# Quantification par Déformation

Norbert PONCIN [1]

**Résumé :** Les objectifs de ce papier sont une présentation élémentaire de la quantification par déformation et l'exposé de la preuve selon Neroslavsky et Vlassov de l'existence de star-produits sur les variétés symplectiques. Leur méthode – bien que basée sur l'hypothèse considérable de la nullité du troisième espace de la cohomologie de de Rham – est représentative des difficultés rencontrées et des techniques utilisées dans le travail de De Wilde relatif aux déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique (voir [3]). Le présent article contient essentiellement le texte d'une conférence faite en 1999 au Centre Universitaire de Luxembourg devant un public non spécialisé.

**Abstract:** The objective of this paper is to provide an elementary introduction to deformation quantization and to explain the proof of existence of star-products on symplectic manifolds given by Neroslavsky and Vlassov. Their approach – based on the considerable assumption that the third de Rham cohomology space vanishes – is nevertheless characteristic of the impediments encountered and the techniques applied in the work of De Wilde concerning deformations of the algebra of functions of a symplectic manifold (see [3]). The present article basically includes the text of a talk given in 1999 at the Centre Universitaire de Luxembourg to a non-expert audience.

## Introduction

La quantification par déformation a été inaugurée vers 1975 par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans un article fondateur paru aux « Annals of Physics » (voir [1]). Selon Flato la physique progresse pas à pas : lorsqu'elle rencontre un paradoxe, elle passe d'un niveau au suivant grâce à une déformation appropriée. Ainsi, la quantification par déformation n'est au début autre chose qu'un procédé de passage de la mécanique classique à la mécanique quantique. De nos jours, il s'agit d'un outil de travail nouveau et performant trouvant un nombre croissant d'applications dans beaucoup de domaines des mathématiques et de la physique. Ses succès récents permettent d'augurer qu'elle dévoilera bon nombre de liens étroits entre des sujets apparemment divergents des mathématiques et de la physique théorique.

## 1 Déformations

La théorie des déformations est issue du problème de la classification des structures complexes non isomorphes sur une variété différentielle réelle.

Nous ne parlerons ici que de déformations d'algèbres et même de déformations formelles d'algèbres associatives ou de Lie.

[1] Centre Universitaire de Luxembourg, Séminaire de mathématique URMPA, 162A, avenue de la Faïencerie, L-1511 Luxembourg, e-mail : poncin@cu.lu

En gros, une déformation d'une algèbre associative $A=(E,m)$ – où $E$ est un espace vectoriel réel ou complexe de dimension quelconque et $m$ un produit associatif sur $E$ – est une famille d'algèbres associatives $A_\nu=(E_\nu,m_\nu)$ dépendant d'un paramètre $\nu$ et dont l'élément $\nu=0$ est $A=(E,m)$.

De manière plus précise, désignons par $E_\nu$ l'espace $E[[\nu]]$ des séries de puissances formelles

$$x_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k x_k \tag{1.1}$$

en $\nu$ à coefficients $x_k$ dans $E$. L'égalité (1.1) n'est autre chose qu'une notation suggestive pour la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$. Toute série formelle en $\nu$ à coefficients dans $E_\nu$ s'identifie à un élément de $E_\nu$, toute application multilinéaire $S:E\times...\times E\to E$ s'étend en une application multilinéaire $S:E_\nu\times...\times E_\nu\to E_\nu$ et toute série formelle

$$S_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k S_k$$

à coefficients multilinéaires de $E\times...\times E$ dans $E$ peut être considérée comme application multilinéaire de $E_\nu\times...\times E_\nu$ dans $E_\nu$.

Ceci étant, il est naturel d'appeler déformation formelle de l'algèbre associative $A=(E,m)$, la famille d'algèbres associatives $A_\nu=(E_\nu,m_\nu)$, où $E_\nu=E[[\nu]]$ et où

$$m_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k m_k \tag{1.2}$$

est une série à coefficients bilinéaires de $E\times E$ dans $E$, qui est associative dans $E_\nu$ et dont le coefficient $m_0$ est égal à $m$.

Deux déformations formelles $A_\nu=(E_\nu,m_\nu)$ et $A_\nu'=(E_\nu,m_\nu')$ de $A=(E,m)$ (on parle encore de deux déformations formelles $m_\nu$ et $m_\nu'$ de $m$) dont les éléments correspondants sont isomorphes, sont dites équivalentes. De façon plus détaillée, elles sont équivalentes, s'il existe une série

$$T_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}\nu^k T_k$$

à coefficients linéaires de $E$ dans $E$ dont le coefficient $T_0$ est l'identité de $E$ (une telle série est toujours un automorphisme de $E_\nu$) et qui vérifie

$$T_\nu^{*}m_\nu:=T_\nu^{-1}[m_\nu(T_\nu.,T_\nu.)]=m_\nu'.$$

Si $m_\nu$ est une déformation de *m*, il en est de même de $T_\nu^* m_\nu$. En particulier, $T_\nu^* m$ est une déformation de *m*, dite triviale, car équivalente à *m*. Une algèbre associative sans déformation formelle non-triviale est dite formellement rigide.

On peut définir de manière analogue la notion de déformation formelle d'une algèbre de Lie.

## 2 Quantification

Le passage d'un modèle hamiltonien de mécanique classique à un modèle de mécanique quantique change complètement la nature des observables. Fonctions de l'espace des phases, elles sont transformées en des opérateurs sur un espace de Hilbert. Au crochet de Poisson {.,.} des fonctions se substitue le commutateur [.,.] des opérateurs. Les équations décrivant l'évolution du système mécanique et des observables sont remplacées par l'équation de Schrödinger resp. l'équation de Heisenberg.

L'opération inverse de la quantification, la limite semi-classique, consiste (en gros) à faire tendre la constante de Planck *h* vers 0 dans les formules de mécanique quantique, de manière à récupérer leur interprétation classique. La mécanique classique apparaît alors comme limite de la mécanique quantique lorsque *h* tend vers 0, tout comme elle apparaît comme limite de la mécanique relativiste lorsque la célérité *c* de la lumière tend vers $\infty$.

Un exemple bien connu de quantification est celui donné par les règles de Heisenberg :

$$\begin{gathered} N := C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)) \\ p_\alpha \to \hat{p}_\alpha = -ih\frac{\partial}{\partial q_\alpha} \\ q_\alpha \to \hat{q}_\alpha = q_\alpha id \\ 1 \to \hat{1} = id\ , \end{gathered} \tag{2.1}$$

où $\mathbb{R}^n$ est l'espace de configuration de coordonnées $(q_1,...,q_n)$ et $\mathbb{R}^{2n}$ l'espace des phases de coordonnées $(p_1,..., p_n, q_1,...,q_n)$. Ces règles impliquent le principe d'incertitude et la relation de Dirac

$$[\hat{f},\hat{g}] = ih\{f,g\}^\wedge . \tag{2.2}$$

Cependant, la tentative d'extension de la quantification à toutes les fonctions de $\mathbb{R}^{2n}$ ou au moins à tous les polynômes, échoue. Le théorème de Van Hove (1952) stipule en effet qu'il n'existe pas d'application $\wedge : f \in Pol(\mathbb{R}^{2n}) \to \hat{f} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ vérifiant (2.1) et (2.2).

Désirant conserver les règles de Heisenberg, on ne peut affaiblir que la relation de Dirac et exiger que

$$[\hat{f},\hat{g}] = ih\{f,g\}^\wedge + h\varepsilon(h), \tag{2.3}$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 avec *h*. La quantification de Weyl satisfait à cette double exigence. Partant de la règle de Heisenberg, elle quantifie tout monôme par le produit symétrisé des opérateurs $\hat{p}_\alpha$ et $\hat{q}_\alpha$ correspondants. En outre, on peut voir que cette quantification – on la notera désormais *W* – n'est pas un homomorphisme des observables classiques vers les observables quantiques i.e. qu'en général $W(f.g) \neq W(f) \circ W(g)$. De manière plus précise, on montre que $W(f) \circ W(g)$ $= W(f * g)$, où $f * g$ désigne le produit de Moyal-Vey de *f* et de *g*. Il suffit ici de rappeler la structure de ce produit :

$$f * g = f.g + \nu\{f, g\} + \sum_{k\geq 2} \nu^k c_k(f, g),$$

où $\nu = ih/2$ et où les $c_k$ sont des opérateurs bidifférentiels sur *N*, nuls sur les constantes et vérifiant $c_k(g, f) = (-1)^k c_k(f, g)$. On voit facilement que

$$[W(f), W(g)] = W(f * g - g * f) = ihW(\{f, g\}) - \frac{ih^3}{4} W(c_3(f, g)) + \frac{ih^5}{16} W(c_5(f, g)) - \ldots,$$

de sorte que (2.3) est bien satisfait. De plus, le produit $*$ de Moyal est une déformation formelle de l'algèbre associative (*N*,**.**) (où **.** désigne le produit ordinaire des fonctions) et fournit par anti-symétrisation une déformation formelle [.,.] de l'algèbre de Lie (*N*,{.,.}).

## 3 Quantification par déformation

Vers 1975, F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer (voir [1]) lancent l'idée d'abandonner la représentation des observables classiques par des opérateurs et de construire un modèle de la mécanique quantique en déformant la structure algébrique de l'espace *N* de ces observables. Essentiellement, il s'agit de construire sur toute variété symplectique ou de Poisson un $*$- produit analogue à celui de Moyal. Ceci permet de munir l'espace $N_\nu$ des séries formelles en $\nu$ à coefficients dans les fonctions, d'une structure $*_\nu$ d'algèbre associative (non commutative) et d'une structure $[.,.]_\nu$ d'algèbre de Lie. Ces algèbres sont des déformations formelles de (*N*,**.**) et de (*N*,{.,.}) respectivement. C'est la quantification par déformation : la mécanique quantique apparaît comme une déformation de la mécanique classique, liée à la prise en compte du nouveau paramètre $\nu$ ; il s'agit d'une déformation du commutatif vers le non-commutatif, la trace de la non-commutativité au niveau classique étant le crochet de Poisson.

Les résultats obtenus à l'aide du nouveau formalisme sont physiquement significatifs. La théorie des déformations s'est développée dans un milieu relativement spécialisé d'abord, puis a conquis l'intérêt d'un grand nombre de mathématiciens et physiciens.

L'étude des déformations et plus particulièrement des $*$-produits est d'abord celle de leur existence et de leur classification. Le cas des variétés symplectiques a été entièrement résolu par M. De Wilde et P.B.A. Lecomte en 1983 (voir [2]). En 1991, H. Omori, Y. Maeda et A. Yoshioka traitent les variétés de Weyl (voir [10]), alors qu'en 1994, B. Fedosov présente une construction explicite d'un $*$-produit (voir [5]). Le cas des variétés de Poisson quelconques n'a pu être réglé qu'en 1997 par M. Kontsevich (voir [6]), succès honoré par une médaille Fields, la plus haute décoration en mathématiques.

La preuve de Kontsevich et ses papiers ultérieurs ne constituent que le début d'une grande variété de développements. La quantification par déformation est un nouvel et puissant outil qui permettra de réaliser des progrès significatifs dans de nombreuses questions ouvertes en mathématiques et en physique théorique. Les développements récents en quantification par déformation, en particulier la théorie des formalités et le passage de la géométrie différentielle à la géométrie algébrique, doivent avoir une signification très profonde, qu'il s'agit de comprendre et d'exploiter.

## 4 Existence de star-produits sur les variétés symplectiques selon Neroslavsky-Vlassov

### 4.1 Définitions et outils

En vue d'exposer la preuve de l'existence de star-produits sur les variétés symplectiques due à Neroslavsky et Vlassov, nous rappelons quelques faits indispensables.

#### 4.1.1 Eléments de géométrie symplectique

Un espace vectoriel symplectique de dimension $m$ est un espace vectoriel $E$ sur un corps commutatif, disons $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée $\omega \in \wedge^2 E^*$. Le caractère non dégénéré de $\omega$ implique que l'application $\flat$ (bémol)

$$\flat : x \in E \to -i_x\omega \in E^*,$$

où $i_x\omega$ représente le produit intérieur de $\omega$ par $x$, est un isomorphisme entre $E$ et $E^*$ d'inverse noté évidemment # (dièse). La matrice de $\omega$ dans une base de $E$ étant ainsi une matrice $m \times m$ antisymétrique et non singulière, $m$ est nécessairement pair : $m = 2n$.

On appelle variété symplectique toute variété $M$ (de classe $C^\infty$, de dimension $m$, séparée, à base dénombrable et connexe) munie d'une 2-forme différentielle fermée $F \in \Omega^2(M) \cap \ker d$, telle que $F_x$ soit non dégénéré quel que soit $x \in M$. Il s'ensuit que l'on a encore $m = 2n$. La condition $dF = 0$ permet d'écrire $F$ localement sous la forme canonique

$$F = \sum_\alpha dp^\alpha \wedge dq^\alpha,$$

où $(p^1,...,p^n,q^1,...,q^n)$ sont des coordonnées locales de $M$ (théorème de Darboux). Les applications bémol et dièse admettent des extensions canoniques aux fibrés tensoriels. Par exemple,

$$\flat : \mathrm{X} \in Vect(M) \to -i_X F \in \Omega^1(M).$$

Le fibré cotangent muni de la différentielle de la 1-forme de Liouville est un exemple simple de variété symplectique. On définit alors le hamiltonien $H_u$ d'une fonction $u \in N$ par

$$H_u := (du)^{\#}.$$

Pour $M = \mathbb{R}^{2n}$, on retrouve l'expression classique.

Une variété de Poisson est une variété dont l'espace des fonctions est muni d'un crochet de Lie *P* qui soit une dérivation :

$$P(u,vw) = P(u,v)w + vP(u,w),$$

quelles que soient les fonctions $u,v$ et $w$. Si $(M,F)$ est une variété symplectique, nous posons

$$P(u,v) = L_{H_u}v,$$

le second membre étant la dérivée de Lie de *v* par rapport au champ $H_u$. Ainsi,

$$P(u,v) = L_{H_u}v = (dv)(H_u) = -(i_{H_v}F)(H_u) = F(H_u, H_v).$$

Cette multiplication munit *M* d'une structure de Poisson. En effet, l'identité de Jacobi découle immédiatement de $(dF)(H_u, H_v, H_w) = 0$. Toute variété symplectique est donc une variété de Poisson. La réciproque n'est pas valable. Soit *M* une variété symplectique de forme symplectique *F* et de structure de Poisson *P*. On vérifie sans problème que

$$H : u \in N \to H_u \in Vect(M)$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie. En outre, on associe à toute application multilinéaire $c$ de $Vect(M)\times ...\times Vect(M)$ dans *N*, une application multilinéaire $\mu * c$ de $N \times ...\times N$ dans *N*, en posant

$$(\mu * c)(u_1,...,u_p) = c(H_{u_1},...,H_{u_p}).$$

Si *c* est antisymétrique, il en est bien sûr de même de $\mu * c$. En particulier, si $\omega$ est une *p*-forme différentielle de *M*, $\mu * \omega$ est une application *p*-linéaire antisymétrique de $N \times ...\times N$ dans *N*. Notons que

$$\mu * F = P.$$

### 4.1.2 Algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson

Voici deux exemples d'algèbres de Lie graduées particulièrement importants pour l'étude des algèbres associatives et de Lie et pour celle de leurs déformations.

Soit $E$ un espace vectoriel réel ou complexe de dimension arbitraire.

On désigne par $M^p(E)$ $(p \in \mathbb{Z})$ l'espace des applications $(p+1)$- linéaires de $E \times ...\times E$ dans *E* (si $p = -1$, cet espace est conventionnellement pris égal à $E$ et si $p < -1$, c'est 0) et on pose

$$M(E) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} M^p(E).$$

Si $A\in M^a(E)$ et $B\in M^b(E),$ on définit la « composée » $j_B A\in M^{a+b}(E)$ (ce qui justifie le changement de graduation),

(i) si $a\leq -1$ ou $b<-1$, par 0,
(ii) si $a>-1$ et $b\geq -1$, par

$$(j_B A)(x_0,...,x_{a+b})=\frac{(a+b+1)!}{(a+1)!(b+1)!}\sum_{i=0}^{a}(-1)^{ib}A(x_0,...,B(x_i,...,x_{i+b}),...,x_{a+b}),$$

quels que soient $x_0,...,x_{a+b}\in E$. Un calcul direct montre que la multiplication $\Delta : M(E)^2\to M(E)$ définie par

$$A\Delta B=j_B A-(-1)^{ab}j_A B,\ \forall A\in M^a(E),\forall B\in M^b(E),$$

munit $M(E)$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée.

Désignons par $\alpha$ l'opérateur d'antisymétrisation. Posons $A^p(E)=\alpha(M^p(E))$ $(p\in\mathbb{Z})$ ($A^p(E)$ est alors l'espace des applications $(p+1)$-linéaires antisymétriques de $E\times...\times E$ dans *E*, si $p\geq 0$, l'espace *E*, si $p=-1$ et 0, si $p<-1$) et

$$A(E)=\oplus_{p\in\mathbb{Z}}A^p(E).$$

Si $A\in A^a(E)$ et $B\in A^b(E),$ on définit le « produit intérieur » $i_B A$ par

$$i_B A=\alpha(j_B A)\in A^{a+b}(E).$$

Un simple calcul montre encore que la multiplication $[.,.]: A(E)^2\to A(E)$ définie par

$$[A,B]=i_B A-(-1)^{ab}i_A B=\alpha(A\Delta B),\ \forall A\in A^a(E),\forall B\in A^b(E),$$

munit $A(E)$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée. C'est l'algèbre de Nijenhuis-Richardson de *E*.

Les résultats suivants sont évidents et souvent utiles :

(i) $[A,x]=i_x A=A(x,\cdot...\cdot),\ \forall A\in A^a(E),\ \forall x\in A^{-1}(E)=E,$
(ii) $[A,B]=A\Delta B,\ \forall A\in A^0(E),\ \forall B\in A^b(E).$

Voici finalement une propriété surprenante des précédentes multiplications. Si $(E,m)$ est une algèbre [resp. si $(E,P)$ est une algèbre antisymétrique], la multiplication *m* est associative [resp. la multiplication *P* est un crochet de Lie] si et seulement si

$$m\Delta m=0\ \ [\text{resp. } [P,P]=0\,]. \tag{4.1}$$

La preuve est élémentaire. Par exemple,

$$(m\Delta m)(x,y,z)=2(j_m m)(x,y,z)=3(m(m(x,y),z)-m(x,m(y,z)))\,,$$

pour tous les $x,y,z\in E$.

### 4.1.3 Cohomologies de de Rham, de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg

Rappelons qu'un complexe ou espace différentiel est un couple $(E,\partial)$, où $E$ est un espace vectoriel et $\partial$ un opérateur sur $E$ de carré nul, appelé différentielle ou opérateur de cobord. Les éléments de $E$ sont les cochaînes, ceux de $ker\,\partial$ les cocycles et ceux de $im\partial$ les cobords. Vu l'hypothèse $\partial^2=0,$ on a $im\partial\subset ker\,\partial$. L'espace quotient

$$H(E,\partial)=ker\,\partial\,/\,im\partial$$

est l'espace de cohomologie du complexe $(E,\partial)$. Si $E=\oplus_p E_p$ est un espace gradué et si $\partial$ est de poids 1, la restriction $\partial_p$ de $\partial$ à $E_p$ est une application linéaire de $E_p$ dans $E_{p+1}$ vérifiant $\partial_p\partial_{p-1}=0$. On peut ainsi définir le $p$-ième espace de cohomologie

$$H^p(E,\partial)=ker\,\partial_p\,/\,im\partial_{p-1}\,.$$

L'espace $H(E,\partial)$ est alors la somme directe des espaces $H^p(E,\partial)$.

L'exemple le plus simple est donné par le complexe de de Rham $(\Omega(M),d)$ d'une variété différentielle $M$, où $\Omega(M)$ désigne l'espace des formes différentielles de $M$ et où $d$ est la différentielle extérieure. On note $H_{DR}(M)$ l'espace de cohomologie de ce complexe. Il s'agit d'un espace gradué $H_{DR}(M)=\oplus_p H^p_{DR}(M)$ dont tous les termes de degré $p\geq 1$ sont nuls, si $M$ est contractile : ceci signifie évidemment que toute $p$-forme fermée de $M$ est exacte.

Soient une algèbre de Lie graduée $(E,o)$ et un élément $\pi$ de $E^1$ tel que $\pi o\pi=0$. Il résulte immédiatement de l'identité de Jacobi graduée que l'opérateur

$$\partial_\pi : A\in E\to -Ao\pi\in E \tag{4.2}$$

est de carré nul : $(E,\partial_\pi)$ est un espace différentiel.

A toute algèbre associative $(E,m)$ et tout $E$-bimodule $V$ (i.e. tout homomorphisme et tout anti-homomorphisme compatibles de $E$ dans les endomorphismes d'un espace vectoriel $V$), on associe le complexe dont l'espace des cochaînes est l'espace $\mathcal{L}(E,V)$ des applications multilinéaires de $E\times\ldots\times E$ dans $V$ et dont l'opérateur de cobord $\partial$ est défini pour $A\in\mathcal{L}^p(E,V)$ $(p<0)$ par 0 et pour $A\in\mathcal{L}^p(E,V)$ $(p\geq 0)$ par

$$(\partial A)(x_0,...,x_p) = x_0 A(x_1,...,x_p) + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} A(x_0,...,m(x_i,x_{i+1}),...,x_p) + (-1)^{p+1} A(x_0,...,x_{p-1}) x_p ,$$

avec des notations évidentes. La cohomologie de ce complexe est la cohomologie de Hochschild $H(E,V)$ associée à l'algèbre associative $E$ et au $E$-bimodule $V$. Lorsque le bimodule est l'algèbre elle-même, le complexe de Hochschild est du type (4.2). De fait, $(M(E),\Delta)$ est une algèbre de Lie graduée et $m \in M^1(E)$ vérifie $m\Delta m = 0$ (voir (4.1)). On constate facilement que l'espace différentiel $(M(E),\partial_m)$ est le complexe de Hochschild de $E$ et – de façon plus précise – que

$$\partial_m A = -A\Delta m = \frac{a+2}{2} \partial A .$$

De manière analogue, on associe à toute algèbre de Lie $(E,P)$ et toute représentation $\rho$ de $E$ sur un espace vectoriel $V$ (i.e. tout homomorphisme $\rho$ de $E$ dans les endomorphismes de $V$), le complexe dont l'espace des cochaînes est l'espace $\wedge(E,V)$ des applications multilinéaires antisymétriques de $E \times ... \times E$ dans $V$ et dont la différentielle est définie pour $A \in \wedge^p(E,V)$ $(p < 0)$ par 0 et pour $A \in \wedge^p(E,V)$ $(p \geq 0)$ par

$$(\partial_\rho A)(x_0,...,x_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \rho(x_i) A(x_0,...\hat{i}...,x_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} A(P(x_i,x_j),x_0,...\hat{i}...\hat{j}...,x_p) ,$$

où $\hat{k}$ signifie que $x_k$ est omis. Cet espace différentiel est le complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $E$ associé à la représentation $(V,\rho)$ ; nous notons encore $H(E,V)$ sa cohomologie. Le complexe de Chevalley est du type (4.2), si la représentation est la représentation adjointe $(E,ad)$. En effet, si $(A(E),[.,.])$ est l'algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson de $E$, $P \in A^1(E)$ et $[P,P] = 0$ (voir (4.1)). Il est aisé de se convaincre que le complexe $(A(E),\partial_P)$ est exactement le complexe adjoint de Chevalley de $E$.

Soient $M$ une variété différentielle, $m$ le produit ordinaire et $(N,m)$ l'algèbre associative des fonctions de $M$. Il est peu utile de déterminer la cohomologie de Hochschild de $N$, sans imposer des restrictions raisonnables aux cochaînes. Du point de vue de la géométrie différentielle, il est en fait naturel de se limiter aux cochaînes locales. Le cobord de Hochschild stabilisant le sous-espace $M(N)_{loc}$ des cochaînes locales, il apparaît un sous-complexe dont la cohomologie est la cohomologie de Hochschild locale des fonctions de $M$.

Supposons à présent la variété $M$ symplectique de forme $F$ et de crochet de Poisson $P$. On montre que les cocycles de Hochschild sont exactement les $A \in M(N)_{loc}$ de la forme

$$A = \mu * \lambda + B\Delta m \quad (\lambda \in \Omega(M), B \in M(N)_{loc}) .$$

En particulier, $A$ est bord si et seulement si sa partie antisymétrique est nulle. En outre, les opérateurs de cobord de Chevalley et de de Rham sont liés par la relation

$$-[\mu^*\lambda, P] = \mu^* d\lambda,$$

quelle que soit la forme différentielle $\lambda$. C'est évident, vu les rappels ; il suffit d'ailleurs de penser aux définitions des cobords considérés. Finalement, le produit $\mu^*\lambda \Delta P$ et sa partie antisymétrique $[\mu^*\lambda, P]$ diffèrent par un bord de Hochschild. Il suffit évidemment de prouver que $\mu^*\lambda \Delta P$ est un cocycle de Hochschild. Or, si $\lambda$ est de degré *p*, l'identité de Jacobi graduée donne

$$(-1)^{p-1}(\mu^*\lambda \Delta P)\Delta m + (-1)^{p-1}(P\Delta m)\Delta \mu^*\lambda - (m\Delta \mu^*\lambda)\Delta P = 0,$$

de sorte que $\mu^*\lambda \Delta P$ est bien cocycle, car $P = \mu^* F$ et $\mu^*\lambda$ le sont.

### 4.2 Preuve élémentaire de l'existence de star-produits sur les variétés symplectiques

Soit une variété différentielle *M* séparée, à base dénombrable et connexe. Nous la supposons symplectique (de forme symplectique *F* et de crochet de Poisson *P*) et de troisième espace de cohomologie de de Rham nul.

Nous démontrerons l'existence sur *M* d'un produit analogue au produit $*$ de Moyal sur $\mathbb{R}^{2n}$ i.e. d'un produit associatif, série formelle

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k c_k$$

en $\nu$ à coefficients $c_k \in M^1(N)_{loc}$ tels que $c_0 = m$ et $c_1 = P$.

La construction se fera de proche en proche. Signalons d'abord qu'un polynôme

$$M_\nu^r = \sum_{k=0}^{r} \nu^k c_k$$

sera dit associatif à l'ordre *r* si et seulement si

$$J_\nu^r = M_\nu^r \Delta M_\nu^r = \sum_{k=0}^{r}\sum_{m=0}^{r} \nu^{k+m} c_k \Delta c_m = \sum_i \nu^i \sum_{\substack{k+m=i \\ 0\le k,m\le r}} c_k \Delta c_m$$

a ses coefficients

$$J_i^r = \sum_{\substack{k+m=i \\ 0\le k,m\le r}} c_k \Delta c_m$$

nuls jusqu'à l'ordre *r* i.e. pour $i = 0,\ldots,r$. On se propose de prouver que si l'on dispose d'un produit $M_\nu^r$ à coefficients dans $M^1(N)_{loc}$ avec $c_0 = m$ et $c_1 = P$ qui est associatif à l'ordre *r*, il existe des coefficients $A, B \in M^1(N)_{loc}$ tels que

$$M_\nu^{r+1} = M_\nu^r + \nu^r A + \nu^{r+1} B$$

soit associatif à l'ordre $r+1$.

Cette récurrence commence en $r=1$, car $M_\nu^1 = m+\nu P$ est bien associatif à l'ordre 1 :

$$J_0^1 = m\Delta m = 0 \quad \text{et} \quad J_1^1 = 2P\Delta m = 2\mu^* F\Delta m = 0.$$

Il convient cependant de noter que la récurrence fournit alors *A* et *B* tels

$$M_\nu^2 = m + \nu(P+A) + \nu^2 B$$

est associatif à l'ordre 2 et qu'il importe donc de vérifier que cet *A* est nul.

Passons à la preuve de la récurrence. Les coefficients *A* et *B* sont à chercher de manière que

$$J_i^{r+1} = 0$$

pour $i = 0,...,r+1$. Si $i<r$, on a $J_i^{r+1} = J_i^r = 0$. Si $i=r$ et si $i=r+1$, on obtient

$$J_r^{r+1} = J_r^r + 2A\Delta m = 2A\Delta m$$

et

$$J_{r+1}^{r+1} = J_{r+1}^r + 2A\Delta P + 2B\Delta m. \qquad (4.3)$$

On remarquera que pour $r=1$ le second membre de (4.3) contient le terme supplémentaire $A\Delta A$. Il s'agit donc de trouver *A* et *B* annulant (4.3), *A* 1-cocycle de Hochschild. L'identité

$$(M_\nu^r \Delta M_\nu^r)\Delta M_\nu^r = 0$$

contient des informations utiles. En déterminant les coefficients de $\nu^{r+1}$ et $\nu^{r+2}$, on trouve

$$J_{r+1}^r \Delta m = 0 \ \text{ resp. } \ J_{r+1}^r \Delta P + J_{r+2}^r \Delta m = 0, \qquad (4.4)$$

les $J_i^r$ étant nuls jusqu'à l'ordre *r*. Comme le coefficient $J_{r+1}^r$ est ainsi un 2-cocycle de Hochschild, il s'écrit

$$J_{r+1}^r = \mu^*\lambda + T\Delta m \quad (\lambda \in \Omega^3(M), T \in M^1(N)_{loc})$$

et la condition (4.3) prend la forme

$$\mu^*\lambda + 2A\Delta P + (T+2B)\Delta m = 0. \qquad (4.5)$$

Vu la relation susmentionnée entre les bords de Chevalley et de de Rham, l'antisymétrisation de la seconde égalité (4.4) fournit

$$[\alpha J_{r+1}^r, P] = [\mu^*\lambda, P] = -\mu^* d\lambda = 0,$$

si bien que $\lambda$ est une 3-forme fermée. Compte tenu de l'hypothèse fondamentale $H^3_{DR}(M) = 0$, elle est exacte : $\lambda = d\omega \quad (\omega \in \Omega^2(M))$. Finalement,

$$\mu^* \lambda = \mu^* d\omega = -[\mu^* \omega, P] = -\mu^* \omega \Delta P + U \Delta m \quad (U \in M^1(N)_{loc})$$

et la condition (4.5) prend sa forme définitive

$$(-\mu^* \omega + 2A)\Delta P + (T + U + 2B)\Delta m = 0 . \tag{4.6}$$

Si l'on pose

$$A = \frac{1}{2}\mu^* \omega \in M^1(N)_{loc} \quad \text{et} \quad B = -\frac{T+U}{2} \in M^1(N)_{loc} ,$$

la cochaîne $A$ est bien cocycle et (4.6) est satisfait. Dans le cas $r = 1$ enfin, il s'agit de vérifier que $A = 0$ (et de prendre en considération le terme supplémentaire dans (4.3)). Or,

$$\alpha J^1_2 = \alpha(P\Delta P) = [P, P] = 0$$

et (4.5) devient

$$2A\Delta P + (T + 2B)\Delta m + A\Delta A = 0 .$$

Il suffit alors de prendre

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{T}{2} .$$

◆

**4.3 Remarque**

Plusieurs techniques permettent d'établir l'existence de déformations de l'algèbre des fonctions des variétés symplectiques. La méthode de De Wilde (voir [3]) s'inspire aussi bien de la preuve élémentaire de Neroslavsky et Vlassov (voir [8]) que de la première preuve générale de De Wilde et Lecomte (voir [2]). L'approche de Neroslavsky-Vlassov met en lumière notamment le rôle-clef joué par les cohomologies de de Rham, de Hochschild et de Chevalley. Mais d'autres cohomologies apparaissent : ainsi, la cohomologie adjointe de l'algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson de l'espace des fonctions de la variété, revêt une importance considérable (voir [2]). En outre, le résultat de Kontsevich (voir [6]), selon lequel l'algèbre *N* des fonctions des variétés de Poisson est toujours déformable, suggère fortement l'existence, dans cette cohomologie graduée, de classes canoniques «universelles» liées aux déformations de *N* et à leur classification. Ceci justifie les calculs cohomologiques que nous avons développés dans [11] - [16].

**Références**

[1] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., Deformation theory and quantization, *Ann. Phys.* **111** (1978) 61-110 and 111-151

[2] De Wilde M., Lecomte P.B.A., Existence of star-products and formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Lett. Math. Phys.* **7** (1983) 487-496

[3] De Wilde M., Deformations of the algebra of functions of a symplectic manifold: a simple cohomological approach, *preprint Univ. Liège* (1996)
[4] De Wilde M., Lecomte P.B.A., Existence et classification des star-produits sur les variétés symplectiques, conférence, Nice 1996
[5] Fedosov B.V., A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Diff. Geo.* **40, 2** (1994) 213-238
[6] Kontsevich M., Deformation quantization of Poisson manifolds, *preprint IHES* (1997)
[7] Lecomte P.B.A., Existence des star-produits selon B. Fedosov, *preprint Univ. Liège* (1995)
[8] Neroslavsky O.M., Vlassov A.T., Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique, *C.R. Acad. Sci. Paris* **292, 1** (1981) 71-73
[9] Nijenhuis A., Richardson R., Deformation of Lie algebra structures, *J. Math. Mech.* **17** (1967) 89-105
[10] Omori H., Maeda Y., Yoshioka A., Weyl manifolds and deformation quantization, *Adv. in Math.* **85, 2** (1991) 224-255
[11] Poncin N., Premier et deuxième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **67, 6** (1998) 291-337
[12] Poncin N., Troisième espace de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **67, 6** (1998) 339-393
[13] Poncin N., Cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre des opérateurs locaux sur l'espace des fonctions d'une variété, *Publ. Centre Univ. Luxembourg, Trav. Math.* **X** (1998) 103-115
[14] Poncin N., Cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *C.R. Acad. Sci. Paris* **328, I** (1999) 789-794
[15] Poncin N., Premiers espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson de l'espace des fonctions d'une variété, *Bull. Belg. Math. Soc.* **8** (2001) 141-146
[16] Poncin N., On the Cohomology of the Nijenhuis-Richardson Graded Lie Algebra of the Space of Functions of a Manifold, *J. of Alg.* (to appear)
[17] Roger C., Déformations algébriques et applications à la Physique, conférence, Nice 1996
[18] Sternheimer D., Deformation quantization – its genesis and avatars, symposium, Strasbourg 2001