
Centre Universitaire de Luxembourg



**MÉCANIQUE DES SOLIDES
DÉFORMABLES**

(Notes de cours provisoires)

Norbert PONCIN

2000

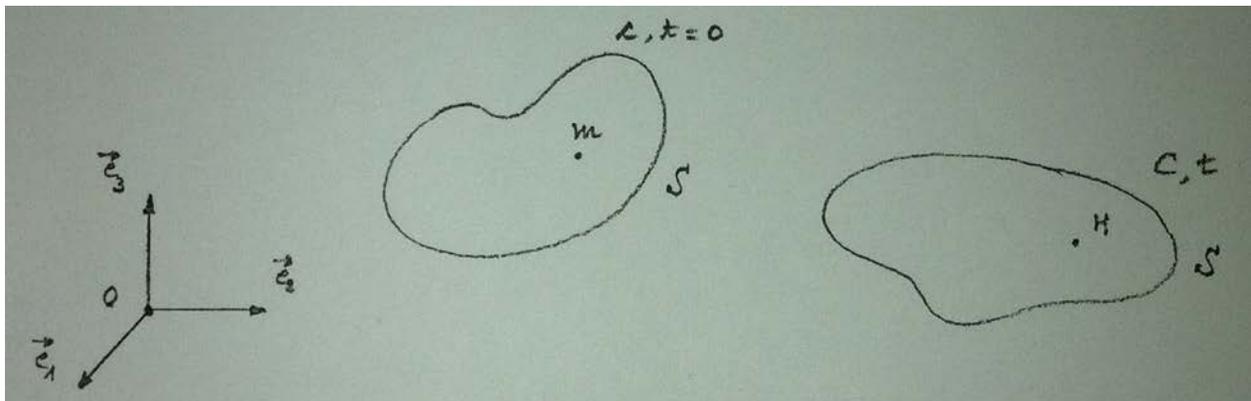
MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES

Les prérequis pour la lecture de ce texte sont des connaissances en calcul tensoriel et en mécanique des fluides (voir cours de Mathématique physique 3 (MP3))

1 Transformation continue finie, application linéaire tangente

Comme en mécanique des fluides (voir MP3), nous nous plaçons à l'échelle macroscopique, de sorte que les solides déformables apparaissent eux aussi comme des *milieux continus*. Les concepts généraux relatifs aux milieux continus sont indépendants de la nature de ce milieu - fluide ou solide déformable: les résultats des premières sections du chapitre consacré à la mécanique des fluides (voir MP3) restent valables pour les solides déformables et inversement, bon nombre de considérations de ce chapitre s'appliquent aux fluides.

Considérons un référentiel \mathcal{R} et un solide déformable \mathcal{S} (ou plus généralement un milieu continu) qui, sous l'action de certaines sollicitations, passe d'une configuration initiale c (configuration à l'instant 0) à une configuration déformée ou actuelle C (configuration à l'instant t). Nous désignons par m et M , les positions d'une même particule p de \mathcal{S} dans c et C . En outre, si $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un système d'axes cartésiens de \mathcal{R} , nous notons $x = (x_1, x_2, x_3, \tilde{t})$ (resp. $X = (X_1, X_2, X_3, \tilde{t})$) les coordonnées de m (resp. M). D'une manière générale, les objets relatifs à la configuration initiale c (resp. actuelle C) sont désignés par des minuscules (resp. majuscules).



Du point de vue mathématique, ce passage de c à C est une transformation supposée biunivoque $M = M(m, t)$ et $m = m(M, t)$ ou de manière équivalente $X = X(x, t)$ et $x = x(X, t)$, transformation également supposée bicontinue et même bi- C^1 ou bi- C^2 par rapport à toutes les variables. On parle d'une *transformation continue finie* (par opposition à "infiniment petite").

Remarquons tout de suite que le jacobien J du changement de variables $X = X(x, t)$ et $x = x(X, t)$ est strictement positif. En effet,

$$J = \det(\partial_{x_j} X_i), \quad (1)$$

où ∂_{x_j} représente la dérivée par rapport à x_j , vaut 1 aux points $(x, 0)$ et, vu sa continuité et sa non-annulation, il reste supérieur à 0 partout.

Soit à présent une telle transformation continue finie $M = M(m)$ i.e. $X = X(x)$. Nous omettrons dans les écritures la variable t . Nous nous proposons de montrer que *quel que soit m , il existe un 2-tenseur non singulier $F(m)$, tel que pour tout m' infiniment proche de m , on ait au premier ordre*

$$\vec{M}M' = F(m) \vec{m}m', \quad (2)$$

où $M' = M(m')$ et $M = M(m)$. Si l'on utilise la notation différentielle $\vec{dM} = \vec{M}M'$ et $\vec{dm} = \vec{m}m'$, cette égalité devient

$$\vec{dM} = F(m) \vec{dm}. \quad (3)$$

Fixons donc un point m arbitraire et considérons un point m' infiniment proche de m . Désignons par M (resp. M') l'image de m (resp. m') dans la transformation et par x (resp. $x + dx$, X , $X + dX$) les coordonnées de m (resp. m' , M , M'). On a alors au premier ordre

$$dX_i = (X + dX)_i - X_i = X_i(x + dx) - X_i(x) = (\partial_{x_j} X_i)(x) dx_j,$$

soit, sous forme matricielle,

$$dX = (\partial_x X)(x) dx, \quad (4)$$

où $\partial_x X$ est évidemment la matrice jacobienne du changement de variables $X = X(x)$. Etant donné m , on dispose donc dans chaque système d'axes cartésiens d'une matrice $(\partial_x X)(x)$ de réels, où $X = X(x)$ représente la transformation continue considérée et où x est le triplet des coordonnées de m dans le système d'axes en question. Ces matrices se transforment conformément à la loi tensorielle d'ordre 2. De fait, si nous nous donnons deux systèmes d'axes cartésiens, si la transformation y est représentée par $X = X(x)$ resp. par $X' = X'(x')$ et si nous désignons les coordonnées de m (resp. M) dans ces deux systèmes par x_m et x'_m (resp. X_M et X'_M), nous avons, avec les notations connues,

$$x_m = Ax'_m + a, \quad X_M = AX'_M + a \quad (5)$$

et donc

$$(\partial_{x_j} X_i)(x_m) = \partial_{x_{m,j}} (X_i(x_m)) = \partial_{x_{m,j}} X_{M,i} = \partial_{x_{m,j}} (A_{ir} X'_{M,r} + a_i) = A_{ir} \partial_{x_{m,j}} (X'_r(x'_m)). \quad (6)$$

Comme il découle de la première des égalités (5) que

$$x'_{m,s} = \tilde{A}_{sk} (x_{m,k} - a_k),$$

(6) devient

$$(\partial_{x_j} X_i)(x_m) = A_{ir} (\partial_{x'_s} X'_r)(x'_m) \tilde{A}_{sk} \delta_{jk} = A_{ir} A_{js} (\partial_{x'_s} X'_r)(x'_m),$$

ce qui est bien la loi tensorielle du second ordre. Les matrices $(\partial_x X)(x)$ définissent donc un 2-tenseur non singulier, dépendant du point m considéré. Nous le noterons $\mathbf{F}(m)$ (ou simplement \mathbf{F} , si aucune confusion n'est à craindre) et nous parlerons du *tenseur jacobien* en m (ou simplement du tenseur jacobien). Les résultats (2) et (3) découlent alors de (4). Vu ces égalités, le tenseur jacobien en m est encore appelé *application linéaire tangente en m à la transformation* considérée.

2 Mesures de déformation

Considérons une barre de longueur initiale ℓ qui subit une extension longitudinale telle que la longueur finale soit L .

Il est clair que si la quantité

$$\lambda = \frac{L}{\ell} \quad (7)$$

est égale à 1 (resp. inférieure à 1, supérieure à 1), la déformation est nulle (resp. une contraction, une élongation). Cette grandeur, appelée *extension*, ne constitue cependant pas une *mesure de déformation*, car elle ne s'annule pas avec la déformation.

Voici trois mesures de déformation construites à partir de λ , la *déformation de Cauchy*, la *déformation de Green* et la *déformation naturelle*, notées resp. D_C ou ε , D_G et D_n et définies par

$$(i) \quad D_C = \lambda - 1 = \varepsilon, \quad (8)$$

$$(ii) \quad D_G = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (9)$$

$$(iii) \quad D_n = \ln \lambda = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots \quad (10)$$

On remarquera que ces définitions ont été choisies de manière à fournir des mesures de déformation (au sens ci-dessus) plus ou moins sensibles, qui coïncident au premier ordre pour les petites déformations.

3 Décomposition polaire de l'application linéaire tangente

Considérons une transformation continue finie arbitraire et soit \mathbf{F} son tenseur jacobien (en un point m). Comme \mathbf{F} est un tenseur d'ordre 2 non singulier (son déterminant est même strictement positif), il se décompose de manière unique en le produit d'un 2-tenseur orthogonal \mathbf{O} et d'un 2-tenseur sdp \mathbf{S} (qui dépendent à leur tour de m):

$$\mathbf{F} = \mathbf{O}\mathbf{S}. \quad (11)$$

Rappelons que \mathbf{F} vu comme application linéaire est la composée de \mathbf{O} et de \mathbf{S} considérés comme applications linéaires et que \mathbf{F} est l'application linéaire tangente en m à la transformation continue: elle remplace la transformation au voisinage de m .

L'application linéaire \mathbf{O} est facile à interpréter. Comme il s'agit d'une isométrie vectorielle (une application linéaire est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque est orthogonale), son déterminant vaut ± 1 . Or, les déterminants de \mathbf{F} et \mathbf{S} étant strictement positifs, il en est de même de celui de \mathbf{O} , qui est donc égal à $+1$. Ainsi, \mathbf{O} est une rotation vectorielle (une rotation vectorielle est une isométrie vectorielle dont le déterminant vaut $+1$).

Passons à \mathbf{S} . Comme c'est un 2-tenseur sdp, il existe une base orthonormée $(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \vec{\mu}_3)$ de vecteurs propres de \mathbf{S} relatifs aux valeurs propres strictement positives $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dans cette base, la matrice de \mathbf{S} est diagonale:

$$s = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Considérons à présent trois fibres de matière $d\vec{m}_i$ d'origine m , infinitésimales et directement colinéaires aux $\vec{\mu}_i$. La transformation continue considérée les transforme en des $d\vec{M}_i$ donnés par

$$\vec{dM}_i = \mathbf{F} \vec{dm}_i = (\mathbf{O} \circ \mathbf{S}) \vec{dm}_i.$$

Les composantes de $d\vec{m}_i$ dans la base des $\vec{\mu}_i$ étant toutes nulles sauf la i ème qui est égale à dm_i , celles de $\mathbf{S}d\vec{m}_i$ sont toutes nulles sauf la i ème qui vaut $\lambda_i dm_i$. La rotation vectorielle \mathbf{O} conservant la norme, on a

$$dM_i = \lambda_i dm_i,$$

de sorte que les extensions - au sens de la section 2 - des fibres considérées sont les valeurs propres λ_i de l'application linéaire \mathbf{S} . Il s'ensuit que \mathbf{S} peut être considéré comme la généralisation tridimensionnelle de la notion d'extension: \mathbf{S} est l'application linéaire d'extension ou encore de déformation pure.

La transformation des points infiniment voisins de m peut alors être vue comme suit. Le point m étant fixé, nous nous trouvons dans l'espace pointé défini par m . Un point m' infiniment voisin de m peut être considéré comme vecteur infinitésimal $d\vec{m}$ d'origine m et son transformé $d\vec{M}$,

$$d\vec{M} = \mathbf{F} d\vec{m} = (\mathbf{O} \circ \mathbf{S}) d\vec{m},$$

peut être réinterprété comme point m'' infiniment proche de m . Comme il découle des égalités

$$d\vec{m}'' = d\vec{M} = d\vec{M}'$$

que

$$M' = m'' + d\vec{M},$$

on obtient finalement

$$M' = (\mathbf{O} \circ \mathbf{S}) m' + d\vec{M}. \quad (12)$$

Ainsi, au voisinage de m , la transformation est la composée d'une déformation pure, d'une rotation et d'une translation.

Illustrons ce qui vient d'être dit, en examinant le cas d'une *transformation rigidifiante* i.e. d'une transformation de corps rigide. Soient m un point arbitraire de la configuration initiale et $d\vec{m}_i$ et $d\vec{m}_j$ deux vecteurs infinitésimaux d'origine m , directement colinéaires aux vecteurs \vec{e}_i resp. \vec{e}_j du système d'axes cartésiens considéré. La transformation étudiée étant rigidifiante, elle conserve la norme et les angles, donc le produit scalaire:

$$d\vec{m}_i \cdot d\vec{m}_j = d\vec{M}_i \cdot d\vec{M}_j,$$

soit, avec les notations habituelles,

$$(dx_i) \tilde{\sim} dx_j = (dX_i) \tilde{\sim} dX_j = (dx_i) \tilde{\sim} (\partial_x X) \tilde{\sim} (\partial_x X) dx_j$$

ou encore, vu les hypothèses de colinéarité,

$$dm_i dm_j \delta_{ij} = dm_i dm_j [(\partial_x X) \tilde{\sim} (\partial_x X)]_{ij}.$$

Par conséquent,

$${}^t \mathbf{F} \mathbf{F} = \mathbf{U}, \quad (13)$$

de sorte que \mathbf{F} est un tenseur orthogonal. La décomposition polaire de \mathbf{F} est donc ici donnée par

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbf{U}. \quad (14)$$

On rapprochera l'égalité $\mathbf{S} = \mathbf{U}$ de celle $\lambda = 1$ qui caractérise l'absence de déformation. Finalement, la transformation est ici bien la composée d'une rotation et d'une translation.

4 Tenseurs de déformation

Soient une transformation continue finie, le tenseur jacobien \mathbf{F} (ou application linéaire tangente [en un point m]), le tenseur de rotation \mathbf{O} et le tenseur d'extension \mathbf{S} . Si l'on désigne comme précédemment par $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$ une base orthonormée de vecteurs propres de \mathbf{S} relatifs aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, la représentation spectrale de \mathbf{S} est donnée par

$$\mathbf{S} = \sum_i \lambda_i \bar{\mu}_i \otimes \bar{\mu}_i. \quad (15)$$

En pratique, on détermine $\mathbf{S} = (\mathbf{tFF})^{1/2}$, en calculant les valeurs propres et les vecteurs propres de \mathbf{tFF} . En effet, on sait que les valeurs propres λ_i de \mathbf{S} sont les racines carrées de celles de \mathbf{tFF} et que ses vecteurs propres sont ceux de \mathbf{tFF} .

La déformation peut être caractérisée par le *tenseur d'extension* \mathbf{S} , mais aussi par le *tenseur de déformation matérielle* \mathbf{tFF} , plus simple à calculer. Ces tenseurs ne s'annulent cependant pas avec la déformation, mais se réduisent à \mathbf{U} . Voici des tenseurs de déformation qui sont des mesures de déformation i.e. qui s'annulent avec la déformation. Ce sont les généralisations tridimensionnelles des mesures de déformation $\lambda - 1$, $(1/2)(\lambda^2 - 1)$, ... introduites à la section 2. Etant donné que l'extension λ se généralise par le tenseur d'extension \mathbf{S} fourni par (15), il est naturel que les mesures $\lambda - 1$ et $(1/2)(\lambda^2 - 1)$ se généralisent par le *tenseur de déformation de Biot*

$$\mathbf{D}_B = \sum_i (\lambda_i - 1) \bar{\mu}_i \otimes \bar{\mu}_i = \mathbf{S} - \mathbf{U} \quad (16)$$

resp. par le *tenseur de déformation de Green*

$$\mathbf{D}_G = \frac{1}{2} \sum_i (\lambda_i^2 - 1) \bar{\mu}_i \otimes \bar{\mu}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^2 - \mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\mathbf{tFF} - \mathbf{U}). \quad (17)$$

Dans le cas d'une petite déformation, $\mathbf{D}_B \approx \mathbf{0}$ et il découle donc de l'égalité

$$(\mathbf{U} + \mathbf{D}_B)^2 = \mathbf{U} + 2\mathbf{D}_G$$

que \mathbf{D}_B et \mathbf{D}_G coïncident au premier ordre.

On a tendance à privilégier le tenseur de Green, car c'est une mesure de déformation que l'on sait calculer sans déterminer \mathbf{S} . Nous nous proposons d'interpréter les composantes de ce tenseur.

Pour cela considérons une transformation continue finie, un point m de la configuration initiale, deux segments élémentaires $d\bar{m}'$ et $d\bar{m}''$ d'origine m , leurs transformés M , $d\bar{M}'$ resp. $d\bar{M}''$ dans la configuration finale et un système d'axes cartésiens de vecteurs $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Comparons les produits scalaires initial $d\bar{m}' \cdot d\bar{m}''$ et final $d\bar{M}' \cdot d\bar{M}''$. Comme

$$d\bar{M}' \cdot d\bar{M}'' = (dX') \tilde{dX}'' = (dx') \tilde{(\partial_x X)} \partial_x X dx''$$

et comme il découle de (17) que

$$d_G = \frac{1}{2}((\partial_x \tilde{X}) (\partial_x \tilde{X}) - I) \text{ i.e. } (\partial_x \tilde{X}) (\partial_x \tilde{X}) = I + 2d_G,$$

on a

$$d\vec{M}' \cdot d\vec{M}'' = (dx') \tilde{d}x'' + 2(dx') \tilde{d}_G dx'' = d\vec{m}' \cdot d\vec{m}'' + 2d\vec{m}' \cdot (D_G d\vec{m}''). \quad (18)$$

Prenons à présent pour $d\vec{m}'$ et $d\vec{m}''$ une même fibre matérielle $d\vec{m}$ d'origine m , directement colinéaire à \vec{e}_i et notons $d\vec{M}$ cette fibre dans la configuration finale. Sa déformation de Green (10) est alors donnée par

$$D_{G,i} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dM}{dm} \right)^2 - 1 \right).$$

Or, il découle de (18) que

$$dM^2 = dm^2 + 2dm^2 \vec{e}_i \cdot (D_G \vec{e}_i) = dm^2 (1 + 2d_{G,ii}),$$

de sorte que

$$d_{G,ii} = D_{G,i}. \quad (19)$$

Par conséquent, *les éléments diagonaux de la matrice du tenseur de Green sont les déformations de Green de trois fibres matérielles initialement dirigées suivant les vecteurs de base.*

Afin d'interpréter les éléments non diagonaux, choisissons pour $d\vec{m}'$ et $d\vec{m}''$ deux fibres matérielles d'origine m , directement colinéaires à \vec{e}_i resp. \vec{e}_j ($i \neq j$) et désignons par $d\vec{M}'$ et $d\vec{M}''$ ces fibres dans la configuration finale. On remarquera que l'angle φ entre $d\vec{m}'$ et $d\vec{m}''$ est droit, mais que celui Φ entre $d\vec{M}'$ et $d\vec{M}''$ ne l'est plus en général, vu la déformation du solide. Il résulte de (18) que

$$dM' dM'' \cos \Phi = dm' dm'' 2\vec{e}_i \cdot (D_G \vec{e}_j),$$

de manière que

$$d_{G,ij} = \frac{1}{2} \frac{dM'}{dm'} \frac{dM''}{dm''} \cos \Phi = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2D_{G,i}} \sqrt{1 + 2D_{G,j}} \cos \Phi. \quad (20)$$

Si la variation de l'angle entre les fibres considérées est nulle i.e. si $\Phi = \varphi = \pi/2$, la composante $d_{G,ij}$ est nulle à son tour. On constate que *les éléments non diagonaux de la matrice du tenseur de Green mesurent les variations des angles entre trois fibres matérielles initialement dirigées suivant les vecteurs de base.*

5 Transformation infiniment petite

Introduisons d'abord le *champ des déplacements*

$$\vec{\xi}(m) = m\vec{M}, \quad (21)$$

où m désigne un point quelconque de c et M son transformé dans C . Dans la suite, nous écrirons $\vec{\xi}$ au lieu de $\vec{\xi}(m)$. Profitons de l'occasion pour rappeler que tous les tenseurs considérés \mathbf{F} , \mathbf{O} , \mathbf{S} , \mathbf{D}_B , \mathbf{D}_G , ... dépendent du point m choisi.

Ceci étant, une *transformation infiniment petite* est une transformation telle que $\vec{\xi}$ soit infiniment petit. Dans ce cas,

$$\mathbf{O} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_1 \text{ et } \mathbf{S} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad (22)$$

où $\boldsymbol{\alpha}_1$ et $\boldsymbol{\alpha}_2$ sont des tenseurs infiniment petits. Alors,

$$\mathbf{F} = \mathbf{O}\mathbf{S} = (\mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_1)(\mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_3, \quad (23)$$

où nous avons négligé le terme du second ordre $\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2$ et où $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$. Dans la suite, nous omettrons les indices des $\boldsymbol{\alpha}$, lorsque la confusion n'est pas à craindre. En outre, les calculs seront menés au premier ordre, ce qui entraînera des simplifications. On pourra se limiter très souvent à une transformation infinitésimale, dont l'importance est donc considérable.

On sait qu'au premier ordre les tenseurs de déformation de Biot et de Green coïncident. Comme de plus

$${}^t\mathbf{F}\mathbf{F} = (\mathbf{U} + {}^t\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha} + {}^t\boldsymbol{\alpha}$$

et

$$\frac{1}{2}({}^t\mathbf{F} + \mathbf{F}) = \mathbf{U} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} + {}^t\boldsymbol{\alpha}),$$

on a

$$\mathbf{D}_B = \mathbf{D}_G = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} + {}^t\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}) - \mathbf{U} =: \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (24)$$

Ce tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ porte le nom de *tenseur de déformation de Cauchy*. Il ne peut être utilisé que dans le cas d'une transformation infinitésimale.

Vu nos besoins ultérieurs, il est intéressant d'exprimer le tenseur de Cauchy en fonction du champ des déplacements. Avec les notations habituelles, on a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_{x_i} X_j + \partial_{x_j} X_i) - \delta_{ij}.$$

Or, si $\boldsymbol{\varepsilon}$ est calculé en m , ${}^t\mathbf{F}$ et \mathbf{F} sont à calculer en m et les précédentes dérivées partielles doivent être évaluées sur x_m . Vu que

$$(\partial_{x_k} X_\ell)(x_m) = \partial_{x_{m,k}} (X_\ell(x_m))$$

et que

$$\xi_\ell = X_{M,\ell} - x_{m,\ell} = X_\ell(x_m) - x_{m,\ell} = \xi_\ell(x_m),$$

on a

$$(\partial_{x_k} X_\ell)(x_m) = \partial_{x_{m,k}} (x_{m,\ell} + \xi_\ell(x_m)) = \delta_{k\ell} + \partial_{x_{m,k}} (\xi_\ell(x_m)). \quad (25)$$

Ainsi,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(2\delta_{ij} + \partial_{x_{m,i}} \xi_j + \partial_{x_{m,j}} \xi_i) - \delta_{ij}$$

càd., si l'on revient à la notation x au lieu de x_m et si l'on note ∂_k au lieu de ∂_{x_k} ,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \xi_i + \partial_i \xi_j). \quad (26)$$

On remarquera que les dérivées $\partial_j \xi_i$ et $\partial_i \xi_j$ sont les composantes des tenseurs $\nabla \vec{\xi}$ et $(\nabla \vec{\xi})^T$. Introduisons le vecteur rotation

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\xi}.$$

Vu la correspondance biunivoque entre les pseudo-vecteurs et les tenseurs antisymétriques du second ordre, $\vec{\omega}$ représente le tenseur de composantes

$$\omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rsk} \partial_r \xi_s = -\frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) \partial_r \xi_s$$

càd.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j \xi_i - \partial_i \xi_j). \quad (27)$$

Vu (25), on a encore

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j X_i - \partial_i X_j),$$

de sorte que l'expression intrinsèque de ce *tenseur de rotation infinitésimale* est

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - {}^t\mathbf{F}). \quad (28)$$

Il résulte évidemment de (24) et (28) que

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \quad (29)$$

(voir 23).

6 Conditions de compatibilité

Imaginons un milieu continu découpé en éléments. Si l'on déforme ces éléments de manière arbitraire, il ne peuvent en général plus être juxtaposés sans vides i.e. les déformations ne sont pas compatibles avec la continuité du milieu. En d'autres termes, des déformations compatibles

avec l'hypothèse d'un milieu continu ne sont pas quelconques, mais vérifient certaines conditions dites de compatibilité.

Traisons ce problème en nous limitant aux *transformations infinitésimales*. Donnons-nous donc un champ de tenseurs de déformation symétriques $\boldsymbol{\varepsilon}$ et cherchons à quelles conditions ce champ est un champ de déformation de milieu continu i.e. à quelles conditions il existe une transformation continue infiniment petite $\bar{\xi}$ dont il dérive au sens de (26) càd. telle que

$$\partial_j \bar{\xi}_i + \partial_i \bar{\xi}_j = 2\varepsilon_{ij}. \quad (30)$$

Le système (30) est un système de 6 équations aux dérivées partielles à 3 inconnues $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(\mathbf{x})$, les fonctions $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ étant données. Du point de vue mathématique, il est clair que l'existence d'une solution implique certaines conditions de compatibilité vérifiées par les ε_{ij} .

On rapprochera cette situation de la primitivation dans \mathbb{R}^3 . Rappelons que dans un tel problème on donne 3 fonctions $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\mathbf{x})$ et on essaie de trouver leurs primitives i.e. les fonctions $\xi = \xi(\mathbf{x})$ telles que

$$\partial_i \xi = \varepsilon_i, \quad (31)$$

pour tout i . On est ici en présence d'un système de 3 équations aux dérivées partielles à 1 inconnue. L'existence d'une primitive ξ entraîne évidemment les 3 "égalités croisées"

$$\partial_j \varepsilon_i = \partial_i \varepsilon_j, \quad (32)$$

si les ε_i sont de classe C^1 . On sait que *ces conditions de compatibilité sont des conditions suffisantes d'existence d'une solution, si on se place dans un ouvert connexe par arcs* (deux points quelconques de l'ouvert peuvent être reliés par un chemin continu situé entièrement dans l'ouvert) *et simplement connexe* (toute courbe fermée située dans l'ouvert peut être contractée continuellement en un point sans sortir de l'ouvert) *et si les ε_i sont de classe C^1 .*

Déterminons maintenant les conditions nécessaires de compatibilité relatives à (30). Supposons donc que ce système, où les ε_{ij} sont de classe C^2 et symétriques en i, j par hypothèse, admette une solution $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ de classe C^3 et proposons-nous de la calculer. Le tenseur de rotation infinitésimale satisfaisant à

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \bar{\xi}_i - \partial_i \bar{\xi}_j),$$

on a

$$\partial_j \bar{\xi}_i = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (33)$$

Il s'ensuit que les "égalités croisées"

$$\partial_k \varepsilon_{ij} + \partial_k \omega_{ij} = \partial_j \varepsilon_{ik} + \partial_j \omega_{ik} \quad (34)$$

sont vérifiées. Afin de les simplifier, ajoutons membre à membre les relations

$$\begin{aligned}\partial_k \varepsilon_{ij} + \partial_k \omega_{ij} &= \partial_j \varepsilon_{ik} + \partial_j \omega_{ik}, \\ \partial_i \varepsilon_{jk} + \partial_i \omega_{jk} &= \partial_k \varepsilon_{ji} + \partial_k \omega_{ji}, \\ \partial_j \varepsilon_{ki} + \partial_j \omega_{ki} &= \partial_i \varepsilon_{kj} + \partial_i \omega_{kj},\end{aligned}$$

obtenues par permutations circulaires des indices i, j, k . Compte tenu de la symétrie des ε_{ij} et de l'antisymétrie des ω_{ij} , il vient alors

$$\partial_k \omega_{ij} + \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} = 0. \quad (35)$$

La combinaison de (34) et (35) conduit enfin aux égalités

$$\partial_i \omega_{jk} = -\partial_k \omega_{ij} - \partial_j \omega_{ki} = \partial_k \varepsilon_{ij} - \partial_j \varepsilon_{ik}. \quad (36)$$

Remarquons que les ε_{ij} étant connus, les équations (36) permettent de déterminer les ω_{jk} . Il suffit en fait de calculer les composantes indépendantes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ du tenseur de rotation. Après, les équations (33) fournissent les inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Notons enfin que, les équations (36) donnent les "égalités croisées"

$$\partial_{mk} \varepsilon_{ij} - \partial_{mj} \varepsilon_{ik} = \partial_{ik} \varepsilon_{mj} - \partial_{ij} \varepsilon_{mk}, \quad (37)$$

où ∂_{ij} dénote la dérivée partielle par rapport à x_i et x_j . Chaque ω_{jk} engendrant 3 conditions, il y en a en principe 27. Or, les conditions relatives à $\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}$ sont triviales et celles liées à $\omega_{21}, \omega_{32}, \omega_{13}$ sont les mêmes que celles attachées à $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$. Cependant, si on écrit explicitement les 9 conditions restantes, on constate que 3 se reproduisent 2 fois, de sorte qu'il n'y en a plus que 6. Il s'agit de

$$\partial_{22} \varepsilon_{11} + \partial_{11} \varepsilon_{22} - 2\partial_{12} \varepsilon_{12} = 0,$$

de

$$\partial_{33} \varepsilon_{12} + \partial_{12} \varepsilon_{33} - \partial_{23} \varepsilon_{13} - \partial_{13} \varepsilon_{23} = 0 \quad (38)$$

et de celles obtenues par permutations circulaires de 1,2,3. Nous les écrirons sous la forme

$$\partial_{kk} \varepsilon_{ij} + \partial_{ij} \varepsilon_{kk} - \partial_{jk} \varepsilon_{ik} - \partial_{ik} \varepsilon_{jk} = 0, \quad (39)$$

où l'on ne somme pas sur k (en principe la convention d'Einstein ne devrait être utilisée que pour des indices répétés en haut et en bas, mais on s'en sert également lorsqu'on ne distingue pas entre contra- et covariance, le contexte permettant alors de décider s'il y a sommation ou non). Si l'on donne dans (39) à i, j, k toutes les valeurs possibles, on obtient des conditions triviales et les conditions (38) répétées plusieurs fois. Ces conditions (38) ou (39) sont les *conditions de compatibilité de Saint Venant*.

Le raisonnement ci-dessus établit le caractère nécessaire des conditions de Saint Venant. Or, si le solide est connexe par arcs et simplement connexe, ces conditions sont également des

conditions suffisantes d'existence d'une solution (ξ_1, ξ_2, ξ_3) du système (30). En effet, si les égalités (39) sont satisfaites, le système (36) admet une solution. Afin de trouver $\omega_{jk}(x_1)$ en un point x_1 i.e. un point m_1 donné du solide, on fixe une fois pour toute un point m_0 de coordonnées x_0 du solide, on choisit une courbe C située dans le solide et liant m_0 à m_1 et on intègre (36) le long de C :

$$\int_{m_0 C m_1} d\omega_{jk} = \int_{m_0 C m_1} \sum_i (\partial_k \varepsilon_{ij} - \partial_j \varepsilon_{ik}) dx_i . \quad (40)$$

Rappelons que l'intégrale d'une 1-forme différentielle $\sum_i f_i(x) dx_i$ de x_0 à x_1 le long d'une courbe C est définie par

$$\int_{x_0 C x_1} \sum_i f_i(x) dx_i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i f_i(x(t)) d_i x_i dt , \quad (41)$$

où $x = x(t)$ est un paramétrage de C et où $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$. En outre, on sait que l'intégrale d'une 1-forme différentielle exacte est indépendante du chemin d'intégration C considéré:

$$\int_{x_0 C x_1} df = f(x_1) - f(x_0) . \quad (42)$$

Ceci étant, l'intégrale du second membre de (40) peut être évaluée et celle du premier membre vaut $\omega_{jk}(x_1) - \omega_{jk}(x_0)$, de sorte que ω_{jk} est connu en tout point x_1 (à la constante d'intégration $\omega_{jk}(x_0)$ près). Les équations (36) étant ainsi vérifiées, il en est de même des conditions (34) (on sait que les relations (34) entraînent (35) et alors (36); inversement, les relations (36) impliquent (35) et par suite (34)). Il s'ensuit que le système (33), dont les seconds membres sont désormais connus, admet une solution. En adoptant les mêmes notations que précédemment et en intégrant encore de m_0 à m_1 le long d'une courbe C , on obtient

$$\xi_i(x_1) = \xi_i(x_0) + \int_{m_0 C m_1} \sum_j (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j , \quad (43)$$

où le second membre est de nouveau connu (aux constantes d'intégration près). Vu la symétrie des ε_{ij} et l'antisymétrie des ω_{ij} , ces ξ_i sont bien solution de (30).

Cette démonstration est plus que la preuve du caractère suffisant des conditions de Saint Venant: elle fournit la *méthode pratique d'intégration* de (30).

A priori on ne s'attend pas à ce que le système (30) de 6 équations à 3 inconnues fournisse 6 conditions de compatibilité. En fait, les conditions trouvées ne sont pas indépendantes. Pour le voir, rappelons que ces conditions sont les "égalités croisées" relatives aux 3 systèmes

$$\partial_i \omega_{12} = \partial_2 \varepsilon_{i1} - \partial_1 \varepsilon_{i2} \quad (i \in \{1, 2, 3\}),$$

$$\partial_i \omega_{23} = \partial_3 \varepsilon_{i2} - \partial_2 \varepsilon_{i3} \quad (i \in \{1, 2, 3\}),$$

$$\partial_i \omega_{3i} = \partial_1 \varepsilon_{i3} - \partial_3 \varepsilon_{i1} \quad (i \in \{1,2,3\}).$$

Si l'on désigne les membres de droite resp. par V_{3i}, V_{li}, V_{2i} , on peut écrire les "égalités croisées" sous la forme

$$R_{3i} = 0, R_{li} = 0, R_{2i} = 0 \quad (i \in \{1,2,3\}),$$

où R_{ji} est la i ème composante du rotationnel de V_{ji} ($i \in \{1,2,3\}$). On vérifie sans problème que la double apparition de 3 de ces conditions correspond à la symétrie $R_{ij} = R_{ji}$, de sorte que les 6 conditions restantes sont

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{12} = R_{31} = R_{23} = 0.$$

Or, la divergence d'un rotationnel étant identiquement nulle, on a

$$\sum_i \frac{\partial R_{3i}}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \sum_i \frac{\partial R_{li}}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \sum_i \frac{\partial R_{2i}}{\partial x_i} \equiv 0$$

et ceci indépendamment de la validité des 6 conditions de compatibilité. Il s'ensuit qu'il *suffit de vérifier 3 des conditions de compatibilité* - $R_{12} = R_{31} = R_{23} = 0$ - *en tout point du solide et les autres* - $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$ - *uniquement aux points de la surface du solide*. En effet, les précédentes divergences deviennent alors

$$\frac{\partial R_{33}}{\partial x_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_{11}}{\partial x_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_{22}}{\partial x_2} \equiv 0,$$

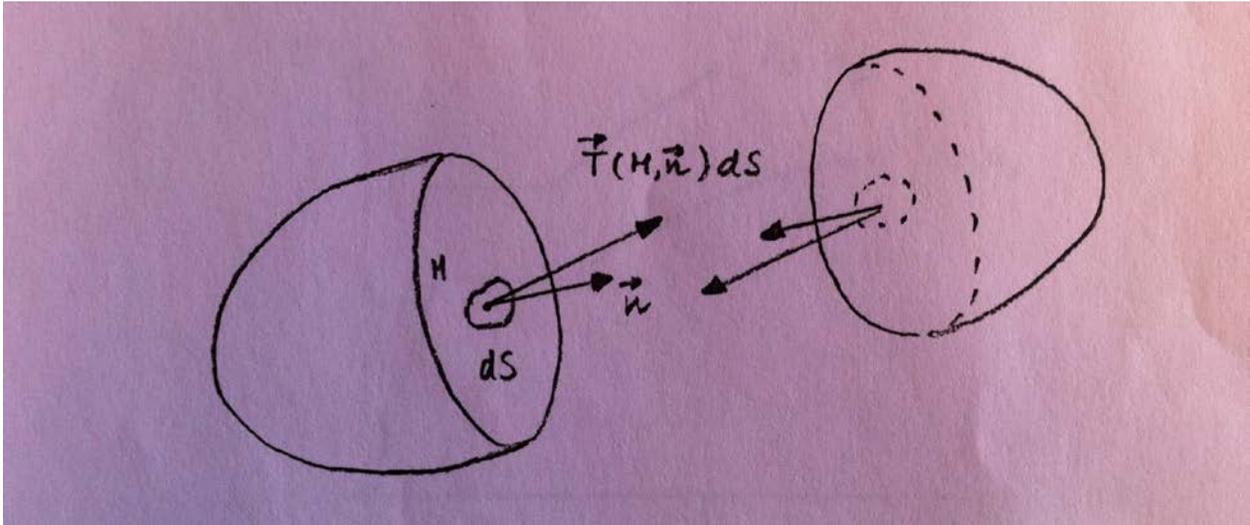
si bien que l'annulation de R_{11}, R_{22}, R_{33} à la surface implique l'annulation en tout point du solide.

7 Tenseur de contrainte de Cauchy, loi de Hooke

Un solide soumis à des sollicitations se déforme. Nous nous proposons d'étudier la réponse du solide à des sollicitations données. Ces *sollicitations* sont très souvent des forces extérieures, mais peuvent également être des effets thermiques En ce qui concerne les forces extérieures, nous distinguons, comme en mécanique des fluides (voir MP3), entre *forces extérieures de volume* et *forces extérieures de surface* et nous notons $\vec{F}(M)dV$ la force extérieure de volume agissant sur un volume élémentaire dV entourant un point M et $\vec{f}(M, \vec{n})dS$ la force extérieure de surface s'exerçant sur un élément de surface dS entourant un point M et admettant \vec{n} comme normale unitaire extérieure.

En mécanique des fluides, les forces $\vec{f}(M, \vec{n})dS$ sont en fait des forces intérieures extériorisées. En effet, on y a considéré un volume de fluide V isolé par la pensée dans un

volume de fluide plus grand et les forces $\vec{f}(M, \vec{n})dS$ sont des forces de contact exercées par le fluide extérieur à V sur le fluide de V . En mécanique des solides déformables, des forces analogues apparaissent. De fait, considérons un solide, imaginons une coupe par un plan et portons notre attention sur une surface infinitésimale dS de la section, surface entourant un point M et de vecteur normal unitaire extérieur \vec{n} .



Vu la cohésion du solide, les particules voisines de dS du côté droit exercent sur les particules voisines de dS du côté gauche des efforts que l'on peut représenter par une force généralement notée $\vec{T}(M, \vec{n})dS$. Le vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ est le *vecteur-contrainte* en M pour l'orientation \vec{n} . Les raisonnements et résultats des sections 3 et 4 du chapitre "mécanique des fluides" (voir MP3) restent évidemment valables ici. Ainsi, si (\vec{e}_i) est une base orthonormée, le vecteur \vec{T} vérifie (voir l'équation précédant l'équation (12) dans le cours MP3)

$$T_i(M, \vec{n}) = T_i(M, \vec{e}_j)n_j, \quad (44)$$

de sorte que si l'on pose (voir l'équation (12) du cours MP3)

$$\sigma_{ij}(M) = T_i(M, \vec{e}_j), \quad (45)$$

on définit un champ de tenseurs σ , tel que (voir l'équation (11) du cours MP3)

$$T_i(M, \vec{n}) = \sigma_{ij}(M)n_j. \quad (46)$$

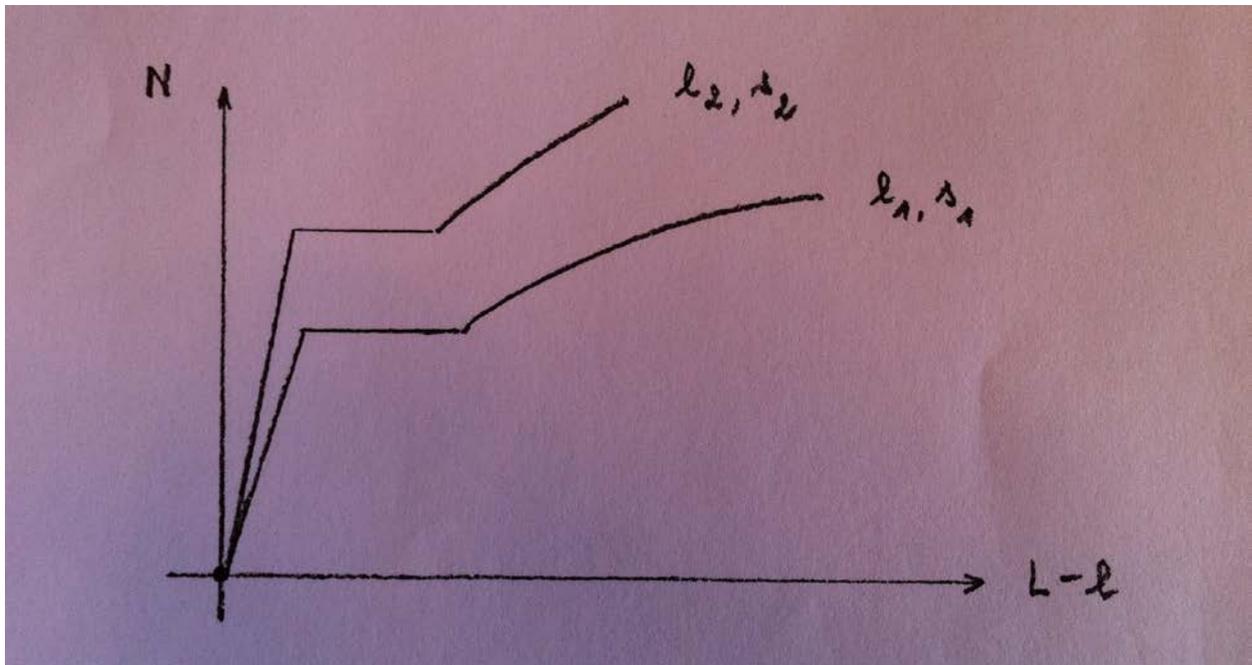
On l'appelle champ de tenseurs de contrainte de Cauchy ou simplement *tenseur de contrainte de Cauchy*. L'interprétation de ses composantes est immédiate. En effet, en prenant $\vec{n} = \vec{e}_k$ dans (46), on obtient

$$\sigma_{ik}(M) = T_i(M, \vec{e}_k), \quad (47)$$

si bien que $\sigma_{ik}(M)$ est la composante suivant \vec{e}_i du vecteur-contrainte en M pour l'orientation \vec{e}_k . Il convient de remarquer qu'à un changement de notation et de signe près, le tenseur de contrainte est le même tenseur que le tenseur des efforts intérieurs ou tenseur des pressions et des tensions. Il découle alors de l'équation (14) de MP3 que le tenseur de contrainte est *symétrique*:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}. \quad (48)$$

Revenons aux *déformations* des solides soumis à des sollicitations. Ces déformations ne dépendent pas seulement des sollicitations, mais évidemment aussi du matériau dont est constitué le solide. Nous appelons *loi de comportement* d'un matériau, une loi fournissant la réponse du matériau à des sollicitations données. Considérons p.ex. un barreau d'acier de longueur ℓ et de section droite s . L'application aux extrémités du barreau d'une force de traction N dirigée suivant son axe, entraîne un allongement $L - \ell$. La représentation de $L - \ell$ en fonction de N conduit, pour des barreaux de dimensions initiales ℓ_1, s_1 resp. ℓ_2, s_2 à des courbes différentes:



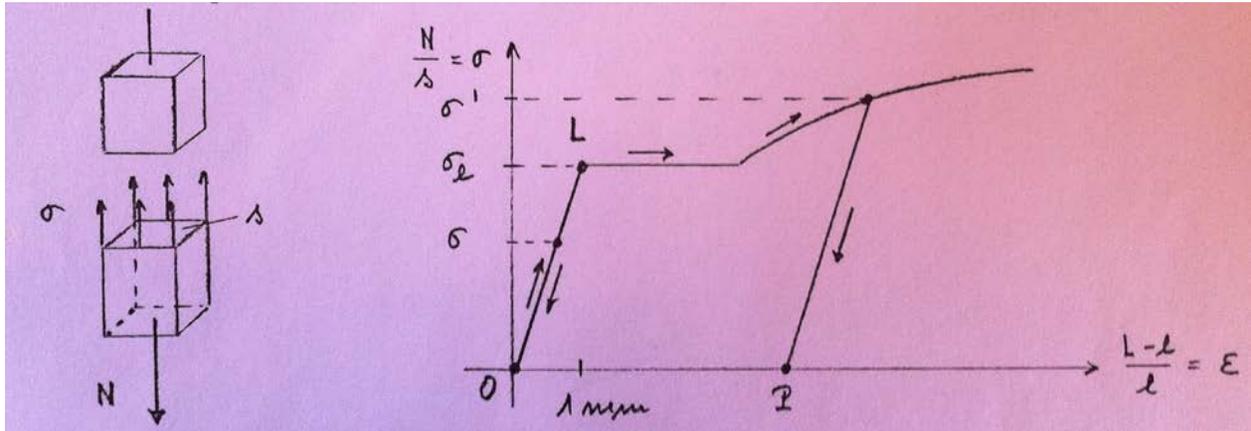
Par contre, la représentation de

$$\frac{L - \ell}{\ell} = \lambda - 1 = \varepsilon$$

(déformation de Cauchy) en fonction de

$$\frac{N}{s} = \sigma$$

(contrainte [En effet, imaginons une coupe du barreau, en équilibre dans sa configuration déformée, suivant une section droite. D'après le *principe de la coupe* "toute partie d'un solide en équilibre est elle-même en équilibre", les contraintes qui apparaissent dans la section de coupe équilibrent N . Or, en parlant quelque peu vaguement, on peut affirmer que ces contraintes σ sont normales à la section de coupe et uniformément réparties sur s et que l'on a donc $N = \sigma s$]) fournit la même courbe pour les deux barreaux d'acier:



Cette figure représente donc la loi de comportement pour le matériau acier. Les considérations précédentes montrent qu'une loi de comportement lie les déformations (tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, dans le cas d'une transformation infinitésimale) et les contraintes (tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$), plutôt que les déplacements et les forces. On observe que si la contrainte σ reste inférieure à une certaine valeur limite σ_l , elle est proportionnelle à la déformation ε :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\sigma < \sigma_l). \quad (49)$$

Ce résultat est connu sous le nom de *loi de Hooke* (1678). Le coefficient de proportionnalité est appelé *module de Young*. Le domaine OL est le *domaine d'élasticité*. En effet, l'expérience montre qu'un barreau soumis à une contrainte $\sigma < \sigma_l$ retourne à son état initial O, lorsqu'on supprime la contrainte. Par contre, si la contrainte est $\sigma' > \sigma_l$ et si l'on "décharge" le barreau, il passe à l'état P et présente donc une déformation permanente importante, appelée déformation plastique.

Les matériaux solides et notamment les matériaux de construction comme les pierres, le béton, les métaux, le bois, ... possèdent un tel domaine d'élasticité, dans lequel la contrainte est une fonction linéaire de la déformation et vice versa, de sorte que les déformations sont réversibles. Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude du domaine d'élasticité. De plus, nous supposons, comme nous l'avons implicitement fait ci-dessus, la température constante (sinon, il apparaît de nouvelles déformations dues aux variations de température). On résume ces hypothèses en parlant de *l'élasticité isotherme*. La déformation considérée étant donc très petite et même infiniment petite, on peut se demander si la transformation est à son tour infinitésimale et du même ordre. Comme on l'entrevoit aisément, ceci est généralement vrai, du moins si les liaisons sont de nature à empêcher des translations et des rotations importantes. Nous

supposerons ci-dessous la *transformation* $\vec{\xi}$ *infinitement petite*, de sorte que les grandeurs importantes seront le tenseur de déformation de Cauchy et le tenseur de contrainte de Cauchy.

8 Equilibre élastique isotherme

Notre objectif est d'étudier des problèmes d'équilibre. Rappelons d'abord qu'un milieu continu est en équilibre par rapport à un référentiel à un instant t donné, si l'accélération $\vec{\gamma}_p(t) = \vec{\gamma}(M, t)$, où M est la position de la particule p à l'instant t , est nulle en tout point du milieu à l'instant t . Ceci entraîne évidemment que les forces extérieures appliquées à cet instant ont une résultante et un moment résultant nuls: on dit qu'elles sont en équilibre global.

Ceci étant, considérons un solide déformable dans un état d'équilibre initial. Cet état est supposé *naturel*, ce qui signifie que le champ de contrainte de Cauchy y est supposé nul. Un tel état est évidemment non chargé, mais inversement l'absence de forces de volume et de surface n'implique nullement le caractère naturel. Si l'on applique à présent progressivement des forces extérieures en équilibre global, le solide passe à un autre état d'équilibre. Il s'agit alors de déterminer le champ de contrainte σ dans ce nouvel état et le champ des déplacements $\vec{\xi}$, compte tenu des précédentes hypothèses d'élasticité isotherme et d'une transformation infinitésimale.

Vu ces trois hypothèses, la loi de comportement du matériau utilisé s'écrit

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl} \varepsilon_{km} , \quad (50)$$

où \mathbf{H} désigne un tenseur du quatrième ordre, appelé *tenseur de Hooke*. On comparera la loi de Hooke (50) évidemment à la loi de Hooke (49), mais aussi à l'égalité (19) de MP3 donnant le tenseur de contrainte d'un fluide newtonien. Les composantes du tenseur de Hooke sont appelées *coefficients d'élasticité* du matériau.

Déterminons à présent les équations qui régissent les champs inconnus. Compte tenu de la section 5 de MP3 et du changement de notation et de signe dans la définition (45) du tenseur de contrainte, il résulte de l'équation d'Euler (13) de MP3 qu'à l'état final d'équilibre,

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma + \vec{F} = 0$$

identiquement en M , équation s'écrivant encore

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + F_i(X) = 0, \quad (51)$$

où $X = (X_1, X_2, X_3)$ est comme d'habitude le triplet des coordonnées de M dans le système d'axes cartésiens considéré. On ne confondra pas la dérivée partielle $\partial / \partial x_j = \partial_j$ (par rapport à la j ème coordonnée de la position de la particule considérée dans la configuration initiale) avec la précédente $\partial / \partial X_j$ (par rapport à la j ème coordonnée de la position de cette même particule dans

la configuration finale). Cependant, si h désigne une fonction de M , on peut écrire $h(M) = h(m + \bar{\xi})$, de sorte que

$$h(X) = h(x) + \frac{\partial h}{\partial X_j} \xi_j + \dots \approx h(x). \quad (52)$$

D'autre part, comme $x_k = X_k - \xi_k$,

$$\frac{\partial h}{\partial X_j} = \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial h}{\partial x_k} \left(\delta_{jk} - \frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} \approx \frac{\partial h}{\partial x_j} = \partial_j h. \quad (53)$$

Les résultats (52) et (53) montrent que le caractère infinitésimal de la transformation $\bar{\xi}$ permet de remplacer les variables X par les variables x . Les *équations d'équilibre en volume* (51) s'écrivent donc finalement

$$\boxed{\partial_j \sigma_{ij} + F_i(x) = 0}. \quad (54)$$

D'autre part, on dispose des *relations déformations-déplacements* (26)

$$\boxed{\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} (\partial_j \xi_i + \partial_i \xi_j)} \quad (55)$$

et de la *loi de Hooke* (50)

$$\boxed{\sigma_{ij}(x) = H_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(x)}. \quad (56)$$

Ces équations (54), (55) et (56) forment un système de 15 équations à 15 inconnues, $\xi_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ fonctions des x_i .

Les coefficients d'élasticité qui caractérisent le matériau, doivent être déterminés expérimentalement. Il y en a 81, mais ils ne sont pas tous indépendants. De fait, vu la symétrie du tenseur de contrainte,

$$H_{ijkl} \varepsilon_{km} = \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = H_{jikm} \varepsilon_{km},$$

identiquement en les ε_{km} , de sorte que

$$H_{ijkl} = H_{jikm}. \quad (57)$$

En outre, la symétrie du tenseur de déformation permet d'écrire

$$H_{ijkl} \varepsilon_{km} = H_{ijmk} \varepsilon_{mk} = H_{ijmk} \varepsilon_{km},$$

si bien que

$$H_{ijkl} = H_{ijmk}. \quad (58)$$

Ces symétries en i,j et k,m ramènent le nombre de coefficients d'élasticité à $6 \cdot 6 = 36$. Mais il existe une symétrie supplémentaire. La thermodynamique nous apprend en effet que, les déformations élastiques isothermes considérées ici étant réversibles, le travail de déformation dérive d'un potentiel. De manière plus précise,

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \delta U, \quad (59)$$

où le premier membre désigne ce travail et où U est ce potentiel par unité de volume ou encore la *densité d'énergie potentielle de déformation*. Ainsi, le premier membre est une différentielle totale, de sorte que l'on a les "égalités croisées"

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{km}} = \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

qui, compte tenu de la loi de Hooke, donnent

$$H_{ijklm} = H_{klijm}. \quad (60)$$

Si l'on note les 36 coefficients H_{ijklm} auxquels on s'est ramené, h_{rs} où $r,s \in \{1,2,\dots,6\}$, la symétrie (60) s'écrit $h_{rs} = h_{sr}$, si bien qu'il n'y a finalement que $6 + 5 + \dots + 1 = 21$ *coefficients d'élasticité indépendants*.

La détermination expérimentale de ces coefficients étant difficile, on essaie de réduire davantage leur nombre, grâce à des hypothèses supplémentaires. Ainsi, nous admettrons dans la suite, en plus des autres suppositions, que le solide étudié est *isotrope*. Dans ce cas, le nombre de coefficients d'élasticité indépendants se réduit à 2. L'explication de ce fait est analogue à celle donnée pour les fluides newtoniens isotropes (voir MP3). Le caractère isotrope du solide entraîne celui du tenseur de Hooke. Donc,

$$H_{ijklm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu \delta_{ik} \delta_{jm} + \nu \delta_{im} \delta_{jk}.$$

On vérifie facilement que si l'on tient compte des symétries (57), (58) et (60), on trouve $\mu = \nu$, de manière que

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{km} \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\varepsilon_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} + \varepsilon_{km} \delta_{im} \delta_{jk}) = \lambda \left(\sum_k \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

soit

$$\boxed{\sigma = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{U} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon},}$$

(61)

où λ, μ sont les *coefficients de Lamé*. En comparant (61) avec la loi de comportement des fluides newtoniens isotropes (voir l'équation (21) de MP3), on constate que leur dimension, qui est celle

M/T^2L d'une pression, est différente de celle M/TL des coefficients de viscosité λ, μ . Dans les applications, il est souvent intéressant de connaître l'expression de $\boldsymbol{\varepsilon}$ en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$. Comme

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (62)$$

il découle de (61) que

$$\boxed{2\mu \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{U}.} \quad (63)$$

Afin d'exprimer λ et μ à l'aide du module de Young et du nombre de Poisson, grandeurs mesurables directement qui restent à définir, examinons le problème particulier d'une traction simple parallèle p.ex. à l'axe Ox_3 . Il est clair qu'alors σ_{33} est la seule composante non nulle du tenseur de contrainte. Quant aux composantes du tenseur de déformation, vu que

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{33}$$

et vu (63), ses composantes non diagonales sont nulles et ses composantes diagonales sont données par

$$\varepsilon_{33} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{33} \quad (64)$$

et

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{33}.$$

On comparera (64) à (49) et on remarquera que

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_{33}. \quad (65)$$

Si l'on pose alors

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (66)$$

les égalités (64) et (65) deviennent

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \sigma_{33} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33}, \quad (67)$$

où E et ν sont le *module de Young* resp. le *nombre de Poisson*, grandeurs mesurables, répétons-le, directement. Le module de Young a été rencontré précédemment. Quant au coefficient de Poisson, il caractérise le rétrécissement suivant Ox_1 et Ox_2 . En d'autres termes, $1/E$ est un

coefficient d'allongement (ou de raccourcissement) relatif et $-v/E$ est un coefficient de rétrécissement (ou d'épaississement) relatif. On montre que

$$\lambda, \mu, E > 0 \text{ et } 0 < v < 1/2. \quad (68)$$

En résolvant le système (66) par rapport à λ et μ , on trouve

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (69)$$

de manière que (61) et (63) s'écrivent finalement

$$\boxed{(1-2\nu)(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} = E((1-2\nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{U})} \quad (70)$$

resp.

$$\boxed{E\boldsymbol{\varepsilon} = (1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{U}.} \quad (71)$$

9 Equilibre élastique isotherme d'un solide isotrope et homogène

Nous reprenons ici le problème décrit au début de la section 8, en supposant le solide isotrope et homogène. De manière plus précise, on considère un solide élastique isotrope et homogène qui, sous l'action de sollicitations extérieures, passe d'un état d'équilibre initial supposé naturel à un état d'équilibre final. On se propose de trouver le champ de contrainte et le champ des déplacements, sous l'hypothèse d'une transformation infinitésimale isotherme.

Rappelons que les inconnues $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\vec{\xi}$ vérifient le système complet

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{F} = 0,} \quad (72)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{\xi} + (\nabla \vec{\xi})^T),} \quad (73)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{U} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \text{ i.e. } (1-2\nu)(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} = E((1-2\nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{U})} \quad (74)$$

qui s'inverse sous la forme

$$\boxed{2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{U} \text{ i.e. } E\boldsymbol{\varepsilon} = (1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{U}.} \quad (75)$$

La méthode de résolution dépend essentiellement des conditions à la limite. Nous distinguons les trois types suivants de conditions à la limite:

(i) on donne le vecteur déplacement $\vec{\xi}$ en tout point de la surface du solide (problème aux déplacements),

(ii) on donne la force extérieure surfacique \vec{f} - la contrainte sur la surface - en chaque point de la surface du corps (problème aux contraintes),

(iii) on donne le vecteur déplacement en tout point d'une partie de la surface et la contrainte en tout point de la partie restante (problème mixte).

La force extérieure volumique \vec{F} est toujours considérée comme connue et il en va de même des coefficients de Lamé resp. du module de Young et du coefficient de Poisson. Le solide étant ici supposé homogène, ces coefficients sont tous indépendants des coordonnées.

9.1 Problème aux déplacements, méthode de Lamé et de Clapeyron

En injectant (73) dans (74), on obtient

$$\sigma_{ij} = \lambda(\partial_k \xi_k) \delta_{ij} + \mu(\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i) \quad (76)$$

et en substituant (76) dans (72), on trouve

$$\lambda(\partial_{jk} \xi_k) \delta_{ij} + \mu(\partial_{ij} \xi_j + \partial_{jj} \xi_i) + F_i = 0,$$

soit

$$(\lambda + \mu)(\partial_{ij} \xi_j) + \mu \Delta \xi_i + F_i = 0, \quad (77)$$

soit

$$\boxed{(\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) + \mu \Delta \vec{\xi} + \vec{F} = 0} \quad (78)$$

ou encore

$$\boxed{\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{\xi} + \vec{F} = 0}. \quad (79)$$

On détermine l'inconnue $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x)$ grâce à la résolution de l'équation de Navier (78), compte tenu des conditions à la limite (i). En remplaçant dans (73), puis dans (74), on obtient $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x)$ et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x)$.

Si les forces volumiques dérivent d'un potentiel,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad (80)$$

on cherche les déplacements sous la forme

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla}\varphi, \quad (81)$$

où φ est le *potentiel de déplacement*. L'équation (77) s'écrit alors

$$(\lambda + \mu)(\partial_{ijj}\varphi) + \mu\partial_i\Delta\varphi = \partial_i\Phi, \quad \forall i,$$

$$\partial_i((\lambda + 2\mu)\Delta\varphi) = \partial_i\Phi, \quad \forall i$$

ou encore, sous réserve de connexité,

$$\Delta\varphi = \frac{\Phi + C}{\lambda + 2\mu}, \quad (82)$$

où C est une constante arbitraire. L'équation de Navier se réduit donc à une équation de Poisson d'inconnue φ (rappelons que l'équation $\Delta\varphi = 0$ est l'*équation de Laplace* [ses solutions sont les *fonctions harmoniques*] et qu'une équation de la forme $\Delta\varphi = \psi$ est une *équation de Poisson*). Si φ_p est une solution particulière de (82), toute autre solution φ est du type

$$\varphi = \varphi_p + h, \quad (83)$$

où h désigne une fonction harmonique. Il s'agit alors de choisir h pour que

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}(\varphi_p + h)$$

vérifie non seulement l'équation de Navier, mais aussi les conditions à la limite.

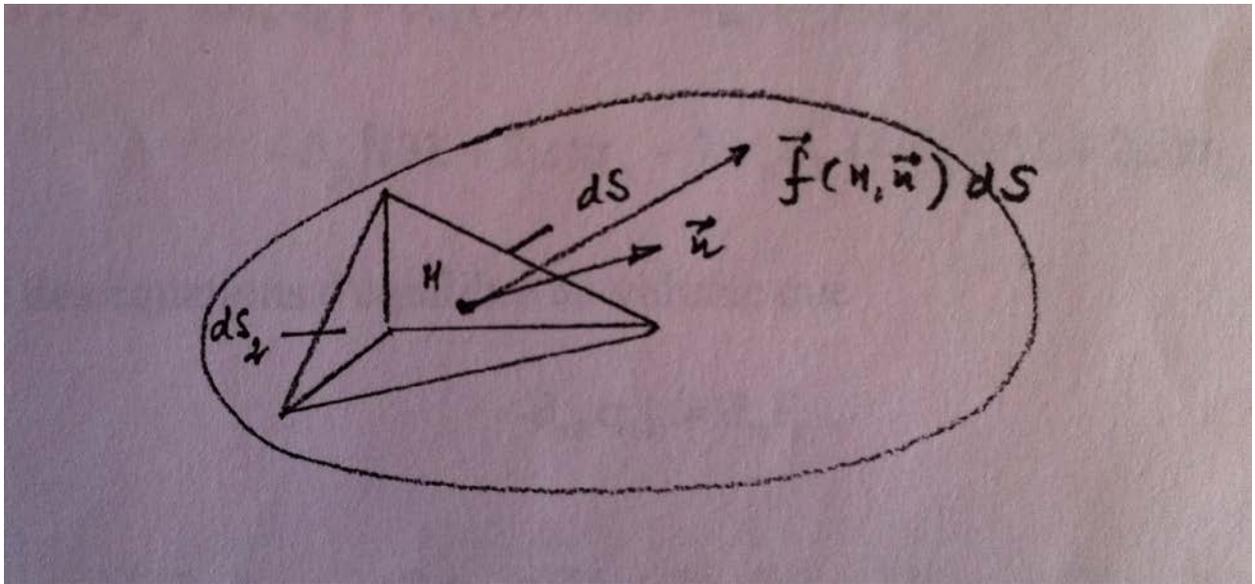
9.2 Problème aux contraintes, méthode des conditions de compatibilité

La contrainte \vec{f} sur la surface étant donnée en chaque point de la surface, il semble naturel d'essayer de déterminer d'abord le champ de contrainte σ , puis les champs ϵ et $\vec{\xi}$. Voici le *principe* de ce calcul. Une fois le champ σ trouvé, on en déduit le champ de déformation ϵ par simple substitution dans (75), puis le champ des déplacements $\vec{\xi}$ par intégration de (73). Or, la méthode d'intégration de (73), exposée à la section 6, est basée sur les relations de compatibilité de Saint Venant, conditions suffisantes d'existence d'une solution, si le solide considéré est connexe par arcs et simplement connexe, hypothèses que nous supposons satisfaites. *Nous exprimerons d'abord les conditions de compatibilité, formulées en termes des ϵ_{ij} , en termes des σ_{ij} .* Si l'on détermine ensuite les σ_{ij} de manière qu'ils vérifient ces conditions, le système (73) est intégrable et son intégration fournit les déplacements $\vec{\xi}$. Les champs ϵ et $\vec{\xi}$ étant ainsi déterminés, il reste à analyser de manière plus détaillée le calcul de σ . Ses 6 composantes indépendantes doivent donc satisfaire aux 3 équations (72) - qui n'ont pas encore été utilisées

jusqu'ici - et aux 6 équations de compatibilité, dont 3 jouent seulement le rôle de conditions à la limite (voir section 6). Finalement, nous disposons pour les 6 inconnues σ_{ij} , des 3 équations d'équilibre en volume, de 3 équations de compatibilité, de 3 conditions de compatibilité à la limite et des 3 conditions à la limite (ii). En effet, la contrainte \vec{f} sur la surface vérifie évidemment des relations analogues à celles (46) vérifiées par la contrainte intérieure \vec{T} :

$$\boxed{f_i = \sigma_{ij} n_j}, \quad (84)$$

Les f_i étant connus en tout point de la surface, ces égalités constituent bien 3 conditions à la limite pour les σ_{ij} . De façon plus précise, les égalités (46) et (11) (MP3) expriment l'équilibre de translation d'un petit tétraèdre, si l'on néglige les forces de volume vis-à-vis des forces de surface. Afin de nous convaincre de la validité de (84), découpons donc un tétraèdre infinitésimal dans le solide considéré dans son état final d'équilibre et pensons ce tétraèdre dV de manière que sa face oblique dS soit une partie de la surface du solide et que ses autres faces dS_j soient intérieures au solide.



Si M est un point de dS et si \vec{n} désigne comme d'habitude le vecteur normal unitaire extérieur à dS , l'équilibre du tétraèdre, conséquence du principe de la coupe, implique que

$$\vec{f}(M, \vec{n})dS + \sum_j \vec{T}(M, -\vec{e}_j)dS_j + \vec{F}(M)dV = 0,$$

avec les notations habituelles. Le principe de l'action et de la réaction donnant

$$\vec{T}(M, -\vec{e}_j) = -\vec{T}(M, \vec{e}_j),$$

les dS_j étant liés à dS par la relation

$$dS_j = dS n_j$$

et la force de volume étant un infiniment petit d'ordre 3 alors que les forces de surface sont d'ordre 2, nous pouvons écrire

$$f_i(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{n}}) = \sum_j T_i(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{e}}_j) n_j = \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{X}) n_j.$$

Vu (52), on peut dans les équations confondre les coordonnées actuelles \mathbf{X} et les coordonnées initiales \mathbf{x} . Avec la même approximation, on peut remplacer le vecteur normal à la surface actuelle par celui normal à la surface initiale, vecteur que nous noterons encore $\bar{\mathbf{n}}$. Finalement, il vient donc

$$f_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{n}}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j, \quad (85)$$

où \mathbf{x} représente un point de la surface. Ceci établit et précise les conditions à la limite (84).

Passons à la transcription des conditions de compatibilité (39) de Saint Venant:

$$\partial_{kk} \varepsilon_{ij} + \partial_{ij} \varepsilon_{kk} - \partial_{jk} \varepsilon_{ik} - \partial_{ik} \varepsilon_{jk} = 0. \quad (86)$$

En remplaçant les composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ par leur expression (75)

$$2\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{mn} = (3\lambda + 2\mu)\sigma_{mn} - \lambda\sigma_{rr}\delta_{mn}$$

en fonction des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$, on obtient les conditions de compatibilité en termes des contraintes. Cependant, en fait on ne se sert généralement pas de ces conditions, car on peut les remplacer par d'autres, plus simples. En effet, en sommant dans (86) - où les ε_{mn} sont exprimés en fonction des σ_{mn} - sur k , on trouve

$$\begin{aligned} & \partial_{kk} [(3\lambda + 2\mu)\sigma_{ij} - \lambda\sigma_{rr}\delta_{ij}] + \partial_{ij} [(3\lambda + 2\mu)\sigma_{kk} - 3\lambda\sigma_{rr}] \\ & - \partial_{jk} [(3\lambda + 2\mu)\sigma_{ik} - \lambda\sigma_{rr}\delta_{ik}] - \partial_{ik} [(3\lambda + 2\mu)\sigma_{jk} - \lambda\sigma_{rr}\delta_{jk}] = 0. \end{aligned}$$

Comme il résulte des équations d'équilibre en volume que

$$-\partial_{mk} \sigma_{nk} = \partial_m F_n,$$

il vient

$$(3\lambda + 2\mu)\partial_{kk} \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\partial_{kk} \sigma_{rr} + 2\mu\partial_{ij} \sigma_{kk} + (3\lambda + 2\mu)\partial_j F_i + \lambda\partial_{ji} \sigma_{rr} + (3\lambda + 2\mu)\partial_i F_j + \lambda\partial_{ij} \sigma_{rr} = 0$$

i.e.

$$(3\lambda + 2\mu)\partial_{kk} \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\partial_{kk} \sigma_{rr} + 2(\mu + \lambda)\partial_{ij} \sigma_{kk} + (3\lambda + 2\mu)(\partial_j F_i + \partial_i F_j) = 0. \quad (87)$$

La contraction sur i et j dans (87) conduit à

$$(2\mu + \lambda)\partial_{kk} \sigma_{ii} + (3\lambda + 2\mu)\partial_i F_i = 0$$

càd. à

$$\partial_{kk}\sigma_{ii} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu + \lambda} \partial_i F_i \quad (88)$$

et la substitution dans (87) donne enfin

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{2(\mu + \lambda)}{3\lambda + 2\mu} \partial_{ij}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) + (\partial_j F_i + \partial_i F_j) + \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0, \quad (89)$$

soit, en fonction du coefficient ν ,

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + \partial_{ij}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) + (1 + \nu)(\partial_j F_i + \partial_i F_j) + \frac{\nu(1 + \nu)}{1 - \nu} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (90)$$

Pour simplifier, nous supposerons dans la suite les forces volumiques indépendantes des coordonnées. Ceci est évidemment en particulier le cas si ces forces sont nulles. A ce moment les précédentes équations deviennent

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + \partial_{ij}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (91)$$

Les équations (91) sont connues sous le nom de *équations de Beltrami* ou *équations de Beltrami-Michell*. Ce sont ces égalités qui remplacent les conditions de compatibilité de Saint Venant. Les 6 inconnues σ_{ij} vérifient donc les 3 équations d'équilibre en volume (72), les 6 équations de Beltrami (91) et les 3 conditions limites (84) [système (I)]. Or, on peut tout aussi bien déterminer les σ_{ij} comme solution du système formé par les 6 équations (91), les conditions à la limite étant les 3 conditions (72) et les 3 conditions (84) [système (II)]. Il suffit de montrer que (II) entraîne (I). Cette implication est facile à prouver. De fait, (91) donne par contraction

$$\Delta(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Or, en dérivant (91) par rapport à x_j et en sommant sur j , on obtient

$$(1 + \nu)\Delta\partial_j\sigma_{ij} + \partial_i\Delta(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

de manière que

$$\Delta\partial_j\sigma_{ij} = 0.$$

Les 3 sommes $\partial_j\sigma_{ij}$ étant ainsi des fonctions harmoniques, leur nullité à la limite - qui découle des conditions limites (72) - implique leur nullité partout, si bien que (II) entraîne effectivement (I).

9.3 Problème mixte

Dans les problèmes aux déplacements (resp. aux contraintes), il nous a semblé naturel de choisir les déplacements (resp. les contraintes) comme inconnues fondamentales et de déduire les autres inconnues de ces inconnues de base. Pour les problèmes mixtes, aucune règle générale ne peut être donnée et le choix des inconnues fondamentales dépendra du cas particulier étudié. D'ailleurs, les choix préconisés dans les sous-sections 9.1 et 9.2 ne sont pas stricts et peuvent être modifiés, si la spécificité du problème considéré le suggère.

10 Exercices

Des exercices et compléments de théorie seront proposés aux séances de TD.

11 Remarque bibliographique

Ce texte a été utilisé comme référence pour un cours de Mécanique des solides déformables enseigné par l'auteur en deuxième année d'Ingénierie au Centre Universitaire de Luxembourg. L'objectif du cours ayant été de permettre aux étudiants de continuer leurs études en troisième année à l'Université de Liège, ce cours est aligné sur le cours « Éléments de mécanique du solide déformable » professé par S. Cescotto à l'ULg. La construction du cours s'étant étendue sur une période assez longue et du moins partiellement antérieure à celle de la rédaction des présentes notes, des sources peuvent avoir été oubliées. Dans ce cas l'auteur aimerait s'excuser et serait content d'ajouter les références manquantes.

12 Références

[BFR85] M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault, *Mécanique 1*, Dunod Université, 1985, 2-04-015755-7

[Bou93] J. Boutigny, *Mécanique 2*, Classes préparatoires, Vuibert, 1993, 2-7117-4242-3

[BC96] R. Boudet, A. Chauvin, *Mécanique des milieux continus*, Hermès, 1996, 2-86601-520-7

[Ces99] S. Cescotto, *Éléments de mécanique du solide déformable*, Centrale des Cours de l'A.E.E.S., 1995 et 1999

[DN96] E.J.M. Delhez, J. Nihoul, *Mécanique rationnelle*, Étienne Riga, 1996, 2-87049-048-8

[DTC99] D. Desjardins, M. Touzet-Cortina, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Dunod, 1999, 2-10-003873-7

[Gol80] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Ser. Phys., 1980, 0-201-02918-9

[Kib72] T.W.B. Kibble, *Mécanique classique*, Édiscience, 1972

[LL69] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Vol. 1 of “A Course of Theoretical Physics”), Pergamon Press, 1969

[Man66] J. Mandel, *Cours de Mécanique des Milieux continus*, Jacques Gabay, 1966, 2-87647-157-4

[Sim88] R. Simon, *Mécanique analytique*, Vol. 1 et 2, Derouaux, 1988

[Spi72] M.R. Spiegel, *Mécanique générale*, McGraw-Hill, 1972, 2-7042-0013-0

[Vio93] F. Viot, *Mécanique du point*, Dunod, 1993, 2-10-001478-1