Premier et deuxième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions

Norbert PONCIN

Résumé : L'espace des p-cochaînes locales de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, est naturellement bigradué. On ordonne totalement les termes homogènes d'une cochaîne et on représente les dérivées symboliquement par des formes linéaires sur $\mathbb{R}^m$. Ceci conduit à une méthode permettant de calculer les deux premiers espaces de cohomologie.

Mots-clés : Cohomologie de Chevalley-Eilenberg, calcul symbolique.

Classification : 17 B 56, 17 B 66

First and second cohomology space of the Lie algebra of differential operators on a manifold, with coefficients in the space of functions

Abstract : *The space of local p-cochains of the Lie algebra of differential operators on a manifold, with coefficients in the space of functions, is naturally graded. The homogeneous terms of a cochain are totally ordered and the derivatives may be symbolized by linear forms on $\mathbb{R}^m$. This leads to a method giving the first and second cohomology space.*

Key-words : *Chevalley-Eilenberg cohomology, symbolic calculus.*

Classification : *17 B 56, 17 B 66*

1 Introduction

Ce travail s'insère dans le cadre général de la théorie des déformations de l'algèbre $N = C^\infty(M)$ des fonctions d'une variété symplectique ou de Poisson.

Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique change complètement la nature des observables. Fonctions de l'espace des phases, elles sont transformées en des opérateurs sur un espace de Hilbert; au crochet de Poisson se substitue le commutateur des opérateurs. La quantification de Weyl fait apparaître le produit $*$ de Moyal-Vey,

$$f * g = fg + \nu\{f, g\} + \sum_{k\geq 2} \nu^k c_k(f, g),$$

où le second membre est une série formelle en ν, à coefficients dans les fonctions. Le paramètre ν est lié à la constante de Planck.

Vers 1975, Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer [1] lancent l'idée de négliger la représentation par opérateurs et de construire un modèle de la mécanique quantique, en déformant l'algèbre N des observables classiques. Essentiellement, on essaie de définir pour toute variété symplectique ou de Poisson, un produit déformé $*_\nu$ analogue à celui de Moyal. On munit ainsi l'espace $N_\nu = N[[\nu]]$ des séries formelles en ν à coefficients dans les fonctions, d'une structure d'algèbre associative (non commutative), à laquelle est associé le crochet d'algèbre de Lie

$$P_\nu(f, g) = \frac{1}{2\nu}(f *_\nu g - g *_\nu f).$$

Ces algèbres sont des déformations formelles de N muni du produit ordinaire resp. du crochet de Poisson. C'est la quantification par déformation : la mécanique quantique apparaît comme une déformation de la mécanique classique, liée à la prise en compte du nouveau paramètre ν; il s'agit d'une déformation du commutatif vers le non-commutatif, la trace de la non-commutativité au niveau classique étant le crochet de Poisson.

Les résultats obtenus à l'aide de ce nouveau formalisme sont physiquement significatifs.

L'étude des $*$-produits est d'abord celle de leur existence et de leur classification. Le cas des variétés symplectiques a été entièrement résolu par M. De Wilde et P.B.A. Lecomte, en 1983 [3, 4, 6], alors que celui des variétés de Poisson quelconques n'a pu être traité qu'en 1997, par M. Kontsevich [7].

Les problèmes de déformation ont mis en évidence l'importance de certaines structures algébriques liées aux variétés et des cohomologies associées. Ceci est en particulier valable pour l'espace $\mathcal{E} = A(N)_{loc,\, n.c.}$ (des applications multilinéaires, antisymétriques de $N \times \cdots \times N$ dans N, qui sont locales et nulles sur les constantes), que le crochet de Nijenhuis-Richardson [11] munit d'une structure d'algèbre de Lie graduée, et la cohomologie graduée de $\mathcal{E}$ associée à la représentation adjointe, soit $H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc}$, les indices -1 et *loc* indiquant qu'on se limite aux cochaînes locales, de poids -1. Muni de la multiplication induite, le terme $\mathcal{E}^0 = A^0(N)_{loc,\, n.c.} = gl(N)_{loc,\, n.c.}$ est une algèbre de Lie, admettant N comme espace de représentation. Si θ désigne l'application “restriction des cochaînes alternées à $\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0$”, on a

$$H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc} = H(\ker\theta) \oplus H(\mathcal{E}^0, N)_{loc},$$

de sorte que la détermination de la cohomologie de Chevalley locale de l'algèbre de Lie $\mathcal{E}^0$ des opérateurs différentiels sur M, à valeurs dans les fonctions, est une partie du calcul de la cohomologie graduée.

Dans ce papier, nous établirons le

Théorème I.1 *Si M désigne une variété de classe C^∞, de dimension $m \geq 2$, séparée, à base dénombrable et connexe, on a*

$$H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^p_{DR}(M), \quad \forall p \in \{0, 1, 2\},$$

où $H_{DR}(M)$ est la cohomologie de de Rham de M.

Donnons quelques détails. Il sera prouvé que $H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq H^p_{DR}(M)$, quel que soit $p \in \{1, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), si la version locale (i.e. relative à $M = U$, U ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$) de ce résultat est valable. Les fondements de notre méthode (conduisant à l'absence de cohomologie dans le cas $M = U$) sont la bigraduation naturelle de l'espace des p-cochaînes ($p \in \mathbb{N}^*$), l'ordre total sur l'ensemble des termes homogènes d'une cochaîne et la représentation symbolique des dérivées par des formes linéaires de $\mathbb{R}^m$. On démontrera qu'un cocycle arbitraire, de degré arbitraire est à coefficients constants. En outre, on exposera des propositions générales, donnant l'invariance sous $gl(m, \mathbb{R})$ des cocycles de degré $p \in \{1, 2\}$ ou aidant à surmonter certains problèmes de dimension. Finalement, nous appliquerons nos résultats au calcul des deux premiers espaces de cohomologie.

2 Position et réduction du problème

2.1 Cohomologies des algèbres de Lie et des algèbres de Lie graduées

Les espaces vectoriels considérés ci-dessous sont réels ou complexes et de dimension quelconque, finie ou non.

Soient une algèbre de Lie (aL) L et une représentation ρ de L sur un espace vectoriel V. Notons $\wedge^p(L, V)$ ($p \in \mathbb{Z}$).

(i) l'espace des applications p-linéaires, antisymétriques de L^p dans V, si $p > 0$,
(ii) l'espace V, si $p = 0$,
(iii) l'espace $\{0\}$, si $p < 0$

et posons

$$\wedge(L, V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \wedge^p(L, V).$$

Proposition 2.1 *L'application $\partial_\rho : \wedge(L, V) \to \wedge(L, V)$ définie,*

(i) pour $T \in \wedge^p(L, V)$ ($p \geq 0$) et $A_0, \ldots, A_p \in L$, par

$$(\partial_\rho T)(A_0, \ldots, A_p)$$
$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \rho(A_i) T(A_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, A_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} T([A_i, A_j], A_0, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, A_p),$$

où $\hat{k}$ signifie que A_k est omis et où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie de L, *(ii) pour $T \in \wedge^p(L,V)$ $(p < 0)$, par*

$$\partial_\rho T = 0,$$

est une différentielle sur $\wedge(L,V)$.

Simple calcul. ■

La cohomologie du complexe $(\wedge(L,V), \partial_\rho)$ est la *cohomologie de Chevalley* (associée à la représentation (V,ρ)) de L. L'espace $\wedge(L,V)$ des cochaînes (sur L à valeurs dans V) étant $\mathbb{Z}$-gradué et l'opérateur de cobord de Chevalley ∂_ρ étant homogène de poids 1, l'espace de cohomologie est lui-même $\mathbb{Z}$-gradué :

$$H(L,V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(L,V).$$

Définition 2.2 Une *algèbre de Lie graduée* (aLg) est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $E = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} E^p$ muni d'une multiplication $\circ$ telle que

(i) $E^a \circ E^b \subset E^{a+b}$,
(ii) $A \circ B = -(-1)^{ab} B \circ A$,
(iii) $(-1)^{ac} A \circ (B \circ C) + (-1)^{ba} B \circ (C \circ A) + (-1)^{cb} C \circ (A \circ B) = 0$
(identité de Jacobi graduée),

$$\forall a,b,c \in \mathbb{Z},\ \forall A \in E^a,\ \forall B \in E^b,\ \forall C \in E^c.$$

Exemple 2.3 Soit un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $V = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} V^p$. Nous désignons par $gl^q(V)$ $(q \in \mathbb{Z})$ l'espace des éléments de $gl(V)$ qui sont homogènes de poids q et nous posons $gl_{gr}(V) = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} gl^q(V)$. On vérifie facilement que le commutateur gradué,

$$[A,B] = AB - (-1)^{ab} BA, \quad \forall a,b \in \mathbb{Z},\ \forall A \in gl^a(V),\ \forall B \in gl^b(V),$$

munit $gl_{gr}(V)$ d'une structure d'aLg.

Définition 2.4 Une *représentation d'une aLg E* est un couple (V,ρ), où V est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué et ρ un homomorphisme d'aLg de E dans $gl_{gr}(V)$.

Soient une aLg E et une représentation (V,ρ) de E.

Définition 2.5 Une application p-linéaire $(p \geq 1)$ $T : E \times \cdots \times E \to V$ est

(i) *alternée*, si l'échange dans T de deux arguments consécutifs de degrés respectifs a et b, multiplie sa valeur par $-(-1)^{ab}$,
(ii) *homogène de poids q* $(q \in \mathbb{Z})$, si

$$T(E^{a_0} \times \cdots \times E^{a_{p-1}}) \subset V^{a_0+\cdots+a_{p-1}+q}, \quad \forall a_0,\ldots,a_{p-1} \in \mathbb{Z}.$$

On note $\wedge^p_{alt}(E,V)_q$ $(p,q\in\mathbb{Z})$ l'espace des applications p-linéaires de $E\times\cdots\times E$ dans V, qui sont alternées et homogènes de poids q (par convention, cet espace est V^q, si $p=0$ et $\{0\}$, si $p<0$) et on pose

$$\wedge_{alt}(E,V)_q=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\wedge^p_{alt}(E,V)_q.$$

La généralisation naturelle de la définition de la différentielle de Chevalley fournit un opérateur de cobord sur $\wedge_{alt}(E,V)_q$. En effet, on a la

Proposition 2.6 *L'application $\partial_\rho : \wedge_{alt}(E,V)_q \to \wedge_{alt}(E,V)_q$ nulle sur les $T\in\wedge^p_{alt}(E,V)_q$ $(p<0)$ et définie par*

$$\begin{aligned}&(\partial_\rho T)(A_0,\ldots,A_p)\\ &\quad=\sum_{i=0}^{p}(-1)^{\alpha_i}\rho(A_i)T(A_0,\ldots\hat{\imath}\ldots,A_p)+\sum_{i<j}(-1)^{\alpha_{ij}}T(A_i\circ A_j,\ A_0,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,A_p)\end{aligned}$$

sur les $T\in\wedge^p_{alt}(E,V)_q$ $(p\geq 0)$, où $A_k\in E^{a_k}$, $\alpha_i=i+a_i(a_0+\cdots+a_{i-1})$ et $\alpha_{ij}=\alpha_i+\alpha_j+a_ia_j$, est une différentielle sur $\wedge_{alt}(E,V)_q$.

Simple calcul. ■

2.2 Algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson

Voici deux exemples d'aLg particulièrement importants pour l'étude des algèbres associatives et de Lie et pour celle de leurs déformations [3].

Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe et de dimension arbitraire). On désigne par $M^p(V)$ $(p\in\mathbb{Z})$ l'espace $\mathcal{L}_{p+1}(V)$ des applications $p+1$-linéaires de V^{p+1} dans V (si $p=-1$, cet espace est conventionnellement pris égal à V et si $p<-1$, c'est $\{0\}$) et on pose

$$M(V)=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}M^p(V).$$

Si $A\in M^a(V)$ et $B\in M^b(V)$, on définit la "composée" $j_BA\in M^{a+b}(V)$ (ce qui justifie le précédent changement de graduation),

(i) si $a\leq -1$ ou $b<-1$, par 0,
(ii) si $a>-1$ et $b\geq -1$, par

$$(j_BA)(x_0,\ldots,x_{a+b})=\sum_{i=0}^{a}(-1)^{ib}A(x_0,\ldots,B(x_i,\ldots,x_{i+b}),\ldots,x_{a+b}),$$

quels que soient $x_0,\ldots,x_{a+b}\in V$.

Proposition 2.7 *La multiplication $\Delta : M(V)^2\to M(V)$ définie par*

$$A\Delta B=j_BA-(-1)^{ab}j_AB,\quad \forall A\in M^a(V),\forall B\in M^b(V),$$

munit $M(V)$ d'une structure d'aLg.

Calcul direct. ■

Désignons par $\alpha : M(V) \to M(V)$ l'opérateur d'antisymétrisation défini pour $A \in M^a(V)$ $(a \geq 0)$ par

$$(\alpha A)(x_0, \ldots, x_a) = \frac{1}{(a+1)!} \sum_{\nu} \varepsilon(\nu) A(x_{\nu_0}, \ldots, x_{\nu_a}),$$

où $x_0, \ldots, x_a \in V$, où ν décrit l'ensemble des permutations de $(0, \ldots, a)$ et où $\varepsilon(\nu)$ est la signature de ν (sur les $M^a(V)$ $(a < 0)$, α est évidemment l'identité).

Posons $A^p(V) = \alpha M^p(V)$ $(p \in \mathbb{Z})$ ($A^p(V)$ est alors l'espace des applications $(p+1)$-linéaires et antisymétriques de V^{p+1} dans V, si $p \geq 0$, l'espace V, si $p = -1$ et $\{0\}$, si $p < -1$) et

$$A(V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p(V).$$

Si $A \in A^a(V)$ et $B \in A^b(V)$, on définit le "produit intérieur" $i_B A$ par

$$i_B A = \frac{(a+b+1)!}{(a+1)!(b+1)!}\, \alpha(j_B A) \in A^{a+b}(V)$$

(si $a \leq -1$ ou $b < -1$, $i_B A$ est évidemment pris égal à 0).

Proposition 2.8 *La multiplication* $[\ ,\ ] : A(V)^2 \to A(V)$ *définie par*

$$[A, B] = i_B A - (-1)^{ab} i_A B, \quad \forall A \in A^a(V),\ \forall B \in A^b(V),$$

munit $A(V)$ *d'une structure d'aLg.*

Simple calcul. ■

L'aLg $(A(V), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Nijenhuis-Richardson de* V [11].

Les résultats suivants sont souvent utiles.

Proposition 2.9 *(i)* $\forall A \in A^a(V)$, $\forall B \in A^b(V)$ $(a, b \geq -1,\ (a, b) \neq (-1, -1))$ *:*

$$[A, B] = \frac{(a+b+1)!}{(a+1)!(b+1)!}\, \alpha(A \Delta B),$$

(ii) $\forall A \in A^a(V)$, $\forall x \in A^{-1}(V) = V$ $(a \geq 0)$ *:*

$$[A, x] = i_x A : (x_0, \ldots, x_{a-1}) \to A(x, x_0, \ \ldots, x_{a-1}), \tag{1}$$

(iii) $\forall A \in A^0(V), \forall B \in A^b(V)$ *:*

$$[A, B] = A \Delta B. \tag{2}$$

C'est évident. ■

2.3 Cohomologie graduée de l'algèbre de Nijenhuis-Richardson de l'espace $C^\infty(M)$

Soient M une variété de classe C^∞ et $N = C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur M.

Nous noterons $\mathcal{E} = A(N)_{loc,\,n.c.}$ le sous-espace des éléments de $A(N)$ qui sont locaux et nuls sur les constantes. Muni du crochet de Nijenhuis-Richardson, $\mathcal{E}$ est évidemment une sous-algèbre de Lie graduée de l'algèbre de Nijenhuis-Richardson de N. L'action de $\mathcal{E}$ sur lui-même donnée par

$$\mathrm{ad}(A)B = [A, B] \quad (A, B \in \mathcal{E}),$$

fait de $(\mathcal{E}, \mathrm{ad})$ une représentation de $\mathcal{E}$ appelée *représentation adjointe*.

Il est clair que le sous-espace $\mathcal{E}^0 = A^0(N)_{loc,\,n.c.} = gl(N)_{loc,\,n.c.}$ de $\mathcal{E}$ hérite d'une structure d'aL. Le crochet de Nijenhuis-Richardson coïncidant sur $\mathcal{E}^0$ avec le commutateur (cf. (II.2)), l'injection canonique $i : \mathcal{E}^0 \to gl(N)$ est une représentation de $\mathcal{E}^0$ sur N.

Il apparaît ainsi deux espaces différentiels

$$(\wedge_{alt}(\mathcal{E})_q, \partial) \quad (\wedge_{alt}(\mathcal{E})_q = \wedge_{alt}(\mathcal{E}, \mathcal{E})_q, \partial = \partial_{\mathrm{ad}})$$

et

$$(\wedge(\mathcal{E}^0, N), \partial) \quad (\partial = \partial_i).$$

Se limiter aux cochaînes locales semble raisonnable (une cochaîne T de $\wedge^p_{alt}(\mathcal{E})_q$ par exemple est dite *locale*, si pour tous les $A_0, \ldots, A_{p-1}$ de $\mathcal{E} = A(N)_{loc,\,n.c.}$ et tout $U \in O(M)$, l'annulation d'une restriction $A_i|_U$ entraîne celle de $T(A_0, \ldots, A_{p-1})|_U)$: nous noterons $\wedge_{alt}(\mathcal{E})_{q,loc}$ resp. $\wedge(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ les sous-espaces des cochaînes locales. Ces sous-espaces étant stabilisés par le cobord ∂ correspondant, ce sont à leur tour des espaces différentiels.

En poids -1, on peut considérer la restriction

$$\theta : T \in \wedge^p_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc} \to T|_{\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0} \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc},$$

qui est un homomorphisme d'espaces différentiels. En effet, elle est visiblement linéaire et (II.1) permet de voir que

$$\theta \circ \partial = \partial \circ \theta.$$

Ainsi $\partial \ker\theta \subset \ker\theta$ et $(\ker\theta, \partial)$ est un sous-complexe de $(\wedge_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc}, \partial)$. Soit alors la courte suite d'espaces différentiels

$$0 \to \ker\theta \xrightarrow{i} \wedge_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc} \xrightarrow{\theta} \wedge(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \to 0,$$

où i désigne l'injection de $\ker\theta$ dans $\wedge_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc}$. Comme il existe [9] un homomorphisme d'espaces différentiels

$$\mathcal{X} : \wedge(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \to \wedge_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc}$$

tel que $\theta \circ \mathcal{X} = \mathrm{id}$, la suite est exacte et se scinde. Finalement,

$$H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc} = H(\ker\theta) \oplus H(\mathcal{E}^0, N)_{loc}.$$

Le calcul de la cohomologie graduée est ainsi ramené à ceux de la cohomologie du noyau et de la cohomologie locale de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathcal{E}^0$ à valeurs dans les fonctions de M.

Ce travail est consacré au calcul des premiers espaces de la cohomologie de $\mathcal{E}^0$ opérant sur N. De manière plus précise, nous montrerons que

$$H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq H^p_{DR}(M), \quad \forall p \in \{0, 1, 2\},$$

où $H_{DM}(M)$ est la cohomologie de de Rham de M et où M est une variété de classe C^∞, séparée, à base dénombrable, connexe et de dimension supérieure ou égale à 2.

Cette étude s'insère dans le cadre général de la théorie des déformations, motivée par la recherche d'une formulation mathématique du principe de correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique et initiée vers 1975 par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans [1]. Les problèmes de déformation ont mis en lumière des structures algébriques naturellement liées aux variétés et les cohomologies qui leur sont associées, notamment l'aLg $\mathcal{E}$ et la cohomologie graduée $H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc}$ [9, 4].

Cette motivation reste plus que jamais d'actualité, en raison notamment du résultat récent de M. Kontsevich [7], selon lequel l'algèbre des fonctions des variétés de Poisson est toujours déformable : la théorie des déformations de l'algèbre des fonctions n'est donc pas confinée aux seules variétés symplectiques, mais est au contraire de portée très générale. Ceci suggère d'ailleurs fortement l'existence, dans la cohomologie graduée, de classes canoniques "universelles", liées aux déformations de N et à leur classification.

Une autre justification de notre objectif apparaît dans [10]. En effet, si $A(\Omega^1(M), N)_{loc}$ désigne l'espace des applications multilinéaires, antisymétriques, locales des 1-formes dans les fonctions, la transposée d^* de la différentielle de de Rham

$$d^* : T \in A^p(\Omega^1(M), N)_{loc} \to (d^*T : (f_0, \ldots, f_p) \to T(df_0, \ldots, df_p)) \in \mathcal{E}^p$$

engendre la courte suite d'espaces vectoriels

$$0 \to \ker d^* \to A(\Omega^1(M), N)_{loc} \xrightarrow{d^*} \mathcal{E} \to 0.$$

Il se fait que l'espace $A(\Omega^1(M), N)_{loc}$ admet une structure naturelle d'aLg pour laquelle d^* est un homomorphisme. La précédente suite est alors une courte suite exacte d'aLg, qui n'est jamais scindée et l'espace de cohomologie $H^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ est susceptible de contenir des classes admettant des prolongements dans $H^2_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc}$ qui sont des obstructions à sa scission.

2.4 Cohomologie de Čech

Dans toute la suite, M désigne une variété de dimension m, de classe C^∞, séparée, à base dénombrable et connexe (plus tard, nous supposerons également que $m \geq 2$).

Considérons un recouvrement U_i ($i \in \mathbb{N}$) de M par des domaines de cartes, qui est localement fini et contractile (i.e. tel que toute intersection finie non vide $U_{i_0 \ldots i_p} =$

$U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p}$ soit contractile; rappelons que $U\in O(M)$ est *contractile*, s'il existe $x_0\in U$ et $\alpha\in C^0([0,1]\times U,U)$ tels que $\alpha(0,x)=x$ et $\alpha(1,x)=x_0$, pour tout $x\in U$). Désignons par X, soit l'espace $\Omega(M)$ des formes de M, soit l'espace de cochaînes $\wedge(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$, où $\Omega^{-1}(M)$ resp. $\wedge^{-1}(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$ sont cependant pris égaux à $\mathbb{R}$ et non à $\{0\}$. Nous notons $C^p_q=\check{C}^p(X^q)$ $(p,q\in\mathbb{Z})$, l'espace $\{0\}$ si $p<-1$ ou $q<-1$, l'espace X^q si $p=-1$ et $q\geq -1$ et si $p\geq 0$ et $q\geq -1$, l'espace des applications qui à tout $(p+1)$-uplet $(i_0,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^{p+1}$ d'indices différents et tels que l'intersection $U_{i_0\ldots i_p}\neq\emptyset$, associent un élément de $X^q_{U_{i_0\ldots i_p}}$ (i.e. de $\mathbb{R}$, si $q=-1$ et de l'espace de même type que X^q construit sur $U_{i_0\ldots i_p}$, si $q\geq 0$) et qui sont antisymétriques en tous leurs arguments. Posons alors

$$\check{C}(X^q)=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\check{C}^p(X^q)\quad(q\geq -1).$$

Proposition 2.10 *L'application* $\delta:\check{C}(X^q)\to\check{C}(X^q)$ $(q\geq -1)$ *nulle sur les* $c\in\check{C}^p(X^q)$ $(p<-1)$ *et définie par*

$$(\delta c)_{i_0\ldots i_{p+1}}=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k c_{i_0\ldots\hat{k}\ldots i_{p+1}}$$

sur les $c\in\check{C}^p(X^q)$ $(p\geq -1)$, *où les valeurs de* c *sont restreintes à* $U_{i_0\ldots i_{p+1}}$, *est une différentielle sur* $\check{C}(X^q)$.

Vérification facile. ■

On notera que

$$\delta\in\mathcal{L}(C^p_q,\ C^{p+1}_q)\quad(p,q\in\mathbb{Z}),$$

que l'espace $\check{C}^{-1}(X^q)$ $(q\geq -1)$ n'a pas été pris égal à $\{0\}$ (pour des raisons qui apparaîtront clairement ci-dessous) et que l'opérateur de cobord δ est sur ces (-1)-cochaînes l'"application restriction" (du moins pour $q\geq 0$).

La cohomologie

$$\check{H}(M,X^q)=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\check{H}^p(M,X^q)\quad(q\geq -1)$$

du complexe $(\check{C}(X^q),\delta)$ est la *cohomologie de Čech de* M *à valeurs dans* X^q (associée au recouvrement U_i $(i\in\mathbb{N})$ considéré).

Soit φ_i $(i\in\mathbb{N})$ une partition de l'unité localement finie, subordonnée aux U_i. En vue de définir un "opérateur de recollement" k, nous posons pour $c\in\check{C}^p(X^q)$ $(p,q\geq 0)$,

$$(kc)_{i_0\ldots i_{p-1}}=\sum_i\varphi_i c_{i,i_0\ldots i_{p-1}}.$$

Notons V resp. V_i les ouverts $U_{i_0\ldots i_{p-1}}$ et $U_{i,i_0\ldots i_{p-1}}=U_i\cap V$. Si $X^q=\Omega^q(M)$, cette série localement finie est une q-forme de V, dont le caractère C^∞ résulte du fait que chaque terme est de classe C^∞ dans V_i et dans $V\setminus\operatorname{supp}\varphi_i$, donc dans V. Si $X^q=\wedge^q(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$

(et si les notations du genre E_Ω désignent comme précédemment les espaces de même type que E construits sur Ω), on a pour $A_0, \ldots, A_{q-1} \in \mathcal{E}_V^0$,

$$\left(\sum_i \varphi_i c_{i,i_0\ldots i_{p-1}}\right)(A_0, \ldots, A_{q-1}) = \sum_i \varphi_i c_{i,i_0\ldots i_{p-1}}(A_0|_{V_i}, \ldots, A_{q-1}|_{V_i}) \in N_V,$$

de sorte que la série appartient bien à $\wedge^q(\mathcal{E}_V^0, N_V)_{loc}$. Ainsi $kc \in \check{C}^{p-1}(X^q)$ et

$$k \in \mathcal{L}(C_q^p,\ C_q^{p-1}) \quad (p \in \mathbb{Z},\ q \geq 0)$$

(à condition de poser $kc = 0$, si $c \in \check{C}^p(X^q)$ $(p \leq -1,\ q \geq 0)$).

Proposition 2.11 *Quels que soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 0$, on a la formule d'homotopie*

$$\delta \circ k + k \circ \delta = \mathrm{id}_{C_q^p}.$$

Cette formule est triviale pour $p \leq -2$. Pour $p = -1$, elle se réduit à $k \circ \delta = \mathrm{id}_{X^q}$, égalité évidemment valable, δ étant l'application restriction et k l'opérateur de recollement. Si $c \in C_q^p$ $(p, q \geq 0)$, on a

$$\begin{aligned}
&(\delta kc)_{i_0\ldots i_p} + (k\delta c)_{i_0\ldots i_p} \\
&= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j (kc)_{i_0\ldots\hat{\imath}_j\ldots i_p} + \sum_{i_{-1}} \varphi_{i_{-1}}(\delta c)_{i_{-1},i_0\ldots i_p} \\
&= \sum_{j=0}^{p}\sum_{i_{-1}}(-1)^j \varphi_{i_{-1}} c_{i_{-1},i_0\ldots\hat{\imath}_j\ldots i_p} + \sum_{i_{-1}}\sum_{j=-1}^{p}(-1)^{j+1}\varphi_{i_{-1}} c_{i_{-1},i_0\ldots\hat{\imath}_j\ldots i_p} \\
&= \sum_i \varphi_i c_{i_0\ldots i_p} \\
&= c_{i_0\ldots i_p}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.12 *Quels que soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 0$, on a*

$$\check{H}^p(M, X^q) = \{0\}.$$

Cette conséquence immédiate de 2.11 est due aux définitions des (-1)-cochaînes de Čech et de leur bord, adoptées ici. En effet, la formule d'homotopie montre que

$$k \in Isom(\check{C}^0(X^q) \cap \ker\delta,\ X^q) \quad (q \geq 0)$$

(d'inverse δ). Donc, si l'on pose $\check{C}^{-1}(X^q) = \{0\}$, il vient

$$\check{H}^0(M, X^q) \simeq X^q.$$

2.5 Passage de la solution locale à la solution globale

Rappelons que l'objectif de ce travail est de prouver que

$$H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq H^q_{DR}(M), \quad \forall q \in \{0, 1, 2\},$$

M étant une variété vérifiant les conditions imposées en II.4.

Le cas $q = 0$ est trivial. En effet, les 0-cocycles de Chevalley et de de Rham sont manifestement isomorphes aux réels, de sorte que

$$H^0(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq \mathbb{R} \simeq H^0_{DR}(M).$$

Proposition 2.13 *Soit n un entier strictement positif. Si*

$$H^q(\mathcal{E}^0_U, N_U)_{loc} = \{0\},$$

pour tout $q \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout U domaine contractile de coordonnées locales de M, alors

$$H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq H^q_{DR}(M),$$

quel que soit $q \in \{1, \ldots, n\}$.

En vue d'établir ce théorème de réduction, désignons par (X, ∂) le complexe $(\Omega(M), d)$ ou le complexe $(\wedge(\mathcal{E}^0, N)_{loc}, \partial)$, où X^{-1} est - comme ci-dessus - égal à $\mathbb{R}$ et où ∂ de $X^{-1} = \mathbb{R}$ dans $X^0 = N$ est l'injection canonique. Il est clair que le q-ième espace de cohomologie de chacun de ces complexes redéfinis coïncide avec celui du complexe original correspondant, sauf pour $q = 0$, car $H^0(X, \partial) = \{0\}$.

Signalons encore que ∂ opère naturellement sur les cochaînes de Čech. En effet, si l'on définit ∂ par $\partial c = 0$ sur les $c \in C^p_q$ ($p < -1$ ou $q < -1$) et par

$$(\partial c)_{i_0 \ldots i_p} = \partial c_{i_0 \ldots i_p},$$

sur les $c \in C^p_q$ ($p \geq -1$ et $q \geq -1$),

$$\partial \in \mathcal{L}(C^p_q,\ C^p_{q+1}) \quad (p, q \in \mathbb{Z}).$$

On remarquera que ∂ de C^p_{-1} dans C^p_0 ($p \geq -1$) est l'injection et que

$$\partial \circ \delta = \delta \circ \partial.$$

Considérons à présent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C_{-1}^{-1}=\mathbb{R} & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & C_0^{-1}=X^0 & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & \cdots & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & C_q^{-1}=X^q & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & \cdots \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & & & \delta\downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C_{-1}^{0}=\check{C}^0(\mathbb{R}) & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & C_0^{0} & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & \cdots & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & C_q^{0} & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & \cdots \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & & & \delta\downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & & & \delta\downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C_{-1}^{p}=\check{C}^p(\mathbb{R}) & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & C_0^{p} & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & \cdots & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & C_q^{p} & \stackrel{\partial}{\rightarrow} & \cdots \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & & & \delta\downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Lemme 2.14 *Les lignes et les colonnes du précédent diagramme sont exactes, sauf la ligne du haut et la colonne de gauche. Cependant, si (X,∂) est le complexe (redéfini) de Chevalley, les lignes ne sont exactes que jusqu'en $q=n$ et seulement sous l'hypothèse de la proposition 2.13.*

L'exactitude des colonnes n'est autre chose qu'une réécriture du corollaire 2.12.

En ce qui concerne les lignes, notons d'abord que pour tout domaine contractile U d'une carte de M,

$$H^q(X_U,\partial)=\{0\},$$

quel que soit $q\in\mathbb{Z}$, dans la première interprétation de (X,∂) et pour tout $q\leq n$, dans la seconde. Cette cohomologie étant ainsi nulle (du moins jusqu'au degré n) sur les intersections $U_{i_0\ldots i_p}$, les lignes sont (partiellement) exactes pour $p\geq 0$. De manière plus précise, considérons $c\in C_q^p\cap\ker\partial$, avec $p\geq 0$ et $q\in\mathbb{Z}$ resp. $q\leq n$. Il est clair que $c\in\partial C_{q-1}^p$, si $q\leq -1$. Sinon,

$$0=(\partial c)_{i_0\ldots i_p}=\partial c_{i_0\ldots i_p},$$

de sorte que $c_{i_0\ldots i_p}$ est un q-cocycle de $(X_{U_{i_0\ldots i_p}},\partial)$ et donc un bord $\partial b_{i_0\ldots i_p}$ ($b_{i_0\ldots i_p}\in X^{q-1}_{U_{i_0\ldots i_p}}$). On peut alors définir $b\in C_{q-1}^p$ tel que $c=\partial b$. ∎

La proposition 2.13 peut maintenant être prouvée comme suit.

Posons

$$Q_s^r = \frac{C_s^r \cap \ker \delta \circ \partial}{\delta C_s^{r-1} + \partial C_{s-1}^r} \quad (r, s \in \mathbb{Z})$$

et remarquons que pour $q > 0$,

$$Q_q^{-1} = \frac{X^q \cap \ker \delta \circ \partial}{\partial X^{q-1}} = H^q(X, \partial) \quad (\text{i.e. } H^q_{DR}(M) \text{ resp. } H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc})$$

et

$$Q_{-1}^q = \frac{\check{C}^q(\mathbb{R}) \cap \ker \delta \circ \partial}{\delta \check{C}^{q-1}(\mathbb{R})} = \check{H}^q(M, \mathbb{R}).$$

Ces résultats sont dus aux faits que δ est l'"application restriction" sur C_q^{-1} $(q \geq 0)$ resp. que ∂ est l'injection de C_{-1}^q dans C_0^q $(q \geq -1)$.

Soient maintenant $p \geq -1$ et $q \in \mathbb{Z}$ ou $q \leq n$ (selon l'interprétation de (X, ∂)). Considérons l'application

$$\varphi_q^p : \left[c_q^p\right] \in Q_q^p \to \left[c_{q-1}^{p+1}\right] \in Q_{q-1}^{p+1},$$

où c_{q-1}^{p+1} est tel que

$$\delta c_q^p = \partial c_{q-1}^{p+1}.$$

En effet, comme $c_q^p \in C_q^p \cap \ker \delta \circ \partial$, il découle de 2.14 que $\delta c_q^p \in C_q^{p+1} \cap \ker \partial = \partial C_{q-1}^{p+1}$. Ainsi $\delta c_q^p = \partial c_{q-1}^{p+1}$, avec $c_{q-1}^{p+1} \in C_{q-1}^{p+1} \cap \ker \delta \circ \partial$.

L'application φ_q^p est bien définie i.e. si $c_q^{\prime p}$ est tel que

$$c_q^{\prime p} - c_q^p = \delta b_q^{p-1} + \partial b_{q-1}^p \quad (b_q^{p-1} \in C_q^{p-1},\ b_{q-1}^p \in C_{q-1}^p)$$

et si $c_{q-1}^{\prime p+1}$ vérifie

$$\delta c_q^{\prime p} = \partial c_{q-1}^{\prime p+1},$$

alors

$$c_{q-1}^{\prime p+1} - c_{q-1}^{p+1} \in \delta C_{q-1}^p + \partial C_{q-2}^{p+1}.$$

De fait, $\partial c_{q-1}^{\prime p+1} - \partial c_{q-1}^{p+1} = \delta(c_q^{\prime p} - c_q^p) = \partial \delta b_{q-1}^p$. Ainsi $c_{q-1}^{\prime p+1} - c_{q-1}^{p+1} - \delta b_{q-1}^p \in C_{q-1}^{p+1} \cap \ker \partial = \partial C_{q-2}^{p+1}$, de sorte qu'on a bien $c_{q-1}^{\prime p+1} - c_{q-1}^{p+1} \in \delta C_{q-1}^p + \partial C_{q-2}^{p+1}$.

Finalement,

$$\varphi_q^p \in \mathcal{L}(Q_q^p, Q_{q-1}^{p+1}) \quad (p \geq -1,\ q \in \mathbb{Z} \text{ resp. } q \leq n).$$

En utilisant l'exactitude des colonnes établie en 2.14, on prouve de manière analogue que, si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 0$, l'application

$$\psi_q^p : \left[c_{q-1}^{p+1}\right] \in Q_{q-1}^{p+1} \to \left[c_q^p\right] \in Q_q^p,$$

où c_q^p vérifie

$$\partial c_{q-1}^{p+1} = \delta c_q^p,$$

est bien définie et linéaire :

$$\psi_q^p \in \mathcal{L}(Q_{q-1}^{p+1}, Q_q^p) \quad (p \in \mathbb{Z},\ q \geq 0).$$

Il est clair que pour $p \geq -1$ et $q \geq 0$ resp. $0 \leq q \leq n$, φ_q^p et ψ_q^p sont deux isomorphismes inverses.

Considérons à présent la composée $\psi_q = \psi_q^{-1} \circ \psi_{q-1}^0 \circ \cdots \circ \psi_1^{q-2} \circ \psi_0^{q-1}$ $(q > 0)$:

$$\check{H}^q(M, \mathbb{R}) = Q_{-1}^q \overset{\psi_0^{q-1}}{\longrightarrow} Q_0^{q-1} \overset{\psi_1^{q-2}}{\longrightarrow} \cdots \overset{\psi_{q-1}^0}{\longrightarrow} Q_{q-1}^0 \overset{\psi_q^{-1}}{\longrightarrow} Q_q^{-1} = H^q(X, \partial). \tag{3}$$

Si (X, ∂) désigne le complexe redéfini de de Rham, les ψ_j^i $(i \in \{-1, \ldots, q-1\}$, $j \in \{0, \ldots, q\})$ sont des isomorphismes, de sorte que

$$\check{H}^q(M, \mathbb{R}) \simeq H_{DR}^q(M) \quad (q > 0). \tag{4}$$

De manière analogue, si (X, ∂) est le complexe redéfini de Chevalley et si $0 < q \leq n$, la composée ψ_q est un isomorphisme et on a

$$H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq H_{DR}^q(M) \quad (0 < q \leq n).$$

■

Remarques 2.15 (i) Le résultat

$$H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \simeq H_{DR}^q(M) \quad (q \in \{0, 1, 2\})$$

que nous nous proposons d'établir (et qui vient d'être ramené à sa version locale), permet de voir que les premiers espaces de la cohomologie de Chevalley ne dépendent pas du choix de la structure différentielle de M, à condition que sa topologie soit conservée.

(ii) On notera également que si l'on identifie les cohomologies de Čech et de de Rham, l'application linéaire (3) associe à toute q-classe de de Rham, une q-classe de Chevalley et ceci quel que soit $q > 0$ (et indépendamment de l'hypothèse - de nullité des premiers espaces de la cohomologie de Chevalley des domaines contractiles de cartes - du théorème de réduction 2.13).

3 Graduation et symbolisation des cochaînes

3.1 Rappels et exemples

Le théorème suivant dû à J. Peetre [12] sera utile dans la suite.

Proposition 3.1 *Soient une variété M, des fibrés vectoriels $E_0, \ldots, E_p$ et F sur M et une application $(p+1)$-linéaire et locale*

$$O : \Gamma(E_0) \times \cdots \times \Gamma(E_p) \to \Gamma(F),$$

où $\Gamma(E_i)$ $(i \in \{0, \ldots, p\})$ et $\Gamma(F)$ désignent les espaces des sections de classe C^∞ de E_i resp. F. Si U est un domaine de carte de M (de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^m)$) au-dessus duquel les E_i et F se trivialisent (par φ_i et ψ respectivement), la restriction de O à U

$$O|_U : C^\infty(U, \bar{E}_0) \times \cdots \times C^\infty(U, \bar{E}_p) \to C^\infty(U, \bar{F}),$$

où les $\bar{E}_i$ et $\bar{F}$ sont les fibres types des E_i et de F, s'écrit

$$O|_U(\sigma_0, \ldots, \sigma_p) = \sum_{\mu_0, \ldots, \mu_p} O_{\mu_0, \ldots, \mu_p}\left(D^{\mu_0}\sigma_0, \ldots, D^{\mu_p}\sigma_p\right),$$

la série $(\mu_k = (\mu_{k,1}, \ldots, \mu_{k,m}) \in \mathbb{N}^m,\ \forall k \in \{0, \ldots, p\})$ étant localement finie et les coefficients

$$O_{\mu_0, \ldots, \mu_p} \in C^\infty(U, \mathcal{L}_{p+1}(\bar{E}_0 \times \ldots \times \bar{E}_p, \bar{F}))$$

étant univoquement déterminés par $O|_U$ (les arguments $D^{\mu_k}\sigma_k$ $(k \in \{0, \ldots, p\})$ sont évidemment les fonctions $D^{\mu_k}\sigma_k : x \in U \to \left(D_{x^1}^{\mu_{k,1}} \ldots D_{x^m}^{\mu_{k,m}}\sigma_k\right)(x) \in \bar{E}_k$).

Rappelons qu'en analyse on associe à tout opérateur différentiel linéaire et à coefficients constants

$$Af = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha D^\alpha f$$

$(\Omega \in O(\mathbb{R}^m),\ f \in C^\infty(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m,\ k \in \mathbb{N},\ A_\alpha \in \mathbb{R})$ son polynôme caractéristique ou symbolisant

$$\mathcal{A}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \xi^\alpha$$

$(\xi \in \mathbb{R}^{m^*}, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m})$. L'opérateur A étant complètement déterminé par $(A.)(x_0) \in (\vee^{\leq k}\mathbb{R}^{m^*})^* \simeq \vee^{\leq k}\mathbb{R}^m$, où x_0 désigne un point arbitraire de $\mathbb{R}^m$ ($\vee^{\leq k}\mathbb{R}^{m^*}$ et $\vee^{\leq k}\mathbb{R}^m$ sont les espaces des tenseurs symétriques de degré $\leq k$ covariants resp. contravariants sur $\mathbb{R}^m$ i.e. les espaces des polynômes de degré $\leq k$ sur $\mathbb{R}^m$ resp. $\mathbb{R}^{m^*}$), il semble naturel de le représenter par un polynôme sur $\mathbb{R}^{m^*}$; ceci justifie la décision de symboliser $D^\alpha f$ par ξ^α, $\xi \in \mathbb{R}^{m^*}$. L'intérêt de cette correspondance biunivoque $A \rightleftharpoons \mathcal{A}$ découle du fait que toute identité algébrique sans division entre polynômes symbolisants, reste exacte entre les opérateurs correspondants et inversement : à la manipulation des opérateurs de dérivation se substitue ainsi celle de leurs polynômes caractéristiques, évidemment de loin plus aisée.

Soient à présent Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, V et W des espaces vectoriels réels de dimension finie et

$$O \in \mathcal{L}(C^\infty(\Omega, V),\ C^\infty(\Omega, W))_{loc}.$$

Il résulte de la proposition 3.1 que O a la forme

$$O = \sum_\mu O_\mu(D^\mu.), \tag{5}$$

où la série est localement finie et où $O_\mu \in C^\infty(\Omega, \mathcal{L}(V,W))$. L'opérateur O étant entièrement déterminé par ses valeurs sur les fv ($f \in C^\infty(\Omega)$, $v \in V$) et $O(fv)$ étant donné par

$$O(fv) = \sum_\mu O_\mu((D^\mu f)v),$$

il s'impose de définir le *polynôme symbolisant* $\emptyset$ de O en posant

$$\emptyset(\nu; v) = \sum_\mu O_\mu(v)\nu^\mu,$$

où $\nu \in \mathbb{R}^{m^*}$. On notera que

$$\emptyset \in C^\infty(\Omega, \vee\mathbb{R}^m \otimes \mathcal{L}(V,W)).$$

Exemple 3.2 Considérons le cas particulier $V = W = \mathbb{R}$. De manière plus précise, soit $A \in \mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega = gl(C^\infty(\Omega))_{loc,n.c.} = \mathcal{L}(C^\infty(\Omega),\ C^\infty(\Omega))_{loc,n.c.}$. Si l'on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$ à l'aide de l'isomorphisme $\theta \to \theta(1)$, il découle de (5) que A s'écrit

$$A = \sum_{\alpha \neq 0} A_\alpha D^\alpha \quad (A_\alpha \in N = C^\infty(\Omega)).$$

Nous dirons qu'un opérateur $A \in \mathcal{E}^0$ est différentiel, s'il est de la forme

$$A = \sum_{0<|\alpha|\leq r} A_\alpha D^\alpha \quad (r \in \mathbb{N}^*,\ A_\alpha \in N)$$

et nous noterons Diff^r ($r \in \mathbb{N}^*$) le sous-espace (de $\mathcal{E}^0$) des opérateurs différentiels homogènes d'ordre r

$$A^r = \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha D^\alpha.$$

Conformément à ce qui précède,

$$A \in \mathcal{E}^0 \quad \text{et} \quad A^r \in \mathrm{Diff}^r$$

sont représentés symboliquement par

$$\mathcal{A}(\xi) = \sum_{\alpha\neq 0} A_\alpha \xi^\alpha \quad \text{resp. } \mathcal{A}^r(\xi) = \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha \xi^\alpha,$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^{m^*}$. On a

$$\mathcal{A} \in C^\infty(\Omega,\ \vee^{\neq 0}\mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^r \in C^\infty(\Omega, \vee^r\mathbb{R}^m),$$

où $\vee^{\neq 0}\mathbb{R}^m$ ($\vee^r\mathbb{R}^m$) désigne l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^{m^*}$ qui sont sans terme indépendant (homogènes de degré r). Il est clair que *la symbolisation* $A^r \simeq \mathcal{A}^r$ *est un isomorphisme de l'espace vectoriel* Diff^r *sur l'espace vectoriel* $C^\infty(\Omega, \vee^r\mathbb{R}^m)$: *dans la suite, nous identifierons ces espaces.*

Exemple 3.3 Traitons, pour terminer, le cas $V = \vee^r \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}$. Soit une 1-cochaîne

$$T \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \quad (\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega,\ N = C^\infty(\Omega))$$

et soit T_r ($r \in \mathbb{N}^*$) la restriction de T à $\mathrm{Diff}^r \simeq C^\infty(\Omega, \vee^r \mathbb{R}^m)$:

$$T_r \in \mathcal{L}(C^\infty(\Omega,\ \vee^r \mathbb{R}^m),\ C^\infty(\Omega))_{loc}.$$

Vu (5), on a pour $f \in C^\infty(\Omega)$ et $P^r \in \vee^r \mathbb{R}^m$,

$$T_r(fP^r) = \sum_\lambda \tau^r_\lambda((D^\lambda f)P^r), \tag{6}$$

avec $\tau^r_\lambda \in C^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\vee^r \mathbb{R}^m, \mathbb{R}))$. Le polynôme symbolisant de T_r est donc donné par

$$\mathcal{T}_r(\eta; P^r) = \sum_\lambda \tau^r_\lambda(P^r)\eta^\lambda \quad (\eta \in \mathbb{R}^{m^*})$$

et on a

$$\mathcal{T}_r \in C^\infty(\Omega, \vee \mathbb{R}^m \otimes \mathcal{L}(\vee^r \mathbb{R}^m, \mathbb{R})).$$

3.2 Décomposition des cochaînes

Soient encore $\Omega \in O(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$, $N = C^\infty(\Omega)$, $T \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ et $A \in \mathcal{E}^0$. Comme

$$A = \sum_{\alpha \neq 0} A_\alpha D^\alpha = \sum_{r=1}^\infty \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha D^\alpha = \sum_{r=1}^\infty A^r,$$

où $A^r = \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha D^\alpha \simeq \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha (.)^\alpha$ et où la série sur r est localement finie, il résulte de la localité de T et de (6) que

$$T(A) = \sum_{r=1}^\infty T_r(A^r) = \sum_{r=1}^\infty \sum_\lambda \tau^r_\lambda(D^\lambda A^r).$$

Dans la suite, nous graduerons non seulement par le degré r, mais aussi par l'ordre $a = |\lambda|$. En effet,

$$T(A) = \sum_{r=1}^\infty \sum_{a=0}^\infty \sum_{|\lambda|=a} \tau^r_\lambda(D^\lambda A^r),$$

avec une série sur a qui est, pour chaque r, localement finie. Si l'on pose alors

$$T^a_r(A^r) = \sum_{|\lambda|=a} \tau^r_\lambda(D^\lambda A^r) \quad (a \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}^*),$$

on peut écrire

$$T = \sum_{r=1}^\infty \sum_{a=0}^\infty T^a_r.$$

On obtient ainsi une double graduation des cochaînes $T \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$. Nous appellerons *monôme de* T *de (bi)degré* $\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix}$, la somme T_r^a des termes de T qui ne sont pas identiquement nuls a priori sur les $A^r \in C^\infty(\Omega,\ \vee^r \mathbb{R}^m)$ et qui dérivent les coefficients des A^r exactement a fois. Il est clair que

$$T = 0 \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{N}^* : T_r^a = 0.$$

De fait, si $T = 0$, les coefficients τ_λ^r sont tous nuls (car ils sont univoquement déterminés par les T_r), donc $T_r^a = 0$ quels que soient a et r.

Ce qui vient d'être établi pour les 1-cochaînes, reste évidemment valable - mutatis mutandis - pour les cochaînes de degré $p \geq 2$: toute cochaîne $T \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ se décompose sous la forme

$$T = \sum_{r_0,\ldots,r_{p-1}=1}^{\infty} \ \sum_{a_0,\ldots,a_{p-1}=0}^{\infty} T_{r_0 \ldots r_{p-1}}^{a_0 \ldots a_{p-1}}, \tag{7}$$

où

$$T_{r_0\ldots r_{p-1}}^{a_0\ldots a_{p-1}}\left(A_0^{r_0}, \ldots, A_{p-1}^{r_{p-1}}\right) = \sum_{|\lambda_i|=a_i,\ \forall i} \tau_{\lambda_0\ldots\lambda_{p-1}}^{r_0\ldots r_{p-1}}\left(D^{\lambda_0} A_0^{r_0}, \ldots, D^{\lambda_{p-1}} A_{p-1}^{r_{p-1}}\right), \tag{8}$$

avec

$$\tau_{\lambda_0\ldots\lambda_{p-1}}^{r_0\ldots r_{p-1}} \in C^\infty(\Omega,\ \mathcal{L}_p(\vee^{r_0}\mathbb{R}^m \times \cdots \times \vee^{r_{p-1}}\mathbb{R}^m, \mathbb{R})).$$

Afin de simplifier l'écriture, nous poserons d'ordinaire $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{p-1})$, $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_{p-1})$, $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})$, ... et nous utiliserons des notations telles que $T_{\vec{r}}^{\vec{a}}$, $\tau_{\vec{\lambda}}^{\vec{r}}$, ... En sus du résultat ci-dessus relatif à la nullité d'une cochaîne et de ses monômes, il importe de signaler qu'il résulte de l'antisymétrie des cochaînes, que *si* $T \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ *contient un certain monôme* $T_{\vec{r}}^{\vec{a}}$, *il renferme également les monômes* $T_{\nu\vec{r}}^{\nu\vec{a}}$, *où* ν *parcourt l'ensemble des permutations de* $0, \ldots, p-1$, *où* $\nu\vec{a} = (a_{\nu_0}, \ldots, a_{\nu_{p-1}})$ *et* $\nu\vec{r} = (r_{\nu_0}, \ldots, r_{\nu_{p-1}})$ *et où*

$$T_{\nu\vec{r}}^{\nu\vec{a}}\left(A_{\nu_0}^{r_{\nu_0}}, \ldots, A_{\nu_{p-1}}^{r_{\nu_{p-1}}}\right) = \operatorname{sign}(\nu)\ T_{\vec{r}}^{\vec{a}}\left(A_0^{r_0}, \ldots, A_{p-1}^{r_{p-1}}\right). \tag{9}$$

Nous ordonnerons les degrés $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ par l'ordre lexicographique associé à l'ordre total $\leq$ défini par

$$\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a' \\ r' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + r < a' + r' \\ \text{ou} \\ a + r = a' + r' \ \text{ et } \ r < r' \end{cases} \qquad (a, a' \in \mathbb{N};\ r, r' \in \mathbb{N}^*). \tag{10}$$

La relation d'équivalence

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vec{a'} \\ \vec{r'} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a'} \\ \vec{r'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu\vec{a} \\ \nu\vec{r} \end{pmatrix}$$

partitionne l'ensemble des degrés en classes finies, le plus petit représentant de chaque classe étant le permuté bien ordonné i.e. le permuté $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \leq \cdots \leq \begin{pmatrix} a_{p-1} \\ r_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Vu (9), toute cochaîne est complètement déterminée par ses monômes de degré bien ordonné.

3.3 Représentation symbolique des monômes et des cochaînes

Les notations utilisées ci-dessous, sont celles des paragraphes précédents.

Rappelons d'abord que la restriction T_r ($r \in \mathbb{N}^*$) de $T \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ à $\mathrm{Diff}^r \simeq C^\infty(\Omega,\ \vee^r \mathbb{R}^m)$ a la forme

$$T_r(A^r) = \sum_\lambda \tau^r_\lambda(D^\lambda A^r)$$

(où la série est localement finie et où les coefficients $\tau^r_\lambda \in C^\infty(\Omega,\ \mathcal{L}(\vee^r \mathbb{R}^m, \mathbb{R}))$ sont univoquement déterminés par T_r) et admet le polynôme symbolisant

$$\mathcal{T}_r \in C^\infty(\Omega,\ \vee \mathbb{R}^m \otimes \mathcal{L}(\vee^r \mathbb{R}^m, \mathbb{R}))$$

défini par

$$\mathcal{T}_r(\eta; P^r) = \sum_\lambda \tau^r_\lambda(P^r)\eta^\lambda.$$

Un monôme

$$T^a_r(A^r) = \sum_{|\lambda|=a} \tau^r_\lambda(D^\lambda A^r)$$

de T est donc à symboliser par

$$\mathcal{T}^a_r(\eta; P^r) = \sum_{|\lambda|=a} \tau^r_\lambda(P^r)\eta^\lambda,$$

de sorte que

$$\mathcal{T}^a_r \in C^\infty(\Omega,\ \vee^a \mathbb{R}^m \otimes \mathcal{L}(\vee^r \mathbb{R}^m, \mathbb{R})).$$

De plus, la cochaîne

$$T(A) = \sum_{r=1}^\infty T_r(A^r) = \sum_{r=1}^\infty \sum_\lambda \tau^r_\lambda(D^\lambda A^r),$$

où $A = \sum_{r=1}^\infty A^r$ (avec une série localement finie), sera représentée par

$$\mathcal{T}(\eta; P) = \sum_{r=1}^\infty \mathcal{T}_r(\eta; P^r) = \sum_{r=1}^\infty \sum_\lambda \tau^r_\lambda(P^r)\eta^\lambda,$$

où $P \in \vee^{\neq 0}\mathbb{R}^m$ et où les P^r sont les parties homogènes de P. On peut considérer $\mathcal{T}$ comme série formelle en $\eta \in \mathbb{R}^{m^*}$ à coefficients dans les formes linéaires sur $\vee^{\neq 0}\mathbb{R}^m$, qui est de classe C^∞ en $x \in \Omega$ et dont la série sur λ est localement finie pour chaque r et comme application linéaire en $P \in \vee^{\neq 0}\mathbb{R}^m$ à valeurs dans les polynômes en $\eta \in \mathbb{R}^{m^*}$, dépendant de manière C^∞ de $x \in \Omega$.

La correspondance entre les monômes T^a_r des 1-cochaînes (les 1-cochaînes) et les applications de classe C^∞ en $x \in \Omega$ et à valeurs dans les polynômes homogènes de degré a en $\eta \in \mathbb{R}^{m^*}$, eux-mêmes à valeurs dans les formes linéaires sur $\vee^r\mathbb{R}^m$ (les séries formelles du précédent type, où la série sur λ est localement finie pour chaque r) est évidemment biunivoque.

Les considérations ci-dessus se généralisent aux p-cochaînes T $(p \geq 2)$ et à leurs monômes $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ $(\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{N}^p,\ \vec{r} = (r_0, \ldots, r_{p-1}) \in \mathbb{N}^{*p})$.

En effet, vu (8), le monôme $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ admet le polynôme symbolisant

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\vec{a}}_{\vec{r}} &= \mathcal{T}^{\vec{a}}_{\vec{r}}\,(\eta^0, \ldots, \eta^{p-1};\ P^{r_0}_0, \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-1}) \\ &= \sum_{|\lambda_i| = a_i,\ \forall i} \tau^{\vec{r}}_{\vec{\lambda}}\,(P^{r_0}_0, \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-1})\,(\eta^0)^{\lambda_0} \ldots (\eta^{p-1})^{\lambda_{p-1}}.\end{aligned} \tag{11}$$

La cochaîne T est alors symbolisée par (cf. (7))

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \mathcal{T}(\eta^0, \ldots, \eta^{p-1};\ P_0, \ldots, P_{p-1}) \\ &= \sum_{r_0, \ldots, r_{p-1}=1}^{\infty} \sum_{\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}} \tau^{\vec{r}}_{\vec{\lambda}}\,(P^{r_0}_0, \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-1})\,(\eta^0)^{\lambda_0} \ldots (\eta^{p-1})^{\lambda_{p-1}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Remarquons que si l'on pose $P^{r_i}_i = \sum_{|\alpha_i| = r_i} P_{i,\alpha_i}(.)^{\alpha_i}$ $(i \in \{0, \ldots, p-1\})$, les coefficients de $\mathcal{T}^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ et $\mathcal{T}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}\tau^{\vec{r}}_{\vec{\lambda}}\,(P^{r_0}_0, \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-1}) &= \sum_{|\alpha_i| = r_i,\ \forall i} \tau^{\vec{r}}_{\vec{\lambda}}((.)^{\alpha_0}, \ldots, (.)^{\alpha_{p-1}})\ P_{0,\alpha_0} \ldots P_{p-1,\alpha_{p-1}} \\ &= \sum_{|\alpha_i| = r_i,\ \forall i} \tau^{\vec{\alpha}}_{\vec{\lambda}}\ P_{0,\alpha_0} \ldots P_{p-1,\alpha_{p-1}},\end{aligned} \tag{13}$$

où $\tau^{\vec{\alpha}}_{\vec{\lambda}} = \tau^{\vec{r}}_{\vec{\lambda}}\,((.)^{\alpha_0}, \ldots, (.)^{\alpha_{p-1}}) \in N$. Dans la suite, nous utiliserons généralement cette nouvelle forme des coefficients.

Etant donné que T est antisymétrique et que $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ l'est en les arguments correspondant à des colonnes égales de son degré (cf. (9)), leurs représentations symboliques $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ ont les mêmes propriétés. De fait, quels que soient $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in (\mathbb{N}^m)^p$, avec $\forall i : r_i = |\alpha_i| \geq 1$, $\vec{\mu} = (\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}) \in (\mathbb{N}^m)^p$ et $x_0 \in \Omega$, on a (cf. p. ex. (6))

$$\begin{aligned}&T\Big(\ldots, \underset{(i)}{\frac{1}{\mu_i!}(x - x_0)^{\mu_i}(.)^{\alpha_i}}, \ldots\Big)(x_0) \\ &= \sum_{\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}} \tau^{\vec{r}}_{\vec{\lambda},x_0}\Big(\ldots, \underset{(i)}{D^{\lambda_i}\Big(\frac{1}{\mu_i!}(x - x_0)^{\mu_i}\Big)(x_0)\,(.)^{\alpha_i}}, \ldots\Big) \\ &= \tau^{\vec{r}}_{\vec{\mu},x_0}\,(\ldots, \underset{(i)}{(.)^{\alpha_i}}, \ldots) \\ &= \tau^{\vec{\alpha}}_{\vec{\mu}}(x_0).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que les coefficients $\tau_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}$ sont antisymétriques en les colonnes $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \mu_i \end{pmatrix}$, résultat impliquant les propriétés annoncées.

La remarque ci-dessus, concernant la correspondance biunivoque entre les 1-monômes resp. les 1-cochaînes et leurs représentations symboliques, se généralise alors comme suit :

Il existe une bijection

(i) *entre les monômes des p-cochaînes*

$$T_{\vec{r}}^{\vec{a}} = T_{r_0 \ldots r_{p-1}}^{a_0 \ldots a_{p-1}}(A_0^{r_0}, \ldots, A_{p-1}^{r_{p-1}})$$

et les applications

$$\mathcal{T}_{\vec{r}}^{\vec{\alpha}} = \mathcal{T}_{r_0 \ldots r_{p-1}}^{a_0 \ldots a_{p-1}}(\eta^0, \ldots, \eta^{p-1};\ P_0^{r_0}, \ldots, P_{p-1}^{r_{p-1}})$$

qui sont de classe C^∞ en $x \in \Omega$, antisymétriques en les arguments $(\eta^i, P_i^{r_i})$ correspondant à des colonnes égales de $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ et à valeurs dans les polynômes homogènes de degrés $a_0, \ldots, a_{p-1}$ en $\eta^0, \ldots, \eta^{p-1} \in \mathbb{R}^{m^*}$ respectivement, eux-mêmes à valeurs dans les formes linéaires en $P_0^{r_0} \in \vee^{r_0}\mathbb{R}^m, \ldots, P_{p-1}^{r_{p-1}} \in \vee^{r_{p-1}}\mathbb{R}^m$,

(ii) *entre les p-cochaînes*

$$T = T(A_0, \ldots, A_{p-1})$$

et les séries formelles

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\eta^0, \ldots, \eta^{p-1};\ P_0, \ldots, P_{p-1})$$

en $\eta^0, \ldots, \eta^{p-1} \in \mathbb{R}^{m^*}$ à coefficients dans les formes linéaires en $P_0, \ldots, P_{p-1} \in \vee^{\neq 0}\mathbb{R}^m$, qui sont antisymétriques en tous les (η^i, P_i) et de classe C^∞ en $x \in \Omega$ et dont la série sur $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ (cf. (12)) est localement finie pour chaque uplet $(r_0, \ldots, r_{p-1})$.

3.4 Représentation symbolique de l'opération de cobord

Rappelons que la proposition 2.13 a réduit l'objectif de notre travail à sa version locale

$$H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = \{0\} \quad (p \in \{1, 2\}),$$

où $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}_\Omega^0$, $N = C^\infty(\Omega)$ et où Ω est un ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$. Pour calculer ces espaces de cohomologie, nous symboliserons l'opération de cobord, ce qui conduira à une équation de cocycle purement algébrique, nous résoudrons cette équation plus simple que l'original et nous réinterpréterons nos conclusions dans le langage des cochaînes.

Symbolisons donc le cobord de Chevalley i.e. exprimons le polynôme symbolisant de la restriction $(\partial T)_{\vec{r}}$ ($T \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}_\Omega^0$, $N = C^\infty(\Omega)$, $\Omega \in O(\mathbb{R}^m)$, $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_p) \in {\mathbb{N}^*}^{p+1}$) de ∂T à $\mathrm{Diff}^{r_0} \times \cdots \times \mathrm{Diff}^{r_p}$ au moyen de la représentation symbolique de T. Nous traitons - afin de simplifier l'écriture - de nouveau le cas $p = 1$. Rappelons que $\mathrm{Diff}^t \simeq C^\infty(\Omega, \vee^t\mathbb{R}^m)$ $(t \in \mathbb{N}^*)$ et que $(\partial T)_{rs}$ $(r, s \in \mathbb{N}^*)$ est donc complètement déterminé par ses valeurs sur les (fP^r, gQ^s) $(f, g \in C^\infty(\Omega); P^r \in \vee^r\mathbb{R}^m,\ Q^s \in \vee^s\mathbb{R}^m)$. Ainsi, il s'agit de symboliser dans

$$(\partial T)_{rs}(fP^r, gQ^s) = fP^r(T(gQ^s)) - gQ^s(T(fP^r)) - T([fP^r,\ gQ^s]),$$

les dérivées de f (par η) et de g (par ν). Posons

$$\begin{aligned} fP^r &= \sum_{|\alpha|=r} fP_\alpha(.)^\alpha \simeq \sum_{|\alpha|=r} fP_\alpha D^\alpha \quad \text{et} \\ gQ^s &= \sum_{|\beta|=s} gQ_\beta(.)^\beta \simeq \sum_{|\beta|=s} gQ_\beta D^\beta. \end{aligned}$$

En ce qui concerne le terme $fP^r(T(gQ^s))$, notons que D^α dérive les coefficients de T et g selon la règle de Leibniz. Si l'on représente les dérivées des coefficients, qui ne sont pas à symboliser (!), provisoirement par $*$, on obtient

$$fP^r(T(gQ^s)) \simeq P^r(* + \nu)\mathcal{T}(\nu; Q^s).$$

Passons au terme $T(fP^r \circ gQ^s)$. Etant donné que

$$fD^\alpha(gD^\beta) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \mathsf{C}_\alpha^{\alpha_1,\alpha_2} fD^{\alpha_1}gD^{\alpha_2+\beta} \quad \left(\mathsf{C}_\alpha^{\alpha_1,\alpha_2} = \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!}\right),$$

et que l'évaluation de T sur $fD^{\alpha_1}g(.)^{\alpha_2+\beta}$ fait apparaître des dérivées $D^\lambda(fD^{\alpha_1}g)$, on trouve

$$T(fP^r \circ gQ^s) \simeq \mathcal{T}(\eta + \nu;\ P^r(\nu + .)Q^s).$$

Ce résultat devient éventuellement plus naturel, si l'on symbolise tout de suite l'argument par

$$\begin{aligned} fP^r \circ gQ^s &\simeq \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=s} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \mathsf{C}_\alpha^{\alpha_1,\alpha_2} P_\alpha Q_\beta fg\nu^{\alpha_1}\ (.)^{\alpha_2+\beta} \\ &= fgP^r(\nu + .)Q^s. \end{aligned}$$

Finalement, si les représentations symboliques de

$$(\partial T)_{rs} = (\partial T)_{rs}(A^r, B^s) \quad \text{et} \quad \partial T = (\partial T)(A, B)$$

sont notées respectivement

$$\mathcal{S}_{(\partial T)rs} = \mathcal{S}_{(\partial T)_{rs}}(\eta, \nu;\ P^r, Q^s) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\partial T} = \mathcal{S}_{\partial T}(\eta, \nu;\ P, Q),$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\partial T}(\eta, \nu;\ P^r, Q^s) &= \mathcal{S}_{(\partial T)_{rs}}(\eta, \nu;\ P^r, Q^s) \\ &= P^r(* + \nu)\mathcal{T}(\nu; Q^s) - Q^s(* + \eta)\mathcal{T}(\eta; P^r) \\ &\quad -\mathcal{T}(\eta + \nu;\ Q^s\tau_\nu P^r) + \mathcal{T}(\eta + \nu;\ P^r\tau_\eta Q^s), \end{aligned}$$

où $\tau_\mu R = R(\mu + .) - R(.)$ $(\mu \in \mathbb{R}^{m^*}, R \in \vee\mathbb{R}^m)$.

La symbolisation du bord d'une p-cochaîne $(p \in \mathbb{N}^*)$ ne présente aucune difficulté supplémentaire et conduit à la

Proposition 3.4 *Si $T \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ admet la représentation symbolique $\mathcal{T}$, alors son bord de Chevalley ∂T est représenté par $\mathcal{S}_{\partial T}$, complètement déterminé par*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\partial T}(\eta^0,\ \ldots, \eta^p;\ X_0^{r_0}, \ldots, X_p^{r_p}) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i^{r_i}(* + \eta^0 + \ldots \hat{\imath} \ldots + \eta^p)\mathcal{T}(\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\ X_0^{r_0}, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{r_p}) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \mathcal{T}(\eta^i + \eta^j, \eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, \eta^p;\ X_j^{r_j} \tau_{\eta^j} X_i^{r_i}, X_0^{r_0}, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, X_p^{r_p}) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \mathcal{T}(\eta^i + \eta^j, \eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, \eta^p;\ X_i^{r_i} \tau_{\eta^i} X_j^{r_j}, X_0^{r_0}, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, X_p^{r_p}),
\end{aligned}$$

où, quel que soit $k \in \{0, \ldots, p\}$, $\eta^k \in \mathbb{R}^{m^*}$, $X_k \in \mathbb{R}^m$ et $r_k \in \mathbb{N}^*$, où $X_k^{r_k} \in \vee^{r_k}\mathbb{R}^m$ est défini par $X_k^{r_k}(\xi) = (\xi(X_k))^{r_k}$ et où $*$ représente les dérivées des coefficients de T.

Dans la suite, nous appellerons *termes de type I (IIa, IIb)* les termes de la 1ère (2ème, 3ème) ligne de la précédente expression de $\mathcal{S}_{\partial T}$ à l'aide de $\mathcal{T}$. D'autre part, en vue de simplifier au maximum les notations, nous désignerons la représentation symbolique de tout objet par le même symbole que l'objet, nous écrirons $(X^r)_\xi$ et X_ξ $(r \in \mathbb{N},\ X \in \mathbb{R}^m,\ \xi \in \mathbb{R}^{m^*})$ au lieu de $X^r(\xi)$ resp. $\xi(X)$, de sorte que $(X^r)_\xi = (X_\xi)^r$, ce qui justifie la notation X_ξ^r et finalement, nous noterons X_{ij}^r le réel X_{i,η^j}^r $(i, j, r \in \mathbb{N},\ X_i \in \mathbb{R}^m,\ \eta^j \in \mathbb{R}^{m^*})$.

Remarquons à présent que certains termes de $(\partial T)(\eta^0, \ldots, \eta^p;\ X_0^{r_0}, \ldots, X_p^{r_p})$ se compensent. En effet, en groupant dans $X_{i,*+\eta^0+\ldots\hat{\imath}\ldots+\eta^p}^{r_i}$ les termes de degré r_i en η^j $(j \neq i)$, on constate que parmi les termes de type I se trouvent en particulier les termes

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j \neq i} X_{ij}^{r_i} T(\ldots \hat{\imath} \ldots;\ \ldots \hat{\imath} \ldots) = \sum_{i \neq j} (-1)^i X_{ij}^{r_i} T(\ldots \hat{\imath} \ldots;\ \ldots \hat{\imath} \ldots). \tag{14}$$

Si l'on prend dans

$$\tau_{\eta^j} X_i^{r_i} = X_{i,\eta^j+.}^{r_i} - X_{i,.}^{r_i} = \sum_{\ell=1}^{r_i} \mathsf{C}_{r_i}^{\ell} X_{ij}^{\ell} X_{i,.}^{r_i-\ell}$$

le terme $\ell = r_i$ et dans

$$T(\eta^i + \eta^j, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots;\ X_j^{r_j}, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots)$$

les termes d'ordre 0 en η^i, on voit que les termes

$$\begin{aligned}
&\sum_{i<j} (-1)^{i+j} X_{ij}^{r_i} T(\eta^j, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots;\ X_j^{r_j}, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots) \\
&\quad = \sum_{i<j} (-1)^{i-1} X_{ij}^{r_i} T(\ldots \hat{\imath} \ldots; \ldots \hat{\imath} \ldots)
\end{aligned} \tag{15}$$

sont de type IIa. On se persuade de la même manière de la présence des termes

$$\begin{aligned}
&\sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} X_{ji}^{r_j} T(\eta^i, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots;\ X_i^{r_i}, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots) \\
&\quad = \sum_{i<j} (-1)^{j+1} X_{ji}^{r_j} T(\ldots \hat{\jmath} \ldots;\ \ldots \hat{\jmath} \ldots) \\
&\quad = \sum_{i>j} (-1)^{i+1} X_{ij}^{r_i} T(\ldots \hat{\imath} \ldots; \ldots \hat{\imath} \ldots)
\end{aligned} \tag{16}$$

parmi ceux de type IIb.

Les suivantes *formules fondamentales* - donnant les contributions d'un monôme arbitraire $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ de T, au bord $(\partial T)(\eta^0,\ldots,\eta^p;\ X_0^{r_0},\ldots,X_p^{r_p})$ et, en fonction du degré $\begin{pmatrix}\vec{b}\\ \vec{s}\end{pmatrix}$, les degrés de ces contributions - résultent immédiatement de la proposition 3.4 et de l'observation que la somme des termes (14), (15) et (16) est nulle.

Proposition 3.5 *Soient une p-cochaîne T ($p \in \mathbb{N}^*$) et un monôme $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ de T.*

(i) Contributions de type I de $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ au bord de T :

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sum_{\ell_0+\cdots+\ell_p=r_i} \mathsf{C}_{r_i}^{\ell_0,\ldots,\ell_p} \prod_{j\neq i} X_{ij}^{\ell_j}\left(X_i^{\ell_i}.T_{\vec{s}}^{\vec{b}}\right)(\eta^0,\ldots\hat{\imath}\ldots,\eta^p;\ X_0^{r_0},\ldots\hat{\imath}\ldots,X_p^{r_p}) \qquad (17)$$

(les notations sont celles de la proposition 3.4, $\mathsf{C}_{r_i}^{\ell_0,\ldots,\ell_p} = \frac{r_i!}{\ell_0!\ldots\ell_p!}$, $X_i = (X_i^1,\ldots, X_i^m) \in \mathbb{R}^m$, $X_i^{\ell_i} = \left(\sum_{k=1}^m X_i^k D_{x^k}\right)^{\ell_i}$ et $X_i^{\ell_i}.T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ signifie que $X_i^{\ell_i}$ dérive les coefficients de $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$), avec

$$\ell_j \neq r_i, \quad \forall j \neq i.$$

Degré du terme général :

$$\begin{pmatrix} b_0+\ell_0 & \ldots & b_{i-1}+\ell_{i-1} & 0 & b_i+\ell_{i+1} & \ldots & b_{p-1}+\ell_p \\ s_0 & \ldots & s_{i-1} & \alpha & s_i & \ldots & s_{p-1} \end{pmatrix}, \qquad (18)$$
$$\qquad\qquad (i)$$

où $\alpha = r_i$ est quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et où $i \in \{0,\ldots,p\}$, $\ell_0+\cdots+\ell_p = \alpha$ et $\ell_j \neq \alpha$, pour $j \neq i$.

(ii) Contributions de type IIa de $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ au bord de T :

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sum_{\ell=1}^{r_i}\mathsf{C}_{r_i}^{\ell}X_{ij}^{\ell}\sum_{k=0}^{b_0}\frac{1}{k!}$$
$$(\eta^i D_{\eta^j})^k T_{\vec{s}}^{\vec{b}}(\eta^j,\eta^0,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,\eta^p;\ X_i^{r_i-\ell}X_j^{r_j},X_0^{r_0},\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,X_p^{r_p}) \qquad (19)$$

($\eta^i D_{\eta^j}$ est la dérivée en η^j dans la direction de η^i), où

$$(k,\ell) \neq (0,r_i).$$

Degré du terme général :

$$\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_i & k & b_{i+1} & \ldots & b_{j-1} & b_0-k+\ell & b_j & \ldots & b_{p-1} \\ s_1 & \ldots & s_i & \alpha & s_{i+1} & \ldots & s_{j-1} & s_0-\alpha+\ell & s_j & \ldots & s_{p-1} \end{pmatrix}, \qquad (20)$$
$$\qquad (i) \qquad\qquad (j)$$

où $\alpha = r_i \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \{1,\ldots,\alpha\}$ sont tels que $r_j = s_0-\alpha+\ell \in \mathbb{N}^*$ et où $i<j$, $k \in \{0,\ldots,b_0\}$ et $(k,\alpha) \neq (0,\ell)$.

(iii) Contributions de type IIb de $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ au bord de T :

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\sum_{\ell=1}^{r_j}\mathsf{C}_{r_j}^{\ell}X_{ji}^{\ell}\sum_{k=0}^{b_0}\frac{1}{k!}$$
$$(\eta^i D_{\eta^j})^k T_{\vec{s}}^{\vec{b}}(\eta^j,\eta^0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,\eta^p;\ X_i^{r_i}\,X_j^{r_j-\ell},X_0^{r_0},\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,X_p^{r_p}),\tag{21}$$

avec

$$(k,\ell)\neq(b_0,r_j).$$

Degré du terme général

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_i & k+\ell & b_{i+1} & \dots & b_{j-1} & b_0-k & b_j & \dots & b_{p-1} \\ s_1 & \dots & s_i & \alpha & s_{i+1} & \dots & s_{j-1} & s_0-\alpha+\ell & s_j & \dots & s_{p-1} \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad (i) \qquad\qquad\qquad\qquad (j) \end{array}\tag{22}$$

où $\alpha=r_i\in\mathbb{N}^*$, $1\leq\ell\leq r_j=s_0-\alpha+\ell$ *i.e.* $\ell\geq 1$ *et* $\alpha\leq s_0$, $i<j$, $k\in\{0,\dots,b_0\}$ *et* $(k,\alpha)\neq(b_0,s_0)$.

Signalons que toutes les contributions de $T_{\vec{s}}^{\vec{b}}$ sont de degré inférieur $(r_0,\dots,r_p)$, mais qu'il s'agit de vraies contributions i.e. de contributions qui ne sont pas identiquement nulles a priori, si et seulement si les r_k $(k\in\{0,\dots,p\})$ vérifient certaines conditions et que les degrés inférieurs annoncés en découlent.

Proposition 3.6 *Les termes généraux des contributions de type I, IIa et IIb s'écrivent encore :*

(i) $\quad (-1)^i\mathsf{C}_\alpha^{\ell_0,\dots,\ell_p}\prod_{j\neq i}X_{ij}^{\ell_j}\left(X_i^{\ell_i}.T_{\vec{s}}^{\vec{b}}\right)(\eta^0,\dots\hat{\imath}\dots,\eta^p;\ X_0^{s_0},\dots\hat{\imath}\dots,X_p^{s_{p-1}}),$

(ii) $\quad (-1)^{i+j}\mathsf{C}_\alpha^{\ell}\,\frac{1}{k!}\,\frac{(s_0-\alpha+\ell)!}{s_0!}\,X_{ij}^{\ell}$
$$(\eta^i D_{\eta^j})^k(X_iD_{X_j})^{\alpha-\ell}T_{\vec{s}}^{\vec{b}}(\eta^j,\eta^0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,\eta^p;\ X_j^{s_0},X_0^{s_1},\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,X_p^{s_{p-1}}),$$

(iii) $\quad (-1)^{i+j+1}\frac{1}{\ell!}\,\frac{1}{k!}\,\frac{(s_0-\alpha+\ell)!}{s_0!}X_{ji}^{\ell}$
$$(\eta^i D_{\eta^j})^k(X_iD_{X_j})^{\alpha}T_{\vec{s}}^{\vec{b}}(\eta^j,\eta^0,\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,\eta^p;\ X_j^{s_0},X_0^{s_1},\dots\hat{\imath}\dots\hat{\jmath}\dots,X_p^{s_{p-1}}).$$

Il suffit de noter que

$$(XD_Y)^rY^s=\frac{s!}{(s-r)!}X^rY^{s-r}\quad (X,Y\in\mathbb{R}^m,r,s\in\mathbb{N},r\leq s).$$

■

4 Résultats généraux et auxiliaires

4.1 Constance des coefficients des cocycles

Proposition 4.1 *Soient* Ω *un ouvert contractile de* $\mathbb{R}^m$ *et* $p\in\mathbb{N}^*$. *Alors tout* $T\in\wedge^p(\mathcal{E}^0,N)_{loc}\cap\ker\partial$ $(\mathcal{E}^0=\mathcal{E}_\Omega^0$ *et* $N=C^\infty(\Omega))$ *est, à des bords près, à coefficients* *constants et sans colonne* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(i.e. les degrés de ses monômes ne contiennent pas de colonne* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*).*

Considérons d'abord une p-cochaîne T et notons $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ son monôme minimum (i.e. de degré minimum pour l'ordre lexicographique défini par (10)). Vu (9), le degré $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ est bien ordonné (*bo*) :

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \ldots 0 \\ 1 \ldots 1 \end{matrix}}_{(k_0 \text{ colonnes})} & \begin{matrix} a_{k_0} \ldots a_{p-1} \\ r_{k_0} \ldots r_{p-1} \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \left(k_0 \in \{0, \ldots, p\}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a_{k_0} \\ r_{k_0} \end{pmatrix} \right).$$

Nous nous proposons de déterminer le monôme minimum de ∂T. Son degré étant *bo*, il suffit de chercher les minima *bo* de (18), (20) et (22). Si l'on crée dans (18), la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a nécessairement $\ell_j = 0$, $\forall j \neq i$ et $\ell_i = 1$ (où i est l'indice caractérisant la position de $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$). Le degré cherché étant *bo*, cette colonne doit être insérée à une de ses places naturelles, de sorte qu'on obtient le degré $\begin{pmatrix} 0 & \vec{b} \\ 1 & \vec{s} \end{pmatrix}$. La création de $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ($\alpha \geq 2$) conduisant à un degré contenant moins de colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le plus petit degré est $\begin{pmatrix} 0 & \vec{a} \\ 1 & \vec{r} \end{pmatrix}$. Quant aux degrés (20) et (22), ils renferment nécessairement moins de colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que $\begin{pmatrix} 0 & \vec{a} \\ 1 & \vec{r} \end{pmatrix}$, la création de $\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant impossible. Le monôme minimum du bord est donc donné par

$$\begin{aligned} &(\partial T)^{0\vec{a}}_{1\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_0, \ldots, X_{k_0}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p) \\ &= \sum_{i=0}^{k_0} (-1)^i (X_i.T^{\vec{a}}_{\vec{r}})(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_{k_0}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p) \end{aligned} \tag{23}$$

(on remarquera qu'il ne dépend que du monôme minimum de la cochaîne).

Le monôme $(\partial T)^{0\vec{a}}_{1\vec{r}}$ admet une interprétation intéressante.

Notons d'abord qu'il découle de la description générale des polynômes symbolisants des monômes des cochaînes (cf. III.3) que, si l'on considère dans

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_{k_0}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p),$$

les $\eta^j \in \mathbb{R}^{m^*}$ et les $X^{r_{j-1}}_j \in \vee^{r_{j-1}}\mathbb{R}^m$ ($j \in \{k_0+1, \ldots, p\}$) comme paramètres, $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est une application de classe C^∞ en $x \in \Omega$, à valeurs dans les formes k_0-linéaires, alternées sur $\mathbb{R}^m$ i.e. une k_0-forme différentielle sur Ω. La structure de $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ résulte de (11) et (13) :

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = \sum \tau^{\vec{\ell}\vec{\alpha}}_{\vec{0}\vec{\lambda}}\ X^{\ell_0}_0 \ldots \hat{\imath} \ldots X^{\ell_{k_0-1}}_{k_0} X^{\alpha_{k_0}}_{k_0+1} \ldots X^{\alpha_{p-1}}_p (\eta^{k_0+1})^{\lambda_{k_0}} \ldots (\eta^p)^{\lambda_{p-1}},$$

où le symbole de sommation désigne la somme sur $\ell_j \in \{1, \ldots, m\}$ ($j \in \{0, \ldots, k_0-1\}$), $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,m}) \in \mathbb{N}^m$ tel que $|\alpha_j| = r_j$ ($j \in \{k_0, \ldots, p-1\}$) et $\lambda_j = (\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,m}) \in \mathbb{N}^m$ tel que $|\lambda_j| = a_j$ ($j \in \{k_0, \ldots, p-1\}$), où

$$\frac{r_j!}{\alpha_j!} = \frac{r_j!}{\alpha_{j,1}! \ldots \alpha_{j,m}!} \quad (j \in \{k_0, \ldots, p-1\})$$

a été incorporé dans

$$\tau^{\vec{\ell}\vec{\alpha}}_{\vec{0}\vec{\lambda}} = \tau^{\ell_0 \ldots \ell_{k_0-1}\ \alpha_{k_0} \ldots \alpha_{p-1}}_{0 \ldots\ \ 0\ \ \lambda_{k_0} \ldots \lambda_{p-1}} \in N,$$

et où $X_j = (X_j^1, \ldots, X_j^m) \in \mathbb{R}^m$ ($j \in \{0, \ldots \hat{\imath} \ldots, p\}$), $\eta^j \simeq (\eta^j_1, \ldots, \eta^j_m) \in \mathbb{R}^m$, $X_j^{\alpha_{j-1}} = (X_j^1)^{\alpha_{j-1,1}} \ldots (X_j^m)^{\alpha_{j-1,m}}$ et $(\eta^j)^{\lambda_{j-1}} = (\eta^j_1)^{\lambda_{j-1,1}} \ldots (\eta^j_m)^{\lambda_{j-1,m}}$ ($j \in \{k_0+1, \ldots, p\}$).

Si $Y_0, \ldots, Y_{k_0} \in \mathcal{H}(\Omega) \simeq C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, la valeur sur $(Y_0, \ldots, Y_{k_0})$ de la différentielle extérieure d de la forme $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ (où les paramètres sont sous-entendus) est égale à

$$\begin{aligned}(dT^{\vec{a}}_{\vec{r}})(Y_0, \ldots, Y_{k_0}) &= \sum_{i=0}^{k_0} (-1)^i Y_i . T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(Y_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, Y_{k_0}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, T^{\vec{a}}_{\vec{r}}([Y_i, Y_j], Y_0, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, Y_{k_0}). \end{aligned} \tag{24}$$

Or, le premier terme du second membre s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k_0}(-1)^i (Y_i . T^{\vec{a}}_{\vec{r}})(Y_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, Y_{k_0}) \ &+\ \sum_{i=0}^{k_0}(-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(Y_0, \ldots, \underset{(j)}{Y_i . Y_j}, \ldots \hat{\imath} \ldots, Y_{k_0}) \\ &+\ \sum_{i=0}^{k_0}(-1)^i \sum_{j=i+1}^{k_0} T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(Y_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \underset{(j)}{Y_i . Y_j}, \ldots, Y_{k_0})\end{aligned}$$

(où $Y_i . T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ signifie que l'opérateur différentiel Y_i dérive les coefficients de $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ et où $Y_i . Y_j$ représente l'opérateur Y_i appliqué à la fonction vectorielle Y_j), soit

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k_0} \cdots \ &+\ \sum_{i>j} (-1)^{i+j}\, T^{\vec{a}}_{\vec{r}}\ (Y_i . Y_j, Y_0, \ldots \hat{\jmath} \ldots \hat{\imath} \ldots, Y_{k_0}) \\ &+\ \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1}\, T^{\vec{a}}_{\vec{r}}\ (Y_i, Y_j, Y_0, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, Y_{k_0})\end{aligned}$$

ou encore

$$\sum_{i=0}^{k_0} \cdots + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1}\, T^{\vec{a}}_{\vec{r}}\ ([Y_i, Y_j], Y_0, \ldots \hat{\imath} \ldots \hat{\jmath} \ldots, Y_{k_0}). \tag{25}$$

En combinant (23), (24) et (25), on obtient finalement

$$(\partial T)^{0\vec{a}}_{1\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ Y_{0,x}, \ldots, Y_{k_0,x}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X_p^{r_{p-1}})(x) = (dT^{\vec{a}}_{\vec{r}})(Y_0, \ldots, Y_{k_0})(x), \tag{26}$$

où x désigne un élément arbitraire de Ω et où la forme $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ dépend des paramètres η^j et $X_j^{r_{j-1}}$ ($j \in \{k_0+1, \ldots, p\}$).

Supposons maintenant que T soit un p-cocycle.

Si $k_0 = 0$, (23) s'écrit

$$(X_0.T^{\vec{a}}_{\vec{r}})(\eta^1, \ldots, \eta^p;\ X_1^{r_0}, \ldots, X_p^{r_{p-1}}) \equiv 0.$$

Vu la structure polynomiale de son premier membre et la connexité de Ω, cette identité entraîne que $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est à coefficients constants.

Examinons le cas $k_0 \geq 1$. Si $\wedge^{k_0}(\Omega)$ est l'espace des k_0-formes différentielles sur Ω et si $¶ = ¶^{a_{k_0}\ldots a_{p-1}}_{r_{k_0}\ldots r_{p-1}}$ désigne l'espace (de dimension finie) des polynômes homogènes de degrés $a_{k_0}, \ldots, a_{p-1}$ en $\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p$ et de degrés $r_{k_0}, \ldots, r_{p-1}$ en $X_{k_0+1}, \ldots, X_p$, l'égalité

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_1, \ldots, X_{k_0}, X_{k_0+1}^{r_{k_0}}, \ldots, X_p^{r_{p-1}})$$
$$= \sum_{\substack{|\alpha_j|=r_j \\ |\lambda_j|=a_j \\ (j\in\{k_0,\ldots,p-1\})}} \left[\sum_{\substack{\ell_j=1 \\ (j\in\{0,\ldots,k_0-1\})}}^{m} \tau^{\vec{\ell}\ \vec{\alpha}}_{\vec{0}\ \vec{\lambda}}\, X_1^{\ell_0} \ldots X_{k_0}^{\ell_{k_0-1}} \right] (\eta^{k_0+1})^{\lambda_{k_0}} \ldots (\eta^p)^{\lambda_{p-1}} X_{k_0+1}^{\alpha_{k_0}} \ldots X_p^{\alpha_{p-1}}$$

montre que

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} \in \wedge^{k_0}(\Omega) \otimes ¶$$

(l'antisymétrie de $[\ldots]$ en $X_1, \ldots, X_{k_0}$, résulte de celle des coefficients $\tau^{\vec{\ell}\ \vec{\alpha}}_{\vec{0}\ \vec{\lambda}}$ en les colonnes de $\begin{pmatrix} \vec{\ell} & \vec{\alpha} \\ \vec{0} & \vec{\lambda} \end{pmatrix}$). Ainsi, $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ s'écrit

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = \sum_i \omega_i P_i,$$

où les P_i forment une base de $¶$ et où les ω_i sont des k_0-formes. Il découle alors de (IV.4) que $dT^{\vec{a}}_{\vec{r}} = 0$, donc que

$$\sum_i (d\omega_i) P_i = 0.$$

Vu l'indépendance linéaire des P_i, on en déduit que

$$d\omega_i = 0, \quad \forall i.$$

Par conséquent, il existe des $\mu_i \in \wedge^{k_0-1}(\Omega)$ tels que

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = \sum_i (d\mu_i) P_i,$$

de sorte que

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ . , \ldots,\ . , X_{k_0+1}^{r_{k_0}}, \ldots, X_p^{r_{p-1}})$$
$$= d\left[\sum_i \mu_i\ P_i(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_{k_0+1}, \ldots, X_p) \right].$$

Or, $\sum_i \mu_i P_i$ $(\mu_i \in \wedge^{k_0-1}(\Omega),\ P_i \in ¶^{a_{k_0}\ldots a_{p-1}}_{r_{k_0}\ldots r_{p-1}})$ définit (cf. $T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = \sum_i \omega_i P_i$ $(\omega_i \in \wedge^{k_0}(\Omega))$) un monôme $S^{\vec{a}'}_{\vec{r}'}$, avec

$$\begin{pmatrix} \vec{a}' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \ldots 0 \\ 1 \ldots 1 \end{matrix}}_{(k_0-1 \text{ colonnes})} & \begin{matrix} a_{k_0} \ldots a_{p-1} \\ r_{k_0} \ldots r_{p-1} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

dont l'antisymétrisé

$$S = \sum_\rho S^{\rho\vec{a}'}_{\rho\vec{r}'}$$

(où ρ décrit l'ensemble des permutations de $1, \ldots, p-1$, ne changeant pas l'ordre des indices des colonnes égales et où $S^{\rho\vec{a}'}_{\rho\vec{r}'}$ est défini - mutatis mutandis - par (9)) est une $(p-1)$-cochaîne admettant $S^{\vec{a}'}_{\vec{r}'}$ comme monôme minimum. Il découle des résultats ci-dessus que ∂S admet le monôme minimum $(\partial S)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ et que, si $x \in \Omega$, $\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p \in \mathbb{R}^{m^*}$, $X_1, \ldots, X_p \in \mathbb{R}^m$ et $Y_1, \ldots, Y_{k_0} \in \mathcal{H}(\Omega) \simeq C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, avec $Y_{j,x} = X_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, k_0\}$,

$$\begin{aligned}
&(\partial S)^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_1, \ldots, X_{k_0}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p)(x) \\
&= (\partial S)^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p; Y_{1,x}, \ldots, Y_{k_0,x}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p)(x) \\
&= \left(d\left[\sum_i \mu_i\ P_i(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_{k_0+1}, \ldots, X_p)\right]\right)(Y_1, \ldots, Y_{k_0})(x) \\
&= T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ Y_{1,x}, \ldots, Y_{k_0,x}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p(x) \\
&= T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\ X_1, \ldots, X_{k_0}, X^{r_{k_0}}_{k_0+1}, \ldots, X^{r_{p-1}}_p)(x).
\end{aligned}$$

(Si $p = 1$, S est une 0-cochaîne. Dans ce cas limite, la démonstration directe de l'égalité $(\partial S)^{\vec{a}}_{\vec{r}} = T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est simple. En effet, k_0 valant lui aussi 1, $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T^0_1 = dS$, où $S \in N$, de manière que $T^0_1(X) = (dS)(X) = X.S = (\partial S)^0_1(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^m$.)

Posons donc

$$T' = T - \partial S.$$

Comme $T'^{\vec{a}}_{\vec{r}} = 0$, on peut, quitte à corriger par des bords, annuler le monôme minimum de T et ceci aussi longtemps qu'il contient $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k_0 \geq 1)$.

S'il ne contient plus $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k_0 = 0)$, il est à coefficients constants. De plus, les autres monômes de T ne contiennent pas non plus $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons qu'ils sont aussi à coefficients constants. Soit donc $T^{\vec{c}}_{\vec{t}}$ un de ces monômes. Considérons la relation

$$(\partial T)^{0\vec{c}}_{1\vec{t}} = 0. \tag{27}$$

La proposition 3.5 permet de trouver les monômes contribuant au degré $\begin{pmatrix} 0 & \vec{c} \\ 1 & \vec{t} \end{pmatrix}$ et la proposition 3.6 fournit l'écriture de (27) en fonction de ces monômes.

Monômes ayant une contribution de type

I : Si l'on crée $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $i = 0$, $\ell_0 = 1$, $\ell_j = 0$ $(j \neq 0)$ et ainsi le monôme $T^{\vec{c}}_{\vec{t}}$ contribue au degré considéré. La création d'une colonne de $\begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{t} \end{pmatrix}$ (d'élément supérieur nul), conduit à un monôme dont le degré commence par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et qui est donc nul.

IIa, IIb : La création de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est impossible et celle d'une colonne de $\begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{t} \end{pmatrix}$ donne de nouveau des monômes contenant $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ecriture de (27) :

$$(X_0.T^{\vec{c}}_{\vec{t}})(\eta^1,\ldots,\eta^p;\ X_1^{t_0},\ldots,X_p^{t_{p-1}}) \equiv 0.$$

Ceci signifie évidemment que $T^{\vec{c}}_{\vec{t}}$ est à coefficients constants. ■

4.2 Relation entre les cobords de Chevalley de $\mathcal{E}^0$ et de $gl(m,\mathbb{R})$

Proposition 4.2 *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \in O(\mathbb{R}^m)$, $T \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$ et $N = C^\infty(\Omega)$) une cochaîne à coefficients constants et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ un monôme de T de degré bo*

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1\ldots 1 \\ 1\ldots 1 \end{matrix}}_{(k_0 \text{ colonnes})} & \begin{matrix} a_{k_0}\ldots a_{p-1} \\ r_{k_0}\ldots r_{p-1} \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \left(k_0 \in \{0,\ldots,p\},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a_{k_0} \\ r_{k_0} \end{pmatrix}\right).$$

Alors

(i) $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ peut être interprété comme k_0-cochaîne de $gl(m,\mathbb{R})$ à valeurs dans l'espace E des polynômes homogènes de degrés $a_{k_0},\ldots,a_{p-1}$ en $\eta^{k_0},\ldots,\eta^{p-1} \in \mathbb{R}^{m^*}$, eux-mêmes à valeurs dans les formes linéaires en $P^{r_{k_0}}_{k_0} \in \vee^{r_{k_0}}\mathbb{R}^m,\ \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-1} \in \vee^{r_{p-1}}\mathbb{R}^m$ et anti-symétriques en les arguments correspondant à des colonnes égales parmi les $\begin{pmatrix} a_j \\ r_j \end{pmatrix}$ ($j \in \{k_0,\ \ldots, p-1\}$),

(ii) $$(\partial T)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}} = -\partial_\rho T^{\vec{a}}_{\vec{r}} + I + IIa\left(\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + IIb\left(\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

où ∂_ρ désigne le cobord de Chevalley associé à la représentation naturelle ρ de $gl(m,\mathbb{R})$ sur E, où I représente les éventuelles contributions de type I au degré $\begin{pmatrix} 1 & \vec{a} \\ 1 & \vec{r} \end{pmatrix}$ et où $IIa\left(\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $IIb\left(\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont les contributions éventuelles de type IIa resp. IIb, obtenues par création d'une colonne différente de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, ces compensations éventuelles du cobord de $gl(m,\mathbb{R})$ sont dues à des monômes dont les degrés ont au moins une colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de plus que $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$.

(i) est une conséquence immédiate de la propriété universelle du produit tensoriel.

Pour (ii), déterminons les termes $IIa\left(\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $IIb\left(\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

de $(\partial T)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}}$. Le degré des contributions cherchées étant

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{a} \\ 1 & \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \; 1 \ldots 1}_{(k_0+1 \text{ colonnes})} & a_{k_0} \ldots a_{p-1} \\ 1 \; 1 \ldots 1 & r_{k_0} \ldots r_{p-1} \end{pmatrix}$$

et la colonne à créer étant une des colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $i \in \{0, \ldots, k_0\}$, $j \in \{i + 1, \ldots, p\}$, $\alpha = 1$, $\ell = 1$ et $k = 1$ ou $k = 0$, selon qu'on considère les termes IIa ou IIb. Comme la correction $\begin{pmatrix} k - \ell \\ \alpha - \ell \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} k \\ \alpha - \ell \end{pmatrix}$ est ainsi égale à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient les degrés $\begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{s} \end{pmatrix}$ des monômes contribuant, en transférant dans $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$, la jème colonne $\begin{pmatrix} a_{j-1} \\ r_{j-1} \end{pmatrix}$ à la première place. Les contributions sont finalement données par (19) et (21), où l'on peut substituer $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ à $T^{\vec{b}}_{\vec{s}}$, quitte à multiplier par $(-1)^{j-1}$ et à mettre le premier argument "forme" et le premier argument "polynôme" aux places caractérisées par l'indice j. On trouve donc

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k_0} (-1)^{i-1} \sum_{j=i+1}^{p} X_{ij} (\eta^i D_{\eta^j}) T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{r_{p-1}}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k_0} (-1)^i \sum_{j=i+1}^{p} r_{j-1} X_{ji} T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots X_i \underset{(j)}{X_j^{r_{j-1}-1}} \ldots, X_p^{r_{p-1}}) \end{aligned}$$

(il découle de la condition $0 \leq k \leq b_0 = a_{j-1}$, que les termes de type IIa pour lesquels $a_{j-1} = 0$, sont à omettre; or, $a_{j-1} = 0$ signifie que $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{r_{p-1}})$ est indépendant de η^j, de sorte que les termes apparemment excédentaires sont nuls).

Soient à présent $\eta^0, \ldots, \eta^p \in \mathbb{R}^{m^*}$ et $X_0, \ldots, X_p \in \mathbb{R}^m$. Rappelons que l'action naturelle de $\eta^i \otimes X_i \in gl(m, \mathbb{R})$ sur $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^0 \otimes X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^{k_0} \otimes X_{k_0})$ est donnée par

$$\begin{aligned} &\rho(\eta^i \otimes X_i) T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0 \otimes X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^{k_0} \otimes X_{k_0}) (\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\; X_{k_0+1}^{r_{k_0}}, \ldots, X_p^{r_{p-1}}) \\ &\quad = \sum_{j=k_0+1}^{p} X_{ij} (\eta^i D_{\eta^j}) T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{r_{p-1}}) \\ &\qquad - \sum_{j=k_0+1}^{p} r_{j-1} X_{ji} T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots X_i \underset{(j)}{X_j^{r_{j-1}-1}} \ldots, X_p^{r_{p-1}}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &(\partial_\rho T^{\vec{a}}_{\vec{r}})(\eta^0 \otimes X_0,\; \ldots, \eta^{k_0} \otimes X_{k_0})(\eta^{k_0+1}, \ldots, \eta^p;\; X_{k_0+1}^{r_{k_0}}, \ldots, X_p^{r_{p-1}}) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{k_0} (-1)^i \sum_{j=k_0+1}^{p} X_{ij} (\eta^i D_{\eta^j}) T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{r_{p-1}}) && (*) \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{k_0} (-1)^{i+1} \sum_{j=k_0+1}^{p} r_{j-1} X_{ji} T^{\vec{a}}_{\vec{r}} (\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\; X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots X_i \underset{(j)}{X_j^{r_{j-1}-1}} \ldots, X_p^{r_{p-1}}) && (+) \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=0}^{k_0}\sum_{j=i+1}^{k_0}(-1)^{i+j}X_{ji}T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^j,\ \eta^0,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,\eta^p;\ X_i,X_0,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,X_p^{r_{p-1}}) \qquad (++)$$

$$+\sum_{i=0}^{k_0}\sum_{j=i+1}^{k_0}(-1)^{i+j+1}X_{ij}T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^i,\ \eta^0,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,\eta^p;\ X_j,X_0,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots,X_p^{r_{p-1}}) \qquad (**)$$

Comme

$$(**)=\sum_{i=0}^{k_0}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{k_0}X_{ij}(\eta^i D_{\eta^j})T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^0,\ldots\hat{\imath}\ldots,\eta^p;\ X_0,\ldots\hat{\imath}\ldots,X_p^{r_{p-1}})$$

et que

$$(++)=\sum_{i=0}^{k_0}(-1)^{i-1}\sum_{j=i+1}^{k_0}r_{j-1}X_{ji}T^{\vec{a}}_{\vec{r}}(\eta^0,\ldots\hat{\imath}\ldots,\eta^p;\ X_0,\ldots\hat{\imath}\ldots X_i\underset{(j)}{X_j^{r_{j-1}-1}}\ldots,X_p^{r_{p-1}}),$$

(noter que $r_{j-1}=1$ ici), le bord est finalement l'opposé des contributions $IIa\left(\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $IIb\left(\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ calculées ci-dessus (grouper $(*)$ et $(**)$ ainsi que $(+)$ et $(++)$). Ceci établit l'égalité (ii).

En ce qui concerne les compensations éventuelles, il suffit de remarquer que les termes I renferment des monômes du type

$$T^{\,1\ 1\ldots 1\quad a_{k_0}-\ell_{k_0+1}\ \ldots\hat{a}_i\ldots\ a_{p-1}-\ell_p}_{\underbrace{1\ 1\ldots 1}_{(k_0+1 \text{ colonnes})}\quad r_{k_0}\qquad\qquad \ldots\hat{r}_i\ldots\ r_{p-1}},$$

où $i\in\{k_0,\ldots,p-1\}$ est tel que $a_i=0$ et où

$$\sum_{\substack{j=k_0+1\\ j\neq i+1}}^{p}\ell_j=r_i$$

(en effet, la colonne créée a nécessairement un élément supérieur nul et ℓ_{i+1} et les $\ell_0,\ldots,\ell_{k_0}$ sont nuls, la cochaîne considérée étant à coefficients constants resp. sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) et que les contributions $IIa\left(\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $IIb\left(\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont dues à des monômes du genre

$$T^{\,*\ 1\ 1\ldots 1\quad a_{k_0}\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots a_{p-1}}_{\,*\ \underbrace{1\ 1\ldots 1}_{(k_0+1 \text{ colonnes})}\quad r_{k_0}\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots r_{p-1}},$$

où $i\in\{k_0,\ldots,p-1\}$ et $j\in\{i+1,\ldots,p-1\}$ et où $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ représente la colonne obtenue par correction de $\begin{pmatrix} a_j \\ r_j \end{pmatrix}$. ■

Corollaire 4.3 *Les notations et conditions sont celles de la proposition 4.2. Si $k_0=p-1$ ou $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est le monôme minimum de T, il n'existe pas de compensation i.e.*

$$(\partial T)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}}=-\partial_\rho T^{\vec{a}}_{\vec{r}}.$$

Dans le second cas, $(\partial T)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}}$ est aussi le monôme minimum de ∂T.

L'absence de toute compensation découle trivialement de ce qui précède.

Comparons les minima *bo* de (18), (20) et (22). Si l'on crée $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans (20) ou (22), $\ell = 1$ et la correction à faire est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les minima *bo* sont donc $\begin{pmatrix} 1 & \vec{a} \\ 1 & \vec{r} \end{pmatrix}$. De fait, la création de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est impossible et celle d'une colonne supérieure à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ conduit à des degrés possédant moins de colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quant à (18), il est clair qu'il ne peut engendrer de degré à k_0+1 colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

Proposition 4.4 *Les notations et hypothèses sont encore celles de la proposition 4.2. Si $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ (qui peut être lu comme k_0-cochaîne de $gl(m,\mathbb{R})$ à valeurs dans E) est un k_0-cocycle de $gl(m,\mathbb{R})$, on a*

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} \in E_{inv} \otimes \wedge^{k_0}_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R}),$$

(où E_{inv} désigne l'espace des éléments de E qui sont invariants par $gl(m,\mathbb{R})$ et où $\wedge^{k_0}_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ est l'espace des k_0-cochaînes scalaires, invariantes de $gl(m,\mathbb{R})$), quitte à corriger T (qui est une p-cochaîne locale de $\mathcal{E}^0$ à valeurs dans N) par un bord ∂U à coefficients constants, sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de monôme minimum $(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ (ce qui implique évidemment que la nouvelle cochaîne est à son tour à coefficients constants et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que ses monômes de degré inférieur à $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ sont ceux de l'ancienne).

Il résulte de la description de la cohomologie de Chevalley de $gl(m,\mathbb{R})$ [5] que

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} \in B^{k_0}(gl(m,\mathbb{R}),E) \oplus E_{inv} \otimes \wedge^{k_0}_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R}),$$

où $B^{k_0}(gl(m,\mathbb{R}),E)$ dénote l'espace des k_0-cobords. Si $\partial_\rho\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \in \wedge^{k_0-1}(gl(m,\mathbb{R}),E)$) est la composante de $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ dans cet espace,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\eta^0 \otimes X_0, \ldots, \eta^{k_0-2} \otimes X_{k_0-2})(\eta^{k_0-1}, \ldots, \eta^{p-2};\ P^{r_{k_0}}_{k_0-1}, \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-2})$$

et ainsi $\mathcal{U}$ est un polynôme homogène de degrés $1, \ldots, 1, a_{k_0}, \ldots, a_{p-1}$ en $\eta^0, \ldots, \eta^{k_0-2}$, $\eta^{k_0-1}, \ldots, \eta^{p-2} \in \mathbb{R}^{m^*}$, à valeurs dans les formes linéaires en $X_0, \ldots, X_{k_0-2} \in \vee^1\mathbb{R}^m$, $P^{r_{k_0}}_{k_0-1} \in \vee^{r_{k_0}}\mathbb{R}^m, \ldots, P^{r_{p-1}}_{p-2} \in \vee^{r_{p-1}}\mathbb{R}^m$; en sus, il est antisymétrique en les arguments correspondant à des colonnes égales de son degré

$$\begin{pmatrix} \vec{a}' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \end{matrix}}_{(k_0-1 \text{ colonnes})} & \begin{matrix} a_{k_0} \ldots a_{p-1} \\ r_{k_0} \ldots r_{p-1} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit (cf. III.3) que $\mathcal{U}$ définit un monôme $U^{\vec{a}'}_{\vec{r}'}$, dont l'antisymétrisé U est une $(p-1)$-cochaîne admettant $U^{\vec{a}'}_{\vec{r}'}$ comme monôme minimum (même raisonnement que dans la preuve de la proposition 4.1). Cette cochaîne étant à coefficients constants et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le corollaire 4.3 permet de conclure que $(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est le monôme minimum de ∂U (ce qui entraîne que ∂U est sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) et que

$$(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}} = -\partial_\rho \mathcal{U}.$$

Si l'on pose alors $T' = T + \partial U$, on a finalement

$$T'^{\vec{a}}_{\vec{r}} \in E_{inv} \otimes \wedge^{k_0}_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

(Si $k_0 = 0$ ou $p = 1$, la proposition est triviale et aucune correction par un bord n'est nécessaire. Dans le cas $k_0 = p = 1$, on notera que $E = R$.) ∎

Remarque 4.5 Soit T un p-cocycle de $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$ ($p \in \mathbb{N}^*$, Ω : ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$). Il résulte de 4.1 que T est, modulo correction par des bords, à coefficients constants et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de 4.3 que le monôme minimum $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ de T est un k_0-cocycle de $gl(m, \mathbb{R})$ à valeurs dans E (k_0 : nombre de colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$, E : espace de représentation associé à $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$) et de 4.4 que

$$T^{\vec{a}}_{\vec{r}} \in E_{inv} \otimes \wedge^{k_0}_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}),$$

quitte à corriger encore par un bord (cette correction préserve toutes les propriétés de T). Si $T^{\vec{b}}_{\vec{s}}$ est le monôme *bo* suivant (les monômes sont supposés rangés par ordre croissant), 4.2 (ii) donne

$$-\partial_\rho T^{\vec{b}}_{\vec{s}} + I + IIa\Big(\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) + IIb\Big(\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = 0,$$

où les compensations sont dues aux permutés $T^{\nu\vec{a}}_{\nu\vec{r}}$ de $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$. Ces permutés étant invariants, il en est de même des compensations, vu la proposition 3.6. La somme des compensations n'appartient cependant pas toujours à $E_{inv} \otimes \wedge^{k_0+1}_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ (k_0, E : comme ci-dessus, mais relatifs à $\begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{s} \end{pmatrix}$). Par conséquent, cette somme et $-\partial_\rho T^{\vec{b}}_{\vec{s}} \in B^{k_0+1}(gl(m, \mathbb{R}), E)$ ne sont pas nécessairement séparément nuls et la preuve par récurrence de l'invariance de T n'est pas immédiate.

4.3 Propriété du cobord de Chevalley de $\mathcal{E}^0$

Dans la suite, le terme monôme désigne aussi bien un monôme d'une cochaîne que sa représentation symbolique.

Lemme 4.6 *Soient $p \in \{2, 3, \ldots\}$, des monômes à coefficients constants*

$$U^{\vec{\alpha}}_{\vec{\rho}} = U^{\alpha_0 \ldots \alpha_{p-2}}_{\rho_0 \ \ldots \rho_{p-2}}, \quad \textit{avec} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} < \ldots < \begin{pmatrix} \alpha_{p-2} \\ \rho_{p-2} \end{pmatrix}$$

et les monômes

$$V^{1\vec{\alpha}}_{1\vec{\rho}} = \mathrm{tr}\ U^{\vec{\alpha}}_{\vec{\rho}}.$$

Si l'antisymétrisation de ces familles de monômes fournit deux cochaînes U et V, on a

$$(\partial V)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}} = -\mathrm{tr}(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}},$$

à condition que les colonnes $\begin{pmatrix} a_i \\ r_i \end{pmatrix}$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$ *de* $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ *soient supérieures à* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Notons d'abord que si ν désigne une permutation de $1, \ldots, p-1$, on a

$$V^{1\ \nu\vec{\alpha}}_{1\ \nu\vec{\rho}} = \mathrm{tr}\ U^{\nu\vec{\alpha}}_{\nu\vec{\rho}}.$$

Nous prouverons que tout terme de $(\partial V)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}}$ est un terme de $-\mathrm{tr}(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ et vice versa.

Soit donc un terme arbitraire de $(\partial V)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}}$.

(i) Le terme considéré est de type I

Comme $i \neq 0$ (cf. 3.5), $\begin{pmatrix} b_0 + \ell_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $\begin{pmatrix} b_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\ell_0 = 0$. Ainsi le monôme contribuant est du genre

$$V^{1\ \nu\vec{\alpha}}_{1\ \nu\vec{\rho}} = \mathrm{tr}\ U^{\nu\vec{\alpha}}_{\nu\vec{\rho}}$$

et la contribution a la forme

$$\begin{aligned} &(-1)^i \mathsf{C}^{\ell_1,\ldots,\ell_p}_{\alpha} \prod_{j\neq i} X^{\ell_j}_{ij}\ V^{1\ \nu\vec{\alpha}}_{1\ \nu\vec{\rho}}(\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\ X_0, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{\rho_{\nu_{p-2}}}) \\ &= \ X_{00}(-1)^i \mathsf{C}^{\ell_1,\ldots,\ell_p}_{\alpha} \prod_{j\neq i} X^{\ell_j}_{ij}\ U^{\nu\vec{\alpha}}_{\nu\vec{\rho}}(\eta^1, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\ X_1^{\rho_{\nu_0}}, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{\rho_{\nu_{p-2}}}) \end{aligned}$$

$(i, j \in \{1, \ldots, p\},\ \ell_1 + \cdots + \ell_p = \alpha,\ \ell_i = 0,\ \ell_j \neq \alpha\ (j \neq i))$.

Or, les termes de type I de ∂U sont les termes

$$(-1)^i \mathsf{C}^{\ell_0,\ldots,\ell_{p-1}}_{\alpha} \prod_{j\neq i} X^{\ell_j}_{ij}\ U^{\nu\vec{\alpha}}_{\nu\vec{\rho}}(\eta^0, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^{p-1};\ X_0^{\rho_{\nu_0}}, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_{p-1}^{\rho_{\nu_{p-2}}})$$

$(i, j \in \{0, \ldots, p-1\},\ \ell_0 + \cdots + \ell_{p-1} = \alpha,\ \ell_i = 0,\ \ell_j \neq \alpha\ (j \neq i))$,

soit, si l'on numérote les arguments de 1 à p, les termes

$$(-1)^{i-1} \mathsf{C}^{\ell_1,\ldots,\ell_p}_{\alpha} \prod_{j\neq i} X^{\ell_j}_{ij}\ U^{\nu\vec{\alpha}}_{\nu\vec{\rho}}(\eta^1, \ldots \hat{\imath} \ldots, \eta^p;\ X_1^{\rho_{\nu_0}}, \ldots \hat{\imath} \ldots, X_p^{\rho_{\nu_{p-2}}})$$

$(i, j \in \{1, \ldots, p\},\ \ell_1 + \cdots + \ell_p = \alpha,\ \ell_i = 0,\ \ell_j \neq \alpha\ (j \neq i))$.

Par conséquent, le terme considéré de $(\partial V)^{1\vec{a}}_{1\vec{r}}$ est bien un terme de $-\mathrm{tr}\ (\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$.

(ii) Le terme considéré est de type IIa

Etant donné que $i \neq 0$ (sinon, $\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le monôme contribuant est un permuté de $V_{\vec{r}}^{\vec{a}} = 0$), $\begin{pmatrix} b_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le monôme contribuant est donc de la forme

$$\begin{aligned} V^{b_0\ 1\ b_2 \dots b_{p-1}}_{s_0\ 1\ s_2 \dots s_{p-1}}(\dots ; \dots) &= -V^{1\ b_0\ b_2 \dots b_{p-1}}_{1\ s_0\ s_2 \dots s_{p-1}}(\eta^1, \eta^0, \dots ;\ X_1, X_0^{s_0}, \dots) \\ &= -X_{11} U^{b_0\ b_2 \dots b_{p-1}}_{s_0\ s_2 \dots s_{p-1}}(\dots \hat{1} \dots ; \dots \hat{1} \dots) \end{aligned}$$

et la contribution s'écrit

$$\begin{aligned} &(-1)^{i+j} \mathsf{C}_\alpha^\ell \frac{1}{k!}\, X_{ij}^\ell (\eta^i D_{\eta^j})^k\, V^{b_0\ 1\ b_2 \dots b_{p-1}}_{s_0\ 1\ s_2 \dots s_{p-1}}(\eta^j, \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots ;\ X_i^{\alpha-\ell} X_j^{s_0-\alpha+\ell}, \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots) \\ &= \ -X_{00}(-1)^{i+j} \mathsf{C}_\alpha^\ell \frac{1}{k!}\, X_{ij}^\ell \\ &\qquad (\eta^i D_{\eta^j})^k\, U^{b_0\ b_2 \dots b_{p-1}}_{s_0\ s_2 \dots s_{p-1}}(\eta^j, \hat{0} \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots ;\ X_i^{\alpha-\ell} X_j^{s_0-\alpha+\ell}, \hat{0} \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots) \end{aligned}$$

$(i \in \{1, \dots, p-1\},\ i < j,\ \ell \in \{1, \dots, \alpha\},\ k \in \{0, \dots, b_0\},\ s_0 - \alpha + \ell \in \mathbb{N}^*,\ (k, \alpha) \neq (0, \ell))$.

Les termes de type IIa de ∂U étant, pour des arguments numérotés de 1 à p, les termes

$$(-1)^{i+j} \mathsf{C}_\alpha^\ell \frac{1}{k!}\, X_{ij}^\ell (\eta^i D_{\eta^j})^k\, U^{\nu \vec{\alpha}}_{\nu \vec{\rho}}(\eta^j, \hat{0} \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots ;\ X_i^{\alpha-\ell} X_j^{\rho_{\nu_0}-\alpha+\ell}, \hat{0} \dots \hat{\imath} \dots \hat{\jmath} \dots)$$

$(i \in \{1, \dots, p-1\},\ i < j,\ \ell \in \{1, \dots, \alpha\},\ k \in \{0, \dots, \alpha_{\nu_0}\},\ \rho_{\nu_0} - \alpha + \ell \in \mathbb{N}^*,\ (k, \alpha) \neq (0, \ell))$,

le terme considéré est encore un terme de $-\mathrm{tr}\ (\partial U)_{\vec{r}}^{\vec{a}}$.

(iii) Le terme considéré est de type IIb

Raisonnement analogue, même conclusion.

Soit maintenant un terme quelconque de $-\mathrm{tr}(\partial U)_{\vec{r}}^{\vec{a}}$.

(j) Le terme correspondant de $(\partial U)_{\vec{r}}^{\vec{a}}$ est de type I

Il résulte alors de (i) que le terme choisi de $-\mathrm{tr}(\partial U)_{\vec{r}}^{\vec{a}}$ est du genre

$$(-1)^i \mathsf{C}_\alpha^{\ell_1, \dots, \ell_p} \prod_{j \neq i} X_{ij}^{\ell_j} V^{1\ \nu \vec{\alpha}}_{1\ \nu \vec{\rho}}(\eta^0, \dots \hat{\imath} \dots, \eta^p;\ X_0, \dots \hat{\imath} \dots, X_p^{\rho_{\nu_{p-2}}})$$

$(i, j \in \{1, \dots, p\},\ \ell_1 + \dots + \ell_p = \alpha,\ \ell_i = 0,\ \ell_j \neq \alpha\ (j \neq i))$.

Par conséquent, il s'agit d'un terme de $(\partial V)^{1\ \vec{a}}_{1\ \vec{r}}$.

(jj) Le terme correspondant de $(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est de type IIa

Vu (ii), le terme considéré a la forme

$$(-1)^{i+j}\mathsf{C}^{\ell}_{\alpha}\frac{1}{k!}\,X^{\ell}_{ij}(\eta^i D_{\eta^j})^k\,V^{\alpha_{\nu_0}\;1\;\alpha_{\nu_1}\ldots\alpha_{\nu_{p-2}}}_{\rho_{\nu_0}\;1\;\rho_{\nu_1}\ldots\rho_{\nu_{p-2}}}(\eta^j,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots;\;X^{\alpha-\ell}_i\,X^{\rho_{\nu_0}-\alpha+\ell}_j,\ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots)$$

$(i\in\{1,\ldots,p-1\},\ i<j,\ \ell\in\{1,\ldots,\alpha\},\ k\in\{0,\ldots,\alpha_{\nu_0}\},\ \rho_{\nu_0}-\alpha+\ell\in\mathbb{N}^*,\ (k,\alpha)\neq(0,\ell))$

et est donc un terme de $(\partial V)^{1\,\vec{a}}_{1\,\vec{r}}$.

(jjj) Le terme correspondant de $(\partial U)^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ est de type IIb

Même conclusion. ∎

4.4 Lemmes techniques

Dans les calculs des $H^p(\mathcal{E}^0,N)_{loc}$ ($p\in\{1,2\}$, $\mathcal{E}^0=\mathcal{E}^0_\Omega$, $N=C^\infty(\Omega)$, Ω ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$), nous prouverons que, modulo des corrections par des bords, les monômes $T^{\vec{b}}_{\vec{s}}=T^{\vec{b}}_{\vec{s}}\,(\eta^1,\ldots,\eta^p;\;X^{s_0}_1,\ldots,X^{s_{p-1}}_p)$ de tout p-cocycle T sont invariants par $gl(m,\mathbb{R})$. Il découle alors d'un théorème de H. Weyl [5] que ces monômes sont des polynômes en les évaluations X_{ji} ($i,j\in\{1,\ldots,p\}$) et de la proposition 3.6 qu'il en est de même des monômes de ∂T (sauf qu'ici i et j varient de 1 à $n=p+1$). Ainsi, les calculs feront apparaître des équations du type

$$P(X_{11},\ldots,X_{n1},\ldots,X_{1n},\ldots,X_{nn})=0,\quad\forall\eta^1,\ldots,\eta^n\in\mathbb{R}^{m^*},\ \forall X_1,\ldots,X_n\in\mathbb{R}^m,$$

où P désigne un polynôme sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Il s'impose d'examiner si une telle relation entraîne la nullité des coefficients de P, donc si l'équation

$$\eta X=A,\ \text{ où }\ \eta=\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots\\ \eta^n\end{pmatrix},\ X=(X_1,\ldots,X_n)\ \text{ et }\ A\in gl(n,\mathbb{R}),$$

admet pour tout A, au moins une solution (η,X).

Lemme 4.7 *Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Si $m\geq n$,*

$$\{\eta X:\eta\in\mathbb{R}^n_m,\ X\in\mathbb{R}^m_n\}=\mathbb{R}^n_n$$

et si $m=n-1$,

$$\{\eta X:\eta\in\mathbb{R}^n_m,\ X\in\mathbb{R}^m_n\}=\{A\in\mathbb{R}^n_n:\det A=0\},$$

où $\mathbb{R}^p_q$ est l'espace des matrices réelles de dimension $p\times q$.

Il suffit d'expliquer l'inclusion $\supset$ pour $m = n-1$. Soit donc une matrice $A \in \mathbb{R}_n^n$ de rang $n-k$ ($1 \leq k < n$) et soit $A' \in \mathbb{R}_{n-k}^{n-k}$ une matrice extraite de déterminant non nul. On peut évidemment supposer que A' occupe le coin supérieur gauche de A i.e. que A s'écrit

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ \hline A''' & A'''' \end{array} \right) \quad (A'' \in \mathbb{R}_k^{n-k},\ A''' \in \mathbb{R}_{n-k}^k \ \text{ et } \ A'''' \in \mathbb{R}_k^k).$$

Les colonnes de A'' étant des combinaisons linéaires de celles de A', il existe $S \in \mathbb{R}_k^{n-k}$ tel que $A'' = A'S$. De plus, il existe $S' \in \mathbb{R}_{n-k}^k$ tel que $A''' = S'A'$ et $A'''' = S'A''$, les lignes de $(A'''|A'''')$ étant des combinaisons linéaires de celles de $(A'|A'')$. Si l'on pose alors

$$\eta = \left(\frac{\eta'}{\eta''} \right) \quad \left(\eta' \in \mathbb{R}_{n-1}^{n-k},\ \eta'' \in \mathbb{R}_{n-1}^k\right)$$

et

$$X = (X'|X'') \quad \left(X' \in \mathbb{R}_{n-k}^{n-1},\ X'' \in \mathbb{R}_k^{n-1}\right),$$

l'équation à résoudre s'écrit finalement

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \eta'X' & = & A' & (1) \\ \eta'X'' & = & A'S & (2) \\ \eta''X' & = & S'A' & (3) \\ \eta''X'' & = & S'A'S & (4) \end{array} \right. .$$

Or, si (η', X') est une solution de (1) (il en existe),

$$(\eta, X) = \left(\left(\frac{\eta'}{S'\eta'} \right), (X'|X'S) \right)$$

vérifie le système (1)-(4). ■

Lemme 4.8 *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \vee(\mathbb{R}^{n^2})^*$ tel que*

$$P(X_{11}, \ldots, X_{n1}, \ldots, X_{1n}, \ldots, X_{nn}) = 0, \quad \forall \eta^1, \ldots, \eta^n \in \mathbb{R}^{m^*},\ \forall X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^m.$$

(i) Si $m \geq n$ ou si $m = n-1$ et P est indépendant d'une des évaluations, les coefficients de P sont nuls.

(ii) Si $m = n-1$ et il existe une évaluation, soit X_{ji}, telle que chaque terme de P soit de degré 0 ou 1 en X_{ji}, on a

$$\begin{aligned} &(\det A')P_0(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \hat{A}_{ji} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}) \\ &\quad -(\det \nu A - A_{ji} \det A')P_1(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \underset{(ji)}{1} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}) = 0, \end{aligned}$$

quels que soient $A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \hat{A}_{ji} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}$ dans $\mathbb{R}$. Dans cette identité, P_0 (P_1) est la somme des termes de P qui sont de degré 0 (1) en A_{ji} et

$$\nu A = \left(\begin{array}{c|c} A' & A_{.i} \\ \hline A_{j.} & A_{ji} \end{array} \right)$$

désigne la matrice $A = (A_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{R}_n^n$ dans laquelle le jème vecteur-ligne et le ième vecteur-colonne ont été placés sur la nème rangée correspondante.

Posons $P(M) = P(M_{11}, \ldots, M_{1n}, \ldots, M_{n1}, \ldots, M_{nn})$, pour tout $M = (M_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{R}^n_n$. L'hypothèse s'écrit alors $P(\eta X) = 0,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n_m,\ \forall X \in \mathbb{R}^m_n$.

Si $m \geq n$, la nullité des coefficients de P est une conséquence immédiate de 4.7.

Si $m = n - 1$, nous notons X_{ji} l'évaluation "privilégiée" définie en (i) ou (ii). Si $A = (A_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{R}^n_n$ est tel que $\det A' \neq 0$, la formule de G. Frobenius - I. Schur

$$\det \nu A = (\det A')(A_{ji} - A_{j.}A'^{-1}A_{.i})$$

donne

$$det\ {}^tA = 0 \Leftrightarrow \det \nu A = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = A_{j.}A'^{-1}A_{.i} \Leftrightarrow A_{ji} = -\frac{\det \nu A - A_{ji} \det A'}{\det A'},$$

où le numérateur est la somme des termes de $\det \nu A$ ne contenant pas A_{ji}. Ceci étant, il découle de 4.7 que

$$A_{ji} = -\frac{\det \nu A - A_{ji} \det A'}{\det A'} \Rightarrow P(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}) = P({}^tA) = 0.$$

Si P est indépendant de X_{ji}, on a donc

$$P(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \hat{A}_{ji} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}) = 0$$

dans $\{(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \hat{A}_{ji} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2-1} : \det A' \neq 0\}$. Cet ensemble étant un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{n^2-1}$, P est identiquement nul (cf. formule de B. Taylor), donc ses coefficients sont nuls.

Si chaque terme de P est de degré 0 ou 1 en X_{ji}, la précédente implication donne

$$\begin{aligned}&(\det A')P_0(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \hat{A}_{ji} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn})\\ &\quad -(\det \nu A - A_{ji} \det A')P_1(A_{11}, \ldots, A_{n1}, \ldots \underset{(ji)}{1} \ldots, A_{1n}, \ldots, A_{nn}) = 0\end{aligned}$$

sur l'ouvert ci-dessus, donc partout. ■

Remarques 4.9 (i) Soit encore un polynôme P sur $\mathbb{R}^{n^2}$ $(n \in \{2, 3, \ldots\})$, s'annulant sur les évaluations $X_{\ell k}$ $(\eta^k \in \mathbb{R}^{m^*},\ X_\ell \in \mathbb{R}^m,\ k, \ell \in \{1, \ldots, n\},\ m = n - 1)$. La seconde égalité du lemme 4.7 restant valable - avec la même preuve - pour les matrices complexes, il résulte du théorème des zéros ("Nullstellensatz") de D. Hilbert [2] qu'une puissance $P^\rho({}^tA)$ $(\rho \in \mathbb{N}^*)$ de $P({}^tA)$ est divisible par le déterminant de A.

(ii) L'hypothèse d'existence d'une évaluation "privilégiée" du point (i) ((ii)) du lemme 4.8, est notamment satisfaite si P est un monôme du type $(\partial T)^{0\vec{a}}_{2\vec{r}}$ $((\partial T)^{2\vec{a}}_{1\vec{r}})$ qui jouera un rôle fondamental dans la suite.

Lemme 4.10 *Posons pour $x \in \mathbb{R}^m$ $(m \in \{2, 3, \ldots\})$, $x = (x', x'')$, avec $x' \in \mathbb{R}^{m'}$ et $x'' \in \mathbb{R}^{m''}$ $(m', m'' \in \mathbb{N}^*,\ m' + m'' = m)$. Soient $P \in \vee(\mathbb{R}^{m'})^* - \{0\}$, $Q, R \in \vee(\mathbb{R}^m)^*$ et $k \in \{1, \ldots, m''\}$. Si*

$$P(x').Q(x', x'') \equiv x''_k.R(x', x''),$$

le polynôme Q est divisible par x''_k i.e. il existe $S \in \vee(\mathbb{R}^m)^*$ tel que

$$Q(x', x'') \equiv x''_k.S(x', x'').$$

C'est évident. En effet,

$$Q(x', x''_1, \dots \underset{(k)}{0} \dots, x''_{m''}) = 0$$

dans $\{(x', x''_1, \dots \hat{k} \dots, x''_{m''}) \in \mathbb{R}^{m-1} : P(x') \neq 0\} \in O(\mathbb{R}^{m-1})$, donc dans $\mathbb{R}^{m-1}$. ∎

Lemme 4.11 *Soient $P, Q \in \vee(\mathbb{R}^{n^2})^*$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Si*

$$X_{ji}P(\eta X) = X_{\ell k}Q(\eta X), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n_m,\ \forall X \in \mathbb{R}^m_n\ (m \in \mathbb{N}^*),$$

avec les notations introduites ci-dessus, si $m \geq n$ ou si $m = n-1$ et il existe une évaluation n'intervenant pas dans $X_{ji}P(\eta X) - X_{\ell k}Q(\eta X)$, alors

(i) si $(i,j) = (k,\ell)$, on a $P = Q$,

(ii) si $(i,j) \neq (k,\ell)$, le polynôme $P = P(\eta X)$ $(Q = Q(\eta X))$ est divisible par $X_{\ell k}$ (X_{ji}).

C'est encore évident. De fait, les coefficients de R défini par $R(\eta X) = X_{ji}P(\eta X) - X_{\ell k}Q(\eta X)$, sont nuls, vu 4.8.
Si $(i,j) = (k,\ell)$, cela signifie que les coefficients correspondants de P et de Q sont égaux.
Si $(i,j) \neq (k,\ell)$, le résultat annoncé découle du lemme 4.10. ∎

5 Calcul des deux premiers espaces de cohomologie

5.1 Premier espace de cohomologie

Proposition 5.1 *Si Ω est un ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$ et si $\mathcal{E}^0$ et N désignent respectivement les espaces $\mathcal{E}^0_\Omega$ et $C^\infty(\Omega)$, on a*

$$H^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = \{0\}.$$

Soit $T \in \wedge^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \cap \ker\partial$. Vu 4.1, on peut supposer que T est à coefficients constants et de monôme minimum T^1_1. Il résulte alors de 4.3 que T^1_1 est un 1-cocycle de $gl(m, \mathbb{R})$ et de 4.4 que

$$T^1_1(\eta, X) = c_1 \operatorname{tr}(\eta \otimes X) = c_1 X_\eta \quad (\eta \in \mathbb{R}^{m^*},\ X \in \mathbb{R}^m, c_1 \in \mathbb{R}).$$

Une nouvelle application de 4.3 et 4.4, montre que

$$T^a_r \quad \left(\begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est un 0-cocycle de $gl(m, \mathbb{R})$ et que

$$T^a_r(\eta, X^r) = \begin{cases} a \neq r : 0, \\ a = r : c_r X^r_\eta \quad (c_r \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ainsi les seuls monômes non nuls de T sont les T_r^r $(r \geq 1)$ et on a

$$T_r^r(\eta, X^r) = c_r X_\eta^r, \quad \forall r \geq 1.$$

Exploitons à présent la relation

$$(\partial T)_{2\,r}^{0\,r+2} = 0 \quad (r \geq 1). \tag{28}$$

Monômes contribuant (cf. 3.5; nous indiquons le type de la contribution, la colonne créée, les valeurs des indices ℓ et k, les conditions éventuelles, la correction à faire et le degré du monôme contribuant) :

$$I : / \qquad IIa : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 0 \end{array} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r+1 \\ r+1 \end{pmatrix} \qquad IIb : /$$

Ecriture explicite de (28) (cf. 3.6):

$$-\frac{2}{r+1} X_{01}(X_0 D_{X_1}) T_{r+1}^{r+1}(\eta^1, X_1^{r+1}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad -2c_{r+1} X_{01}^2 X_{11}^r = 0.$$

Vu 4.8 (i), il en découle que

$$c_r = 0, \quad \forall r \geq 2.$$

L'utilisation de

$$(\partial T)_{1\,2}^{2\,1} = 0 \tag{29}$$

permettra d'annuler aussi c_1. Monômes contribuant :

$$\begin{array}{lllll} I & : & / & & \\ IIa & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 2 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & & & & \\ IIb & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & & & & \\ & & & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ecriture explicite de (29) :

$$X_{10}^2 (X_0 D_{X_1}) T_1^1(\eta^1, X_1) = 0 \quad \text{i.e.} \quad c_1 X_{01} X_{10}^2 = 0.$$

Compte tenu de 4.8 (i), il s'ensuit bien que

$$c_1 = 0.$$

$\blacksquare$

5.2 Deuxième espace de cohomologie

Signalons d'abord que ci-dessous nous désignerons par $\sum_s$ et $\sum_i$, la somme des degrés supérieurs resp. inférieurs d'un bidegré $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ donné (si aucune confusion n'est à craindre) et que, par souci de clarté, nous noterons $E^{a_{k_0}\ldots a_{p-1}}_{r_{k_0}\ldots r_{p-1}}$ l'espace de représentation E de la proposition 4.2.

Lemme 5.2 *Soit* W^σ_σ $(\sigma \geq 1)$ *défini par* $W^\sigma_\sigma(\eta, X^\sigma) = c_\sigma X^\sigma_\eta$, $(c_\sigma \in \mathbb{R})$, *un monôme à coefficients constants et invariant.*

(i) Si $\sigma = 1$, *le monôme minimum de* $\partial W^\sigma_\sigma = \partial W^1_1$ *est*

$$(\partial W^1_1)^{2\,1}_{1\,2}\,(\eta^0, \eta^1;\; X_0, X^2_1) = X^2_{10} W^1_1(\eta^1; X_0) = c_1 X_{01} X^2_{10}.$$

(ii) Si $\sigma \geq 2$, *le monôme minimum de* ∂W^σ_σ *est donné par*

$$\begin{aligned}(\partial W^\sigma_\sigma)^{0\;\sigma+1}_{2\;\sigma-1}\,(\eta^0, \eta^1;\; X^2_0, X^{\sigma-1}_1) &= -\frac{2}{\sigma}\, X_{01}(X_0 D_{X_1}) W^\sigma_\sigma(\eta^1; X^\sigma_1) \\ &= -2c_\sigma X^2_{01} X^{\sigma-1}_{11}.\end{aligned}$$

Les contributions de type I sont nulles, vu la contrainte $\ell_j \neq \alpha$ $(j \neq i)$ et la constance des coefficients de W^σ_σ.

Passons aux contributions de type IIa et IIb. La création de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est impossible. Celle de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ conduit au degré $\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ 1 & \sigma \end{pmatrix}$, mais

$$(\partial W^\sigma_\sigma)^{1\,\sigma}_{1\,\sigma} = -\partial_\rho W^\sigma_\sigma = 0.$$

En effet, la première égalité est une conséquence immédiate de 4.3 et pour la seconde, il suffit de remarquer que $W^\sigma_\sigma \in E^\sigma_{\sigma,inv} \subset Z^0(gl(m, \mathbb{R}), E^\sigma_\sigma)$, si $\sigma \geq 2$ et que $W^\sigma_\sigma \in \wedge^1_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \subset Z^1(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, si $\sigma = 1$ ($Z^p(gl(m, \mathbb{R}), E)$ désigne l'espace des p-cocycles de $gl(m, \mathbb{R})$ à valeurs dans E). Si l'on crée alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, on trouve un terme (de type IIa) de degré $\begin{pmatrix} 0 & \sigma+1 \\ 2 & \sigma-1 \end{pmatrix}$, à condition que $\sigma \geq 2$. C'est le degré minimum, l'insertion de $\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et celle de $\begin{pmatrix} k+\ell \\ \alpha \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ fournissant des degrés evidemment plus grands. Si $\sigma = 1$, la création de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre un seul terme, à savoir un terme (de type IIb) de degré $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, manifestement minimum. ■

Proposition 5.3 *Si* $\Omega \in O(\mathbb{R}^m)$ $(m \geq 2)$ *est contractile et si* $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$ *et* $N = C^\infty(\Omega)$, *on a*

$$H^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = \{0\}.$$

Soit T un 2-cocycle à coefficients constants et sans colonne $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ (cf. 4.1).

Le monôme minimum $T^{1\,1}_{1\,1}$ de T étant un 2-cocycle de $gl(m,\mathbb{R})$ (cf. 4.3), on trouve

$$T^{1\,1}_{1\,1}=0,$$

après correction de T par un bord convenablement choisi (cf. 4.4).

On constate de même que

$$T^{1\,b}_{1\,s}\in E^{b}_{s,inv}\otimes\wedge^{1}_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R})\qquad\left(\begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Ainsi

$$T^{1\,b}_{1\,s}=\begin{cases}b\neq s:0,\\ b=s:\mathrm{tr}\;U^{s}_{s}\quad(U^{s}_{s}\in E^{s}_{s,inv})\end{cases}\qquad\left(\begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Considérons à présent un monôme $T^{a\,b}_{r\,s}$ $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)<\left(\begin{smallmatrix}a\\r\end{smallmatrix}\right)\leq\left(\begin{smallmatrix}b\\s\end{smallmatrix}\right)\right)$ et notons qu'il découle de 4.2 que

$$(\partial T)^{1\,a\,b}_{1\,r\,s}=-\partial_\rho T^{a\,b}_{r\,s}+\cdots,\tag{30}$$

les compensations éventuelles de $-\partial_\rho T^{a\,b}_{r\,s}$ étant dues aux monômes $T^{1\,t}_{1\,t}$ et $T^{t\,1}_{t\,1}$ $(t\geq 2)$.

Si $T^{a\,b}_{r\,s}$ est tel que $\sum_s\neq\sum_i$, il ne peut y avoir de compensation. En effet, les formules fondamentales montrent que les monômes (à coefficients constants) $T^{1\,t}_{1\,t}$ et $T^{t\,1}_{t\,1}$ $(t\geq 2)$ ne contribuent qu'à des degrés tels que $\sum_s=\sum_i$. Ainsi $T^{a\,b}_{r\,s}\in Z^0(gl(m,\mathbb{R}),E^{a\,b}_{r\,s})=E^{a\,b}_{r\,s,inv}$, donc

$$T^{a\,b}_{r\,s}=0\qquad\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}a\\r\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix},\ \sum\nolimits_s\neq\sum\nolimits_i\right).$$

Supposons maintenant que $T^{a\,b}_{r\,s}$ soit tel que $\sum_s=\sum_i$ et introduisons les cochaînes

$$U=\sum_{t\geq 2}U^{t}_{t}\quad\text{et}\quad V=\sum_{t\geq 2}(T^{1\,t}_{1\,t}+T^{t\,1}_{t\,1}).$$

Le lemme 4.6 permet alors d'écrire l'égalité (30) sous la forme

$$(\partial T)^{1\,a\,b}_{1\,r\,s}=-\partial_\rho T^{a\,b}_{r\,s}+(\partial V)^{1\,a\,b}_{1\,r\,s}=-\partial_\rho T^{a\,b}_{r\,s}-\mathrm{tr}\;(\partial U)^{a\,b}_{r\,s}.$$

La dernière somme étant dans

$$B^1(gl(m,\mathbb{R}),E^{a\,b}_{r\,s})\oplus E^{a\,b}_{r\,s,inv}\otimes\wedge^{1}_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R}),$$

ses deux termes sont séparément nuls. La nullité du premier implique

$$T^{a\,b}_{r\,s}\in E^{a\,b}_{r\,s,inv}\qquad\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}a\\r\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix},\ \sum\nolimits_s=\sum\nolimits_i\right),$$

de sorte que T est globalement invariant. Celle du second entraîne $(\partial U)^{a\,b}_{r\,s}=0$ $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)<\left(\begin{smallmatrix}a\\r\end{smallmatrix}\right)\leq\left(\begin{smallmatrix}b\\s\end{smallmatrix}\right),\ \sum_s=\sum_i\right)$. Le lemme 5.2 montrant que le monôme minimum de ∂U est $(\partial U)^{0\,3}_{2\,1}$ et les monômes de ∂U étant invariants, ceci signifie que U est un 1-cocycle de $\mathcal{E}^0$. Il suffit alors de reprendre l'étude de (28) pour voir que

$$U^{s}_{s}=0,\ \ \forall s\geq 2\quad\text{i.e.}\quad T^{1\,s}_{1\,s}=0,\ \ \forall s\geq 2.$$

Finalement, T *est un* 2*-cocycle à coefficients constants, invariant et sans colonne* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Prouvons à présent que T est aussi sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ i.e. que ses monômes $T^{0\,s+2}_{2\,s}$ $(s \geq 1)$ sont nuls. Soient W^{σ}_{σ} $(\sigma \geq 2)$ des monômes invariants, à coefficients constants. Posons $W = \sum_{\sigma \geq 2} W^{\sigma}_{\sigma}$ et $T' = T - \partial W$. Comme il résulte du lemme 5.2 que chaque W^{σ}_{σ} a sa plus petite contribution au bord à l'ordre $\begin{pmatrix} 0 & \sigma+1 \\ 2 & \sigma-1 \end{pmatrix}$ (c'est d'ailleurs sa seule contribution dont le degré commence par $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$), il est clair que T' est à son tour un 2-cocycle invariant, à coefficients constants et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, si $s \geq 1$,

$$\begin{aligned} T'^{0\,s+2}_{2\,s}\,(\eta^0, \eta^1;\ X^2_0, X^s_1) &= T^{0\,s+2}_{2\,s}\,(\eta^0, \eta^1;\ X^2_0, X^s_1) - (\partial W)^{0\,s+2}_{2\,s}\,(\eta^0, \eta^1;\ X^2_0, X^s_1) \\ &= C_s X^2_{01} X^s_{11} - (\partial W^{s+1}_{s+1})^{0\,s+2}_{2\,s}\,(\eta^0, \eta^1;\ X^2_0, X^s_1) \\ &= (C_s + 2c_{s+1}) X^2_{01} X^s_{11}. \end{aligned}$$

On annule donc $T'^{0\,s+2}_{2\,s}$ $(s \geq 1)$, en prenant $c_{s+1} = -\dfrac{C_s}{2}$.

Dans ce cas, le plus petit monôme du cocycle (que nous rebaptisons T) est $T^{2\,1}_{1\,2}$. Si W^1_1 est de nouveau un monôme vérifiant les conditions du lemme 5.2 et si l'on pose $T' = T - \partial W^1_1$, on obtient un 2-cocycle possédant toutes les propriétés de l'ancien et la particularité supplémentaire que

$$T'^{2\,1}_{1\,2}\,(\eta^0, \eta^1;\ X_0, X^2_1) = -C_1\, X_{00} X_{10} X_{11} + (-C_2 - c_1) X_{01} X^2_{10}$$

ne contient pas de terme en $X_{01} X^2_{10}$ (prendre $c_1 = -C_2$). Nous ne retrancherons plus de bord dans la suite, de sorte que le cocycle (il sera encore noté T) ne perd plus cette spécificité : T *est un* 2*-cocycle invariant, à coefficients constants et tel que le coefficient de* $X_{01} X^2_{10}$ *dans son monôme minimum* $T^{2\,1}_{1\,2} = T^{2\,1}_{1\,2}\,(\eta^0, \eta^1;\ X_0, X^2_1)$ *est nul.*

Nous démontrerons ci-dessous qu'un quelconque des monômes *bo* restants $T^{a\,b}_{r\,s}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i \right)$ est nul, si ceux du même type qui le précèdent, le sont. On remarquera que l'hypothèse de récurrence implique que tous les monômes de degré inférieur à celui du monôme étudié, sont nuls. Signalons aussi que les égalités du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{pmatrix} = 0$ apparaissant ci-après, signifient évidemment que $T^{\alpha\,\beta}_{\rho\,\sigma} = 0$.

(1) $\boxed{r \geq 2}$

Equation :

$$(\partial T)^{0\,a+1\,b}_{2\,r-1\,s} = 0. \tag{31}$$

Monômes contribuant :

$$I \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a & b-1 \\ r-1 & s \end{pmatrix} = 0$$

$$(b \neq 0, \text{ sinon } T^{a\,b}_{r\,s} = T^{r+s\,0}_{r\quad s} \text{ n'est pas } bo)$$

$$IIa \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell = 1 \\ k = 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b-1 & a+1 \\ s+1 & r-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ r-1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} . & 0 \\ . & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$IIb \quad : \quad \begin{pmatrix} a+1 \\ r-1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} . & 0 \\ . & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ecriture explicite de (31) :

$$-\frac{2}{r}\, X_{01}(X_0 D_{X_1}) T^{a\,b}_{r\,s}(\eta^1, \eta^2;\ X_1^r, X_2^s) = 0.$$

En faisant $X_0 = X_1$ et en utilisant le lemme 4.11 et l'hypothèse $m \geq 2$, on en déduit que

$$T^{a\,b}_{r\,s} = 0.$$

(2) $\boxed{r = 1,\ s \geq 2}$

La situation $r = s = 1$ ne pouvant se présenter, il s'agit du dernier cas à traiter.

Equation :

$$(\partial T)^{0\,a\,b+1}_{2\,1\,s-1} = 0. \tag{32}$$

Monômes contribuant :

$$I \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\text{noter que } a \geq 2 \text{ (et } b \geq 1))$$

$$IIa \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell = 1 \\ k = 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & b+1 \\ 2 & s-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & a \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} . & 0 \\ . & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$IIb \quad : \quad \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} . & 0 \\ . & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ecriture explicite de (32) :

$$-X_{01}(X_0D_{X_1})T^{a-1\;b+1}_{2\;\;\;s-1}(\eta^1,\eta^2;\ X_1^2,X_2^{s-1}) = \frac{2}{s}\,X_{02}(X_0D_{X_2})T^{a\;b}_{1\;s}(\eta^1,\eta^2;\ X_1,X_2^s). \tag{33}$$

Il en résulte que

$$T^{a-1\;b+1}_{2\;\;\;s-1}\,(\eta^1,\eta^2;\ X_1^2,X_2^{s-1}) = X_{12}P(X_{11},X_{12},X_{21},X_{22}),$$

où P est un polynôme. Si l'on remplace dans (33), on obtient

$$-X_{01}(X_{02}P + X_{12}(X_0D_{X_1})P) = \frac{2}{s}\,X_{02}(X_0D_{X_2})T^{a\;b}_{1\;s}(\eta^1,\eta^2;\ X_1,X_2^s),$$

ce qui entraîne que P est divisible par X_{12}. Ainsi

$$T^{a-1\;b+1}_{2\;\;\;s-1}\,(\eta^1,\eta^2;\ X_1^2,X_2^{s-1}) = CX_{12}^2X_{21}^{a-1}X_{22}^{b-1} \quad (C\in\mathbb{R})$$

et une nouvelle substitution dans (33) donne

$$\frac{1}{s}\,X_{02}(X_0D_{X_2})T^{a\;b}_{1\;s}(\eta^1,\eta^2;\ X_1,X_2^s) = -CX_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^{a-1}X_{22}^{b-1}.$$

On en déduit que

$$T^{a\;b}_{1\;s}\,(\eta^1,\eta^2;\ X_1,X_2^s) = -CX_{12}X_{21}^{a}X_{22}^{b-1},$$

de sorte que (33) s'écrit finalement

$$C(a-s)X_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^{a-1}X_{22}^{b-1} + C(b-1)X_{02}^2X_{12}X_{21}^{a}X_{22}^{b-2} = 0.$$

Par conséquent,

$$T^{a\;b}_{1\;s} = 0,$$

sauf si $a=s$ et $b=1$.

Il reste donc à annuler

$$T^{s\;1}_{1\;s}\,(\eta^1,\eta^2;\ X_1,X_2^s) = \cancel{C}_s\,X_{12}X_{21}^s \quad (s\geq 2).$$

Le coefficient $\cancel{C}_2$ ayant été annulé précédemment, on peut prendre $s\geq 3$. Considérons l'équation

$$(\partial T)^{2\;s-1\;1}_{1\;1\;\;\;\;\;s} = 0. \tag{34}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{lllllll}
I & : & / & & & & \\
IIa & : & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\ell=1\\ k=2\leq b_0\end{array} & \begin{pmatrix}+1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}s & 1\\ 1 & s\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & s-1\\ s & 1\end{pmatrix}=0 \\
 & & \begin{pmatrix}s-1\\1\end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix}. & 2\\ . & 1\end{pmatrix}=0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llllll}
IIb\ : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & s-1 \\ s & 1 \end{pmatrix} = 0 \\
 & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ s-1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\begin{pmatrix} s-1 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} . & 2 \\ . & 1 \end{pmatrix} = 0 &
\end{array}
$$

Ecriture explicite de (34) :

$$-\frac{1}{2}\, X_{01}(\eta^0 D_{\eta^1})^2 T^{s\,1}_{1\,s}(\eta^1, \eta^2;\ X_1, X_2^s) + X_{10}(\eta^0 D_{\eta^1})(X_0 D_{X_1}) T^{s\,1}_{1\,s}(\eta^1, \eta^2;\ X_1, X_2^s) = 0$$

ou encore

$$-\frac{1}{2}\, s(s-1)\cancel{C}_s\, X_{01}X_{12}X_{20}^2X_{21}^{s-2} + s\cancel{C}_s\, X_{02}X_{10}X_{20}X_{21}^{s-1} = 0.$$

D'où finalement,

$$\cancel{C}_s = 0, \quad \forall s \geq 3.$$

■

Remarques 5.4 (i) La précédente preuve est valable en dimension $m \geq 2$ (cf. 4.8 - 4.11). On peut établir le résultat $H^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = \{0\}$ également si $m = 1$, mais la fin de la démonstration change radicalement. Ce calcul ne sera pas donné ici.

(ii) On sait (cf. [10]) qu'aux classes de $H^2_{DR}(M)$ sont associées des obstructions à la scission de la suite

$$0 \to \ker d^* \to A(\Omega^1(M), N)_{loc} \xrightarrow{d^*} \mathcal{E} \to 0.$$

Finalement, l'espace $H^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ ($\simeq H^2_{DR}(M)$) contient donc exactement les "obstructions" en question (cf. II.3).

(iii) Les espaces $H^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ et $H^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ peuvent être déterminés par une autre méthode.

Voici le fil d'Ariane de ce procédé (décrit dans le cas du deuxième espace de cohomologie). L'équation de cocycle $\partial T = 0$ (EC), écrite pour trois champs de vecteurs, montre que T est un 2-cocycle de la cohomologie des champs de vecteurs à valeurs dans N. En symbolisant dans EC transcrit pour deux champs X et Y et un opérateur arbitraire A, les dérivées respectivement par les formes linéaires λ, μ et η et en sélectionnant les termes de degré 0, on sait établir que tout 2-cocycle est cohomologue à un 2-cocycle T, nul sur les couples de champs de vecteurs et tel que $T(\lambda, \eta;\ X, A)$ soit à coefficients constants. Le tri des termes de degré 1, permet de faire intervenir la cohomologie de $gl(m, \mathbb{R})$ et de corroborer que tout 2-cocycle T est - modulo un bord et en sus des propriétés déjà obtenues - invariant par $gl(m, \mathbb{R})$, à condition de l'évaluer sur $(\lambda, \eta;\ X, A)$. On vérifie ensuite que $T(X, A)$ est nul quitte à soustraire les bords des invariants, en explicitant complètement les termes de degré 2. Finalement, ce sont l'utilisation de EC avec un champ de vecteurs X et deux opérateurs quelconques A et B et les choix successifs des termes de degré $0, 1$ et 2, qui conduisent à la nullité de $T(A, B)$.

Ces calculs seront publiés ailleurs [13].

Remerciements. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet R&D no MEN/CUL/96/006. L'auteur remercie les Professeurs M. De Wilde et P.B.A. Lecomte pour les discussions fructueuses qu'il a pu avoir avec eux.

References

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, *Ann. Phys.*, **111** (1978), pp. 61-110, pp. 111-151.

[2] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Algèbre commutative*, chapitres 5 à 7, Masson, Paris, 1985.

[3] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte, Star-produits et déformations formelles associés aux variétés symplectiques exactes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **296** (1983), série I, pp. 825-828.

[4] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte, Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations, *NATO ASI Serie C*, **247** (1988), pp. 897-960.

[5] M. De Wilde, *Cohomologie de Chevalley des algèbres de Lie de dimension finie ou infinie*, Séminaire, Université de Liège.

[6] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte, *Existence et classification des star-produits sur les variétés symplectiques*, Conférences, Ecole "Quantification - Quantification par déformation", Université de Nice, 1996.

[7] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, *preprint de l'IHES*, (1997).

[8] P.B.A. Lecomte, Application of the Cohomology of Graded Lie Algebras to Formal Deformations of Lie Algebras, *Letters in Mathematical Physics*, **13** (1987), pp. 157-166.

[9] P.B.A. Lecomte, D. Melotte and C. Roger, Explicit Form and Convergence of 1-Differential Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra, *Letters in Mathematical Physics*, **18** (1989), pp. 275-285.

[10] P.B.A. Lecomte, On Some Sequence of Graded Lie Algebras Associated to Manifolds, *Ann. of Global Analysis and Geometry*, **12** (1994), pp. 183-192.

[11] A. Nijenhuis and R. Richardson, Deformation of Lie algebra structures, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), pp. 89-105.

[12] J. Peetre, Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels, *Math. Scand.*, **7** (1959), pp. 211-218 et **8** (1960), pp. 116-120.

[13] N. Poncin, Cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre des opérateurs locaux sur l'espace des fonctions d'une variété (à paraître).

Norbert PONCIN
Département de Mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162 A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg

E-mail : poncin@cu.lu