de $[n]$ appelé le groupe symétrique de $[n]$ et noté S_n . Ce groupe S_n agit également sur des espaces vectoriels et on comprend aisément qu'une telle action permet de représenter la multiplication (abstraite) du groupe par la multiplication (bien connue) des matrices. On peut ainsi étudier des propriétés du groupe via ses représentations (bien plus maniables), qui acquièrent donc une importance considérable. Cependant une telle représentation est souvent bien trop grande, de sorte qu'on essaie de la décomposer en sous-représentations plus petites. Il s'avère que toute représentation de S_n se décompose en briques élémentaires appelées les représentations irréductibles du groupe symétrique. Afin de contrôler toutes les représentations il suffit ainsi de maîtriser les irréductibles. Il est possible de prouver que ces irréductibles sont en correspondance biunivoque avec des diagrammes très simples dits diagrammes de Young. Un des objectifs de ce texte est d'exposer la construction des irréductibles à partir de ces diagrammes.

Au-delà de leur importance intrinsèque et de leur indéniable beauté, les résultats de la théorie des représentations du groupe symétrique sont pertinents et ont des applications dans bien des domaines, de la théorie des fonctions symétriques à la mécanique quantique. Une motivation d'étudier ces représentations provient notamment de la théorie des opérades, qui connaît en ce moment un renouveau d'intérêt. En gros, les opérades sont aux algèbres, ce que les groupes sont aux représentations. Plus précisément, une opérade est une famille spéciale de S_n -modules $P(n)$, auxquels on peut penser comme espaces $P(n)$ de toutes les opérations abstraites à n entrées et une sortie, dont les propriétés de symétrie sont encodées dans l'action du groupe symétrique. Mentionnons également qu'Andreï Okounkov fut récemment récompensé par la Médaille Fields pour ses travaux à l'interface de la théorie des probabilités, de la théorie des représentations et de la géométrie algébrique. Un de ses thèmes était l'étude de certaines représentations irréductibles de S_∞ , i.e. du groupe des permutations de $\{1, 2, 3, \dots\}$ qui opèrent uniquement sur un nombre fini d'entiers.

Comme annoncé, l'objectif de cette dissertation est une présentation complète et compréhensible de certains résultats importants de la théorie des représentations du groupe symétrique. Nous suivrons essentiellement l'ouvrage de W. Fulton et J. Harris, [FH04].

Au premier chapitre, nous prouverons notamment le théorème de Maschke affirmant que tout espace de représentation complexe de dimension finie d'un groupe fini se décompose en somme directe de sous-représentations irréductibles, ainsi que le lemme bien connu de Schur.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie des caractères, un outil de base en théorie des représentations des groupes finis. Toute représentation est complètement déterminée par son caractère, i.e. par les traces des automorphismes par lesquels le groupe agit. Le résultat

fondamental stipule que les caractères des irréductibles forment une base orthonormée, pour le produit hermitien naturel, de l'espace des fonctions complexes sur le groupe qui descendent à ses classes de conjugaison. Ceci fournit un critère d'irréductibilité et permet de calculer la multiplicité d'une irréductible dans la décomposition d'une représentation donnée. Enfin, nous démontrerons le théorème crucial stipulant que le nombre d'irréductibles d'un groupe coïncide avec le nombre de ses classes de conjugaison.

Au troisième chapitre, nous montrerons que toute puissance extérieure de la représentation standard d'un groupe symétrique est irréductible, nous introduirons la notion primordiale de représentation d'un groupe induite par une représentation d'un sous-groupe, nous expliquerons que cette représentation induite est solution d'un problème universel et donnerons une formule fournissant son caractère, et présenterons finalement brièvement le concept d'algèbre de groupe permettant de traduire des énoncés relatifs aux représentations de groupes en termes de résultats concernant des représentations d'algèbres.

Au cours des différents chapitres, nous étudierons en détails les irréductibles de S_1 à S_5 , appliquant ainsi la panoplie de nos résultats de plus en plus performants, avant de passer au dernier chapitre aux irréductibles du groupe symétrique général S_d . Après l'introduction des diagrammes et tableaux de Young, nous expliquerons comment les symétriseurs de Young associés aux diagrammes de Young fournissent par action sur l'algèbre de groupe de S_d les irréductibles de ce groupe. Ensuite, nous établirons la formule de Frobenius, donnant le caractère d'une irréductible, et en déduirons deux résultats calculant la dimension des irréductibles. Comme corollaire, nous obtiendrons la règle de Young. Nous terminerons ce texte en donnant la célèbre règle de Littlewood-Richardson, qui fournit la décomposition en irréductibles de la représentation de S_{d+m} induite par le produit tensoriel extérieur de deux irréductibles de S_d et S_m respectivement.

Ce travail commun de P. Hilger et N. Poncin a été présenté comme thèse de Bachelor par le premier auteur.

Chapitre 1

Représentations de Groupes Finis

Dans ce chapitre, nous commençons par les définitions nécessaires pour aborder la théorie des représentations de groupes finis et donnerons quelques exemples de représentations. Puis nous rencontrerons des résultats importants pour simplifier l'étude des représentations. Et finalement, nous appliquerons cette théorie à l'exemple du groupe symétrique d'ordre 3.

1.1 Définitions et exemples

Pour commencer, donnons donc les premières définitions.

Définition 1.1. Une *représentation* d'un groupe fini G sur un espace vectoriel complexe V de dimension finie est un homomorphisme de groupe ρ du groupe G dans le groupe des automorphismes de V :

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V).$$

On dit qu'une telle application ρ donne à V une structure de G -module.

Remarque. – En conséquence de cette définition, on a évidemment que $\rho(e) = \text{id}_V$, $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$ et que $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$, quels que soient $g, g' \in G$.
– Dans la suite nous appellerons simplement V une représentation de G , comme c'est souvent clair de quelle application ρ il s'agit. De même, nous noterons simplement $g(v)$, $g \cdot v$ ou gv au lieu de $\rho(g)(v)$, où $g \in G$ et $v \in V$.

Définition 1.2. Une application G -linéaire (ou un G -morphisme) est une application linéaire φ entre deux représentations V et W de G , telle que $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$, quels que soient $g \in G, v \in V$.

Définition 1.3. Une *sous-représentation* d'une représentation (V, ρ) est un sous-espace vectoriel W de V invariant sous l'action de G , si bien que $\rho(g)|_W \in \text{Aut}(W)$, pour tout $g \in G$.

Définition 1.4. Une représentation V est appelée *irréductible*, si V n'admet pas de sous-espace propre invariant sous G .

Exemple 1.1. Soient V et W deux représentations du groupe G .

– Alors la somme directe $V \oplus W$ et le produit tensoriel $V \otimes W$ sont aussi des représentations de G , la dernière par $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$, où $g \in G, v \in V$ et $w \in W$.

- La puissance tensorielle n -ième $V^{\otimes n}$ est aussi une représentation de G dont $\wedge^n V$ et $\vee^n V$ sont des sous-représentations.
- Le dual $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ est une représentation avec

$$\rho^*(g) = {}^t \rho(g^{-1}) : V^* \rightarrow V^*.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \rho^*(g) \circ \rho^*(g') &= {}^t \rho(g^{-1}) \circ {}^t \rho(g'^{-1}) \\ &= {}^t (\rho(g')^{-1} \circ \rho(g)^{-1}) \\ &= {}^t (\rho(gg')^{-1}) \\ &= \rho^*(gg'). \end{aligned}$$

- $\text{Hom}(V, W)$ est une représentation par l'identification $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$.

Exemple 1.2. Voici quelques exemples de représentations qui seront très utiles dans la suite :

- La *représentation triviale*, où l'action de G est définie comme suit :

$$V = \mathbb{C}, \quad gv = v, \quad \forall v \in V, g \in G.$$

- La *représentation par permutations* :

Soit X un ensemble fini sur lequel G agit par des permutations des éléments de X . Soit V un espace vectoriel de base $\{e_x : x \in X\}$, alors l'action de G sur V est, quel que soit $g \in G$, donnée par :

$$g \cdot \sum_{x \in X} z_x e_x = \sum_{x \in X} z_x e_{gx},$$

où $z_x \in \mathbb{C}$ pour tout $x \in X$.

- La *représentation régulière*, qui est en fait un cas spécial de la représentation par permutations. Dans ce cas $X = G$, et donc V a pour base $\{e_g : g \in G\}$ et $\dim V = |G|$, l'action de G est donnée par

$$g' \cdot \sum_{g \in G} z_g e_g = \sum_{g \in G} z_g e_{g'g}.$$

1.2 Complète réductibilité – Lemme de Schur

Avant de nous lancer dans l'étude de représentations arbitraires, remarquons qu'il serait plus simple de ne considérer que quelques représentations "de base", à partir desquelles on pourrait construire toutes les autres. Ces représentations sont les représentations irréductibles et nous montrerons dans la suite que toute représentation s'écrit comme somme directe d'irréductibles.

Lemme 1.1. Si $\varphi : V \rightarrow W$ est un G -morphisme entre deux représentations V et W , alors $\ker \varphi$ et $\text{im } \varphi$ sont des sous-espaces invariants sous l'action de G .

Démonstration. Si $v \in \ker \varphi$, c'est-à-dire $\varphi(v) = 0$, on a $0 = g \cdot \varphi(v) = \varphi(gv)$, et donc $gv \in \ker \varphi$, c'est-à-dire $g \cdot \ker \varphi \subset \ker \varphi$. Comme $g \in \text{Aut}(V)$, $g \cdot \ker \varphi$ a même dimension que $\ker \varphi$ et on a donc l'égalité $g \cdot \ker \varphi = \ker \varphi$, $\forall g \in G$.

D'autre part, $g \cdot \varphi(v) = \varphi(gv)$, donc $g \cdot \text{im } \varphi \subset \text{im } \varphi$. Par le même argument qu'avant on a l'égalité $g \cdot \text{im } \varphi = \text{im } \varphi$, $\forall g \in G$. \square

Proposition 1.2. *Soit V une représentation d'un groupe fini G et W une sous-représentation de V , alors il existe W' un sous-espace de V invariant sous G supplémentaire à W , c'est-à-dire tel que $V = W \oplus W'$.*

Démonstration. Choisissons un sous-espace arbitraire U de V supplémentaire à W . Soit alors $\pi_0 : V \rightarrow W$ la projection de V sur W donnée par la décomposition en somme directe $V = W \oplus U$. En posant

$$\pi(v) = \sum_{g \in G} g(\pi_0(g^{-1}v)),$$

on obtient une application G -linéaire de V à W . Le noyau de π est un sous-espace de V invariant sous G . De plus, il est en somme directe avec W , car sur W l'application π est simplement la multiplication par $|G|$ et donc, si $w \in W \cap \ker \pi$, alors $0 = \pi(w) = |G|w$ et il faut donc que $w = 0$. Enfin, il est supplémentaire à W dans V , car π est visiblement surjectif. \square

Corollaire 1.3. *Toute représentation est une somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration. Si V est une représentation non irréductible, alors il existe une sous-représentation propre W de V et par la proposition 1.2, il existe une sous-représentation propre W' de V complémentaire à W . Si W ou W' n'est pas irréductible, on peut de nouveau appliquer la proposition 1.2 et continuer jusqu'à ce qu'on a une décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles. \square

Théorème 1.4 (Lemme de Schur). *Si V et W sont des représentations irréductibles de G et $\varphi : V \rightarrow W$ un G -morphisme, alors :*

- (i) *Soit φ est un isomorphisme, soit $\varphi = 0$.*
- (ii) *Si $V = W$, alors $\varphi = \lambda \text{id}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. (i) On a que $\ker \varphi$ et $\text{im } \varphi$ sont des sous-espaces invariants sous l'action de G par le lemme 1.1. Mais comme $\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \text{im } \varphi$ et V et W sont irréductibles, on a que soit $\dim \text{im } \varphi = \dim V$ et $\dim \ker \varphi = 0$ (dans ce cas φ est un isomorphisme de V dans $\text{im } \varphi = W$), soit $\dim \text{im } \varphi = 0$ et $\dim V = \dim \ker \varphi$ (dans ce cas $\varphi = 0$).

- (ii) Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, $\det(\varphi - \lambda \text{id})$ admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire φ a une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et il existe donc $v \in V$, tel que $\varphi(v) = \lambda v$ ou encore $\varphi - \lambda \text{id}$ a un noyau non-nul. Par (i), il faut alors que $\varphi - \lambda \text{id} = 0$, donc $\varphi = \lambda \text{id}$. \square

Théorème 1.5. *Pour toute représentation V d'un groupe fini G , il existe une décomposition*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

où les V_i sont des représentations irréductibles distinctes. Cette décomposition de V en somme directe de k termes est unique, ainsi que les V_i et les a_i .

Démonstration. L'existence de cette décomposition est déjà donnée par le corollaire 1.3. Pour prouver l'unicité, considérons le cas général d'une autre représentation $W = \bigoplus_j W_j^{\oplus b_j}$ de G et le G -morphisme $\varphi : V \rightarrow W$. Soit $\psi = \varphi|_{V_i} : V_i \rightarrow \text{im } \psi$, qui est évidemment surjectif. Comme

$\ker \psi$ est un sous-espace invariant sous G de l'irréductible V_i , il faut que $\ker \psi = 0$ ou que $\ker \psi = V_i$ (mais dans ce cas $\psi = 0$). Si $\psi \neq 0$, alors ψ est injectif et surjectif, donc bijectif et il faut que $\text{im } \psi$ soit irréductible, c'est-à-dire $\text{im } \psi = W_j$. Nous avons donc que $V_i \cong W_j$ et que φ est un injection de $V_i^{\oplus a_i}$ dans $W_j^{\oplus b_j}$ avec $a_i \leq b_j$. Considérons maintenant le cas particulier $W = V$ et $\varphi = \text{id} : V \rightarrow V$. Par la bijectivité de id , on trouve alors que $a_i = b_j$ et donc que la décomposition est unique. \square

1.3 Groupes symétriques d'ordre ≤ 3

Comme notre objectif est l'étude des représentations du groupe symétrique, commençons par les groupes symétriques d'ordre inférieur à 3, dans ce cas il s'agit de groupes abéliens.

Pour un groupe quelconque G et une représentation V , une application $g : V \rightarrow V$, $g \in G$, n'est en général pas un G -morphisme, c'est-à-dire

$$g(h(v)) \neq h(g(v)), \forall h \in G, v \in V,$$

mais si G est abélien, on a que $gh = hg$ et donc $g(h(v)) = (gh)(v) = h(g(v))$. Donc si G est abélien, alors toute application $g : V \rightarrow V$ est un G -morphisme. Si de plus V est irréductible, on peut appliquer le lemme de Schur et on trouve que tout $g \in G$ agit sur V comme un multiple non nul de l'identité. Soit W un sous-espace vectoriel arbitraire de V , alors $g \cdot W = \lambda W = W$, $\forall g \in G$ et donc W est un sous-espace invariant de V . Comme on avait supposé que V est irréductible, il faut alors que V soit de dimension 1.

Proposition 1.6. *Les représentations irréductibles des groupes abéliens G , et en particulier celles des groupes symétriques S_1 et S_2 , sont des homomorphismes $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$, les automorphismes de \mathbb{C} étant simplement les multiplications par un complexe non nul fixé.*

Passons maintenant au groupe symétrique d'ordre 3 (qui n'est plus abélien). Mentionnons d'abord deux représentations de dimension 1 qu'on a pour tous les groupes symétriques : la *représentation triviale* U , donnée par $gv = v$ et la *représentation alternée* (ou *représentation signature*) U' , donnée par $gv = \text{sign}(g)v$. Comme S_3 est un groupe de permutations, il est naturel de s'intéresser à la représentation par permutations. Le groupe S_3 agit alors sur \mathbb{C}^3 en permutant les coordonnées :

$$g \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}).$$

En effet, si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{C}^3 , alors $g \in S_3$ agit sur $z = (z_1, z_2, z_3)$ par

$$g \cdot z = g \left(\sum_{i=1}^3 z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^3 z_i e_{g(i)} = \sum_{i=1}^3 z_{g^{-1}(i)} e_{g(g^{-1}(i))} \in \mathbb{C}^3.$$

Cette représentation par permutations n'est pas irréductible, car le sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$ est invariant et le sous-espace orthogonal

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

est visiblement invariant. Cette représentation V de dimension 2 est irréductible et est appelée la *représentation standard* de S_3 . En fait, les représentations triviale, alternée et standard sont les seules représentations irréductibles de S_3 (à isomorphisme près) et la sous-représentation de dimension 1 de la représentation par permutations est isomorphe à la représentation triviale.

Dans le prochain chapitre nous traiterons un outil très efficace, la *théorie des caractères*, pour étudier en détail des représentations quelconques. Mais au moment nous ne disposons pas encore de cet outil et devons utiliser une autre approche, une résolution à la main, qui est très utile pour les groupes de Lie et instructive dans notre cas des groupes finis.

Soit W une représentation quelconque de S_3 et considérons le sous-groupe abélien A_3 des permutations paires, le groupe alterné, engendré par un 3-cycle quelconque, appelons-le σ . La représentation W de A_3 se décompose en irréductibles V_i de dimension 1 :

$$W = \bigoplus_i V_i^{\oplus a_i}, \text{ avec } V_i = \mathbb{C}v_i, v_i \in V_i \setminus \{0\}.$$

Comme l'action de A_3 sur V_i est donnée par des multiples non nuls de l'identité, on a sur V_i que $\sigma = \lambda \text{id}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire $\sigma(v_i) = \lambda v_i$, si bien que λ est une valeur propre de σ et v_i le vecteur propre correspondant. Mais comme $\sigma^3 = 1$, on a que $v_i = \sigma^3(v_i) = \lambda^3 v_i$, de sorte que

$$\lambda^3 = 1, \text{ c'est-à-dire } \lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}} =: \omega \text{ ou } \lambda = \omega^2 \text{ ou } \lambda = \omega^3 = 1.$$

Notons que

$$1 + \omega + \omega^2 = 0. \quad (1.1)$$

Pour voir comment les autres éléments de S_3 agissent sur W , prenons une transposition τ , telle que σ et τ engendrent S_3 et vérifient

$$\tau\sigma\tau = \sigma^2. \quad (1.2)$$

Regardons comment τ agit sur un vecteur propre v de σ avec valeur propre ω^i . À partir de (1.2) on a que

$$\begin{aligned} \sigma(\tau(v)) &= \tau(\sigma^2(v)) \\ &= \tau(\omega^{2i}v) \\ &= \omega^{2i}\tau(v). \end{aligned}$$

On trouve donc que $\tau(v)$ est vecteur propre de σ avec valeur propre ω^{2i} .

Prenons un exemple concret pour σ et τ , par exemple $\sigma = (123)$ et $\tau = (12)$ et montrons que $\alpha = (\omega, 1, \omega^2)$ et $\beta = (1, \omega, \omega^2)$ forment une base de l'espace V de la représentation standard et qu'on a

$$\sigma\alpha = \omega\alpha \quad (1.3)$$

$$\sigma\beta = \omega^2\beta \quad (1.4)$$

$$\tau\alpha = \beta \quad (1.5)$$

$$\tau\beta = \alpha. \quad (1.6)$$

En effet, par (1.1) on a que α et β sont des éléments de la représentation standard V . On voit directement que α et β sont linéairement indépendants et comme V est de dimension 2, on a que $\{\alpha, \beta\}$ est une base de V .

$$\begin{aligned}\sigma\alpha &= \sigma(\omega e_1 + 1e_2 + \omega^2 e_3) = \omega e_2 + 1e_3 + \omega^2 e_1 = \omega(\omega e_1 + 1e_2 + \omega^2 e_3) = \omega\alpha \\ \sigma\beta &= \sigma(1e_1 + \omega e_2 + \omega^2 e_3) = 1e_2 + \omega e_3 + \omega^2 e_1 = \omega^2(1e_1 + \omega e_2 + \omega^2 e_3) = \omega^2\beta \\ \tau\alpha &= \tau(\omega e_1 + 1e_2 + \omega^2 e_3) = \omega e_2 + 1e_1 + \omega^2 e_3 = \beta \\ \tau\beta &= \tau(1e_1 + \omega e_2 + \omega^2 e_3) = 1e_2 + \omega e_1 + \omega^2 e_3 = \alpha\end{aligned}$$

Soit v de nouveau un vecteur propre de σ et supposons la valeur propre correspondante $\omega^i \neq 1$, alors $\tau(v)$ est un vecteur propre avec valeur propre $\omega^{2i} \neq \omega^i$; il s'ensuit que v et $\tau(v)$ sont linéairement indépendants et engendrent un sous-espace vectoriel V' de W de dimension 2. De plus V' est invariant sous l'action de S_3 , car on a l'invariance des vecteurs de base v et $\tau(v)$ sous l'action des générateurs σ et τ de S_3 :

$$\sigma(v) = \omega^i v \in V' \quad (1.7)$$

$$\sigma(\tau(v)) = \omega^{2i} \tau(v) \in V' \quad (1.8)$$

$$\tau(v) = \tau(v) \in V' \quad (1.9)$$

$$\tau(\tau(v)) = \tau^2(v) = v \in V'. \quad (1.10)$$

Ces quatre relations sont celles que nous avons trouvées dans l'exemple concret considéré en haut, et donc V' est isomorphe à la représentation standard V .

Dans le cas $\omega^i = 1$, on trouve que soit v et $\tau(v)$ sont linéairement dépendants, soit ils sont linéairement indépendants. Dans le cas où ils sont dépendants, c'est-à-dire $\tau(v) = \mu v$ pour un $\mu \in \mathbb{C}$, v engendre une représentation de dimension 1 et on a que

$$v = \tau^2(v) = \tau(\tau(v)) = \tau(\mu v) = \mu \tau(v) = \mu^2 v.$$

Ainsi, $\mu^2 = 1$, c'est-à-dire $\mu = \pm 1$ et $\tau(v) = \pm v$. Si $\tau(v) = v$, la sous-représentation de W engendrée par v est la représentation triviale et si $\tau(v) = -v$, il s'agit de la représentation alternée. Finalement, si v et $\tau(v)$ sont linéairement indépendants, $v + \tau(v)$ engendre la représentation triviale et $v - \tau(v)$ la représentation alternée.

D'où la

Proposition 1.7. *Les seules représentations irréductibles de S_3 sont les représentations triviale U , alternée U' et standard V , et une représentation arbitraire W de S_3 se décompose donc sous la forme :*

$$W = U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Comme mentionné ci-dessus, nous détaillerons au chapitre suivant une méthode plus efficace permettant aussi de trouver facilement les multiplicités des différentes irréductibles dans une représentation donnée.

Chapitre 2

Théorie des Caractères

Dans ce chapitre nous aborderons la théorie des caractères, un outil aussi simple qu'efficace pour déterminer la décomposition en irréductibles d'une représentation arbitraire. De plus nous trouverons des résultats importants concernant les caractères des représentations irréductibles.

2.1 Caractères

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà vu qu'une représentation se décompose en somme directe d'irréductibles. Pour un automorphisme g , ceci signifie qu'il s'écrit, si on le regarde comme matrice, sous une forme diagonale en blocs. Il est donc clair que les valeurs propres de g jouent un rôle important dans l'étude des décompositions des représentations en irréductibles, comme l'exemple de S_3 l'a déjà montré.

Si nous connaissons les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $g \in G$, nous connaissons aussi les valeurs propres de g^2 , qui sont $\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$, plus généralement, nous connaissons les valeurs propres $\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n$ de g^n . Mais la connaissance de $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$, $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2$, ... et $\lambda_1^n + \dots + \lambda_k^n$ suffit pour connaître $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Par exemple, si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de g , que nous ne connaissons pas, et $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ sont connus, alors $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ est connu par $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. Finalement, on trouve λ_1 et λ_2 par résolution de l'équation $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2$.

Il suffit donc de connaître la trace de chaque élément g du groupe G , d'où la

Définition 2.1. Si V est une représentation de G , son *caractère* χ_V est la fonction à valeurs complexes $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$, telle que

$$\chi_V(g) = \text{tr}(g|_V),$$

où $\text{tr}(g|_V)$ désigne la trace de g en tant qu'automorphisme de V .

Remarque. – On a que $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ par l'invariance par permutations circulaires de la trace. χ_V est donc constant sur les classes de conjugaison de G . Une telle fonction est appelée une *fonction des classes* ou encore *fonction centrale*.

– Si e est l'élément neutre du groupe G , alors $\chi_V(e) = \dim V$.

En effet, $\rho(e) = id_V$ et $\chi_V(e) = \text{tr}(id_V) = \dim V$.

Proposition 2.1. *Si V et W sont des représentations de G , alors*

$$\begin{aligned}\chi_{V \oplus W} &= \chi_V + \chi_W \\ \chi_{V \otimes W} &= \chi_V \cdot \chi_W \\ \chi_{V^*} &= \overline{\chi_V} \\ \chi_{\wedge^2 V}(g) &= \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)).\end{aligned}$$

Démonstration. On peut supposer la matrice représentant $g|_V$, respectivement $g|_W$ triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale. La matrice représentant $g|_{V \oplus W}$ est donnée par la matrice ayant les matrices de $g|_V$ et de $g|_W$ sur la diagonale et donc la trace de $g|_{V \oplus W}$ est la somme des traces de $g|_V$ et $g|_W$.

Pour la représentation duale V^* , nous avons

$$\chi_{V^*}(g) = \text{tr}(\rho^*(g)) = \text{tr}({}^t \rho(g^{-1})) = \text{tr}(\rho(g)^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}.$$

De fait, on a déjà compris que les valeurs propres de g^k sont les puissances k -ièmes des valeurs propres de g , une affirmation qui est en particulier valable pour $k = -1$; comme $g^{|G|} = e$, les valeurs propres de g sont des racines de l'unité et leurs inverses sont alors leurs conjugués.

Venons-en à la formule relative au produit tensoriel. Si F et H désignent les matrices de $f \in \text{End}(V)$ et $h \in \text{End}(W)$ dans des bases (e_i) de V et (ε_j) de W respectivement, la matrice de $f \otimes h \in \text{End}(V \otimes W)$ est donnée par

$$(f \otimes h)(e_i \otimes \varepsilon_j) = \sum_{k\ell} F_{ki} H_{\ell j} e_k \otimes \varepsilon_\ell.$$

Si l'on choisit les bases de V et W de manière que les matrices F de f et H de h soient triangulaires supérieures, la matrice précédente $F \otimes H$ de $f \otimes h$ dans la base induite est également triangulaire supérieure, comme on le voit tout de suite en ordonnant les éléments de la base de $V \otimes W$ par l'ordre lexicographique. Mais alors les valeurs propres de $f \otimes h$ sont les produits $\lambda_i \mu_j$ des valeurs propres λ_i de f et μ_j de h . En appliquant cela à $g|_{V \otimes W} = g|_V \otimes g|_W$, on obtient le résultat relatif au caractère du produit tensoriel.

En reprenant le raisonnement précédent pour le produit tensoriel antisymétrique, on trouve, pour $i < j$,

$$(f \wedge h)(e_i \wedge e_j) = \sum_{k\ell} F_{ki} H_{\ell j} e_k \wedge e_\ell = \sum_{k < \ell} (F_{ki} H_{\ell j} - F_{\ell i} H_{kj}) e_k \wedge e_\ell.$$

De nouveau, si les matrices de f et h sont triangulaires, celle de $f \wedge h$ l'est également et les valeurs propres de $f \wedge h$ sont $F_{ii} H_{jj} - F_{jj} H_{ii} = F_{ii} H_{jj}$, c'est-à-dire sont les produits $\lambda_i \mu_j$, $i < j$. En appliquant à présent ce résultat à $g|_{\wedge^2 V} = g|_V \wedge g|_V$, on obtient, le carré d'une somme étant la somme des carrés augmentée de celle des doubles produits,

$$\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_i \lambda_i \right)^2 - \sum_i \lambda_i^2 \right).$$

□

Proposition 2.2. *Si V est la représentation par permutations associée à l'action du groupe G sur l'ensemble fini X , alors $\chi_V(g)$ est le nombre d'éléments fixés par g .*

Démonstration. L'action de g sur V est l'automorphisme donné par $g \cdot e_x = e_{gx}$, avec les notations usuelles. Celui-ci est représenté par la matrice dont l'élément diagonal relatif à $x \in X$ est 1 si $g \cdot e_x = e_x$, c'est-à-dire si $gx = x$, et 0 sinon. La trace de g est donc égale au nombre de 1 sur la diagonale, qui n'est autre que le nombre d'éléments $x \in X$ fixés par g . \square

Exemple 2.1. Comme nous avons maintenant accès à la théorie des caractères, nous pouvons appliquer ces résultats à l'exemple de S_3 , traité dans le chapitre précédent.

Le caractère étant une fonction des classes, il suffit de considérer un représentant de chaque classe de conjugaison de S_3 . Ces classes sont $[1]$, $[(12)]$ et $[(123)]$. Pour la représentation triviale U on trouve que le caractère est toujours 1, car $gv = v$, quels que soient $g \in S_3$, $v \in V$. Le caractère χ_U est donc donné par le triplet $(1, 1, 1)$. Pour la représentation alternée U' , on trouve le triplet $(1, -1, 1)$, car elle est donnée par $gv = \text{sign}(g)v$.

Pour trouver le caractère de la représentation standard V , considérons la représentation par permutations sur $\mathbb{C}^3 = U \oplus V$ de base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Par la proposition 2.2, et le fait que 1 fixe les 3 éléments de $X = \{1, 2, 3\}$, (12) fixe seulement 1 élément de X et (123) fixe 0 éléments, le caractère de la représentation par permutations est $\chi_{\mathbb{C}^3} = (3, 1, 0)$. Par la proposition 2.1, on a que $\chi_{\mathbb{C}^3} = \chi_U + \chi_V$ et donc le caractère de la représentation standard est $\chi_V = (3, 2, 1) - (1, 1, 1) = (2, 0, -1)$.

Résumons tout ceci dans un tableau de caractères de S_3 :

	1	3	2
S_3	1	(12)	(123)
représ. triviale U	1	1	1
représ. alternée U'	1	-1	1
représ. standard V	2	0	-1

La première ligne de ce tableau correspond au nombre d'éléments de la classe de conjugaison considérée. Au moment elle est sans importance, mais nous l'indiquons ici, car elle servira plus tard.

Une représentation arbitraire W de S_3 , qui se décompose en irréductibles par $W = U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}$, a alors pour caractère $\chi_W = a\chi_U + b\chi_{U'} + c\chi_V$. Dans la suite nous prouverons que les caractères des irréductibles χ_U , $\chi_{U'}$ et χ_V sont linéairement indépendants, si bien que W est déterminé, à isomorphisme près, par son caractère χ_W .

2.2 Propriétés des caractères

Un de nos objectifs consiste à développer un moyen pour trouver directement, à partir d'une représentation arbitraire, les termes de sa décomposition en somme directe d'irréductibles. Nous commençons avec la recherche d'une formule qui nous donne une projection de la représentation sur les termes de sa décomposition formés de la représentation triviale et nous intéressons aux conséquences.

Posons d'abord

$$V^G = \{v \in V : gv = v, \forall g \in G\}, \tag{2.1}$$

où V est une représentation arbitraire de G , et cherchons un moyen pour trouver V^G directement à partir de V . Notons dès à présent que V^G est le sous-espace de V sur lequel G agit trivialement, c'est-à-dire que V^G est la somme $U^{\oplus m}$ des termes de la décomposition de V en irréductibles formés par la représentation triviale U .

Comme nous l'avons déjà remarqué précédemment, une application $g : V \rightarrow V$ n'est en général pas un G -morphisme, mais en prenant la moyenne sur G , nous obtenons

$$\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \text{End}(V), \quad (2.2)$$

qui est G -linéaire, car $\sum_g g = \sum_g hgh^{-1}$, $h \in G$. Et nous avons même que φ est l'application que nous avons cherché pour trouver V^G à partir de V :

Proposition 2.3. *L'application φ est une projection de V sur V^G .*

Démonstration. Soit $v = \varphi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gw$. Alors pour $h \in G$,

$$hv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgw = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gw = v,$$

et donc $\text{im } \varphi \subset V^G$.

Soit maintenant $v \in V^G$, alors

$$\varphi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = v,$$

donc $V^G \subset \text{im } \varphi$.

Comme, pour tout $w \in V$, on a aussi $\varphi^2(w) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi(v) = v = \varphi(w)$, avec $v \in V^G$, on a que $\varphi^2 = \varphi$ et donc que φ est une projection de V sur V^G . \square

Nous avons donc trouvé une projection φ d'une représentation arbitraire V sur $V^G = U^{\oplus m}$, où U est la représentation triviale. Si nous nous intéressons plutôt à la multiplicité m de la représentation triviale U dans la décomposition de V en irréductibles, nous trouvons que $m = \dim V^G = \text{tr}(\varphi)$. En effet, la matrice représentant φ contient dans une entrée diagonale un 1, si le vecteur de base correspondant à l'élément considéré est dans V^G , et 0 sinon. Comme V^G est un sous-espace vectoriel de V , il y a autant de 1 sur la diagonale que V^G a de vecteurs de base et donc $\text{tr}(\varphi) = \dim V^G$. D'où

$$m = \dim V^G = \text{tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g). \quad (2.3)$$

Remarque. Il s'ensuit que pour une représentation irréductible V , autre que la représentation triviale, on a que $\sum_{g \in G} \chi_V(g) = 0$.

Si V et W sont deux représentations de G , alors $\text{Hom}(V, W)$ est aussi une représentation de G , par $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$, comme mentionné déjà dans le chapitre précédent.

Proposition 2.4. *Si V et W sont deux représentations irréductibles et $\text{Hom}_G(V, W)$ désigne l'espace des G -morphisms de V vers W , alors*

$$\dim \text{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \cong W \\ 0 & \text{si } V \not\cong W. \end{cases}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme de Schur. \square

Commençons par expliquer brièvement que les espaces $\text{Hom}_G(V, W)$ des G -morphisms de V dans W et $\text{Hom}(V, W)^G$ des applications linéaires G -invariantes de V dans W coïncident. L'identification canonique de $V^* \otimes W$ à $\text{Hom}(V, W)$ étant donnée par $v^* \otimes w \simeq v^*(-)_w$, la G -invariance de cette application linéaire s'écrit

$$\begin{aligned} v^*(v)_w &= (g^{-1}(v^*(-)_w))(v) = (g^{-1}(v^* \otimes w))(v) \\ &= ({}^t g v^* \otimes g^{-1} w)(v) = v^*(gv)g^{-1} w = g^{-1}(v^*(gv)_w), \end{aligned}$$

quels que soient $g \in G$ et $v \in V$, ce qui est très exactement la G -linéarité de $v^*(-)_w$. Ceci étant, comme le caractère de $\text{Hom}(V, W)$ est donné par

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)}(g) = \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g),$$

l'application de (2.3) à $\text{Hom}(V, W)$ donne

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \cong W \\ 0 & \text{si } V \not\cong W. \end{cases} \quad (2.4)$$

Définition 2.2. Nous désignerons par $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$ est l'ensemble des fonctions des classes sur G , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de G vers \mathbb{C} , qui sont constantes sur les classes de conjugaison de G .

Lemme 2.5. *L'ensemble $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$ est un espace vectoriel complexe qui a pour dimension le nombre de classes de conjugaison de G .*

Démonstration. Il suffit d'expliquer la dernière affirmation. Pour connaître une fonction des classes, il suffit de connaître ses valeurs sur les différentes classes de conjugaison de G ; on peut donc écrire toute fonction des classes α de manière unique sous la forme $\alpha = \sum_i z_i \delta_{C_i}$, $z_i \in \mathbb{C}$, où les C_i sont les classes de conjugaison de G , et où les δ_{C_i} sont les fonctions des classes définies par

$$\delta_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C_i \\ 0 & \text{si } g \notin C_i. \end{cases}$$

D'où la conclusion. \square

Définition 2.3. Pour tous les $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$, posons

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g). \quad (2.5)$$

Théorème 2.6. *Le produit (2.5), défini ci-dessus, est un produit hermitien sur l'espace vectoriel*

$\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$, pour lequel les caractères des représentations irréductibles sont orthonormés.

Démonstration. Par la relation (2.4), on a pour deux irréductibles distinctes V et W que $(\chi_V, \chi_W) = 0$ et $(\chi_V, \chi_V) = 1$. \square

Corollaire 2.7. *Le nombre de représentations irréductibles de G est inférieur ou égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

Démonstration. Les caractères des irréductibles forment un début de base pour l'espace vectoriel $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$, et il faut donc que le nombre d'irréductibles soit inférieur ou égal à la dimension de $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$, qui est par le lemme 2.5 égale au nombre de classes de conjugaison de G . \square

Remarque. Dans la suite nous montrerons qu'on a en fait égalité entre le nombre de représentations irréductibles et le nombre de classes de conjugaison. Ainsi les caractères des irréductibles forment vraiment une base orthonormée de $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$.

Corollaire 2.8. *Une représentation est déterminée par son caractère.*

Démonstration. Si $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$, avec les V_i des irréductibles distinctes, alors $\chi_V = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{V_i}$. Comme les χ_{V_i} sont linéairement indépendants, ceci est une décomposition unique. \square

Corollaire 2.9. *Une représentation est irréductible si et seulement si $|\chi_V|^2 := (\chi_V, \chi_V) = 1$.*

Démonstration. L'implication directe est une conséquence immédiate du théorème 2.6.

Pour la réciproque, on remarquera que si $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$, avec les V_i des irréductibles distinctes, alors $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^k a_i^2$ avec $a_i \in \mathbb{N}$. Or, si $(\chi_V, \chi_V) = 1$, il faut que pour un j , $a_j = 1$ et pour les autres $i \neq j$, $a_i = 0$ et donc que $V = V_j$. \square

Corollaire 2.10. *La multiplicité a_i de V_i dans V se calcule par $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$.*

Démonstration. Si $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$, notations habituelles, alors

$$(\chi_V, \chi_{V_i}) = \sum_j \overline{a_j} (\chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = \sum_j a_j \delta_{ij} = a_i,$$

par la sesquilinearité du produit Hermitien, l'orthonormalité des caractères des irréductibles et le fait que les $a_j \in \mathbb{N}$. \square

Considérons maintenant la représentation régulière R , car elle nous donnera des résultats importants dans la suite. Notons d'abord que R est un espace vectoriel complexe de dimension $|G|$ et de base $\{e_g : g \in G\}$. L'action de G est donnée par $g' \cdot e_g = e_{g'g}$. Si $g' \neq e$, alors $g' \cdot e_g = e_{g'g} \neq e_g$ et la matrice représentant l'automorphisme donné par l'action de g' ne contient que des 0 sur la diagonale, la trace de g' est donc 0. Si par contre $g' = e$, cette matrice devient l'identité, contient donc seulement des 1 sur la diagonale et la trace de e est égale à $\dim R = |G|$. On a donc

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq e \\ |G| & \text{si } g = e. \end{cases}$$

Ceci implique en particulier que si $G \neq \{e\}$, R n'est pas irréductible, car $(\chi_R, \chi_R) = |G|$.

Corollaire 2.11. *Toute représentation irréductible V de G apparaît $\dim V$ fois dans la représentation régulière R .*

Démonstration. Posons de nouveau $R = \bigoplus_i V_i^{\oplus a_i}$, où les V_i sont des irréductibles distinctes. Par le corollaire 2.10, on a

$$\begin{aligned} a_i &= (\chi_R, \chi_{V_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_R(g)} \chi_{V_i}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} (\chi_R(e) \chi_{V_i}(e) + 0) = \frac{1}{|G|} |G| \dim V_i \\ &= \dim V_i. \end{aligned}$$

□

Remarque. Ceci montre de nouveau que le nombre d'irréductibles est fini, car $\dim R = |G|$ est fini. De plus, on a que

$$|G| = \dim R = \sum_i (\dim V_i)^2 \quad (2.6)$$

et, pour $g \neq e$,

$$0 = \chi_R(g) = \sum_i a_i \chi_{V_i}(g) = \sum_i \dim V_i \chi_{V_i}(g). \quad (2.7)$$

Ces deux formules deviennent très utiles pour le calcul des caractères, car elles permettent de calculer le caractère d'une représentation irréductible inconnue si on connaît toutes les autres.

2.3 Le groupe symétrique d'ordre 4

Après l'étude des représentations du groupe symétrique d'ordre 3, venons maintenant au groupe symétrique d'ordre 4. Commençons par la recherche des classes de conjugaison de S_4 .

Pour le groupe symétrique d'ordre d , les classes de conjugaison correspondent aux *partitions de d* , c'est-à-dire aux différentes possibilités d'exprimer d comme somme d'entiers positifs. Si $d = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, alors cette partition correspond à la classe de conjugaison des permutations formées de k cycles disjoints de longueurs respectives a_1, a_2, \dots, a_k .

Pour S_4 , nous avons la partition $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, qui correspond à la classe de conjugaison de l'identité 1, la partition $4 = 2 + 1 + 1$ correspondant à la classe de conjugaison de (12), la partition $4 = 3 + 1$ correspondant à la classe de conjugaison de (123), la partition $4 = 4$ correspondant à la classe de conjugaison de (1234) et finalement la partition $4 = 2 + 2$ correspondant à la classe de conjugaison de (12)(34). Le nombre d'éléments dans ces classes de conjugaison est 1, 6, 8, 6 et 3 respectivement.

Les premières représentations irréductibles de S_4 que nous trouvons sont, comme pour S_3 , les représentations triviale U , alternée U' et standard V . Pour les caractères de U et U' , on a évidemment $\chi_U = (1, 1, 1, 1)$ et $\chi_{U'} = (1, -1, 1, -1)$. Pour trouver le caractère de la représentation standard, procédons comme dans l'exemple de S_3 et considérons la représentation par permutations sur \mathbb{C}^4 . Le caractère de la représentation par permutations est $\chi_{\mathbb{C}^4} = (4, 2, 1, 0, 0)$. En effet, si $X = \{1, 2, 3, 4\}$, alors 1 fixe 4 éléments de X , (12) en fixe

2, (123) en fixe 1 et (1234) et (12)(34) ne fixent aucun élément de X , si bien que par la proposition 2.2 on obtient le résultat. Et finalement $\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_U = (3, 1, 0, -1, -1)$. Remarquons que V est irréductible, car

$$\begin{aligned} |\chi_V|^2 &= (\chi_V, \chi_V) = \frac{1}{|S_4|} \sum_{g \in S_4} \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g) \\ &= \frac{1}{4!} (1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) = 1. \end{aligned}$$

Voici le début du tableau des caractères de S_4 :

	1	6	8	6	3
S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
représ. triviale U	1	1	1	1	1
représ. alternée U'	1	-1	1	-1	1
représ. standard V	3	1	0	-1	-1

Mais comme $(\dim U)^2 + (\dim U')^2 + (\dim V)^2 = 1 + 1 + 9 = 11 < 24 = 4! = |S_4|$, il faut, à cause de l'équation (2.6) et du corollaire 2.7, qu'il y ait encore deux représentations irréductibles de S_4 , de dimension 2 et 3 respectivement. Considérons le produit tensoriel de la représentation standard V et de la représentation alternée U' , ceci nous donne une représentation V' de caractère $\chi_{V'} = \chi_V \cdot \chi_{U'} = (3, -1, 0, 1, -1)$. Cette représentation est de dimension 3 et irréductible, car

$$|\chi_{V'}|^2 = \frac{1}{4!} (1 \cdot 3^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2) = 1.$$

Comme de plus le caractère de V' est différent de celui des irréductibles trouvées précédemment, il s'agit d'une nouvelle irréductible. Il ne nous manque maintenant qu'une seule irréductible, notons-la W , dont nous pouvons trouver le caractère par (2.7) et le fait que $\chi_W(1) = \dim W = 2$. On a par exemple pour $g = (12)$ que

$$0 = \sum_i \dim V_i \chi_{V_i}(g) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot \chi_W(g)$$

et il faut alors que $\chi_W(g) = 0$. Finalement nous trouvons le tableau de caractères suivant :

	1	6	8	6	3
S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
représ. triviale U	1	1	1	1	1
représ. alternée U'	1	-1	1	-1	1
représ. standard V	3	1	0	-1	-1
$V' = V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2

2.4 Nombre d'irréductibles

Comme annoncé précédemment, nous prouverons maintenant que le nombre d'irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaisons et que les caractères des irréductibles forment une base de l'espace des fonctions des classes. Finalement nous donnerons encore une formule générale de projection.

Proposition 2.12. *Soit $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et V une représentation de G . Posons*

$$\varphi_{\alpha, V} = \sum_{g \in G} \alpha(g)g : V \rightarrow V.$$

Alors $\varphi_{\alpha, V}$ est un G -morphisme pour toute représentation V si et seulement si α est une fonction des classes.

Démonstration. D'un côté, on a, quels que soient $h \in G, v \in V$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, V}(hv) &= \sum_{g \in G} \alpha(g)g(hv) \\ &= \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1})hgh^{-1}(hv) \\ &= h \left(\sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1})gv \right). \end{aligned}$$

De l'autre,

$$h \sum_{g \in G} \alpha(g)gv = h\varphi_{\alpha, V}(v).$$

On voit donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour la G -linéarité est que α est une fonction des classes. \square

Lemme 2.13. *Pour la représentation régulière R , les automorphismes $g \cdot$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Soit $\sum_{g' \in G} z_{g'}e_{g'} \in R$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \lambda_g g \cdot \left(\sum_{g' \in G} z_{g'}e_{g'} \right) &= 0, \forall z_{g'} \in \mathbb{C} \\ \iff \sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{g' \in G} z_{g'}e_{gg'} &= 0, \forall z_{g'} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Comme $\{e_{gg'} : g' \in G\}$ est une base, il faut que

$$\sum_{g \in G} \lambda_g z_{g'} = 0, \forall z_{g'} \in \mathbb{C},$$

donc $\lambda_g = 0$, quel que soit $g \in G$, et on a donc que les $g \cdot$ sont des endomorphismes sur R linéairement indépendants. \square

Théorème 2.14. *Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

Démonstration. Si le nombre d'irréductibles est strictement inférieur au nombre de classes de conjugaison, c'est-à-dire à la dimension de l'espace $\mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$ des fonctions des classes, on peut trouver un vecteur non nul $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{classe}}(G)$, qui est orthogonal au caractère χ_V de toute représentation irréductible V . Considérons alors l'endomorphisme G -linéaire $\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g)g : V \rightarrow V$ de la proposition 2.12. Par le lemme de Schur $\varphi_{\alpha,V} = \lambda \text{id}$ et si $\dim V = n$, on a que $\text{tr}(\varphi_{\alpha,V}) = n\lambda$ et il suit que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n} \text{tr}(\varphi_{\alpha,V}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_V(g) \\ &= \frac{|G|}{n} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\chi_{V^*}(g)} \\ &= \frac{|G|}{n} (\alpha, \chi_{V^*}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car on vérifie immédiatement que V^* est irréductible si V l'est. Il s'ensuit que $\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g)g = 0$ pour toute représentation V et en particulier pour la représentation régulière R . Comme les $g \in \text{Aut}(R)$ sont linéairement indépendants par le lemme 2.13, il faut que $\alpha(g) = 0$, quel que soit g , si bien que $\alpha = 0$. \square

Ainsi nous avons finalement le résultat désiré que le nombre d'irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaisons et que les caractères des irréductibles forment une base de l'espace des fonctions des classes.

De plus, cette démonstration nous donne aussi l'idée comment nous pouvons trouver une formule de projection plus générale que celle obtenue à la proposition 2.3.

Si V est une représentation arbitraire et V_i une représentation irréductible, intéressons-nous à

$$\psi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} g \in \text{End}(V).$$

Par la proposition 2.12, ψ est un G -morphisme et, si $V = V_j$ est irréductible, on a par le lemme de Schur, que $\psi = \lambda \text{id}$ et

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\dim V_j} \text{tr}(\psi) \\ &= \frac{1}{\dim V_j} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \chi_{V_j}(g) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\dim V_i} & \text{si } V_j = V_i \\ 0 & \text{si } V_j \neq V_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, si on multiplie ψ par $\dim V_i$, on obtient une projection de $V = \bigoplus_j V_j^{\oplus a_j}$ sur le terme $V_i^{\oplus a_i}$ formé par toutes les copies de V_i dans la décomposition de V . D'où la

Proposition 2.15. *Si $V = \bigoplus_i V_i^{\oplus a_i}$ est une représentation du groupe G , alors*

$$\psi_i = \dim V_i \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} g$$

est une projection de V sur $V_i^{\oplus a_i}$.

Chapitre 3

Représentations Induites – Algèbre de Groupe

Précédemment nous avons traité les représentations irréductibles des groupes symétriques jusqu'à l'ordre 4. Maintenant, nous voulons débiter l'étude des représentations irréductibles du groupe symétrique d'ordre arbitraire d . Nous rencontrerons dans ce chapitre des outils pour trouver ces irréductibles à partir des résultats que nous avons établis jusqu'à présent. Ces notions importantes sont la représentation induite et l'algèbre de groupe.

3.1 Le groupe symétrique d'ordre 5

Avant de nous lancer à l'étude du groupe symétrique d'ordre d , examinons encore l'exemple du groupe symétrique d'ordre 5.

Comme pour les exemples précédents, nous commençons par déterminer les classes de conjugaison et leur nombre d'éléments. Les partitions de 5 sont évidemment $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 2 + 1 + 1 + 1$, $5 = 3 + 1 + 1$, $5 = 4 + 1$, $5 = 5$, $5 = 2 + 2 + 1$ et $5 = 3 + 2$. Ceci nous donne les classes de conjugaison de 1 avec 1 élément, de (12) avec 10 éléments, de (123) avec 20 éléments, de (1234) avec 30 éléments, de (12345) avec 24 éléments, de (12)(34) avec 15 éléments et finalement la classe de conjugaison de (12)(345) avec 20 éléments. Au chapitre 4, nous donnerons la formule pour trouver le nombre d'éléments dans chaque classe de conjugaison.

Les premières représentations irréductibles sont, comme précédemment, la représentation triviale U de caractère $\chi_U = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, la représentation alternée U' de caractère $\chi_{U'} = (1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$ et la représentation standard V , trouvée à partir de $\mathbb{C}^5 = U \oplus V$ avec caractère $\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^5} - \chi_U = (5, 3, 2, 1, 0, 1, 0) - (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (4, 2, 1, 0, -1, 0, -1)$. Et, comme pour S_4 , nous pouvons prendre le produit tensoriel de V et U' pour obtenir V' de caractère $\chi_{V'} = (4, -2, 1, 0, -1, 0, 1)$. On vérifie facilement que ces représentations sont irréductibles, car leurs caractères vérifient $|\chi|^2 = 1$.

Résumons ces résultats dans la première partie du tableau de caractères :

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
U	1	1	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
V	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1

Comme nous avons 7 classes de conjugaison, il nous manque encore 3 représentations irréductibles. Nous avons obtenu V' par le produit tensoriel $V \otimes U'$, il semble donc naturel d'essayer d'autres combinaisons pour le produit tensoriel. Mais $U' \otimes U' \cong U$ et $U' \otimes V' \cong V$, comme on vérifie facilement par les caractères. Un simple argument de dimension montrant que $V \otimes V = \wedge^2 V \oplus \vee^2 V$, regardons le caractère de $\wedge^2 V$, qui est donné par $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V^2(g) - \chi_V(g^2))$. Ceci donne pour $g = 1$, $g^2 = 1$ et donc $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(4^2 - 4) = 6$, pour $g = (12)$, $g^2 = 1$ et donc $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(2^2 - 4) = 0$, pour $g = (123)$, $g^2 = (132)$ et donc $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(1^2 - 1) = 0$ et ainsi de suite, pour obtenir finalement $\chi_{\wedge^2 V} = (6, 0, 0, 0, 1, -2, 0)$. Vérifions que $\wedge^2 V$ est irréductible, $|\chi_{\wedge^2 V}|^2 = \frac{1}{5!}(6^2 + 0 + 0 + 0 + 24 \cdot 1 + 15 \cdot (-2)^2 + 0) = 1$.

Au lieu de nous intéresser maintenant à $\vee^2 V$ ou d'autres combinaisons du produit tensoriel, remarquons qu'il ne nous manque que deux représentations irréductibles. Essayons donc de les déterminer à partir des relations (2.6) et (2.7). Si m et n désignent les dimensions de ces deux irréductibles, il faut que $|S_5| = 5! = 120 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + m^2 + n^2$, donc $m^2 + n^2 = 50$. Ceci nous donne les possibilités $m = 1$ et $n = 7$ ou $m = n = 5$.

Le groupe alterné A_5 , c'est-à-dire le groupe des permutations paires de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, est manifestement un sous-groupe normal de S_5 . L'indice de A_5 dans S_5 , c'est-à-dire $|S_5| : |A_5| = 2$, étant égal au cardinal $|S_5/A_5|$, le groupe quotient S_5/A_5 est cyclique d'ordre 2 et contient les éléments A_5 et $(12)A_5$. Toute représentation V de dimension 1 de $S_5 - g = \lambda_g \text{id}_V$, $g \in S_5$, $\lambda_g \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_{gg'} = \lambda_g \lambda_{g'}$ (*), $\lambda_1 = 1$ – étant triviale sur tout sous-groupe normal dont le groupe quotient est cyclique, elle est en particulier triviale sur A_5 . Par conséquent, si g est pair, $\lambda_g = \lambda_{A_5} = \lambda_1 = 1$ et si g est impair, $\lambda_g = \lambda_{(12)A_5} = \lambda_{(12)} = \pm 1$, voir (*), si bien que la représentation considérée est triviale ou alternée. Il n'existe donc pas de représentation unidimensionnelle autre que celles déjà trouvées, de sorte que les deux irréductibles manquantes, disons W et W' , sont de dimension $m = n = 5$. Comme W et W' ont ainsi même dimension, il est possible que W' s'écrive comme produit tensoriel de W avec une irréductible de dimension 1, c'est-à-dire $W' = W \otimes U'$. Si tel est le cas, nous avons $\chi_W = (5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ et $\chi_{W'} = (5, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, -\alpha_6)$. Par la formule (2.7), nous avons déjà les valeurs de α_2 , α_4 et α_5 . En effet,

$$1 + 1 + 4 + 4 + 5\alpha_2 + 5\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -1,$$

$$1 + 1 - 4 - 4 + 6 + 5\alpha_4 + 5\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0,$$

$$1 + 1 - 6 \cdot 2 + 5\alpha_5 + 5\alpha_5 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 1.$$

Vu que W est irréductible, $1 = |\chi_W|^2 = \frac{1}{5!}(5^2 + 10\alpha_1^2 + 20 + 30\alpha_3^2 + 15 + 20\alpha_6^2) = |\chi_{W'}|^2$, si bien que W' est aussi irréductible et que $10\alpha_1^2 + 30\alpha_3^2 + 20\alpha_6^2 = 60$. Ainsi, $(\chi_W, \chi_{W'}) = \frac{1}{5!}(5^2 - 10\alpha_1^2 + 20 - 30\alpha_3^2 + 15 - 20\alpha_6^2) = \frac{1}{120}(60 - 60) = 0$ et W et W' sont deux irréductibles distinctes. En utilisant que les caractères de W et W' sont orthogonaux aux caractères des autres irréductibles, nous trouvons $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = -1$ et $\alpha_6 = 1$.

Finalement, nous obtenons le tableau de caractères de S_5 suivant :

	1	10	20	30	24	15	20
S_5	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
U	1	1	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
V	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1
$\wedge^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0
W	5	1	-1	-1	0	1	1
W'	5	-1	-1	1	0	1	-1

3.2 Puissances extérieures de la représentation standard

Dans l'exemple de S_5 , nous avons construit une représentation irréductible par une puissance extérieure de l'irréductible standard V . Cette observation admet la généralisation suivante.

Théorème 3.1. *Toute puissance extérieure $\wedge^k V$ ($0 \leq k \leq d - 1$) de la représentation standard V de S_d est irréductible.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il découle de la décomposition $\mathbb{C}^d = V \oplus U$ que

$$(\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = (\chi_V, \chi_V) + (\chi_V, \chi_U) + (\chi_U, \chi_V) + (\chi_U, \chi_U).$$

Il en suit que V est irréductible si et seulement si $(\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = 2$, car les deux termes du milieu indiquent le nombre de fois que U apparaît dans V .

Notons aussi qu'en général

$$\wedge^k (V \oplus W) = \bigoplus_{p+q=k} \wedge^p V \otimes \wedge^q W.$$

Donc

$$\wedge^k \mathbb{C}^d = \wedge^k (V \oplus U) = \left(\wedge^k V \otimes \wedge^0 U \right) \oplus \left(\wedge^{k-1} V \otimes \wedge^1 U \right) = \wedge^k V \oplus \wedge^{k-1} V.$$

Notons que $\wedge^0 V = U$ est irréductible et prouvons par récurrence que $\wedge^k V$ est irréductible si $\wedge^{k-1} V$ ($k \geq 1$) l'est. Par le raisonnement ci-dessus, il suffit de prouver que $(\chi, \chi) = 2$, où χ est le caractère de $\wedge^k \mathbb{C}^d$.

Soit $A = \{1, \dots, d\}$ et B une partie de A avec k éléments, c'est-à-dire $B = \{i_1, \dots, i_k\}$, et agissons avec un élément $g \in S_d$ sur B . B correspond à l'élément de base $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ de $\wedge^k \mathbb{C}^d$. L'action de g sur B donne un élément $\{g(i_1), \dots, g(i_k)\}$ que nous devons de nouveau décomposer dans la base. Pour calculer la trace de g , nous avons seulement besoin de connaître la composante de cette décomposition suivant l'élément de base B . D'où la définition

$$\{g\}_B := \begin{cases} 0 & \text{si } g(B) \neq B, \\ 1 & \text{si } g(B) = B \text{ et } g|_B \text{ est une permutation paire,} \\ -1 & \text{si } g(B) = B \text{ et } g|_B \text{ est une permutation impaire.} \end{cases}$$

Considérons un exemple pour mieux comprendre cette idée. Soient $B = \{1, 3, 4\} \simeq e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$ et $B' = \{2, 3, 5\} \simeq e_2 \wedge e_3 \wedge e_5$ deux éléments de base et $g(B) = \{3, 1, 4\} \simeq e_3 \wedge e_1 \wedge e_4 = -e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$, donc $\{g\}_B = -1$, si par contre $g(B) = \{2, 3, 5\}$, $\{g\}_B = 0$.

Comme $\{g\}_B$ nous indique évidemment les valeurs diagonales de la matrice représentative de g , nous obtenons $\chi(g) = \sum_B \{g\}_B$ et donc

$$\begin{aligned} (\chi, \chi) &= \frac{1}{d!} \sum_{g \in S_d} \left(\sum_B \{g\}_B \right)^2 \\ &= \frac{1}{d!} \sum_{g \in S_d} \sum_B \sum_C \{g\}_B \{g\}_C \\ &= \frac{1}{d!} \sum_B \sum_C \sum_g (\text{sign } g|_B) (\text{sign } g|_C), \end{aligned}$$

où la dernière somme est sur les g tels que $g(B) = B$ et $g(C) = C$ et les sommes sur B et C sont sur les parties de A avec k éléments. Ce g est donné par quatre permutations, une sur $B \cap C$, une sur $B \setminus (B \cap C)$, une sur $C \setminus (B \cap C)$ et une sur $A \setminus (B \cup C)$. Si ℓ est le cardinal de $B \cap C$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d!} \sum_B \sum_C \sum_{a \in S_\ell} \sum_{b \in S_{k-\ell}} \sum_{c \in S_{k-\ell}} \sum_{h \in S_{d-2k+\ell}} (\text{sign } a \cdot \text{sign } b) (\text{sign } a \cdot \text{sign } c) \\ &= \frac{1}{d!} \sum_B \sum_C \ell! (d-2k+\ell)! \left(\sum_{b \in S_{k-\ell}} \text{sign } b \right) \left(\sum_{c \in S_{k-\ell}} \text{sign } c \right). \end{aligned}$$

Les deux dernières sommes sont nulles, sauf si $k - \ell = 0$ ou $k - \ell = 1$.

Le premier cas donne $k = \ell$, donc $B = C = B \cap C$ et $B \setminus (B \cap C) = \emptyset$. Ainsi, les dernières sommes susmentionnées n'existent pas et les termes correspondants de (χ, χ) sont donnés par

$$\frac{1}{d!} \sum_B k!(d-k)! = \frac{1}{d!} \binom{d}{k} k!(d-k)! = 1.$$

Similairement, le deuxième cas $k - \ell = 1$ donne aussi 1. Finalement, nous obtenons $(\chi, \chi) = 2$. □

3.3 Représentations induites

Si H est un sous-groupe de G et V une représentation de G , on peut toujours restreindre V afin d'obtenir une représentation de H , ce que l'on note par $\text{Res}_H^G V$. Ce concept de restriction est très naturel ; ci-dessous, nous nous intéressons plutôt à la notion inverse. Si on part d'une représentation W de H , nous voulons obtenir une représentation de G à partir de W .

Supposons d'abord que V est une représentation du groupe G , H un sous-groupe de G et W un sous-espace de V H -invariant, c'est-à-dire tel que $h \cdot W = W$, pour tout $h \in H$. Pour un $g \in G$, le sous-espace $g \cdot W$ ne dépend que de la classe à gauche gH , comme $gh \cdot W = g \cdot (h \cdot W) = g \cdot W$. Si nous désignons les classes à gauche par $\sigma \in G/H$, nous arrivons à la

Définition 3.1. V est une représentation induite par W si

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W,$$

ce que l'on note $V = \text{Ind}_H^G W$.

Exemple 3.1. Soit H un sous-groupe de G et $V = \langle e_g : g \in G \rangle$ qui a pour sous-espace $W = \langle e_h : h \in H \rangle$. V et W sont les représentations régulières de G et H . Visiblement, on a que V est induit par W .

Exemple 3.2. Soit H un sous-groupe de G , considérons la représentation de permutation $V = \langle e_{g\sigma} : \sigma \in G/H \rangle$ de G associée à l'action de G sur G/H , puis prenons le sous-espace $W = \langle e_{g_H} \rangle$. Ici nous supposons avoir choisi des représentants g_σ des classes à gauche σ . Il est encore clair que V est induit par W .

Notre objectif est de déduire la précédente construction entièrement de la représentation d'un sous-groupe H de G sur un espace W . Il s'agit donc de prouver qu'il existe une G -représentation V admettant W comme sous-espace, qui se réduit sur H et W à l'action donnée et telle que $\bigoplus_{\sigma} \sigma \cdot W = V$. De plus, nous montrerons que cette représentation est unique.

Notons par $g_\sigma \in G$ un représentant de la classe à gauche σ , en particulier $g_H = e$. Supposons que la représentation induite V existe. Alors $V = \bigoplus_{\sigma} g_\sigma \cdot W$ et, comme pour tout $g \in G$ et tout $\sigma \in G/H$, il existe un seul $\tau \in G/H$ et un seul $h \in H$, tels que $gg_\sigma = g_\tau h$, on a $g \cdot (g_\sigma \cdot w) = g_\tau \cdot (h \cdot w)$. Ceci montre qu'aussi bien V que l'action de G sur V sont uniques.

En même temps ceci nous dit comment construire la représentation induite V à partir de W . Prenons des copies W^σ de W (W^H étant identifié à W) et construisons la représentation induite par $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma$. Notons pour $w \in W$, $g_\sigma w$ au lieu de w , s'il est regardé comme élément de W^σ . Un élément de V s'écrit donc de manière unique $v = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma w_\sigma$. Définissons l'action de G sur V par $g \cdot (g_\sigma w_\sigma) = g_\tau (h w_\sigma)$, comme précédemment. Afin de vérifier que nous venons bien de définir une représentation, nous devons montrer que $g' \cdot (g \cdot (g_\sigma w_\sigma)) = (g'g) \cdot (g_\sigma w_\sigma)$, pour $g' \in G$. Si $g'g_\tau = g_\rho h'$ pour un $\rho \in G/H$ et un $h' \in H$, alors $g' \cdot (g \cdot (g_\sigma w_\sigma)) = g' \cdot (g_\tau (h w_\sigma)) = g_\rho (h' (h w_\sigma))$. Comme $(g'g)g_\sigma = g'(gg_\sigma) = (g'g_\tau)h = g_\rho (h'h)$, nous avons le résultat demandé. De plus, pour $h \in H$ et $w \in W$, l'action définie devient $h \cdot w = h \cdot (ew) = e(hw) = hw$, ce qui est l'action initiale de H sur W . Enfin, $\bigoplus_{\sigma} \sigma \cdot W = \bigoplus_{\sigma} g_\sigma \cdot W$, $g_\sigma \cdot w = g_\sigma \cdot (ew) = g_\sigma w$ et par conséquent $\bigoplus_{\sigma} \sigma \cdot W = \bigoplus_{\sigma} g_\sigma W = V$.

Proposition 3.2. Soient H un sous-groupe d'un groupe G , W une représentation de H et U une représentation arbitraire de G . Posons $V = \text{Ind}_H^G W$. Alors chaque H -morphisme $\varphi : W \rightarrow U$ s'étend de manière unique en un G -morphisme $\tilde{\varphi} : V \rightarrow U$, c'est-à-dire

$$\text{Hom}_H(W, \text{Res } U) = \text{Hom}_G(\text{Ind } W, U).$$

En particulier, cette propriété universelle détermine $\text{Ind } W$ à isomorphisme près.

Étant donné un sous-groupe H d'un groupe G et un H -module W , la propriété universelle mentionnée cherche donc un G -module V et un H -morphisme $\psi : W \rightarrow V$, tels que pour tout G -module U et tout H -morphisme $\varphi : W \rightarrow U$, il existe un seul G -module morphisme

$\tilde{\varphi} : V \rightarrow U$, tel que $\tilde{\varphi} \circ \psi = \varphi$. On observera que $V = \text{Ind } W$ et l'injection canonique de W dans V constituent une solution de ce problème, si l'existence et l'unicité annoncées de l'extension sont établies. Il s'ensuit que $V = \text{Ind } W$ est unique à isomorphisme près comme solution de ce problème universel.

Passons à la preuve de l'existence et de l'unicité.

Démonstration. Notons par $g_{\sigma,U}$ l'élément g_{σ} vu comme automorphisme sur U et par $g_{\sigma,V}$ le même élément vu comme automorphisme sur V . La restriction de $g_{\sigma,V}$ à W est un isomorphisme d'espace vectoriel $g_{\sigma,W} \in \text{Isom}(W, \sigma \cdot W)$. Définissons l'extension $\tilde{\varphi}$ de φ sur chaque $\sigma \cdot W$ par $\tilde{\varphi} = g_{\sigma,U} \varphi g_{\sigma,W}^{-1}$. Montrons que ce $\tilde{\varphi} : V \rightarrow U$, qui étend visiblement φ , est G -linéaire. Si $g_{\sigma} = g_{\tau}h$, on a que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g \cdot (g_{\sigma}w)) &= (g_{\tau,U} \varphi g_{\tau,W}^{-1})(g_{\tau} \cdot (h \cdot w)) = g_{\tau} \cdot (h \cdot \varphi(w)) \\ &= g \cdot (g_{\sigma} \cdot \varphi(w)) = g \cdot (g_{\sigma,U} \varphi g_{\sigma,W}^{-1})(g_{\sigma}w) = g \cdot \tilde{\varphi}(g_{\sigma}w). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Observons enfin que la définition de $\tilde{\varphi}$ sur $\sigma \cdot W$ est, vu la condition de G -linéarité et la condition $\tilde{\varphi} = \varphi$ sur W , nécessairement celle choisie, mais qu'elle serait éventuellement différente pour un autre choix des représentants g_{σ} . On vérifie néanmoins facilement que la définition basée sur des $g_{\sigma}h$ coïncide avec celle basée sur les g_{σ} , ce qui établit l'unicité de l'extension. \square

Pour calculer le caractère de la représentation induite, remarquons que $g \cdot (\sigma \cdot W) = g \cdot (g_{\sigma} \cdot W) = g_{\tau} \cdot (hW) = g_{\tau} \cdot W = \tau \cdot W$. Ceci implique pour la matrice représentative de g , qu'elle a un bloc 0 sur la diagonale si $\tau \neq \sigma$, c'est-à-dire pour obtenir une contribution à la trace de g , il faut que $g \cdot \sigma = \sigma$. Ainsi

$$\chi_V(g) = \sum_{\sigma: g \cdot \sigma = \sigma} \chi_{\sigma \cdot W}(g).$$

Or la condition $g \cdot \sigma = \sigma$ signifie que $gs = sh$, $h \in H$, pour tout $s \in \sigma$. Comme de plus les applications $g : \sigma \cdot W \ni s \cdot w \mapsto s \cdot (hw) \in \sigma \cdot W$ et $s^{-1}gs = h : W \ni w \mapsto h \cdot w \in W$ ont la même trace, la formule pour le caractère devient

$$\chi_{\text{Ind } W}(g) = \sum_{\sigma: g \cdot \sigma = \sigma} \chi_W(s^{-1}gs), \quad (3.2)$$

où $s \in \sigma$ arbitraire.

Corollaire 3.3 (Réciproque de Frobenius). *Si W est une représentation de H et U une représentation de G , alors*

$$(\chi_{\text{Ind } W}, \chi_U)_G = (\chi_W, \chi_{\text{Res } U})_H.$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de prouver le résultat pour U et W irréductibles. Or, on a que $(\chi_{\text{Ind } W}, \chi_U)_G = \dim \text{Hom}_G(\text{Ind } W, U)$ et $(\chi_W, \chi_{\text{Res } U})_H = \dim \text{Hom}_H(W, \text{Res } U)$. Ces dimensions étant égales par la proposition 3.2, on a le résultat. \square

Si W et U sont irréductibles, on a par la réciproque de Frobenius : *Le nombre de fois que U apparaît dans $\text{Ind } W$ est égal au nombre de fois que W apparaît dans $\text{Res } U$.*

Donnons une application de cette observation.

Exemple 3.3. Soit $H = S_2$, $G = S_3$, désignons par U_2 , U'_2 et V_2 les représentations triviale, alternée et standard de S_2 – évidemment $V_2 = U'_2$ – et rappelons que les irréductibles de S_3 sont les représentations triviale U_3 , alternée U'_3 et standard V_3 . Les restrictions à S_2 de ces irréductibles sont U_2 , $U'_2 = V_2$ et $U_2 \oplus U'_2 = U_2 \oplus V_2$ respectivement. Cherchons la décomposition de la représentation induite $\text{Ind}_H^G V_2$ en irréductibles. Comme V_2 apparaît zéro fois dans $\text{Res } U_3$, une fois dans $\text{Res } U'_3$ et une fois dans $\text{Res } V_3$, nous avons par la réciproque de Frobenius que $\text{Ind}_H^G V_2 = U'_3 \oplus V_3$.

Proposition 3.4. Si C est une classe de conjugaison de G et $C \cap H$ se décompose en classes de conjugaison D_1, \dots, D_r de H , la formule pour le caractère de la représentation induite $\text{Ind } W$ sur C s'écrit

$$\chi_{\text{Ind } W}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W(D_i).$$

En particulier, si W est la représentation triviale de H , alors la formule devient

$$\chi_{\text{Ind } W}(C) = \frac{|G|}{|H|} \frac{|C \cap H|}{|C|}.$$

Démonstration. Soit K un système de représentants des classes à gauche $\sigma \in G/H$ et $g \in C$. La condition $\sigma : g \cdot \sigma = \sigma$ devient $r \in K : r^{-1}gr \in H$, c'est-à-dire (3.2) devient

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{r \in K: \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_W(r^{-1}gr).$$

Comme chaque classe à gauche contient $|H|$ éléments de G , nous pouvons écrire

$$\chi_V(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G: \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_W(s^{-1}gs).$$

Or $x = s^{-1}gs$ n'est pas seulement un élément de H , mais aussi de la classe de conjugaison C de g , si bien que nous nous proposons de sommer sur les $x \in C \cap H$. Mais dans ce cas, deux éléments $s, t \in G$, tels que $s^{-1}gs = t^{-1}gt =: x \in H$, qui donnaient lieu à deux termes $\chi_W(x)$ dans la somme sur s , ne fournissent plus qu'un seul terme dans celle sur x . Or, $s^{-1}gs = t^{-1}gt$ si et seulement si st^{-1} appartient au centralisateur $Z(g)$ de g , ou encore si et seulement si s, t appartiennent à la même classe de $G/Z(g)$. Le cardinal de ces classes étant $|Z(g)|$, les termes de la somme sur x sont à multiplier par $|Z(g)|$. Nous obtenons donc

$$\chi_V(g) = \frac{1}{|H|} |Z(g)| \sum_{x \in C \cap H} \chi_W(x).$$

Or, si G agit sur lui-même par l'action de conjugaison $x \mapsto xgx^{-1}$, alors le stabilisateur G_g de g est donné par le centralisateur $Z(g)$ et l'orbite Gg de g est la classe de conjugaison C de g . Comme G est fini, on a donc $|Z(g)||C| = |G_g||Gg| = |G|$ et nous obtenons

$$\chi_V(g) = \frac{1}{|H|} \frac{|G|}{|C|} \sum_{x \in C \cap H} \chi_W(x).$$

Comme $C \cap H = \{D_1, \dots, D_r\}$, nous trouvons finalement

$$\chi_V(g) = \frac{|G|}{|H|} \frac{1}{|C|} \sum_{i=1}^r |D_i| \chi_W(D_i).$$

Si W est la représentation triviale de H , les $\chi_W(D_i)$ sont tous 1 et la somme devient simplement $|C \cap H|$ et nous obtenons le résultat. \square

3.4 Algèbre de groupe

L'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ est un concept important permettant de formuler les résultats de la théorie des représentations des groupes finis en termes d'énoncés relatifs à des représentations d'algèbres associatives avec unité.

L'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ est construite à partir de l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles $\sum_g z_g e_g$ à coefficients $z_g \in \mathbb{C}$ des éléments de base $\{e_g : g \in G\}$. Remarquons que cet espace vectoriel est celui de la représentation régulière. La multiplication d'algèbre est donnée canoniquement par $e_g \cdot e_h = e_{gh}$.

Une représentation de l'algèbre $\mathbb{C}G$ sur un espace vectoriel V est (évidemment) simplement un homomorphisme d'algèbres associatives unitaires $\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V)$. On vérifie immédiatement que les représentations du groupe G et celles de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ sont en correspondance biunivoque ; le fait qu'un homomorphisme d'algèbres avec unité à valeurs dans $\text{End}(V)$ induit un homomorphisme de groupes à valeurs dans $\text{Aut}(V)$ est encodé dans la condition exigeant que l'homomorphisme d'algèbres unitaires associe l'identité à l'unité.

Chapitre 4

Diagrammes de Young – Groupe symétrique d'ordre d

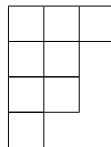
Pour compléter l'étude des représentations du groupe symétrique S_d , nous avons encore besoin d'autres résultats, notamment des diagrammes de Young et de la formule des caractères de Frobenius. Les diagrammes de Young nous donnent les représentations irréductibles du groupe symétrique sous forme de diagrammes très simples, et la formule des caractères de Frobenius nous permet de calculer leur caractère à partir de ces diagrammes. Pour finir, nous allons énoncer la règle de Littlewood-Richardson, qui nous permet de décomposer un produit tensoriel de deux représentations en une somme directe de représentations irréductibles.

4.1 Diagrammes de Young

Comme nous l'avons déjà constaté précédemment, les classes de conjugaison de S_d correspondent aux partitions de d . Or, il existe une correspondance évidente entre les partitions de d et un type de diagrammes très simple, les *diagrammes de Young*.

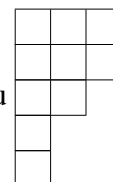
Soit une partition de d , donnée par $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$. Une telle partition est encore notée $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. Le diagramme de Young correspondant est formé par λ_1 cases dans la première ligne, λ_2 cases dans la deuxième ligne, ... et λ_k cases dans la k -ième ligne.

Exemple 4.1. Si $d = 8$, alors le diagramme de Young correspondant à la partition $8 = 3 + 2 + 2 + 1$ est



Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition de d , alors la *partition conjuguée* $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$ correspond au transposé du diagramme de Young de λ .

Exemple 4.2. La partition $\lambda = (3, 3, 2, 1, 1)$ correspond au tableau



, dont le transposé

est

, de sorte que la partition conjuguée est $\lambda' = (5, 3, 2)$.

- Définition 4.1.** (i) Un *tableau de Young* est obtenu en remplissant les cases d'un diagramme de Young avec des entiers entre 1 et d .
- (ii) Un tableau de Young est appelé *canonique*, s'il contient 1 dans la première case, 2 dans la deuxième, ... et d dans la d -ième case.
- (iii) Un tableau de Young est dit *standard*, si ses entrées sont strictement croissantes dans les lignes et strictement croissantes dans les colonnes.
- (iv) Un tableau de Young est *semi-standard*, si ses entrées sont croissantes dans les lignes et strictement croissantes dans les colonnes.

Exemple 4.3.

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

 est un tableau canonique,

1	3	4
2	5	
6	7	
8		

 est un tableau standard et

1	2	2
3	3	
4	5	
6		

 est un tableau semi-standard.

Les tableaux que nous considérons dans la suite sont toujours des tableaux canoniques, si rien d'autre n'est indiqué.

Soient à présent une partition quelconque $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de d et le tableau de Young TY associé. Considérons les deux sous-groupes P et Q du groupe symétrique définis par

$$P = P_\lambda = \{g \in S_d : g \text{ préserve les lignes de } TY\} \text{ et}$$

$$Q = Q_\lambda = \{g \in S_d : g \text{ préserve les colonnes de } TY\}.$$

Introduisons également deux éléments de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}S_d$ correspondants à ces deux sous-groupes :

$$a_\lambda = \sum_{g \in P} e_g$$

$$b_\lambda = \sum_{g \in Q} \text{sign}(g)e_g.$$

Ces éléments a_λ et b_λ généralisent les opérateurs de symétrisation et d'antisymétrisation, qui sont des projecteurs de $V^{\otimes d}$ sur $\vee^d V$ et $\wedge^d V$ respectivement, pour un espace vectoriel V . Comme S_d agit canoniquement sur $V^{\otimes d}$, $\mathbb{C}S_d$ agit aussi sur $V^{\otimes d}$ et a_λ et b_λ peuvent être considérés comme endomorphismes de $V^{\otimes d}$.

- Exemple 4.4.** – Si $\lambda = (d)$, alors $P = S_d$ et $Q = \{1\}$, comme le tableau est donné par une seule ligne. Dans ce cas $a_\lambda(V^{\otimes d}) = \vee^d V$, car a_λ est, à un facteur multiplicatif $\frac{1}{d!}$ près, l'opérateur de symétrisation.
- Si $\lambda = (1, \dots, 1)$, alors $Q = S_d$, $P = \{1\}$ et $b_\lambda(V^{\otimes d}) = \wedge^d V$.

Définition 4.2. Le *symétriseur de Young* est l'élément de $\mathbb{C}S_d$, donné par $c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda$.

Par ce symétriseur de Young, nous pouvons construire les irréductibles de S_d à partir des tableaux de Young correspondant aux partitions de d . Notons d'abord que les éléments $\sum_g z_g e_g \in \mathbb{C}S_d$ ne peuvent pas seulement être considérés comme endomorphismes de $V^{\otimes d}$, voir ci-dessus, mais également comme endomorphismes de l'algèbre de groupe elle-même, par exemple par multiplication à droite, c'est-à-dire $\cdot \sum_g z_g e_g \in \text{End}(\mathbb{C}S_d)$. Dans le suivant théorème fondamental $c_\lambda \in \mathbb{C}S_d$ est vu comme $c_\lambda \in \text{End}(\mathbb{C}S_d)$.

Théorème 4.1. *Pour toute partition λ de d , il existe un multiple scalaire de c_λ qui est idempotent, c'est-à-dire $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$, $n_\lambda \in \mathbb{C}$, et l'image par c_λ de $\mathbb{C}S_d$ est une représentation irréductible V_λ de S_d . De plus, toute représentation irréductible de S_d peut être obtenue de cette manière pour une partition unique.*

La preuve de ce théorème sera donnée plus tard, considérons maintenant des exemples.

Exemple 4.5. – Si $\lambda = (d)$, alors $P = S_d$, $Q = \{1\}$, $c_\lambda = a_\lambda$ et

$$V_{(d)} = \mathbb{C}S_d \cdot c_\lambda = \mathbb{C}S_d \cdot a_\lambda.$$

Ainsi, pour $\sum_{g' \in S_d} z_{g'} e_{g'} \in \mathbb{C}S_d$, on obtient

$$\sum_{g' \in S_d} z_{g'} e_{g'} \cdot \sum_{g \in S_d} e_g = \sum_{g' \in S_d} z_{g'} \sum_{g \in S_d} e_{g'g} \in \mathbb{C}a_\lambda,$$

et donc $V_{(d)} = \mathbb{C} \sum_{g \in S_d} e_g$, si bien que la représentation obtenue est la représentation triviale U de S_d .

– Si $\lambda = (1, \dots, 1)$, alors $Q = S_d$, $P = \{1\}$, $c_\lambda = b_\lambda$ et

$$V_{(1, \dots, 1)} = \mathbb{C}S_d \cdot c_\lambda = \mathbb{C}S_d \cdot b_\lambda.$$

Pour $\sum_{g' \in S_d} z_{g'} e_{g'} \in \mathbb{C}S_d$, on trouve

$$\sum_{g' \in S_d} z_{g'} e_{g'} \cdot \sum_{g \in S_d} \text{sign}(g) e_g = \sum_{g' \in S_d} z_{g'} \text{sign}(g') \sum_{g \in S_d} \text{sign}(g'g) e_{g'g} \in \mathbb{C}b_\lambda.$$

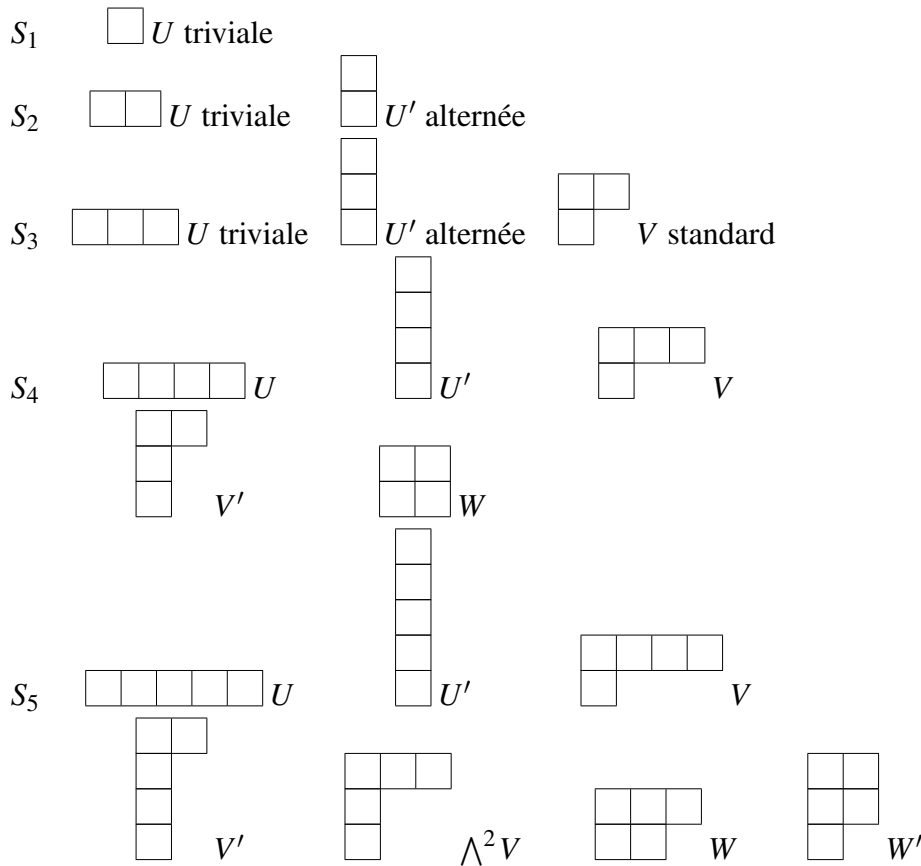
D'où $V_{(1, \dots, 1)} = \mathbb{C} \sum_{g \in S_d} \text{sign}(g) e_g$ et la représentation résultante est, comme on le voit aisément, la représentation alternée U' de S_d .

– Si $d = 3$ et $\lambda = (2, 1)$, le tableau de Young correspondant est $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$. Les éléments de S_3 qui préservent les lignes sont 1 et (12) et ceux qui préservent les colonnes sont 1 et (13), donc $P = \{1, (12)\}$ et $Q = \{1, (13)\}$. Par conséquent,

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda = (e_1 + e_{(12)}) \cdot (e_1 - e_{(13)}) = e_1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)},$$

car (12)(13) = (132). Or, $e_{(13)} \cdot c_\lambda = e_{(13)} + e_{(123)} - e_1 - e_{(23)} \neq c_\lambda$ et de plus c_λ et $e_{(13)} \cdot c_\lambda$ sont linéairement indépendants. Pour d'autres éléments $e_g \in \mathbb{C}S_3$, $e_g \cdot c_\lambda$ ne donne que des combinaisons linéaires de c_λ et $e_{(13)} \cdot c_\lambda$. Donc $V_{(2,1)}$ admet les vecteurs c_λ et $e_{(13)} \cdot c_\lambda$ comme base et la représentation trouvée est la représentation standard de S_3 .

Comme nous avons déjà trouvé les représentations irréductibles de S_d pour $d \leq 5$, donnons encore les diagrammes de Young correspondants à ces représentations.



Plus tard, nous utiliserons la formule des caractères de Frobenius pour vérifier que ces diagrammes correspondent vraiment aux irréductibles annoncées, dont nous connaissons les caractères.

Commençons maintenant à prouver le théorème 4.1. Soit $A = \mathbb{C}S_d$ l'algèbre de groupe, λ une partition de d et T le tableau de Young correspondant. Afin de simplifier les notations, soit $P = P_\lambda$, $Q = Q_\lambda$, $a = a_\lambda$, $b = b_\lambda$ et $c = c_\lambda = a \cdot b$.

Notons de plus que $P \cap Q = \{1\}$ et donc, si on peut écrire $g \in S_d$ comme $g = pq$, où $p \in P$ et $q \in Q$, alors cette décomposition est unique. En effet, si $pq = p'q'$, alors $p'^{-1}p = q'q^{-1} = 1$ et donc $p = p'$ et $q = q'$. Il en découle que nous pouvons écrire

$$c = \sum_{g=pq} \text{sign}(q)e_{pq}.$$

- Lemme 4.2.** (i) Si $p \in P$, alors $p \cdot a = a \cdot p = p$.
(ii) Si $q \in Q$, alors $(\text{sign}(q)q) \cdot b = b \cdot (\text{sign}(q)q) = b$.
(iii) Pour tout $p \in P$, $q \in Q$, $p \cdot c \cdot (\text{sign}(q)q) = c$, et à multiplication par un scalaire près, c est le seul élément de A vérifiant cette relation.

Démonstration. (i) Cette relation est évidente par la définition même de a .
(ii) Évident, vu la définition de b .

(iii) La première partie est évidente par (i) et (ii).

Afin d'établir la seconde, considérons un élément $c' = \sum_g n_g e_g \in A$. Pour que c' vérifie la même relation que c , il faut que

$$pc' \operatorname{sign}(q)q = \operatorname{sign}(q) \sum_g n_g e_{pgq} = \sum_g n_{pgq} e_{pgq} = c',$$

où, pour simplifier les notations, nous avons omis le point désignant l'action du groupe sur son algèbre, donc il faut que $n_{pgq} = \operatorname{sign}(q)n_g$, et en particulier que $n_{pq} = \operatorname{sign}(q)n_1$. Étant donné que $c = \sum_{g=pq} \operatorname{sign}(q)e_{pq}$, c' est un multiple de c , si $n_g = 0$, pour tout $g \notin PQ$. En effet, si tel est le cas, on a que $c' = n_1 c$. Pour montrer que $n_g = 0$ si $g \notin PQ$, il suffit de montrer qu'il existe une transposition t telle que $p := t \in P$ et $q := g^{-1}tg \in Q$. En effet, alors $g = pgq$ et $n_g = n_{pgq} = \operatorname{sign}(q)n_g = \operatorname{sign}(t)n_g = -n_g$ et donc $n_g = 0$.

Soient $g \notin PQ$ et $T' := gT$ le tableau obtenu en remplaçant les entrées m du tableau T considéré, voir ci-dessus, par $g(m)$. L'idée de la preuve est qu'on peut trouver deux entiers distincts i et j qui se trouvent dans la même ligne dans T et dans la même colonne dans T' . Dans ce cas t est la transposition de ces deux entiers i et j . De fait, on a alors $p := t \in P$; d'autre part, $gT = T'$ contient $g(k) = i$ et $g(\ell) = j$ sur la même colonne, tgT est le même tableau, sauf que $g(k)$ et $g(\ell)$ sont échangés, et finalement $g^{-1}tgT$ est le même tableau, mais contenant les m au lieu des $g(m)$, c'est-à-dire c'est T avec k et ℓ échangés sur la colonne en question. Il s'ensuit que $q := g^{-1}tg \in Q$.

Pour finir cette démonstration, il reste à montrer que si les entiers i et j n'existaient pas, alors on pourrait trouver $p \in P$ et $q \in Q$, tels que $g = pq$. La preuve consiste à ramener les tableaux T et T' à un même tableau, en échangeant seulement des éléments sur une même ligne de T et en échangeant seulement des éléments dans une même colonne de T' . En faisant cela ligne par ligne et colonne par colonne, on arrive finalement à un même tableau $pT = q'T'$, avec $p \in P$ et $q' \in gQg^{-1}$ (noter que l'appartenance à Q concerne la préservation des colonnes de T et non de celles de T' ; pour illustrer la procédure décrite, nous donnerons un exemple ci-dessous). Expliquons à présent que $pT = q'T'$ implique vraiment que $g = pq$. En effet, $pT = q'T' = q'gT$ nous donne $p = q'g$ et si nous définissons $q = g^{-1}q'^{-1}g \in Q$, nous avons que $pq = q'gg^{-1}q'^{-1}g = g$ avec $p \in P$ et $q \in Q$. □

Exemple 4.6. – Soient $d = 10$,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & 9 & & \\ \hline 10 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad gT = T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 6 & 4 & \\ \hline 10 & 8 & & \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array},$$

tels qu'il n'existe pas d'entiers i et j se trouvant sur une même ligne de T et aussi sur une même colonne de T' . En permutant des éléments dans les lignes de T et les colonnes de T' , on obtient

$$pT = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 9 & 8 & & \\ \hline 10 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad q'T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 9 & 8 & & \\ \hline 10 & & & \\ \hline \end{array}$$

avec $p \in P$ et $q' \in gQg^{-1}$.

– Si, par contre

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & 9 & & \\ \hline 10 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad gT = T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 & 9 & \\ \hline 8 & 7 & & \\ \hline 10 & & & \\ \hline \end{array},$$

il existe des entiers $i = 5$ et $j = 7$ se trouvant sur une même ligne de T et aussi sur une même colonne de T' . En permutant seulement des éléments dans les lignes de T et les colonnes de T' , on ne peut pas arriver à un même tableau. Cet exemple montre que l'hypothèse relative à i et j est vraiment nécessaire.

Notons par $\lambda > \mu$ l'ordre lexicographique des partitions.

Lemme 4.3. (i) Si $\lambda > \mu$, alors $a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0$, quel que soit $x \in A$. En particulier, si $\lambda > \mu$, alors $c_\lambda \cdot c_\mu = 0$.

(ii) Quel que soit $x \in A$, $c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$ est un multiple scalaire de c_λ . En particulier, $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$, $n_\lambda \in \mathbb{C}^*$.

La démonstration s'inscrit dans le prolongement de celle du lemme 4.2 et ne sera pas donnée ici.

Comme préalablement, nous omettrons dans la suite souvent le point dénotant la multiplication dans l'algèbre de groupe.

Lemme 4.4. (i) Pour chaque partition λ de d , $V_\lambda = A \cdot c_\lambda$ est une représentation irréductible de S_d .

(ii) Si $\lambda \neq \mu$, alors V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. (i) Notons que par le lemme 4.3, $c_\lambda V_\lambda = c_\lambda A c_\lambda \subset \mathbb{C} c_\lambda$ et que $V_\lambda \neq 0$, comme

$$V_\lambda \ni e_1 c_\lambda = \sum_{pq} \text{sign}(q) e_{pq} \neq 0.$$

Observons aussi que la dernière conclusion implique que $c_\lambda V_\lambda \neq 0$ et que $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C} c_\lambda$. De fait, si $c_\lambda V_\lambda = 0$, on a $V_\lambda V_\lambda \subset A c_\lambda V_\lambda = 0$, c'est-à-dire $V_\lambda V_\lambda = 0$. Remarquons à présent que

$$\frac{1}{n_\lambda} c_\lambda \cdot \frac{1}{n_\lambda} c_\lambda = \frac{1}{n_\lambda} c_\lambda,$$

si bien que le multiple nilpotent $\varphi = n_\lambda^{-1} c_\lambda$ de c_λ définit par multiplication à droite une projection surjective de A sur V_λ . Or, $\varphi = e_1 \varphi \in A \varphi = V_\lambda$ et $\varphi = \varphi^2 \in V_\lambda V_\lambda = 0$, de sorte que $V_\lambda = A \varphi = 0$, ce qui est absurde.

Montrons maintenant que V_λ est irréductible. Soit donc W une sous-représentation de V_λ . Alors $c_\lambda W \subset c_\lambda V_\lambda \subset \mathbb{C} c_\lambda$ et comme $\mathbb{C} c_\lambda$ est un espace vectoriel de dimension un, il faut que $c_\lambda W = \mathbb{C} c_\lambda$ ou $c_\lambda W = 0$.

Dans le premier cas, $\mathbb{C} c_\lambda = c_\lambda W \subset W$, étant donné que l'algèbre de groupe A agit sur W . Il s'ensuit que $c_\lambda \in W$, que $V_\lambda = A c_\lambda \subset W$ et donc que $W = V_\lambda$.

Dans le deuxième cas, $c_\lambda W = 0$, et, en procédant comme ci-dessus dans le cas de V_λ , on montre qu'il en résulte que $W = 0$.

Finalement, V_λ est bien irréductible.

(ii) Supposons que $\lambda > \mu$. Comme $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0$, voir ci-dessus, et $c_\lambda V_\mu = c_\lambda A c_\mu = 0$ par le lemme 4.3, V_λ et V_μ ne peuvent pas être isomorphes en tant que représentations. \square

Ceci termine aussi la démonstration du théorème 4.1. Donnons encore un lemme qui relie n_λ et $\dim V_\lambda$.

Lemme 4.5. *Pour toute partition λ de d , $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$, avec $n_\lambda = \frac{d!}{\dim V_\lambda}$.*

Démonstration. Soit F la multiplication à droite par c_λ sur A . Notons que $\text{im} F$ et $\text{ker} F$ sont des sous-espaces vectoriels de A et que $\dim A = \dim \text{im} F + \dim \text{ker} F$. Or, pour $a \in A$, $F(F(a)) = a \cdot c_\lambda \cdot c_\lambda = a \cdot n_\lambda c_\lambda = n_\lambda F(a)$, de sorte que F est simplement la multiplication par n_λ sur $\text{im} F = V_\lambda$. Sur le noyau $\text{ker} F$, F est évidemment 0. Pour un élément a de l'intersection $\text{ker} F \cap \text{im} F$, on a que $0 = F(a) = n_\lambda a$, ce qui implique, comme $n_\lambda \neq 0$, que $\text{ker} F \cap \text{im} F = \{0\}$. Donc $A = \text{im} F \oplus \text{ker} F$, mais comme $F = 0$ sur le noyau et $F = n_\lambda \text{id}$ sur l'image, $\text{tr} F = \text{tr} F|_{\text{im} F = V_\lambda} + 0 = \text{tr}(n_\lambda \text{id}) = n_\lambda \dim V_\lambda$. D'autre part,

$$F(e_g) = e_g \sum_{pq} \text{sign}(q) e_{pq} = \sum_{pq} \text{sign}(q) e_{g pq}$$

et donc la composante selon e_g de $F(e_g)$ est 1. Ainsi, on a également $\text{tr} F = |G| = |S_d| = d!$ et en comparant les deux résultats, nous obtenons $n_\lambda = \frac{d!}{\dim V_\lambda}$. \square

4.2 Formule des caractères de Frobenius

La formule des caractères de Frobenius nous permet de déterminer le caractère des représentations V_λ construites précédemment.

Une représentation V_λ de S_d est trouvée à partir d'une partition λ de d et du tableau de Young correspondant. Comme nous l'avons remarqué plusieurs fois, les classes de conjugaison de S_d sont aussi données par les partitions de d . Notons une classe de conjugaison ayant i_1 1-cycles, i_2 2-cycles, ... et i_d d -cycles par C_i , avec $i = (i_1, i_2, \dots, i_d)$. Remarquons que $\sum_{j=1}^d j i_j = d$. Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, définissons les polynômes

$$P_j(x) = x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j, \quad j \in \{1, \dots, d\}$$

et le discriminant

$$\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Si $f(x)$ est un polynôme en les k variables x_1, \dots, x_k , désignons par $[f(x)]_{(\ell_1, \dots, \ell_k)}$ le coefficient de $x_1^{\ell_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\ell_k}$ dans $f(x)$. De plus, posons $\ell_1 = \lambda_1 + k - 1$, $\ell_2 = \lambda_2 + k - 2$, ... et $\ell_k = \lambda_k$, c'est-à-dire $\ell_i = \lambda_i + k - i$.

Théorème 4.6 (Formule de Frobenius). *La valeur du caractère χ_λ de la représentation V_λ pour la classe C_i est donnée par*

$$\chi_\lambda(C_i) = \left[\Delta(x) \prod_{j=1}^d P_j(x)^{i_j} \right]_{(\ell_1, \dots, \ell_k)}.$$

La démonstration de cette formule sera donnée plus tard. Appliquons-la maintenant à des exemples afin de prouver partiellement que les diagrammes de Young donnés ci-dessus coïncident avec les irréductibles de $S_1 - S_5$ annoncées.

Exemple 4.7. – Si $d = 3$, $\lambda = (2, 1)$ et $i = (0, 0, 1)$, alors $\ell = (3, 1)$ et

$$\chi_{(2,1)}(C_i) = [(x_1 - x_2)(x_1^3 + x_2^3)]_{(3,1)} = -1.$$

– Si $d = 4$, $\lambda = (3, 1)$ et $i = (2, 1, 0, 0)$, alors $\ell = (4, 1)$ et

$$\chi_{(3,1)}(C_i) = [(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2(x_1^2 + x_2^2)]_{(4,1)} = 1.$$

– Si $d = 5$, $\lambda = (3, 2)$ et $i = (0, 1, 1, 0, 0)$, alors $\ell = (4, 2)$ et

$$\chi_{(3,2)}(C_i) = [(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3)]_{(4,2)} = 1.$$

Utilisons maintenant la formule de Frobenius pour calculer la dimension de la représentation V_λ .

Proposition 4.7. *La dimension de la représentation irréductible V_λ correspondant à une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de d est donnée par*

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\ell_1! \cdot \dots \cdot \ell_k!} \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j), \quad (4.1)$$

où $\ell_i = \lambda_i + k - i$.

Démonstration. La classe de conjugaison de l'identité correspond à la partition $i = (d)$, donc

$$\dim V_\lambda = \chi_\lambda(C_{(d)}) = \left[\Delta(x)(x_1 + \dots + x_k)^d \right]_{(\ell_1, \dots, \ell_k)}.$$

Or, $\Delta(x)$ est le déterminant de Vandermonde

$$\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) = \begin{vmatrix} 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign } \sigma x_k^{\sigma(1)-1} \cdot \dots \cdot x_1^{\sigma(k)-1}.$$

Par la formule du binôme de Newton généralisée, on a aussi que

$$(x_1 + \dots + x_k)^d = \sum_{r_1 + \dots + r_k = d} \frac{d!}{r_1! \cdot \dots \cdot r_k!} x_1^{r_1} \cdot \dots \cdot x_k^{r_k}.$$

Cherchons le coefficient de $x_1^{\ell_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\ell_k}$ du produit des deux derniers résultats. Afin d'obtenir par exemple $x_1^{\ell_1}$, nous devons prendre $r_1 = \ell_1 - \sigma(k) + 1$ et, en procédant de même pour les autres ℓ_i , on trouve finalement le coefficient suivant :

$$\sum \text{sign } \sigma \frac{d!}{\prod_{i=1}^k (\ell_i - \sigma(k - i + 1) + 1)!},$$

où la somme est sur les $\sigma \in S_k$, tels que $\ell_i - \sigma(k - i + 1) + 1 \geq 0$ (\star), pour $1 \leq i \leq k$, et tels que $r_1 + \dots + r_k = d$, c'est-à-dire que $(\ell_1 - \sigma(k) + 1) + \dots + (\ell_k - \sigma(1) + 1) = d$. Mais cette dernière condition est toujours vérifiée. En effet,

$$\begin{aligned} (\ell_1 - \sigma(k) + 1) + \dots + (\ell_k - \sigma(1) + 1) &= \sum_{j=1}^k \ell_j - \frac{k(k+1)}{2} + k \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j + \sum_{j=1}^k k - \sum_{j=1}^k j - \frac{k(k+1)}{2} + k \\ &= d + k^2 - \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} + k = d. \end{aligned}$$

Si nous multiplions et divisons par $\ell_1! \cdot \dots \cdot \ell_k!$, notre somme s'écrit après simplification

$$\frac{d!}{\ell_1! \cdot \dots \cdot \ell_k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign } \sigma \prod_{i=1}^k \ell_i (\ell_i - 1) \cdot \dots \cdot (\ell_i - \sigma(k - i + 1) + 2),$$

où l'on remarquera que si une permutation σ ne vérifie pas la condition (\star), le terme correspondant est nul.

Or, cette nouvelle somme s'écrit de nouveau comme déterminant, à savoir :

$$\frac{d!}{\ell_1! \cdot \dots \cdot \ell_k!} \begin{vmatrix} 1 & \ell_k & \ell_k(\ell_k - 1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ell_1 & \ell_1(\ell_1 - 1) & \dots \end{vmatrix},$$

car le facteur $\ell_i(\ell_i - 1) \cdot \dots \cdot (\ell_i - \sigma(k - i + 1) + 2)$ est une entrée de la i -ième ligne (à partir du bas) du précédent déterminant et que, si i varie de 1 à k , le terme $\sigma(k - i + 1)$ parcourt $\sigma(k) \dots \sigma(1)$, si bien que tous les facteurs appartiennent à des colonnes différentes.

En ajoutant aux colonnes des combinaisons linéaires des autres, ce qui ne change pas le déterminant, nous obtenons à nouveau un déterminant de Vandermonde, à savoir $\prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j)$. D'où finalement le résultat. \square

Il existe encore une autre façon pour déterminer la dimension de V_λ . Pour cela, nous avons besoin de la *longueur du crochet*. Dans un diagramme de Young, la longueur du crochet d'une case est égale au nombre de cases à droite de cette case et en-dessous de cette case, la case elle-même étant à considérer une fois.

Exemple 4.8. Dans ce diagramme, chaque case contient sa longueur de crochet :

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Proposition 4.8 (Formule des longueurs de crochets). *Si h_{ij} désigne la longueur du crochet de la case dans la i -ième ligne et la j -ième colonne, alors*

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod_{ij} h_{ij}}.$$

Donnons d'abord un exemple.

Exemple 4.9. – La dimension de la représentation correspondant au diagramme de Young de l'exemple 4.8 est $8!/(6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) = 70$.

– Considérons encore le diagramme de Young de l'exemple 4.8. Il est facile de voir que les longueurs des crochets de la première colonne sont $h_{i1} = \lambda_i + k - i = \ell_i$. Notons à présent que le produit $\prod_j h_{1j}$ des longueurs des crochets de la première ligne est $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$, alors que $\ell_1! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Les facteurs manquants dans $\prod_j h_{1j}$ sont 2 et 5. On les obtient par $\ell_1 - \ell_2 = 6 - 4 = 2$ et $\ell_1 - \ell_3 = 6 - 1 = 5$, si bien que

$$\prod_j h_{1j} = \frac{\ell_1!}{\prod_{1 < j} (\ell_1 - \ell_j)}.$$

Ceci étant, passons à la preuve de la formule des longueurs de crochets.

Démonstration. Nous devons bien évidemment montrer que

$$\prod_{ij} h_{ij} = \frac{\ell_1! \cdot \dots \cdot \ell_k!}{\prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j)}.$$

Étudions d'abord les longueurs des crochets de la première ligne : $\ell_1 = \lambda_1 + k - 1, \ell_1 - 1 = \lambda_1 + k - 1 - 1, \dots$ jusqu'à la première case de la première ligne au-dessus de laquelle la dernière ligne ne contient plus de case. À ce moment la longueur de crochet devient $\lambda_1 + k - 1 - \lambda_k - 1$, alors que celle de la case précédente était $\lambda_1 + k - 1 - \lambda_k + 1$. L'entier manquant est $\lambda_1 + k - 1 - \lambda_k = \ell_1 - \ell_k$. À la première case de la première ligne au-dessus de laquelle l'avant-dernière ligne est vide, la longueur de crochet passe de $\lambda_1 + k - 1 - \lambda_{k-1}$ à $\lambda_1 + k - 1 - \lambda_{k-1} - 2$, et l'entier manquant étant $\ell_1 - \ell_{k-1}$. Si l'avant-dernière ligne a la même longueur que la dernière, c'est-à-dire si $\lambda_{k-1} = \lambda_k$, le raisonnement reste valable. En continuant de la sorte, on voit que le produit des longueurs des crochets de la première ligne est égal à

$$\frac{\ell_1!}{\prod_{j=2}^k (\ell_1 - \ell_j)}.$$

Enfin, en procédant de même pour les autres lignes, on trouve le résultat désiré. □

Une proposition préliminaire est requise pour la démonstration de la formule de Frobenius.

Proposition 4.9. *Le nombre d'éléments de la classe de conjugaison C_i de S_d , dont les éléments sont formés de i_j j -cycles, $j \in \{1, \dots, d\}$, est donné par*

$$|C_i| = \frac{d!}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \cdot \dots \cdot d^{i_d} i_d!}.$$

Exemple 4.10. Un élément de S_7 appartenant à la classe de conjugaison C_i , avec $i = (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$, est formé de deux 2-cycles et d'un 3-cycle. Cette classe contient par exemple l'élément $(12)(34)(567)$; or, $(12) = (21)$, $(34) = (43)$ et $(567) = (675) = (756)$. Et de plus, nous pouvons échanger l'ordre des cycles de même longueur, c'est-à-dire $(12)(34) = (34)(12)$. Au

total, nous avons donc $7!$ possibilités pour répartir les entiers de 1 à 7 dans $(\dots)(\dots)(\dots)$, mais nous devons diviser par 2^2 et par 3, car, comme nous venons de le mentionner, les cycles sont invariants par permutation circulaire, et nous devons diviser par $2!$, comme nous pouvons échanger l'ordre des cycles de même longueur. Ceci donne finalement $|C_i| = \frac{7!}{2^2 2! 3} = 210$.

Démonstration. Pour écrire un élément de S_d appartenant à la classe de conjugaison C_i , c'est-à-dire une permutation formée de i_1 1-cycles, de i_2 2-cycles, \dots et de i_d d -cycles, nous avons $d!$ possibilités, nombre que nous devons diviser par j^{i_j} , pour tous les j de 1 à d , afin de compenser les permutations circulaires dans les cycles, et nous devons diviser par les $i_j!$, pour compenser l'échange des cycles de même longueur. \square

Comme annoncé, nous donnons finalement la preuve de la formule de Frobenius.

Étant donné une partition λ de d , considérons le sous-groupe H de G , défini par

$$H := S_\lambda := S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k} \subset S_d =: G.$$

Soit U_λ la représentation de S_d induite de la représentation triviale de S_λ . La représentation triviale étant un espace vectoriel complexe de dimension 1, disons \mathbb{C} , la représentation induite est donnée par l'espace vectoriel $U_\lambda = \{\sum_\sigma g_\sigma z_\sigma\}$, où σ parcourt les classes à gauche et z_σ parcourt \mathbb{C} , les notations étant par ailleurs les mêmes que précédemment. L'action de G est donnée par $g \cdot \sum_\sigma g_\sigma z_\sigma = \sum_\sigma (gg_\sigma) z_\sigma = \sum_\sigma g_\tau (hz_\sigma) = \sum_\sigma g_\tau z_\sigma$, avec les notations usuelles, voir section 3.3.

D'autre part, la représentation U_λ coïncide avec la représentation $A \cdot a_\lambda$. En effet, $P = S_\lambda = H$, de manière qu'un élément de $A \cdot a_\lambda$ est donné par $\sum_g z_g e_g \cdot \sum_h e_h = \sum_g \sum_h z_g e_{gh} \simeq \sum_\sigma z_\sigma e_\sigma$, alors que l'action naturelle de G est $g \cdot \sum_\sigma z_\sigma e_\sigma = \sum_\sigma z_\sigma e_{(gg_\sigma)H} = \sum_\sigma z_\sigma e_{g_\tau H} = \sum_\sigma z_\sigma e_\tau$. Donc $U_\lambda \simeq A \cdot a_\lambda$.

Notons aussi que l'irréductible V_λ induite par λ apparaît dans U_λ , car il y a une surjection $U_\lambda = A \cdot a_\lambda \rightarrow V_\lambda = A \cdot a_\lambda \cdot b_\lambda$, de sorte que V_λ est isomorphe à un sous-espace de U_λ , la représentation étant manifestement la même dans les deux cas. Cette observation sera cruciale dans la suite.

Notre premier objectif est de calculer le caractère $\psi_\lambda := \chi_{U_\lambda}$; comme U_λ est la représentation induite par la représentation triviale, nous pouvons utiliser la proposition 3.4 afin d'obtenir

$$\psi_\lambda(C_i) = \frac{|G| |C_i \cap H|}{|H| |C_i|} = \frac{|S_d| |C_i \cap S_\lambda|}{|S_\lambda| |C_i|},$$

où C_i est la classe de conjugaison correspondant à la partition $i = (i_1, \dots, i_d)$, c'est-à-dire les éléments de C_i sont formés de i_q q -cycles.

Pour trouver le nombre d'éléments de l'intersection $C_i \cap S_\lambda$, donnons-nous un élément $\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_k \in S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k} = S_\lambda$. Un $\sigma_p \in S_{\lambda_p}$ se décompose en un produit de cycles, plus précisément en r_{p1} 1-cycles, r_{p2} 2-cycles, \dots et r_{pd} d -cycles. D'autre part, il faut que $\sigma \in C_i$ et donc que σ se décompose en un produit de i_q q -cycles, $q \in \{1, \dots, d\}$. Il faut donc que

$$i_q = r_{1q} + \dots + r_{kq}, \quad 1 \leq q \leq d. \quad (4.2)$$

La condition que $\sigma_p \in S_{\lambda_p}$ implique que

$$\lambda_p = r_{p1} + 2r_{p2} + \dots + dr_{pd}, \quad 1 \leq p \leq k. \quad (4.3)$$

Ceci nous donne

$$\psi_\lambda(C_i) = \frac{d!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!} \frac{1^{i_1} i_1! \cdots d^{i_d} i_d!}{d!} \sum \prod_{p=1}^k \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \cdots d^{r_{pd}} r_{pd}!},$$

où le produit des quotients est le nombre de permutations de $C_i \cap S_\lambda$ dont les facteurs se trouvent dans les classes de conjugaison caractérisées par les (r_{p1}, \dots, r_{pd}) , $p \in \{1, \dots, k\}$, et où la somme est sur tous les k -uplets de classes autorisés, c'est-à-dire est étendue à tous les r_{pq} , vérifiant (4.2) et (4.3). Si nous écrivons le produit des quotients explicitement, il prend la forme

$$\frac{\lambda_1!}{1^{r_{11}} r_{11}! \cdots d^{r_{1d}} r_{1d}!} \frac{\lambda_2!}{1^{r_{21}} r_{21}! \cdots d^{r_{2d}} r_{2d}!} \cdots \frac{\lambda_k!}{1^{r_{k1}} r_{k1}! \cdots d^{r_{kd}} r_{kd}!}$$

et nous pouvons simplifier en utilisant (4.2), afin d'obtenir

$$\psi_\lambda(C_i) = \sum \prod_{q=1}^d \frac{i_q!}{r_{1q}! r_{2q}! \cdots r_{kq}!},$$

où la somme est de nouveau sur les r_{pq} vérifiant (4.2) et (4.3). Cette somme est exactement le coefficient du monôme $x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k}$ dans le polynôme symétrique

$$P^{(i)} = (x_1 + \cdots + x_k)^{i_1} (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{i_2} \cdots (x_1^d + \cdots + x_k^d)^{i_d}.$$

Ceci se voit facilement à partir de la formule du binôme de Newton généralisée :

$$(x_1^q + \cdots + x_k^q)^{i_q} = \sum_{r_{1q} + \cdots + r_{kq} = i_q} \frac{i_q!}{r_{1q}! \cdots r_{kq}!} (x_1^q)^{r_{1q}} \cdots (x_k^q)^{r_{kq}}.$$

Nous avons donc

$$\psi_\lambda(C_i) = [P^{(i)}]_\lambda.$$

Afin de prouver la formule de Frobenius, nous devons montrer que $\chi_\lambda(C_i) = \omega_\lambda(i) := [\Delta P^{(i)}]_\ell$, où $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) = (\lambda_1 + k - 1, \lambda_2 + k - 2, \dots, \lambda_k)$, sachant que $\psi_\lambda(C_i) = [P^{(i)}]_\lambda$.

À cette fin, nous utilisons deux résultats de la théorie des fonctions symétriques ; en particulier, pour tout polynôme symétrique P , on a l'égalité

$$[P]_\lambda = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} [\Delta P]_{(\mu_1+k-1, \mu_2+k-2, \dots, \mu_k)}, \tag{4.4}$$

où les coefficients $K_{\mu\lambda}$ sont des entiers, appelés *nombre de Kostka*. Si λ et μ sont deux partitions de d , ces nombres sont définis comme le nombre de façons dont on peut remplir le diagramme de Young correspondant à μ avec λ_1 fois le nombre 1, λ_2 fois le nombre 2, ... et λ_k fois le nombre k , si l'on désire que le tableau ainsi obtenu soit semi-standard. En particulier, on a que $K_{\lambda\lambda} = 1$ et $K_{\mu\lambda} = 0$, pour $\mu < \lambda$. Expliquons ceci sur un exemple.

Exemple 4.11. Soit $\mu = \lambda$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 4$. Comme il faut mettre 5 fois le nombre 1, tous les 1 doivent se trouver dans la première ligne, et ainsi de suite, afin d'obtenir le tableau suivant, qui est le seul tableau semi-standard possible.

1	1	1	1	1
2	2	2	2	
3	3	3	3	

Si $\mu < \lambda$, avec λ comme précédemment et $\mu = (5, 3, 3, 2)$, on remarque qu'on ne peut plus continuer à remplir le tableau à partir d'un certain moment et il n'y a donc aucune possibilité d'obtenir un tableau semi-standard.

1	1	1	1	1
2	2	2		
2				

Observons encore que si K est la matrice donnée par les nombres de Kostka et \tilde{K} sa transposée, alors \tilde{K} est triangulaire supérieure et $\det \tilde{K} = 1$, ce qui implique que \tilde{K}^{-1} existe et que ses entrées sont dans \mathbb{Z} .

En appliquant l'équation (4.4) à $P = P^{(i)}$, on voit que

$$\psi_\lambda(C_i) = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(i) = \omega_\lambda(i) + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(i). \tag{4.5}$$

Le second résultat annoncé, relatif aux polynômes symétriques, donne (compte tenu de la proposition ci-dessus fournissant le cardinal d'une classe de conjugaison)

$$\frac{1}{d!} \sum_i |C_i| \omega_\lambda(i) \omega_\mu(i) = \delta_{\lambda\mu}.$$

Remarquons que les ω_λ vérifient ainsi des relations d'orthonormalité similaires à celles des caractères des irréductibles.

Nous sommes à présent à mêmes de prouver que les ω_λ sont effectivement égaux aux χ_λ .

Proposition 4.10. *Si $\chi_\lambda = \chi_{V_\lambda}$ est le caractère de V_λ et C_i est une classe de conjugaison de S_d , alors $\chi_\lambda(C_i) = \omega_\lambda(i)$.*

Démonstration. Comme nous l'avons remarqué précédemment, la représentation U_λ de caractère ψ_λ contient l'irréductible V_λ . Ceci implique que

$$U_\lambda = V_\lambda^{\oplus n_{\lambda\lambda}} \oplus \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V_\mu^{\oplus n_{\lambda\mu}} \tag{4.6}$$

et donc que

$$\psi_\lambda = n_{\lambda\lambda} \chi_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} n_{\lambda\mu} \chi_\mu,$$

avec $n_{\lambda\lambda} \geq 1$ et $n_{\lambda\mu} \geq 0$.

En comparant avec (4.5), nous obtenons que

$$\sum_{\mu} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(C_i) = \sum_{\mu} n_{\lambda\mu} \chi_\mu(C_i),$$

ce qui donne le système d'équations $\tilde{K} \omega = N \chi$, c'est-à-dire $\omega = \tilde{K}^{-1} N \chi$, si bien que ω_λ est une combinaison linéaire des χ_μ avec des coefficients dans \mathbb{Z} . Nous pouvons donc écrire

$$\omega_\lambda = \sum_{\mu} m_{\lambda\mu} \chi_\mu, \quad m_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}.$$

Mais par les relations d'orthonormalité que nous avons trouvées, nous avons que

$$1 = (\omega_\lambda, \omega_\lambda) = \sum_{\mu} m_{\lambda\mu}^2.$$

Comme $m_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$, ceci implique que tous les $m_{\lambda\mu}$ sont 0, sauf un $m_{\lambda\nu} = \pm 1$. Donc $\omega_\lambda = \pm \chi_\nu$ pour une certaine partition ν . Afin d'établir la proposition, c'est-à-dire de montrer qu'un χ_λ arbitraire fixé coïncide avec le ω_λ correspondant, supposons que cette égalité soit prouvée pour toutes les partitions $\mu > \lambda$. Notons que cette récurrence démarre, car pour la partition la plus élevée, l'hypothèse à vérifier est vide. En utilisant les égalités ci-dessus, on obtient que

$$\psi_\lambda = \omega_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_\mu = n_{\lambda\lambda} \chi_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} n_{\lambda\mu} \chi_\mu.$$

Les caractères étant linéairement indépendants, on trouve que $\nu = \lambda$, que $n_{\lambda\lambda} = 1$ et que $\omega_\lambda = \chi_\lambda$. □

Ceci termine la preuve de la formule de Frobenius.

Corollaire 4.11 (Règle de Young). *Les nombres de Kostka $K_{\mu\lambda}$ sont les multiplicités des représentations irréductibles V_μ dans la représentation induite U_λ (voir ci-dessus), c'est-à-dire*

$$U_\lambda = V_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} V_\mu^{\oplus K_{\mu\lambda}} \text{ et } \psi_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_\mu.$$

Démonstration. La preuve de la proposition 4.10 donne que les $n_{\lambda\mu}$ sont les $K_{\mu\lambda}$, de manière que le résultat découle de l'équation (4.6). □

Donnons encore quelques exemples pour illustrer ces résultats.

Exemple 4.12. Si $\lambda = (1, \dots, 1)$, $S_\lambda = S_1 \times \dots \times S_1 = \{1\}$ et la représentation triviale coïncide avec la représentation régulière de S_λ ; la représentation U_λ de S_d , induite par la représentation triviale de S_λ , est donc bien la représentation régulière de S_d , par l'exemple 3.1. Et comme chaque irréductible V_μ apparaît $\dim V_\mu$ fois dans la représentation régulière, nous avons $\dim V_\mu = K_{\mu(1, \dots, 1)}$, qui est le nombre de façons dont on sait remplir le diagramme de Young correspondant à μ avec les nombres de 1 à d , chaque nombre intervenant exactement une fois, de manière que le tableau soit semi-standard. Or, ce nombre est égal au nombre de tableaux standards possibles.

Si $\lambda = (d - a, a)$, nous devons trouver le nombre de tableaux semi-standards de forme μ , qui contiennent $d - a$ fois le nombre 1 et a fois le nombre 2. Or, ces tableaux ne peuvent pas avoir plus que deux lignes, car les entrées des colonnes doivent être strictement croissantes, et la deuxième ligne ne peut pas être plus longue que a . Pour un tel tableau donné, on voit facilement qu'il y a seulement une possibilité pour le remplir de manière semi-standard, si bien que les irréductibles V_μ en question apparaissent avec multiplicité 1, ce qui donne $U_{(d-a,a)} = \bigoplus_{i=0}^a V_{(d-i,i)}$.

4.3 La règle de Littlewood-Richardson

Pour finir, nous allons encore énoncer la règle de Littlewood-Richardson et l'appliquer à un dernier exemple. Cette règle indique comment on peut décomposer en irréductibles la représentation de S_{d+m} induite par le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de S_d et S_m respectivement. Sa preuve, basée sur la théorie des fonctions symétriques, ne sera pas donnée ici.

Commençons par définir le produit tensoriel de deux représentations de groupes (éventuellement) différents.

Définition 4.3. Si G_1 et G_2 sont deux groupes, on appelle *produit direct* $G_1 \times G_2$ de G_1 et G_2 , le produit cartésien des ensembles G_1 et G_2 , muni de la multiplication $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$, $g_1, h_1 \in G_1, g_2, h_2 \in G_2$.

Définition 4.4. Si V_1 et V_2 désignent des représentations de deux groupes G_1 et G_2 , le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$, muni de l'action du produit direct $G_1 \times G_2$, définie par

$$(g_1, g_2) \cdot (v_1 \otimes v_2) = (g_1 \cdot v_1) \otimes (g_2 \cdot v_2), \quad g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2,$$

est appelé *produit tensoriel extérieur* et il est noté $V_1 \boxtimes V_2$.

Définition 4.5. Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition de d et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ une partition de m .

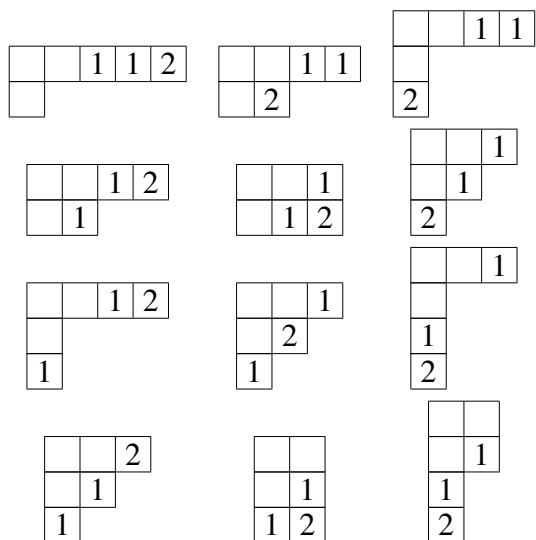
- (i) Une μ -extension du diagramme de Young correspondant à λ est le tableau obtenu en ajoutant au diagramme μ_1 cases contenant le nombre 1, de telle manière qu'il n'y ait pas deux ou plusieurs de ces 1-cases dans une même colonne et que les longueurs des lignes résultantes successives soient décroissantes ; puis on ajoute, de la même façon, μ_2 cases contenant le nombre 2, et ainsi de suite, pour ajouter finalement μ_k cases contenant le nombre k .
- (ii) Une μ -extension est appelée *stricte*, si pour les t ($1 \leq t \leq \mu_1 + \dots + \mu_k$) premières entrées de la liste obtenue en prenant les cases, ajoutées par la μ -extension, de la droite vers la gauche et du haut vers le bas, chaque entier p ($1 \leq p \leq k-1$) apparaît au moins autant de fois que l'entier suivant $p+1$. Autrement dit, en avançant de la droite vers la gauche et du haut vers le bas, le nombre de $(p+1)$ -cases n'est jamais supérieur au nombre de p -cases.

Théorème 4.12 (Règle de Littlewood-Richardson). *Soient deux représentations irréductibles V_λ de S_d et V_μ de S_m . La représentation $V_\lambda \boxtimes V_\mu$ de $S_d \times S_m \subset S_{d+m}$ induit une représentation de S_{d+m} , dont la décomposition en somme directe d'irréductibles est donnée par*

$$\text{Ind}_{S_d \times S_m}^{S_{d+m}} (V_\lambda \boxtimes V_\mu) = \bigoplus_{\nu} V_{\nu}^{\oplus N_{\lambda\mu\nu}},$$

où la somme est sur les partitions $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ de $d+m$ et où les coefficients $N_{\lambda\mu\nu}$ sont le nombre de façons d'étendre le diagramme de Young de λ au diagramme de Young de ν par une μ -extension stricte.

Exemple 4.13. Si $\lambda = \mu = (2, 1)$, déterminons la décomposition en irréductibles de $\text{Ind}_{S_3 \times S_3}^{S_6} (V_\lambda \boxtimes V_\lambda)$. Le diagramme de Young correspondant à V_λ est $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ et ses $(2, 1)$ -extensions sont :



Les 1^{re}, 4^e, 7^e et 10^e extensions ne sont pas strictes et sont donc à rejeter. Remarquons que la 6^e et la 8^e extensions donnent le même diagramme et l'irréductible correspondante est donc de multiplicité 2. Ceci conduit finalement au résultat

$$\text{Ind}_{S_3 \times S_3}^{S_6} (V_{(2,1)} \boxtimes V_{(2,1)}) = V_{(4,2)} \oplus V_{(4,1,1)} \oplus V_{(3,3)} \oplus V_{(3,2,1)}^{\oplus 2} \oplus V_{(3,1,1,1)} \oplus V_{(2,2,2)} \oplus V_{(2,2,1,1)}.$$

Bibliographie

- [Ful97] Fulton W., *Young Tableaux*, London Mathematical Society, Student Texts 35, Cambridge University Press (1997)
- [FH04] Fulton W., Harris J., *Representation Theory – A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics 129, Springer Verlag (2004)
- [JK81] James G., Kerber A., *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications 16, Addison-Wesley (1981)
- [JL01] James G., Liebeck M., *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press (2001)
- [Sag00] Sagan B., *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Graduate Texts in Mathematics 203, Springer Verlag (2000)