# Troisième espace de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions

Norbert PONCIN

**Résumé :** Dans [5], nous avons développé une méthode générale, ayant permis de montrer que les deux premiers espaces de la cohomologie de Chevalley locale de l'algèbre des opérateurs différentiels sur une variété, à valeurs dans les fonctions, sont isomorphes aux espaces correspondants de la cohomologie de de Rham. Nous appliquerons à présent notre technique au calcul du troisième espace de cohomologie.

**Mots-clés :** Complexe de Chevalley, représentation symbolique.

**Classification :** 17 B 56, 17 B 66

***Third cohomology space of the Lie algebra of differential operators on a manifold, with coefficients in the space of functions***

**Abstract :** *In [5], we constructed a general method, which allowed us to show that the first and second term of the local Chevalley-Eilenberg cohomology of the algebra of differential operators on a manifold, with coefficients in the space of functions, are isomorphic to the corresponding spaces of the de Rham cohomology. It now will be proved, by the same method, that this result also holds for the third cohomology spaces.*

**Key-words :** *Chevalley-Eilenberg complex, symbolic representation.*

**Classification :** *17 B 56, 17 B 66*

## 1 Introduction

Notons $N$ l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions d'une variété $M$ et désignons par $\mathcal{E}^0$ l'espace $gl(N)_{loc,n.c.}$ des opérateurs locaux de $N$ dans $N$ - i.e. des opérateurs différentiels sur $M$ - qui sont nuls sur les constantes. Il est clair que $\mathcal{E}^0$ est une algèbre de Lie, admettant $N$ comme espace de représentation.

Le crochet de Nijenhuis-Richardson [4] munit l'espace $\mathcal{E}$ des applications multilinéaires, antisymétriques de $N \times \cdots \times N$ dans $N$, qui sont locales et nulles sur $1 \in N$, d'une structure d'algèbre de Lie graduée.

Soient $(\wedge(\mathcal{E}^0, N)_{loc}, \partial)$ et $(\wedge_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc}, \partial)$ les complexes associés à $\mathcal{E}^0$ représenté sur $N$ resp. à $\mathcal{E}$ opérant sur lui-même, toutes les cochaînes étant locales resp. locales et de poids $-1$. Les cohomologies de ces espaces différentiels sont telles que [3]

$$H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,loc} = H(\ker \theta) \oplus H(\mathcal{E}^0, N)_{loc},$$

où $\theta$ désigne l'application "restriction des cochaînes alternées à $\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0$".

Dans [5], nous avons montré que les espaces de degré $0, 1$ et $2$ de la cohomologie de $\mathcal{E}^0$ sont isomorphes aux espaces correspondants de la cohomologie $H_{DR}(M)$ de de Rham. Nous utiliserons à présent la méthode et les résultats de [5], pour établir le

**Théorème 1.1** *Si $M$ est une variété de classe $C^\infty$, de dimension $m \geq 3$, séparée, à base dénombrable et connexe, on a*

$$H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^p_{DR}(M), \quad \forall p \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

On dispose alors d'une partie du calcul des premiers espaces de la cohomologie graduée, intéressants en théorie des déformations. Cette motivation est plus que jamais d'actualité, le résultat récent de M. Kontsevich [2], selon lequel l'algèbre des fonctions des variétés de Poisson est toujours déformable, suggérant fortement l'existence, dans la cohomologie graduée, de classes canoniques "universelles", liées aux déformations de $N$ et à leur classification.

La technique de calcul développée dans [5], est basée sur la représentation symbolique des dérivées par des formes linéaires sur $\mathbb{R}^m$, la graduation de l'espace des $p$-cochaînes et l'ordre total sur les termes homogènes.

La symbolisation de l'équation de cocycle conduit à une équation purement algébrique, plus simple que l'original, dont la résolution fournit des conclusions-images, qu'il suffit de réinterpréter.

Le terme homogène $T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = T^{a_0 \ldots a_{p-1}}_{r_0 \ldots r_{p-1}}$ ($a_i \in \mathbb{N}$, $r_i \in \mathbb{N}^*$) d'une $p$-cochaîne $T$, appelé monôme de degré $(\vec{a}/\vec{r})$ de $T$, est la somme des termes d'ordre $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ de $T$ évalué sur des opérateurs différentiels homogènes d'ordres respectifs $r_0, \ldots, r_{p-1}$. Ces monômes sont ordonnés par l'ordre lexicographique associé à l'ordre total défini par

$$(a_i/r_i) < (a_j/r_j) \Leftrightarrow a_i + r_i < a_j + r_j \ \text{ ou } \ (a_i + r_i = a_j + r_j \ \text{ et } \ r_i < r_j).$$

Il importe que l'ordre sur les monômes soit compatible avec l'opération de cobord i.e. que le plus petit des monômes de $\partial T$ auxquels $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ contribue, soit d'autant plus petit que $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ l'est. En effet, si $T$ désigne un cocycle, nous le corrigeons par des bords et prouvons que les monômes successifs du cocycle cohomologue sont nuls. On peut alors annuler un monôme $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ moyennant l'équation $(\partial T)^{\vec{A}}_{\vec{R}} = 0$, où $(\partial T)^{\vec{A}}_{\vec{R}}$ est le plus petit monôme du bord auquel $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$ contribue, cette équation ne renfermant en principe que $T^{\vec{a}}_{\vec{r}}$.

*Dans la suite, nous nous servirons des notations et résultats de [5], sans nous y référer toujours explicitement.*

Pour prouver 1.1, il suffit de démontrer la

**Proposition 1.2** *L'espace de cohomologie $H^3(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega, N = C^\infty(\Omega)$, $\Omega$ : ouvert contractile de $\mathrm{I\!R}^m$) est nul en dimension $m \geq 3$.*

Ce calcul est plus technique que ceux des premier et deuxième espaces. L'invariance sous $gl(m, \mathrm{I\!R})$ n'apparaît encore que graduellement, phénomène lié à l'absence dans $\mathcal{E}^0$ d'un idéal raisonnable, supplémentaire à $gl(m, \mathrm{I\!R})$. De plus, des termes de bords formels de cochaînes symétriques et deux familles de monômes critiques - difficiles à annuler - apparaissent. La première ne peut être annulée que grâce à la construction d'une cochaîne, chaîne de "cochaînes élémentaires", telle que le monôme minimum de son bord soit la somme des contributions opposées de ses deux premiers maillons. Cette compensation, réitérée jusqu'à épuisement des paires de maillons successifs, conduit finalement à un monôme minimum, ayant exactement le degré et la forme requis. La procédure annulant les monômes de la seconde famille, dépend de la valeur du paramètre. S'il est pair, le monôme disparaît après le choix convenable d'un coefficient arbitraire dans un bord retranché préalablement. Sinon, le monôme engendre une "chaîne de survivants", finalement entièrement annulée par l'effacement de son dernier maillon.

La preuve se fait en six étapes, chaque étape constituant l'objet d'une section. Les raisonnements sont en principe valables pour tout $m \geq 3$, mais l'argumentation nécessite quelques raffinements ponctuels en dimension 3. Ces endroits seront marqués d'un astérisque et les affinages seront donnés dans la section VII.

Afin de simplifier les notations au maximum, nous écrirons $iD_j$ et $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}(0\ 1\ 2;$ $X_0^r\ X_1^s\ X_2^t)$ (et même simplement $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$, si aucune confusion n'est à craindre) au lieu de $\eta^i D_{\eta^j}$ resp. $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}\,(\eta^0, \eta^1, \eta^2; X_0^r, X_1^s, X_2^t)$.

# 2 Etude des monômes à une ou plusieurs colonnes $\binom{1}{1}$

**Proposition 2.1** *Tout 3-cocycle de $\mathcal{E}^0$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega,\ m \geq 3$) est cohomologue à un cocycle $T$ à coefficients constants, invariant sous l'action de $gl(m, \mathrm{I\!R})$, sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et tel que*

$$\begin{aligned} T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1} &= k \text{ tr } ([.,.].) \quad (k \in \mathrm{I\!R}), \\ T^{1\,1\,t}_{1\,1\,t} &= 0 \quad (t \geq 2) \end{aligned}$$

*et*

$$T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b & c \\ s & t \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 1 & \tau \end{pmatrix} : \tau \geq 2 \right\} : 0 \\ \\ \begin{pmatrix} b & c \\ s & t \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 1 & \tau \end{pmatrix} : \tau \geq 2 \right\} : X^t_{21}(kX_{02}X_{10} + k'X_{00}X_{12}) \ \ (k' \in \mathrm{I\!R}) \end{cases}$$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}, \textstyle\sum_s = \sum_i \right)$$

(tr ([.,.].) *: trace antisymétrisée du produit de trois matrices).*

Soit $T \in \wedge^3(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \cap \ker \partial$. On sait qu'on peut supposer $T$ être à coefficients constants et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le monôme minimum $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}$ de $T$ est alors donné par

$$T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1} = k \text{ tr } ([.,.].) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

En procédant comme en [5, V.2] et en notant que $\wedge^2_{inv}(gl(m, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = \{0\}$, on constate que

$$T^{1\,1\,c}_{1\,1\,t} = 0 \qquad \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} \right).$$

Etudions maintenant les monômes du type $T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t}$ $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} \right)$.

Vu [5, IV.2.1], on a

$$\begin{aligned} (\partial T)^{1\,1\,b\,c}_{1\,1\,s\,t} \;&=\; -\partial_\rho T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} + I + II\ a \left( \begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + II\ b \left( \begin{pmatrix} k+l \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Il est clair qu'il n'existe pas de compensation de type I (car une telle compensation serait due à un monôme contenant une colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). S'il y avait une compensation de type II a, elle serait obtenue par création de $\begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}$ et serait donc engendrée par le monôme

$$T^{c+b-\ell\,1\,1}_{t+s-\ell\,1\,1} = T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1} \quad (\ell \in \{1, \ldots, s\}).$$

Par conséquent, on aurait $\ell = s$, $t = 1$ et $b + c = 1 + s$. D'autre part, les conditions $k \leq b_0$ et $(k, \alpha) \neq (0, \ell)$ donneraient $b \leq 1$ resp. $b \neq 0$. Ainsi, $b = 1$, $c = s$ et le monôme étudié serait $T^{1\,1\,s}_{1\,s\,1}$, ce qui est absurde. S'il existe une compensation de type II b, elle est fournie par le monôme

$$T^{c+b-\ell\,1\,1}_{t+s-\ell\,1\,1} = T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1} \quad (\ell \in \{1, \ldots, b\}).$$

Comme $k \leq b_0$, on a $k = 0$ et $\ell = b$ ou $k = 1$ et $\ell = b - 1$. La condition $\alpha \leq s_0$ entraîne que $s = 1$ et l'exigence $(k, \alpha) \neq (b_0, s_0)$ implique que $k = 0$ et $\ell = b$. Il s'ensuit que $c = 1$ et $t = b$, de sorte que le monôme étudié est $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$ $(t \geq 2)$. Inversement, si l'examen porte sur un tel monôme, on a la compensation

$$X^t_{32}\ (X_2 D_{X_3}) T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}(3\ 0\ 1; X_3\ X_0\ X_1) = k\ X^t_{32} \text{ tr}([0 \otimes X_0, 1 \otimes X_1]\ 3 \otimes X_2).$$

Posons dans ce cas

$$\mathcal{B}^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}(1\ 2\ 3; X_1\ X_2\ X^t_3) = k\ X^t_{32} \text{ tr}(1 \otimes X_1\ .\ 3 \otimes X_2) = k\ X_{13}\ X_{21}\ X^t_{32}$$

et notons $\mathcal{B}_t$ la 3-cochaîne (à coefficients constants et sans colonne $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$) de $\mathcal{E}^0$ que fournit l'antisymétrisation de $\mathcal{B}^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$. On vérifie facilement que la précédente compensation n'est autre chose que

$$(\partial_\rho \mathcal{B}^{1\,t\,1}_{1\,1\,t})(0\otimes X_0, 1\otimes X_1)(2\;3; X_2\; X_3^t)$$

(rappelons que conformément à la convention faite en I, 0, 1, 2 et 3 représentent des formes linéaires $\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ sur $\mathbb{R}^m$).

Si le monôme étudié $T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t}$ n'est pas du genre $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$, où $t\geq 2$, (1) montre que

$$T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} \in E^{b\,c}_{s\,t,inv}\otimes \wedge^1_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

(à un bord près). Si $T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t}$ est de la forme $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$ $(t\geq 2)$, l'application de [5, IV.2.3] au monôme $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}-\mathcal{B}^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$ de la cochaîne $T-\mathcal{B}_t$ donne

$$T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}-\mathcal{B}^{1\,t\,1}_{1\,1\,t} \in E^{t\,1}_{1\,t,inv}\otimes \wedge^1_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

(quitte à corriger par un bord). Par conséquent,

$$T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} = \begin{cases} \sum_s \neq \sum_i : 0 \\ \sum_s = \sum_i \begin{cases} \begin{pmatrix} b & c\\ s & t\end{pmatrix} \notin \left\{\begin{pmatrix} \tau & 1\\ 1 & \tau\end{pmatrix} : \tau\geq 2\right\} : \mathrm{tr}\, U^{b\,c}_{s\,t} \\ \begin{pmatrix} b & c\\ s & t\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} \tau & 1\\ 1 & \tau\end{pmatrix} : \tau\geq 2\right\} : \mathcal{B}^{1\,t\,1}_{1\,1\,t} + \mathrm{tr}\, U^{t\,1}_{1\,t} \end{cases}\end{cases}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}c\\t\end{pmatrix}\right),$$

où $U^{\beta\,\gamma}_{\sigma\,\tau}$ est un invariant de l'espace de représentation correspondant. Remarquons que quel que soit $s\geq 2$, $T^{1\,s\,s}_{1\,s\,s} = \mathrm{tr}\, U^{s\,s}_{s\,s} = 0$ (argument de symétrie) et qu'ainsi $T^{1\,b\,b}_{1\,s\,s}=0$, pour tout $\left(\begin{smallmatrix}b\\s\end{smallmatrix}\right) > \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Passons à l'étude des monômes $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) < \left(\begin{smallmatrix}a\\r\end{smallmatrix}\right) \leq \left(\begin{smallmatrix}b\\s\end{smallmatrix}\right) \leq \left(\begin{smallmatrix}c\\t\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Il découle de [5, IV.2.1] et des résultats ci-dessus que

$$(\partial T)^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} = -\partial_\rho T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} + \cdots, \tag{2}$$

où les termes compensateurs éventuels sont engendrés par les monômes $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}$ et $T^{\nu(1\,\beta\,\gamma)}_{\nu(1\,\sigma\,\tau)}$ $\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) < \left(\begin{smallmatrix}\beta\\\sigma\end{smallmatrix}\right) < \left(\begin{smallmatrix}\gamma\\\tau\end{smallmatrix}\right), \sum_s = \sum_i\right)$.

Si $\sum_s = a+b+c \neq \sum_i = r+s+t$, le bord $-\partial_\rho T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ est l'unique contribution au degré $\left(\begin{smallmatrix}1 & a & b & c\\ 1 & r & s & t\end{smallmatrix}\right)$ (car un monôme (d'une cochaîne à coefficients constants) tel que $\sum_s = \sum_i$ contribue dans le bord seulement à des degrés ayant la même propriété). Ainsi $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}\in Z^0(gl(m,\mathbb{R}), E^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}) = E^{a\,b\,c}_{r\,s\,t,inv}$, donc

$$T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} = 0 \quad \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}a\\r\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}c\\t\end{pmatrix}, \sum_s \neq \sum_i\right).$$

Pour traiter le cas $\sum_s = a+b+c = \sum_i = r+s+t$, il est commode d'introduire les cochaînes suivantes. Considérons les monômes $U^{\beta\,\gamma}_{\sigma\,\tau}$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \beta \\ \sigma \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \gamma \\ \tau \end{pmatrix}, \sum_s = \sum_i\right)$ (ils sont à coefficients constants et invariants) et les monômes $\mathcal{C}^{1\,\beta\,\gamma}_{1\,\sigma\,\tau} = \mathrm{tr}\ U^{\beta\,\gamma}_{\sigma\,\tau}$. Soient $U$ et $\mathcal{C}$ les cochaînes

$$U = \sum \alpha U^{\beta\,\gamma}_{\sigma\,\tau} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \sum \alpha\, \mathcal{C}^{1\,\beta\,\gamma}_{1\,\sigma\,\tau}$$

(où $\sum$ représente la somme sur tous les $\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \sigma & \tau \end{pmatrix}$ tels que $\sum_s = \sum_i$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \beta \\ \sigma \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \gamma \\ \tau \end{pmatrix}$ et où $\alpha$ désigne l'opérateur d'antisymétrisation) et notons $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{D}$ les cochaînes

$$\mathcal{B} = T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1} + \sum_{v\geq 2} \alpha \mathcal{B}^{1\,v\,1}_{1\,1\,v} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \sum \alpha T^{\delta\,\varepsilon\,\zeta}_{\lambda\,\mu\,\nu}$$

(la dernière somme étant étendue à tous les ordres $\begin{pmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$ tels que $\sum_s = \sum_i$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \delta \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \zeta \\ \nu \end{pmatrix}$). Comme $T = \mathcal{B}+\mathcal{C}+\mathcal{D}$, la relation (2) s'écrit, compte tenu de [5, IV.3.1],

$$\begin{aligned} (\partial T)^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} &= (\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} + (\partial\mathcal{C})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} + (\partial\mathcal{D})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} \\ &= (\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} - \mathrm{tr}\ (\partial U)^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} - \partial_\rho T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Prouvons que $(\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t}$ est nul. Pour cela, remarquons d'abord qu'il résulte de [5, III.4.1] et des égalités

$$\tau_\eta X^r = X^r_{\eta+.} - X^r_. = \sum_{k=0}^{r-1} \mathsf{C}^k_r X^{r-k}_\eta X^k_. \quad (\eta \in \mathbb{R}^{m^*},\ X \in \mathbb{R}^m,\ r \in \mathbb{N}^*)$$

et

$$(XD_Y)^r Y^s = \frac{s!}{(s-r)!}\ X^r Y^{s-r} \quad (X, Y \in \mathbb{R}^m,\ r, s \in \mathbb{N},\ r \leq s),$$

que

$$\begin{aligned} &(\partial\mathcal{B})(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3; X_0^{r_0}, X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, X_3^{r_3}) \\ &= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i X^{r_i}_{i,\eta^0+\ldots\hat{\imath}\ldots+\eta^3}\ \mathcal{B}(\eta^0, \ldots\hat{\imath}\ldots, \eta^3;\ X_0^{r_0}, \ldots\hat{\imath}\ldots, X_3^{r_3}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sum_{\ell=0}^{r_i-1} \mathsf{C}^\ell_{r_i}\ \frac{r_j!}{(r_j+\ell)!}\ X^{r_i-\ell}_{ij}\ (X_i D_{X_j})^\ell \\ &\quad \mathcal{B}(\eta^i+\eta^j, \eta^0, \ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots, \eta^3;\ X_j^{r_j+\ell}, X_0^{r_0}, \ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots, X_3^{r_3}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \sum_{\ell=0}^{r_j-1} \mathsf{C}^\ell_{r_j}\ \frac{r_i!}{(r_i+\ell)!}\ X^{r_j-\ell}_{ji}\ (X_j D_{X_i})^\ell \\ &\quad \mathcal{B}(\eta^i+\eta^j, \eta^0, \ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots, \eta^3;\ X_i^{r_i+\ell}, X_0^{r_0}, \ldots\hat{\imath}\ldots\hat{\jmath}\ldots, X_3^{r_3}) \\ &= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i X^{r_i}_{i,\eta^0+\ldots\hat{\imath}\ldots+\eta^3}\ \mathcal{B}_{r_0\ldots\hat{\imath}\ldots r_3}(\ldots\hat{\imath}\ldots;\ \ldots\hat{\imath}\ldots) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i<j}(-1)^{i-1}\sum_{\ell=0}^{r_i-1}\mathsf{C}^{\ell}_{r_i}\,\frac{r_j!}{(r_j+\ell)!}\,X_{ij}^{r_i-\ell}\,(X_iD_{X_j})^{\ell}\\
&\mathcal{B}_{r_0\ldots\hat{\imath}\ldots\underset{(j)}{r_j+\ell}\ldots r_3}(\ldots\hat{\imath}\ldots,\underset{(j)}{\eta^i+\eta^j},\ldots;\ \ldots\hat{\imath}\ldots,\underset{(j)}{X_j^{r_j+\ell}},\ldots)\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{j+1}\sum_{\ell=0}^{r_j-1}\mathsf{C}^{\ell}_{r_j}\,\frac{r_i!}{(r_i+\ell)!}\,X_{ji}^{r_j-\ell}\,(X_jD_{X_i})^{\ell}\\
&\mathcal{B}_{r_0\ldots\underset{(i)}{r_i+\ell}\ldots\hat{\jmath}\ldots r_3}(\ldots,\underset{(i)}{\eta^i+\eta^j},\ldots\hat{\jmath}\ldots;\ \ldots,\underset{(i)}{X_i^{r_i+\ell}},\ldots\hat{\jmath}\ldots). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Etudions à présent les quatre cas suivants :

(i) $r_0=1;\ r_1,r_2,r_3\geq 2$

Alors - vu les degrés des monômes de $\mathcal{B}$ - $(\partial\mathcal{B})(\eta^0,\eta^1,\eta^2,\eta^3;\ X_0,X_1^{r_1},X_2^{r_2},X_3^{r_3})=0$, de sorte que $(\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t}$ est bien nul, si aucun des indices $r,s$ et $t$ n'est égal à 1.

(ii) $r_0=r_1=1;\ r_2,r_3\geq 2$

Extrayons de $(\partial\mathcal{B})(\eta^0,\eta^1,\eta^2,\eta^3;\ X_0,X_1,X_2^{r_2},X_3^{r_3})$ les termes d'ordre 1 en $\eta^0$.

I : La définition de $\mathcal{B}$ montre que $i\in\{2,3\}$. Les monômes contribuant à la valeur $\mathcal{B}_{r_0\ldots\hat{\imath}\ldots r_3}(\ldots\hat{\imath}\ldots;\ldots\hat{\imath}\ldots)$ de $\mathcal{B}$ sont donc $\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_3}_{1}{}^{1}_{r_3}$ et $\mathcal{B}^{r_3}_{1}{}^{1}_{1}{}^{1}_{r_3}$ resp. $\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_2}_{1}{}^{1}_{r_2}$ et $\mathcal{B}^{r_2}_{1}{}^{1}_{1}{}^{1}_{r_2}$. D'où les termes d'ordre 1 contenus dans I (comme convenu, nous notons $m$ au lieu de $\eta^m$) :

$$
X_{2,1+3}^{r_2}\,\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_3}_{1}{}^{1}_{r_3}(0\ 1\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^{r_3})-X_{3,1+2}^{r_3}\,\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_2}_{1}{}^{1}_{r_2}(0\ 1\ 2;X_0\ X_1\ X_2^{r_2}).
$$

II a : Ici $i=2$ et $j=3$ et les termes cherchés s'écrivent

$$
-\sum_{\ell=0}^{r_2-1}\mathsf{C}^{\ell}_{r_2}\,\frac{r_3!}{(r_3+\ell)!}\,X_{23}^{r_2-\ell}\,(X_2D_{X_3})^{\ell}\,\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_3+\ell}_{1}{}^{1}_{r_3+\ell}(0\ 1\ 2+3;\ X_0\ X_1\ X_3^{r_3+\ell}).
$$

II b : Si $i=0$, on a nécessairement $\ell=0$ et $j=2$ ou $j=3$. Or, dans ce cas, $X_{ji}^{r_j-\ell}=X_{j0}^{r_j}$ est d'ordre $r_j\geq 2$ en $\eta^0$. Si $i=1$, on a également $\ell=0$ et $j=2$ ou $j=3$. Ainsi, les monômes contribuant à l'ordre 1 en $\eta^0$ sont $\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_3}_{1}{}^{1}_{r_3}$ resp. $\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_2}_{1}{}^{1}_{r_2}$. Si $i=2,\ j=3$ et les $\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_2+\ell}_{1}{}^{1}_{r_2+\ell}$ sont les monômes qui conviennent. Les termes d'ordre 1 dans II b sont donc

$$
\begin{aligned}
&-X_{21}^{r_2}\,\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_3}_{1}{}^{1}_{r_3}(0\ 1+2\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^{r_3})+X_{31}^{r_3}\,\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_2}_{1}{}^{1}_{r_2}(0\ 1+3\ 2;\ X_0\ X_1\ X_2^{r_2})\\
&\quad+\sum_{\ell=0}^{r_3-1}\mathsf{C}^{\ell}_{r_3}\,\frac{r_2!}{(r_2+\ell)!}\,X_{32}^{r_3-\ell}\,(X_3D_{X_2})^{\ell}\,\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{r_2+\ell}_{1}{}^{1}_{r_2+\ell}(0\ 1\ 2+3;\ X_0\ X_1\ X_2^{r_2+\ell}).
\end{aligned}
$$

Compte tenu de la définition des $\mathcal{B}^{1}_{1}{}^{t}_{1}{}^{1}_{t}$ $(t\geq 2)$, les termes du bord qui sont d'ordre 1 en $\eta^0$, s'écrivent finalement (à la constante multiplicative $k$ près)

$$
X_{03}X_{10}X_{2,1+3}^{r_2}X_{31}^{r_3}-X_{02}X_{10}X_{21}^{r_2}X_{3,1+2}^{r_3}-X_{03}X_{10}X_{21}^{r_2}X_{3,1+2}^{r_3}+X_{02}X_{10}X_{2,1+3}^{r_2}X_{31}^{r_3}
$$

$$
\begin{aligned}
& -X_{0,2+3}X_{10}\left(\sum_{\ell=0}^{r_2-1}\mathsf{C}^{\ell}_{r_2}\ X_{21}^{\ell}X_{23}^{r_2-\ell}\right)X_{31}^{r_3}+X_{0,2+3}X_{10}X_{21}^{r_2}\left(\sum_{\ell=0}^{r_3-1}\mathsf{C}^{\ell}_{r_3}\ X_{31}^{\ell}X_{32}^{r_3-\ell}\right)\\
= \ & X_{0,2+3}X_{10}X_{2,1+3}^{r_2}X_{31}^{r_3}-X_{0,2+3}X_{10}X_{21}^{r_2}X_{3,1+2}^{r_3}\\
& -X_{0,2+3}X_{10}(X_{2,1+3}^{r_2}-X_{21}^{r_2})X_{31}^{r_3}+X_{0,2+3}X_{10}X_{21}^{r_2}(X_{3,1+2}^{r_3}-X_{31}^{r_3})=0.
\end{aligned}
$$

Il en découle évidemment que $(\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t}$ est nul, si exactement un des indices $r,s,t$ vaut 1.

(iii) $r_0=r_1=r_2=1;\ r_3\geq 2$

Déterminons encore les termes d'ordre 1 en $\eta^0$.

I : Le terme $i=0$ étant d'ordre 0 en $\eta^0$, on trouve

$$
\begin{aligned}
& -X_{1,2+3}\mathcal{B}^{1\,r_3\,1}_{1\,1\,\ r_3}(0\ 2\ 3;\ X_0\ X_2\ X_3^{r_3})\\
& \quad +X_{2,1+3}\mathcal{B}^{1\,r_3\,1}_{1\,1\,\ r_3}(0\ 1\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^{r_3})-X_{3,1+2}^{r_3}T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}(0\ 1\ 2;\ X_0\ X_1\ X_2).
\end{aligned}
$$

II a : Comme $i\in\{0,1,2\},\ r_i=1$ et $\ell=0$. Les monômes de valeur non nulle a priori sont donc $\mathcal{B}^{1\,r_3\,1}_{1\,1\,\ r_3}$ et $\mathcal{B}^{r_3\,1\,1}_{1\ \ 1\,r_3}$. Pour $i=0$, les termes d'ordre 1 s'écrivent

$$
-\sum_{j=1}^{3}X_{0j}(0D_j)\mathcal{B}(\hat{0}\ldots;\hat{0}\ldots) \tag{5}
$$

et pour $i\in\{1,2\}$, on obtient

$$
\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\sum_{j=i+1}^{3}X_{ij}\mathcal{B}^{1\,r_3\,1}_{1\,1\,\ r_3}(0,\ldots\hat{\imath}\ldots,\underset{(j)}{i+j},\ldots;\ X_0,\ldots\hat{\imath}\ldots).
$$

II b : Si $i=0$, la présence de $X_{j0}^{r_j-\ell}$ implique que $\ell=r_j-1$. Ainsi les termes à déterminer sont

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}r_j\ \frac{1}{r_j!}\ X_{j0}\ (X_jD_{X_0})^{r_j-1}\mathcal{B}(\underset{(0)}{j},\ldots\hat{\jmath}\ldots;\ X_0^{r_j},\ldots\hat{\jmath}\ldots)\\
= \ & \sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}r_jX_{j0}\mathcal{B}(\underset{(0)}{j},\ldots\hat{\jmath}\ldots;\ X_0X_j^{r_j-1},\ldots\hat{\jmath}\ldots)\\
= \ & \sum_{j=1}^{3}r_jX_{j0}\mathcal{B}(\hat{0}\ldots;\hat{0}\ldots,\ \underset{(j)}{X_0X_j^{r_j-1}},\ldots).
\end{aligned} \tag{6}
$$

On remarquera que les termes (5) et (6) sont égaux à

$$
-\rho(\eta^0\otimes X_0)\mathcal{B}(1\ 2\ 3;X_1\ X_2\ X_3^{r_3})=0.
$$

Si $i=1$ et $j=2,\ r_i=r_j=1$ et $\ell=0$. Le seul monôme contribuant par un terme de degré 1 en $\eta^0$ est donc $\mathcal{B}^{1\,r_3\,1}_{1\,1\,\ r_3}$ et le terme en question s'écrit

$$
-X_{21}\mathcal{B}^{1\,r_3\,1}_{1\,1\,\ r_3}(0\ 1+2\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^{r_3}).
$$

Finalement, si $i \in \{1,2\}$ et $j = 3$, les monômes qui engendrent des termes d'ordre 1, sont : pour $\ell = 0$, $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}$ et pour $\ell \neq 0$, $\mathcal{B}^{1\,1\phantom{+\ell}\,1+\ell}_{1\,1+\ell\,1}$ ou $\mathcal{B}^{1\,1+\ell\,1}_{1\,1\phantom{+\ell}\,1+\ell}$, selon que $i = 1$ ou $i = 2$. On trouve par conséquent,

$$\begin{aligned}
& X_{31}^{r_3} T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}(0\ 1+3\ 2;\ X_0\ X_1\ X_2) + X_{32}^{r_3} T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}(0\ 1\ 2+3;\ X_0\ X_1\ X_2) \\
+ & \sum_{\ell=1}^{r_3-1} \mathsf{C}^{\ell}_{r_3} \frac{1}{(1+\ell)!}\, X_{31}^{r_3-\ell}\, (X_3 D_{X_1})^{\ell} \mathcal{B}^{1\,1\phantom{+\ell}\,1+\ell}_{1\,1+\ell\,1}(0\ 1+3\ 2; X_0\ X_1^{1+\ell}\ X_2) \\
+ & \sum_{\ell=1}^{r_3-1} \mathsf{C}^{\ell}_{r_3} \frac{1}{(1+\ell)!}\, X_{32}^{r_3-\ell}\, (X_3 D_{X_2})^{\ell} \mathcal{B}^{1\,1+\ell\,1}_{1\,1\phantom{+\ell}\,1+\ell}(0\ 1\ 2+3; X_0\ X_1\ X_2^{1+\ell}).
\end{aligned}$$

Ainsi, les termes d'ordre 1 en $\eta^0$ de $(\partial\mathcal{B})(0\ 1\ 2\ 3;\ X_0\ X_1\ X_2\ X_3^{r_3})$ sont (de nouveau au facteur $k$ près)

$$\begin{aligned}
& -X_{03}X_{1,2+3}X_{20}X_{32}^{r_3} + X_{03}X_{10}X_{2,1+3}X_{31}^{r_3} - X_{02}X_{10}X_{21}X_{3,1+2}^{r_3} + X_{01}X_{12}X_{20}X_{3,1+2}^{r_3} \\
& +X_{03}X_{12}X_{20}X_{3,1+2}^{r_3} + X_{0,1+3}X_{13}X_{20}X_{32}^{r_3} - X_{0,2+3}X_{10}X_{23}X_{31}^{r_3} - X_{03}X_{10}X_{21}X_{3,1+2}^{r_3} \\
& +X_{02}X_{10}X_{2,1+3}X_{31}^{r_3} - X_{0,1+3}X_{12}X_{20}X_{31}^{r_3} + X_{0,2+3}X_{10}X_{21}X_{32}^{r_3} - X_{01}X_{1,2+3}X_{20}X_{32}^{r_3} \\
& -X_{0,1+3}X_{12}X_{20} \textstyle\sum_{\ell=1}^{r_3-1} \mathsf{C}^{\ell}_{r_3} X_{31}^{r_3-\ell} X_{32}^{\ell} + X_{0,2+3}X_{10}X_{21} \sum_{\ell=1}^{r_3-1} \mathsf{C}^{\ell}_{r_3} X_{31}^{\ell} X_{32}^{r_3-\ell}.
\end{aligned}$$

En groupant les termes en $X_{31}^{r_3}$, en $X_{32}^{r_3}$ et ceux en $X_{3,1+2}^{r_3}$, on voit que cette somme est nulle. Il s'ensuit que $(\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} = 0$, si exactement deux des indices $r, s, t$ valent 1.

(iv) $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 1$

Dans ce cas, $\mathcal{B}$ est - dans (4) - évalué partout sur trois des vecteurs $X_0, X_1, X_2, X_3$, de sorte que

$$(\partial\mathcal{B})(0\ 1\ 2\ 3;\ X_0\ X_1\ X_2\ X_3) = (\partial T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1})(0\ 1\ 2\ 3;\ X_0\ X_1\ X_2\ X_3).$$

Or, cette expression est nulle, $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}$ étant un 3-cocycle de la cohomologie des champs de vecteurs à valeurs dans les fonctions. Ainsi, $(\partial\mathcal{B})^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t}$ est nul, si les trois indices $r, s$ et $t$ valent 1.

Revenons à présent à (3) qui s'écrit désormais

$$\partial_\rho T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} + \mathrm{tr}\ (\partial U)^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} = 0 \qquad \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \textstyle\sum_s = \sum_i \right).$$

Le premier membre appartenant à

$$B^1(gl(m,\mathbb{R}), E^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}) \oplus E^{a\,b\,c}_{r\,s\,t,inv} \otimes \wedge^1_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R}),$$

on a l'annulation séparée de ses deux termes. D'un côté, $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ est donc dans $Z^0(gl(m,\mathbb{R}), E^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}) = E^{a\,b\,c}_{r\,s\,t,inv}$, de manière que $T$ *est (globalement) invariant par* $gl(m,\mathbb{R})$. De l'autre, $(\partial U)^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} = 0$, ce qui entraîne que $\partial U = 0$. En effet, vu [5, IV.2.2], le plus petit monôme de $\partial U$ est $(\partial U)^{1\,0\,3}_{1\,2\,1}$ : les monômes de $\partial U$ sont sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et renferment 0 ou 1 colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La nullité de ceux ne contenant pas de colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vient d'être établie. Quant aux monômes possédant (exactement) une colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ils sont également nuls, car [5, IV.2.1] implique que

$$(\partial U)^{1\,a\,b}_{1\,r\,s} = -\partial_\rho U^{a\,b}_{r\,s} = 0 \qquad \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i \right).$$

Ainsi, $U$ est bien un 2-cocycle de $\mathcal{E}^0$. Comme il est à coefficients constants, invariant et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il est de la forme [5, V.2]

$$U = \partial W, \text{ où } W = \textstyle\sum_{\sigma \geq 1} W^\sigma_\sigma \text{ et } W^\sigma_\sigma(\eta; X^\sigma) = c_\sigma X^\sigma_\eta \quad (c_\sigma \in \mathbb{R}).$$

Nous corrigeons maintenant $T$ de sorte que les termes tr $U^{b\,c}_{s\,t}$ dans les $T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t}$ disparaissent.

En parlant vaguement, on peut dire que nous essayons d'obtenir un nouveau cocycle $T' = T - \text{tr } U = T - \text{tr } \partial W$. L'application heuristique de [5, IV.3.1] montre alors qu'il suffit de poser $T' = T + \partial(\text{tr } W)$. Cette idée motive les définitions suivantes.

Considérons les monômes $W^\sigma_\sigma$ ($\sigma \geq 2$), les monômes $V^{1\,\sigma}_{1\,\sigma} = \text{tr } W^\sigma_\sigma$ et les cochaînes $W' = \sum_{\sigma \geq 2} W^\sigma_\sigma$ et $V = \sum_{\sigma \geq 2} \alpha V^{1\,\sigma}_{1\,\sigma}$ (remarquer que $V^{1\,1}_{1\,1} = \text{tr } W^1_1$ est symétrique) et posons $T' = T + \partial V$. Le cocycle $T'$ est à coefficients constants, invariant et sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vu [5, IV.2.2], le monôme minimum de $\partial V$ est $(\partial V)^{1\,1\,2}_{1\,1\,2}$). Afin de prouver que $T'$ conserve toutes les propriétés de $T$ et en acquiert de nouvelles, nous étudions les monômes de $\partial V$.

Etant donné que $W = W^1_1 + W'$, le lemme IV.3.1 de [5] donne

$$(\partial V)^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} = -\text{tr } (\partial W')^{b\,c}_{s\,t} = -\text{tr } U^{b\,c}_{s\,t} + \text{tr } (\partial W^1_1)^{b\,c}_{s\,t} \qquad \left( \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si l'on utilise alors (4), on trouve, mutatis mutandis,

$$\begin{aligned} (\partial W^1_1)(0\,1;\ X^s_0\ X^t_1) \ &= \ X^s_{01}\ W^1_1(1;\ X^t_1) - X^t_{10}\ W^1_1(0;\ X^s_0) \\ &\quad - \sum_{\ell=0}^{s-1} \mathsf{C}^\ell_s \frac{t!}{(t+\ell)!} X^{s-\ell}_{01}\ (X_0 D_{X_1})^\ell W^1_1(0+1;\ X^{t+\ell}_1) \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{t-1} \mathsf{C}^\ell_t \frac{s!}{(s+\ell)!} X^{t-\ell}_{10}\ (X_1 D_{X_0})^\ell W^1_1(0+1;\ X^{s+\ell}_0). \end{aligned}$$

Pour $s = t = 1$ et pour $s \neq 1$ et $t \neq 1$, cette expression est nulle. Si $s = 1$ et $t \neq 1$, elle vaut $k' X_{01} X^t_{10}$ (où nous avons noté $k'$ le coefficient $c_1$) et est donc de degré $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ ($t \geq 2$). Enfin, si $s \neq 1$ et $t = 1$, on obtient $-k' X^s_{01} X_{10}$, qui est de degré $\begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}$ ($s \geq 2$). Ainsi

$$(\partial V)^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} = \begin{cases} \begin{pmatrix} b & c \\ s & t \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 1 & \tau \end{pmatrix} : \tau \geq 2 \right\} : -\text{tr } U^{b\,c}_{s\,t} \\ \begin{pmatrix} b & c \\ s & t \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 1 & \tau \end{pmatrix} : \tau \geq 2 \right\} : -\text{tr } U^{t\,1}_{1\,t} + k' X_{00} X_{12} X^t_{21} \end{cases}$$

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)<\left(\begin{smallmatrix}b\\s\end{smallmatrix}\right)\leq\left(\begin{smallmatrix}c\\t\end{smallmatrix}\right),\ \sum_s=\sum_i\right).$$

Ceci établit la proposition 2.1, car $(\partial V)^{1\,1\,t}_{1\,1\,t}=0$ $(t\geq 2)$, vu que

$$(\partial V)^{1\,1\,t}_{1\,1\,t}=-\partial_\rho V^{1\,t}_{1\,t},\ \text{avec } V^{1\,t}_{1\,t}=\operatorname{tr} W^t_t\in E^t_{t,inv}\otimes\wedge^1_{inv}(gl(m,\mathbb{R}),\mathbb{R}).$$

■

# 3 Annulation du coefficient $k$

En II, nous avons prouvé que

$$\mathcal{B}=T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}+\sum_{v\geq 2}\alpha\mathcal{B}^{1\,v\,1}_{1\,1\,v}=k(X_{10}\ X_{21}\ X_{02}-X_{01}\ X_{20}\ X_{12})+\sum_{v\geq 2}\alpha(k\ X_{02}\ X_{10}\ X^v_{21})$$

est cocycle aux ordres $\begin{pmatrix}1&a&b&c\\1&r&s&t\end{pmatrix}$. Dans cette section, nous montrerons que $k=0$.

**Lemme 3.1** *Soit* $V^{\alpha\,\beta}_{\rho\,\sigma}$ $\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right)<\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\rho\end{smallmatrix}\right)<\left(\begin{smallmatrix}\beta\\\sigma\end{smallmatrix}\right),\ \sum_s=\sum_i\right)$ *un monôme à coefficients constants et invariant et soit* $V=V^{\alpha\,\beta}_{\rho\,\sigma}+V^{\beta\,\alpha}_{\sigma\,\rho}$ *la cochaîne obtenue par antisymétrisation de* $V^{\alpha\,\beta}_{\rho\,\sigma}$.

*Le monôme minimum de* $\partial V$ *est,*

(i) *si* $\rho=1$ *et* $\sigma\geq 2$

(i1) *et si* $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\rho&\sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$,

$$(\partial V)^{0\,2\,2}_{2\,1\,1}=X_{01}\ (X_0D_{X_1})V^{2\,1}_{1\,2}(2\ 1;\ X_2\ X^2_1)-X_{02}\ (X_0D_{X_2})V^{2\,1}_{1\,2}(1\ 2;\ X_1\ X^2_2).$$

(i2) *et si* $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\rho&\sigma\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$,

$$(\partial V)^{0\,\alpha\,\beta+1}_{2\,1\,\sigma-1}=-\frac{2}{\sigma}\ X_{02}\ (X_0D_{X_2})V^{\alpha\,\beta}_{1\,\sigma}(1\ 2;\ X_1\ X^\sigma_2).$$

(ii) *si* $\rho\geq 2$,

$$(\partial V)^{0\,\alpha+1\,\beta}_{2\,\rho-1\,\sigma}=-\frac{2}{\rho}\ X_{01}\ (X_0D_{X_1})V^{\alpha\,\beta}_{\rho\,\sigma}(1\ 2;\ X^\rho_1\ X^\sigma_2).$$

Examinons les contributions de type I au bord. Si l'on crée $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, on obtient la contribution nulle. Pour $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, le degré minimum est

$$\begin{pmatrix}0&\alpha+1&\beta+1\\2&\rho&\sigma\end{pmatrix}.$$

La création d'une des colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ldots$ enfin, conduit à un degré dont la première colonne est supérieure à $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En II a et II b, la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne peut être créée. Pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\ell = 1$ et la correction est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc les degrés $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \rho & \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ 1 & \sigma & \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 1 & \alpha \\ \sigma & 1 & \rho \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ \rho & 1 & \sigma \end{pmatrix}$, mais, vu [5, IV.2.2], les monômes correspondants de $\partial V$ sont nuls. Prenons $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (en II a seulement) : $\ell = 1$, la correction vaut $\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et les degrés engendrés sont

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha+1 & \beta \\ 2 & \rho-1 & \sigma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta & \alpha+1 \\ 2 & \sigma & \rho-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha+1 \\ \sigma & 2 & \rho-1 \end{pmatrix}$$

(à condition que $\rho \geq 2$) et

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta+1 & \alpha \\ 2 & \sigma-1 & \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta+1 \\ 2 & \rho & \sigma-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta+1 \\ \rho & 2 & \sigma-1 \end{pmatrix}$$

(à condition que $\sigma \geq 2$). Finalement, si l'on crée (en II a ou II b) une colonne supérieure à $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, la première colonne du degré est à son tour supérieure à $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où le lemme (on notera que l'écart entre $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta \\ \sigma \end{pmatrix}$ vaut 1 i.e. que $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta \\ \sigma \end{pmatrix}$ sont deux colonnes consécutives (nous supposons que les colonnes sont rangées par ordre croissant) si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$). ■

**Proposition 3.2** *Tout 3-cocycle de $\mathcal{E}^0$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$, $m \geq 3$) est cohomologue à un cocycle $T$ à coefficients constants, invariant, sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dont les monômes à une ou plusieurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont nuls, sauf les $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$ ($t \geq 2$), qui valent*

$$T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t} = k' X_{00} X_{12} X^t_{21} \quad (k' \in \mathbb{R})$$

*et dont le monôme $T^{0\,2\,2}_{2\,1\,1}$ est nul.*

Soit un 3-cocycle arbitraire de $\mathcal{E}^0$ et soit $T$ le cocycle cohomologue fourni par 2.1.

Tout d'abord, corrigeons $T$ de sorte que $T^{0\,2\,2}_{2\,1\,1} = 0$. Vu l'antisymétrie de ce monôme en ses deux derniers arguments, on a

$$T^{0\,2\,2}_{2\,1\,1} = A(X^2_{01}\, X_{12}\, X_{22} - X^2_{02}\, X_{11}\, X_{21}) \quad (A \in \mathbb{R})$$

[5, Lemme IV.4.2]. Or, 3.1 permet d'affirmer que le monôme minimum du bord de $V = V^{2\,1}_{1\,2} + V^{1\,2}_{2\,1}$, où $V^{2\,1}_{1\,2} = \alpha X_{11} X_{21} X_{22} + \beta X_{12} X^2_{21}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, est donné par

$$(\partial V)^{0\,2\,2}_{2\,1\,1} = \alpha(X^2_{01}\, X_{12}\, X_{22} - X^2_{02}\, X_{11}\, X_{21}).$$

En prenant $\alpha = A$ et en posant $T' = T - \partial V$, on définit donc un nouveau 3-cocycle (nous le noterons $T$ dans la suite) ayant les propriétés de l'ancien, mais vérifiant de plus

$$T^{0\,2\,2}_{2\,1\,1} = 0.$$

L'information "$k = 0$" peut alors être extraite de l'équation

$$(\partial T)^{2\,2\,2\,0}_{1\,1\,1\,3} = 0. \tag{7}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{llllllll}
I & : & \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & & & \\[2ex]
IIa & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 2 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & / \\[2ex]
 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & / & \\[2ex]
 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & / & & \\[2ex]
IIb & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
 & & & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & / & / & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\[2ex]
 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \\[2ex]
 & & & & & / & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 & \\[2ex]
 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \\[2ex]
 & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 & &
\end{array}$$

Ecriture de (7) (nous posons $T' = T^{2\,0\,3}_{1\,3\,1}$ et $T'' = T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3}$) :

$$\begin{array}{ll}
-6kX_{30}X_{31}X_{32}(X_{02}\; X_{10}\; X_{21} - X_{01}\; X_{12}\; X_{20}) & (\ell 1) \\[1ex]
-\frac{1}{2}\; X_{01}(0D_1)^2 T'(2\;3\;1;\; X_2\; X_3^3\; X_1) & (\ell 2) \\[1ex]
+\frac{1}{2}\; X_{02}(0D_2)^2 T'(1\;3\;2;\; X_1\; X_3^3\; X_2) & (\ell 3) \\[1ex]
-\frac{1}{2}\; X_{12}(1D_2)^2 T'(0\;3\;2;\; X_0\; X_3^3\; X_2) & (\ell 4) \\[1ex]
+X_{10}(0D_1)(X_0 D_{X_1}) T'(2\;3\;1;\; X_2\; X_3^3\; X_1) & (\ell 5)
\end{array} \tag{8}$$

$$
\begin{array}{ll}
-X_{20}(0D_2)(X_0D_{X_2})T'(1\ 3\ 2;\ X_1\ X_3^3\ X_2) & (\ell 6) \\
+X_{21}(1D_2)(X_1D_{X_2})T'(0\ 3\ 2;\ X_0\ X_3^3\ X_2) & (\ell 7) \\
+X_{30}(0D_3)(X_0D_{X_3})T''(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2\ X_3^3) & (\ell 8) \\
-X_{31}(1D_3)(X_1D_{X_3})T''(0\ 2\ 3;\ X_0\ X_2\ X_3^3) & (\ell 9) \\
+X_{32}(2D_3)(X_2D_{X_3})T''(0\ 1\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^3) = 0. & (\ell 10)
\end{array}
\tag{9}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
& T'(1\ 3\ 2;\ X_1\ X_3^3\ X_2) \\
&= AX_{11}X_{21}X_{32}^3 + BX_{11}X_{22}X_{31}X_{32}^2 + CX_{12}X_{21}X_{31}X_{32}^2 + DX_{12}X_{22}X_{31}^2X_{32}
\end{aligned}
$$

$(A, B, C, D \in \mathbb{R})$ et, vu l'antisymétrie de $T''$ en ses deux premiers arguments,

$$
\begin{aligned}
T''(0\ 2\ 3;\ X_0\ X_2\ X_3^3) &= E(X_{00}\ X_{20}\ X_{32}^2\ X_{33} - X_{02}\ X_{22}\ X_{30}^2\ X_{33}) \\
&\quad +F(X_{00}\ X_{23}\ X_{30}\ X_{32}^2 - X_{03}\ X_{22}\ X_{30}^2\ X_{32}) \\
&\quad +G(X_{02}\ X_{23}\ X_{30}^2\ X_{32} - X_{03}\ X_{20}\ X_{30}\ X_{32}^2)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$(E, F, G \in \mathbb{R})$. Notons également que $\ell 2\ (\ell 5, \ell 10)\,[\ell 4\ (\ell 7, \ell 8)]$ est l'opposé de $\ell 3\ (\ell 6, \ell 9)$ $[\ell 3\ (\ell 6, \ell 9)]$, où l'on a échangé 1 et 2 [0 et 1]. Ceci entraîne que le coefficient dans $\ell 2\ (\ell 5, \ell 10)\,[\ell 4\ (\ell 7, \ell 8)]$ d'un monôme (au sens ordinaire du terme) $M(0, 1, 2, 3)$ en les évaluations, est l'opposé du coefficient dans $\ell 3\ (\ell 6, \ell 9)\,[\ell 3\ (\ell 6, \ell 9)]$ de $M(0, 2, 1, 3)$ $[M(1, 0, 2, 3)]$. Pour déterminer le coefficient d'un monôme $M$ donné dans une ligne $\ell 2 - \ell 10$ donnée, il est de plus intéressant de remarquer que seulement certains des termes $t'1 - t'4$ de $T'$ et $t''1 - t''6$ de $T''$ peuvent contribuer à $M$.

Coefficient de $X_{01}X_{12}X_{20}X_{30}X_{31}X_{32}$ dans (9) :

$\ell 1$ : $6k$
$\ell 2$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{10}X_{21}X_{30}X_{31}X_{32}$ dans $\ell 3$; $t'3 : -2C$
$\ell 4$ : comme en $\ell 2 : -2C$
$\ell 6$ : $t'3 : -2C$

$\ell 8$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{10}X_{21}X_{30}X_{31}X_{32}$ dans $\ell 9$; $t''5 : 2G$
$\ell 9$ : $t''6 : 2G$
$\ell 10$ : comme en $\ell 8 : 2G$

D'où [5, IV.4.2 (i)] :

$$
k - C + G = 0. \tag{11}
$$

Coefficient de $X_{01}X_{12}X_{21}X_{30}^2X_{32}$ dans (9) :

$\ell 2$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{12}X_{21}X_{30}^2X_{31}$ dans $\ell 3 : -C$
$\ell 4$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{10}X_{20}X_{31}^2X_{32}$ dans $\ell 3 : -D$
$\ell 7$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{10}X_{20}X_{31}^2X_{32}$ dans $\ell 6 : +D$
$\ell 8$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{10}X_{20}X_{31}^2X_{32}$ dans $\ell 9$ : /
$\ell 10$ : opposé du coefficient de $X_{02}X_{12}X_{21}X_{30}^2X_{31}$ dans $\ell 9 : G$

Finalement, on a donc

$$-C + G = 0. \tag{12}$$

Vu (11) et (12), $k = 0$. ■

# 4 Etude des monômes à une ou plusieurs colonnes $\binom{0}{2}$

**Lemme 4.1** *Soit un degré* $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 2 & s & t \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}, \sum_s = \sum_i\right)$.

(i) *Si $s = 1$ et $c \geq 1$, le monôme minimum du bord de la cochaîne $V = V^{b\ c-1}_{1\ t+1} + V^{c-1\ b}_{t+1\ 1}$ ($V^{b\ c-1}_{1\ t+1}$ : monôme invariant à coefficients constants) a le degré considéré et*

(i1) *si* $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *il est donné par*

$$(\partial V)^{0\ 2\ 2}_{2\ 1\ 1} = X_{01}\ (X_0 D_{X_1}) V^{2\ 1}_{1\ 2}(2\ 1;\ X_2\ X_1^2) - X_{02}\ (X_0 D_{X_2}) V^{2\ 1}_{1\ 2}(1\ 2;\ X_1\ X_2^2),$$

(i2) *sinon, il vaut*

$$(\partial V)^{0\ b\ c}_{2\ 1\ t} = -\frac{2}{t+1}\ X_{02}\ (X_0 D_{X_2}) V^{b\ c-1}_{1\ t+1}(1\ 2;\ X_1\ X_2^{t+1}).$$

(ii) *Si l'écart entre* $\begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$ *est au moins égal à 2 et si $b \geq 1$, $V = V^{b-1\ c}_{s+1\ t} + V^{c\ b-1}_{t\ s+1}$ ($V^{b-1\ c}_{s+1\ t}$ : monôme invariant à coefficients constants) est une cochaîne ayant sa plus petite contribution à l'ordre considéré et on a*

$$(\partial V)^{0\ b\ c}_{2\ s\ t} = -\frac{2}{s+1}\ X_{01}\ (X_0 D_{X_1}) V^{b-1\ c}_{s+1\ t}(1\ 2;\ X_1^{s+1}\ X_2^t).$$

Simple transcription de 3.1. ■

**Lemme 4.2** *Soit $t \in \{3, 4, \ldots\}$. Posons pour $i \in \{1, \ldots, t-1\}$,*

$$\mathcal{V}^{2t-i\ i}_{i\ \ \ 2t-i} = (-1)^{i+1} \beta_t X_{12}^i X_{21}^{2t-i} \quad (\beta_t \in \mathbb{R}),$$

*puis*

$$\mathcal{V}_t = \sum_{i=1}^{t-1} \left( \mathcal{V}^{2t-i\ i}_{i\ \ \ 2t-i} + \mathcal{V}^{i\ \ \ 2t-i}_{2t-i\ i} \right).$$

*Alors le monôme minimum du bord de la cochaîne $\mathcal{V}_t$ est de degré* $\begin{pmatrix} 0 & t+1 & t \\ 2 & t-1 & t \end{pmatrix}$ *et il est donné par*

$$(\partial \mathcal{V}_t)^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t} = (-1)^{t+1} 2 \beta_t X_{01} X_{02} X_{12}^{t-1} X_{21}^t.$$

Notons d'abord que 3.1 montre que le plus petit monôme du bord de la cochaîne $\mathcal{V}_{t,i} = \mathcal{V}^{2t-i\ i}_{i\ \ \ 2t-i} + \mathcal{V}^{i\ \ \ 2t-i}_{2t-i\ i}$ ($i \in \{1, \ldots, t-1\}$) est

$$(\partial \mathcal{V}_{t,1})^{0\ 2t-1\ 2}_{2\ 1\ \ \ \ 2t-2} \quad \text{resp.} \quad (\partial \mathcal{V}_{t,i})^{0\ 2t-i+1\ i}_{2\ i-1\ \ \ \ \ 2t-i} \quad (i \in \{2, \ldots, t-1\}).$$

Il s'ensuit évidemment que le monôme minimum de $\partial\mathcal{V}_t$ est de degré supérieur ou égal à $\begin{pmatrix} 0 & 2t-1 & 2 \\ 2 & 1 & 2t-2 \end{pmatrix}$.

L'objectif étant d'établir que ce monôme minimum est $(\partial\mathcal{V}_t)^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}$, déterminons toutes les contributions des $\mathcal{V}_{t,i}$ qui sont d'ordre

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 2 & s & t \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 0 & 2t-1 & 2 \\ 2 & 1 & 2t-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t+1 & t \\ 2 & t-1 & t \end{pmatrix}\right].$$

Les contributions des $\mathcal{V}_{t,i}$ ont été trouvées dans la preuve du lemme 3.1. Les seules (engendrées par $\mathcal{V}_{t,i}$) dont le degré appartient à l'intervalle considéré, sont celles d'ordre

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t-i+1 & i \\ 2 & i-1 & 2t-i \end{pmatrix} \quad (i \in \{2, \ldots, t-1\})$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t-i & i+1 \\ 2 & i & 2t-i-1 \end{pmatrix} \quad (i \in \{1, \ldots, t-1\}),$$

obtenues par création de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en II a . Ainsi, les contributions cherchées sont toutes d'un des degrés

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t-i & i+1 \\ 2 & i & 2t-i-1 \end{pmatrix} \quad (i \in \{1, \ldots, t-1\}).$$

On remarquera qu'il existe deux contributions à chacun de ces ordres, sauf pour $i = t-1$. Ces contributions se compensent toujours. En effet,

$$\begin{aligned}
&(\partial\mathcal{V}_t)^{0\ 2t-i\ i+1}_{2\ i\ \ 2t-i-1} \\
&= -\frac{2}{i+1} X_{01}\ (X_0 D_{X_1})\mathcal{V}^{2t-i-1\ i+1}_{i+1\ \ 2t-i-1}(1\ 2;\ X_1^{i+1}\ X_2^{2t-i-1}) \\
&\quad -\frac{2}{2t-i} X_{02}\ (X_0 D_{X_2})\mathcal{V}^{2t-i\ i}_{i\ \ 2t-i}(1\ 2;\ X_1^{i}\ X_2^{2t-i}) \\
&= (-1)^{i+3}2\beta_t X_{01}X_{02}X_{12}^{i}X_{21}^{2t-i-1} + (-1)^{i+2}2\beta_t X_{01}X_{02}X_{12}^{i}X_{21}^{2t-i-1},
\end{aligned}$$

où le premier terme est à omettre, si $i = t-1$. Cela signifie évidemment que le plus petit monôme de $\partial\mathcal{V}_t$ est

$$(\partial\mathcal{V}_t)^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t} = (-1)^{t+1}2\beta_t X_{01}X_{02}X_{12}^{t-1}X_{21}^{t}.$$

■

**Remarque 4.3** On ne peut pas prolonger la cochaîne $\mathcal{V}_t$, chaîne des cochaînes élémentaires $\mathcal{V}_{t,1}, \ldots, \mathcal{V}_{t,t-1}$, par un maillon supplémentaire, de manière que ce prolongement vérifie l'équation de cocycle également à l'ordre $\begin{pmatrix} 0 & t+1 & t \\ 2 & t-1 & t \end{pmatrix}$. Cette impossibilité et celle de construire un prolongement-cocycle qui en découle, sont dues à l'absence d'un monôme dont l'antisymétrisé ait sa plus petite contribution à l'ordre $\begin{pmatrix} 0 & t+1 & t \\ 2 & t-1 & t \end{pmatrix}$.

**Proposition 4.4** *Tout 3-cocycle de* $\mathcal{E}^0$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega,\ m \geq 3$) *est cohomologue à un cocycle* $T$ *à coefficients constants, invariant et sans colonnes* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, *sauf que ses monômes* $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t}$ ($t \geq 2$) *ne sont pas nécessairement nuls, mais ont la forme*

$$T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t} = k' X_{00} X_{12} X^t_{21} \quad (k' \in \mathbb{R}).$$

Considérons un 3-cocycle quelconque de $\mathcal{E}^0$ et notons $T$ le cocycle cohomologue dont l'existence est assurée par la proposition 3.2. Il suffit de prouver que $T$ est (à des corrections par des bords (qui conservent les propriétés déjà acquises) près) sans colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il est clair que

$$T^{0\,0\,t+4}_{2\,2\,t} = 0 \quad (t \geq 1)$$

(car ces monômes sont symétriques et antisymétriques en leurs deux premiers arguments).

Le reste de la démonstration est une récurrence sur le degré. De manière plus précise, nous prouverons qu'un quelconque des $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i\right)$ est nul (modulo des bords de cochaînes invariantes et à coefficients constants, ayant leur plus petite contribution à l'ordre étudié), si les monômes inférieurs de même type le sont.

(1) $\boxed{s = t = 1}$

Alors $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t} = T^{0\,2\,2}_{2\,1\,1}$, qui est bien nul, vu 3.2.

(2) $\boxed{s = 1,\ t \geq 2}$

Les hypothèses sur le monôme étudié $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}$ signifient que $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t} = T^{0\,b\,c}_{2\,1\,t}$, avec $b \geq 2,\ c \geq 2,\ t \geq 2$ et $\sum_s = \sum_i$ (et impliquent que $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$).

Equation :

$$(\partial T)^{0\,0\,b\,c+1}_{2\,2\,1\,t-1} = 0. \tag{13}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{llllll}
I & : & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & b-1 & c \\ 2 & 1 & t-1 \end{pmatrix} = 0 & & \\
IIa & : & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \ell = 1 \\ k = 0 \end{matrix} \ \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} & / & \begin{pmatrix} b-1 & 0 & c+1 \\ 2 & 2 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & b \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} b-1 & 0 & c+1 \\ 2 & 2 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & b \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} & \\
 & & \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 & \\
IIb & : & \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 &
\end{array}$$

Ecriture explicite de (13) :

$$
\begin{aligned}
&-X_{02}\,(X_0D_{X_2})T^{0\,b-1\,c+1}_{2\,2\,\,\,t-1}(1\,2\,3;\ X_1^2\,X_2^2\,X_3^{t-1})\\
&-\tfrac{2}{t}\,X_{03}\,(X_0D_{X_3})T^{0\,b\,c}_{2\,1\,t}(1\,2\,3;\ X_1^2\,X_2\,X_3^t)\\
&+X_{12}\,(X_1D_{X_2})T^{0\,b-1\,c+1}_{2\,2\,\,\,t-1}(0\,2\,3;\ X_0^2\,X_2^2\,X_3^{t-1})\\
&+\tfrac{2}{t}\,X_{13}\,(X_1D_{X_3})T^{0\,b\,c}_{2\,1\,t}(0\,2\,3;\ X_0^2\,X_2\,X_3^t)=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Corrigeons $T$, avant d'exploiter (14), par les bords des cochaînes (à coefficients constants et invariantes) ayant leur plus petite contribution à l'ordre $\begin{pmatrix} 0 & b & c\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix}$. Vu 4.1, le monôme minimum du bord de la cochaîne

$$V_1=V^{b\,c-1}_{1\,t+1}+V^{c-1\,b}_{t+1\,1},$$

où

$$V^{b\,c-1}_{1\,t+1}=\alpha X_{11}X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+2}+\beta X_{12}X_{21}^{b}X_{22}^{t-b+1}\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R}),$$

est donné par

$$
\begin{aligned}
&(\partial V_1)^{0\,b\,c}_{2\,1\,t}\\
&= -\frac{2}{t+1}(b-1)\alpha X_{01}X_{02}X_{11}X_{21}^{b-2}X_{22}^{t-b+2}-\frac{2}{t+1}(t-b+2)\alpha X_{02}^2X_{11}X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+1}\\
&\quad -\frac{2}{t+1}\,b\beta X_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+1}-\frac{2}{t+1}(t-b+1)\beta X_{02}^2X_{12}X_{21}^{b}X_{22}^{t-b}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

De plus, si l'écart entre $\begin{pmatrix} b\\ 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c\\ t\end{pmatrix}$ vaut au moins 2 i.e. si $\begin{pmatrix} 0 & b & c\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, la cochaîne

$$V_2=V^{b-1\,c}_{2\,\,\,\,\,t}+V^{c\,b-1}_{t\,\,\,\,\,2},$$

avec

$$V^{b-1\,c}_{2\,\,\,\,\,t}=\gamma X_{11}^2X_{21}^{b-3}X_{22}^{t-b+3}+\delta X_{11}X_{12}X_{21}^{b-2}X_{22}^{t-b+2}+\varepsilon X_{12}^2\,X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+1}\quad(\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R})$$

(où le premier terme est à omettre, si $b=2$), a sa plus petite contribution au degré examiné et on a

$$
\begin{aligned}
&(\partial V_2)^{0\,b\,c}_{2\,1\,t}\\
&= -2\gamma X_{01}^2X_{11}X_{21}^{b-3}X_{22}^{t-b+3}-\delta X_{01}^2X_{12}X_{21}^{b-2}X_{22}^{t-b+2}\\
&\quad -\delta X_{01}X_{02}X_{11}X_{21}^{b-2}X_{22}^{t-b+2}-2\varepsilon X_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+1}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(2.1) $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & b & c\\ 2 & 1 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}}$

Dans ce cas, les monômes de $T$ dans (14) sont les mêmes (à une permutation près) et la cochaîne $V_1=V^{3\,1}_{1\,3}+V^{1\,3}_{3\,1}$ est la seule qui convient. Etant donné que

$$
\begin{aligned}
T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2} &= AX_{01}^2X_{11}X_{22}^2+BX_{01}^2X_{12}X_{21}X_{22}+CX_{01}X_{02}X_{11}X_{21}X_{22}\\
&\quad +DX_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^2+EX_{02}^2X_{11}X_{21}^2\quad(A,B,C,D,E\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

et que

$$(\partial V_1)^{0\,3\,2}_{2\,1\,2} = -\frac{4}{3}\,\alpha X_{01}X_{02}X_{11}X_{21}X_{22} - 2\beta X_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^2 - \frac{2}{3}\,\alpha X_{02}^2X_{11}X_{21}^2,$$

nous prenons $\alpha = -\frac{3}{4}\,C$ et $\beta = -\frac{1}{2}\,D$ et nous posons

$$T' = T - \partial V_1,$$

de manière à définir un cocycle cohomologue (que nous rebaptisons $T$) tel que

$$\begin{aligned} &T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2}(1\;2\;3;\; X_1^2\; X_2\; X_3^2) \\ &\quad= \mathcal{A}X_{12}^2X_{22}X_{33}^2 + \mathcal{B}X_{12}^2X_{23}X_{32}X_{33} + \mathcal{C}X_{13}^2X_{22}X_{32}^2 \quad (\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Réécrivons à présent (14) sous la forme

$$\begin{aligned} &X_{02}\;(X_0D_{X_2})T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2}(1\;3\;2;\; X_1^2\; X_3\; X_2^2) - X_{03}\;(X_0D_{X_3})T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2}(1\;2\;3;\; X_1^2\; X_2\; X_3^2) \\ &\quad -X_{12}\;(X_1D_{X_2})T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2}(0\;3\;2;\; X_0^2\; X_3\; X_2^2) + X_{13}\;(X_1D_{X_3})T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2}(0\;2\;3;\; X_0^2\; X_2\; X_3^2) = 0 \end{aligned}$$

et observons que le 1er (3ème, 4ème) terme est - éventuellement au signe près - le 2ème terme, où l'on a échangé 2 et 3 (0 et 1 ainsi que 2 et 3, 0 et 1).

Coefficient de $X_{02}^2X_{13}^2X_{22}X_{33}$ : $4\mathcal{A}$
Coefficient de $X_{02}^2X_{13}^2X_{23}X_{32}$ : $2\mathcal{B}$
Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{12}^2X_{23}X_{33}$ : $2\mathcal{C}$

Vu [5, IV.4.2], il s'ensuit que $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = 0$.

(2.2) $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

Ici $V_1$ et $V_2$ conviennent. La comparaison de (15), (16) et de l'égalité

$$\begin{aligned} T^{0\,b\,c}_{2\,1\,t} \;=\;& AX_{01}^2X_{11}X_{21}^{b-3}X_{22}^{t-b+3} + BX_{01}^2X_{12}X_{21}^{b-2}X_{22}^{t-b+2} \\ &+CX_{01}X_{02}X_{11}X_{21}^{b-2}X_{22}^{t-b+2} + DX_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+1} \\ &+EX_{02}^2X_{11}X_{21}^{b-1}X_{22}^{t-b+1} + FX_{02}^2X_{12}X_{21}^{b}X_{22}^{t-b} \quad (A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(où le premier et le dernier termes sont à négliger, si $b = 2$ resp. $c = 2$), nous conduit à poser

$$T' = T + \partial V_1 + \partial V_2$$

et à écrire le système

$$\begin{cases} 2\gamma & = \; A \quad (\text{à condition que } b \geq 3) \\ \delta & = \; B \\ \frac{2}{t+1}(b-1)\alpha + \delta & = \; C \\ \frac{2}{t+1}\,b\beta + 2\varepsilon & = \; D \\ \frac{2}{t+1}(t-b+2)\alpha & = \; E \\ \frac{2}{t+1}(t-b+1)\beta & = \; F \quad (\text{à condition que } c \geq 3). \end{cases}$$

On constate qu'il est possible d'annuler les termes de coefficient $A$ (s'il existe), $B, C, F$ (s'il existe) et $D$ :

$$T^{0\,b\,c}_{2\,1\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1^2\ X_2\ X_3^t) = \mathcal{A} X_{13}^2 X_{22} X_{32}^{b-1} X_{33}^{t-b+1} \quad (\mathcal{A} \in \mathbb{R}).$$

Afin d'expliciter (14), nous posons

$$T^{0\,b-1\,c+1}_{2\,2\quad t-1}(1\ 2\ 3;\ X_1^2\ X_2^2\ X_3^{t-1}) = X_{12}^2 T^{(1)} + X_{12}X_{13} T^{(2)} + X_{13}^2 T^{(3)},$$

où le premier terme manque, si $b = 2$, où $T^{(i)}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) est indépendant de $X_1$ (et de $\eta^1$) et où

$$\begin{aligned} T^{(3)} &= T^{(3)\,b-1\,c-1}_{\quad 2\quad t-1}(2\ 3;\ X_2^2\ X_3^{t-1}) \\ &= \mathcal{B} X_{22}^2 X_{32}^{b-3} X_{33}^{t-b+2} + \mathcal{C} X_{22} X_{23} X_{32}^{b-2} X_{33}^{t-b+1} + \mathcal{D} X_{23}^2 X_{32}^{b-1} X_{33}^{t-b} \quad (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

le premier et le dernier termes disparaissant, si $b = 2$ resp. $c = 2$. Finalement, (14) devient

$$\begin{aligned} &-X_{02}(X_{12}^2\ (X_0 D_{X_2}) T^{(1)} + X_{12}X_{13}\ (X_0 D_{X_2}) T^{(2)} + X_{13}^2\ (X_0 D_{X_2}) T^{(3)}) \\ &\quad -\frac{2}{t}(b-1)\mathcal{A} X_{02} X_{03} X_{13}^2 X_{22} X_{32}^{b-2} X_{33}^{t-b+1} \\ &\quad +X_{12}(X_{02}^2\ (X_1 D_{X_2}) T^{(1)} + X_{02}X_{03}\ (X_1 D_{X_2}) T^{(2)} + X_{03}^2\ (X_1 D_{X_2}) T^{(3)}) \\ &\quad +\frac{2}{t}(b-1)\mathcal{A} X_{03}^2 X_{12} X_{13} X_{22} X_{32}^{b-2} X_{33}^{t-b+1} = 0. \end{aligned}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{13}^2X_{22}X_{32}^{b-2}X_{33}^{t-b+1}$ : $-\mathcal{C} - \frac{2}{t}(b-1)\mathcal{A} = 0$
Coefficient de $X_{02}^2X_{13}^2X_{23}X_{32}^{b-2}X_{33}^{t-b+1}$ : $-\mathcal{C} = 0$

(3) $\boxed{s \geq 2}$

Il s'agit donc de prouver que $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}$, avec $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$, $\sum_s = \sum_i$ et $s \geq 2$ (ce qui entraîne que $b + s \leq c + t$ et $s + t + 2 = b + c$, donc que $c \geq 3$), est nul.

Equation :

$$(\partial T)^{0\,0\,b+1\,c}_{2\,2\,s-1\,t} = 0. \tag{17}$$

Monômes contribuant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$ : | $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & b & c-1 \\ 2 & s-1 & t \end{pmatrix} = 0$ | | | | |
| $IIa$ : | $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{matrix} \ell = 1 \\ k = 0 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$ | / | | $\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ s & 2 & t \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} c-1 & 0 & b+1 \\ t+1 & 2 & s-1 \end{pmatrix} = 0$ |
| | $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ | | | $\begin{pmatrix} b & 0 & c \\ s & 2 & t \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} c-1 & 0 & b+1 \\ t+1 & 2 & s-1 \end{pmatrix} = 0$ | |
| | $\begin{pmatrix} b+1 \\ s-1 \end{pmatrix}$ | | | $\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ | | |
| $IIb$ : | $\begin{pmatrix} b+1 \\ s-1 \end{pmatrix}$ | | | $\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ | | |

Ecriture explicite de (17) :

$$X_{02}\ (X_0 D_{X_2}) T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1^2\ X_2^s\ X_3^t) = X_{12}\ (X_1 D_{X_2}) T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}(0\ 2\ 3;\ X_0^2\ X_2^s\ X_3^t). \tag{18}$$

Cette égalité implique que $(X_0 D_{X_2}) T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}(2\ 3;\ X_1^2\ X_2^s\ X_3^t)$ est divisible par $X_{12}$, donc que

$$T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}(2\ 3;\ X_1^2\ X_2^s\ X_3^t) = X_{12} T'^{0\,b-1\,c}_{1\,s\quad t}(2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t). \tag{19}$$

En substituant dans (18), on obtient

$$X_{02} X_{12}\ (X_0 D_{X_2}) T'^{0\,b-1\,c}_{1\,s\quad t}(2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) = X_{02} X_{12}\ (X_1 D_{X_2}) T'^{0\,b-1\,c}_{1\,s\quad t}(2\ 3;\ X_0\ X_2^s\ X_3^t),$$

de sorte que

$$T'^{0\,b-1\,c}_{1\,s\quad t}(2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) = (X_1 D_{X_2}) T''^{b-1\,c}_{s+1\,t}(2\ 3;\ X_2^{s+1} X_3^t)$$

Finalement,

$$T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}(2\ 3;\ X_1^2\ X_2^s\ X_3^t) = X_{12}\ (X_1 D_{X_2}) T''^{b-1\,c}_{s+1\,t}(2\ 3;\ X_2^{s+1}\ X_3^t) \tag{20}$$

et l'équation (18) est vidée.

Le lemme 4.1 motive la discussion suivante :

(3.1) $\boxed{b = 0}$

Alors $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t} = T^{0\,0\,c}_{2\,s\,t} = 0$, vu (19).

(3.2) $\boxed{b \geq 1 \text{ et l'écart entre } \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} \text{ est nul}}$

Dans ce cas, on a $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t} = T^{0\,t+1\,t+1}_{2\ \,t\quad t}$ $(t \geq 2)$ et, le monôme étant divisible par $X_{12}$, il est de la forme

$$T^{0\,t+1\,t+1}_{2\ \,t\quad t} = X_{12}^2 \sum_{i=0}^{t-1} A_i X_{22}^i X_{23}^{t-i} X_{32}^{t-i-1} X_{33}^{i+1} + X_{12} X_{13} \sum_{i=0}^{t} B_i X_{22}^i X_{23}^{t-i} X_{32}^{t-i} X_{33}^i.$$

Or, cette expression est nulle, en vertu de son antisymétrie en ses deux derniers arguments.

(3.3) $\boxed{b \geq 1 \text{ et l'écart entre } \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} \text{ vaut un}}$

Ici le monôme à annuler est $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t} = T^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}$ $(t \geq 3)$.

Equation :

$$(\partial T)^{0\,0\,t+1\,t+1}_{2\,2\,t-1\,t-1} = 0. \tag{21}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{llll}
I & : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 2 & t-1 & t-1 \end{pmatrix} = 0 & \\
IIa & : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \ell = 1 \\ k = 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad / & \begin{pmatrix} t & 0 & t+1 \\ t & 2 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & t+1 \\ t & 2 & t-1 \end{pmatrix} \\
& \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t & 0 & t+1 \\ t & 2 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & t+1 \\ t & 2 & t-1 \end{pmatrix} & \\
& \quad \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 & \\
IIb & : \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 &
\end{array}$$

Ecriture explicite de (21) :

$$X_{02}\ (X_0 D_{X_2}) T^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}(1\ 3\ 2;\ X_1^2 X_3^{t-1} X_2^t) - X_{03}\ (X_0 D_{X_3}) T^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}(1\ 2\ 3;\ X_1^2 X_2^{t-1} X_3^t)$$

$$-X_{12}\ (X_1 D_{X_2}) T^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}(0\ 3\ 2;\ X_0^2 X_3^{t-1} X_2^t) + X_{13}\ (X_1 D_{X_3}) T^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}(0\ 2\ 3;\ X_0^2 X_2^{t-1} X_3^t) = 0.$$

Comme (19) entraîne que

$$\begin{aligned}
& T^{0\ t+1\ t}_{2\ t-1\ t}(1\ 2\ 3;\ X_1^2\ X_2^{t-1}\ X_3^t) \\
&= X_{12}^2 T^{(1)\ t-1\ t}_{\ \ t-1\ t}(2\ 3;\ X_2^{t-1}\ X_3^t) + X_{12}X_{13} T^{(2)\ t\ \ t-1}_{\ \ t-1\ t}(2\ 3;\ X_2^{t-1}\ X_3^t) \\
&= X_{12}^2 \sum_{i=0}^{t-1} A_i X_{22}^i X_{23}^{t-i-1} X_{32}^{t-i-1} X_{33}^{i+1} + X_{12}X_{13} \sum_{i=0}^{t-1} B_i X_{22}^i X_{23}^{t-i-1} X_{32}^{t-i} X_{33}^i,
\end{aligned}$$

la relation (21) devient finalement (avec des notations simplifiées, évidentes)

$$\begin{aligned}
& X_{02}\ (X_0 D_{X_2})(X_{13}^2 T^{(1)}(3\ 2) + X_{12}X_{13} T^{(2)}(3\ 2)) \\
& \quad -X_{03}\ (X_0 D_{X_3})(X_{12}^2 T^{(1)}(2\ 3) + X_{12}X_{13} T^{(2)}(2\ 3)) \\
& \quad -X_{12}\ (X_1 D_{X_2})(X_{03}^2 T^{(1)}(3\ 2) + X_{02}X_{03} T^{(2)}(3\ 2)) \\
& \quad +X_{13}\ (X_1 D_{X_3})(X_{02}^2 T^{(1)}(2\ 3) + X_{02}X_{03} T^{(2)}(2\ 3)) = 0.
\end{aligned}$$

Les termes

$$X_{02}^2 X_{13}^2 D_{X_{22}} T^{(1)}(3\ 2) = X_{02}^2 X_{13}^2 \sum_{i=0}^{t-1} A_i (i+1) X_{22}^i X_{23}^{t-i-1} X_{32}^{t-i-1} X_{33}^i$$

ne pouvant être compensés que par des termes de

$$X_{02}^2 X_{13}^2 D_{X_{33}} T^{(1)}(2\ 3) = X_{02}^2 X_{13}^2 \sum_{i=0}^{t-1} A_i (i+1) X_{22}^i X_{23}^{t-i-1} X_{32}^{t-i-1} X_{33}^i,$$

on a $T^{(1)} = 0$. Prenons maintenant les termes

$$X_{02}^2 X_{12} X_{13} D_{X_{22}} T^{(2)}(3\ 2) = X_{02}^2 X_{12} X_{13} \sum_{i=0}^{t-1} B_i\ i X_{22}^{i-1} X_{23}^{t-i} X_{32}^{t-i-1} X_{33}^i$$

et remarquons qu'ils ne sont pas compensables :

$$T^{0\,t+1\,t}_{2\,t-1\,t}(0\ 1\ 2;\ X_0^2\ X_1^{t-1}X_2^t) = B_0X_{01}X_{02}X_{12}^{t-1}X_{21}^t$$

(on vérifie aisément que cette expression est solution de l'équation (21)). Or, si on pose $T' = T - \partial\mathcal{V}_t$, où $\mathcal{V}_t$ est la cochaîne - chaîne de cochaînes élémentaires - définie en 4.2 et si on choisit $\beta_t = (-1)^{t+1}\frac{B_0}{2}$, on a affaire à un cocycle cohomologue (notons-le de nouveau $T$) tel que

$$T^{0\,t+1\,t}_{2\,t-1\,t} = 0.$$

(3.4) $\boxed{b \geq 1 \text{ et l'écart entre } \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} \text{ vaut au moins deux}}$

Le lemme 4.1 stipule que le monôme minimum du bord de la cochaîne $V = V^{b-1\,c}_{s+1\,t} + V^{c\,b-1}_{t\,s+1}$ est donné par

$$(\partial V)^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}(2\ 3;\ X_1^2\ X_2^s\ X_3^t) = X_{12}\ (X_1 D_{X_2})\Big[-\frac{2}{s+1}\ V^{b-1\,c}_{s+1\,t}(2\ 3;\ X_2^{s+1}\ X_3^t)\Big]. \qquad (22)$$

La comparaison de (20) et (22) permet alors de voir que

$$T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t} = 0,$$

quitte à corriger par un bord. ■

**Remarques 4.5** (i) Observons que pour annuler $T^{0\,t+1\,2}_{2\,1\ \ \,t}$ $(t \geq 3)$, on ajoute notamment $\partial V_1$, avec $V_1 = V^{t+1\,1}_{1\ \ \,t+1} + V^{1\ \ \,t+1}_{t+1\,1}$ et $V^{t+1\,1}_{1\ \ \,t+1} = \alpha X_{11}X_{21}^tX_{22} + \beta X_{12}X_{21}^{t+1}$, la valeur de $\beta$ étant arbitraire. Cette "anomalie" est due au fait que les cochaînes $\mathcal{V}_{t,1}$ et $\mathcal{V}_{t,2}$ obtenues par antisymétrisation de $\mathcal{V}^{t+1\,1}_{1\ \ \,t+1} = \beta X_{12}X_{21}^{t+1}$ resp. $\mathcal{V}^{t\,2}_{2\,t} = \varepsilon X_{12}^2X_{21}^t$, ont des plus petites contributions du même type :

$$(\partial\mathcal{V}_{t,1})^{0\,t+1\,2}_{2\,1\ \ \,t} = -2\beta X_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^t \ \text{ et }\ (\partial\mathcal{V}_{t,2})^{0\,t+1\,2}_{2\,1\ \ \,t} = -2\varepsilon X_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^t.$$

(ii) Voici le résumé - utile plus tard - des corrections par des bords effectuées lors de l'étude des monômes $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i\right)$.

(1) Annulation de $T^{0\,2\,2}_{2\,1\,1}$ : soustraction de $\partial V,\ V = V^{2\,1}_{1\,2} + V^{1\,2}_{2\,1}$, $V^{2\,1}_{1\,2} = \alpha X_{11}X_{21}X_{22} + \beta X_{12}X_{21}^2$, $\beta$ quelconque.

(2) Annulation de $T^{0\,3\,2}_{2\,1\,2}$ : soustraction de $\partial V_1,\ V_1 = V^{3\,1}_{1\,3} + V^{1\,3}_{3\,1}$, $V^{3\,1}_{1\,3} = \alpha X_{11}X_{21}^2 X_{22} + \beta X_{12}X_{21}^3$.

(3) Annulation de $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,1\,\sigma}$ $\left(\mu,\nu,\sigma \geq 2, \sum_s = \sum_i, \begin{pmatrix} 0 & \mu & \nu \\ 2 & 1 & \sigma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ : addition de $\partial V_1$ et $\partial V_2$, $V_1 = V^{\mu\,\nu-1}_{1\,\sigma+1} + V^{\nu-1\,\mu}_{\sigma+1\,1}$, $V_2 = V^{\mu-1\,\nu}_{2\ \ \ \ \sigma} + V^{\nu\,\mu-1}_{\sigma\,2}$, $V^{\mu\,\nu-1}_{1\,\sigma+1} = \alpha X_{11}X_{21}^{\mu-1} X_{22}^{\nu-1} + \beta X_{12}X_{21}^{\mu}X_{22}^{\nu-2}$, $V^{\mu-1\,\nu}_{2\ \ \ \ \sigma} = \gamma X_{11}^2X_{21}^{\mu-3}X_{22}^{\nu} + \delta X_{11}X_{12}X_{21}^{\mu-2}X_{22}^{\nu-1} + \varepsilon X_{12}^2X_{21}^{\mu-1}X_{22}^{\nu-2}$ (premier terme à omettre, si $\mu = 2$), $\beta$ arbitraire si $\nu = 2$.

(4) Annulation de $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma}$ ($\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\mu\\\rho\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\nu\\\sigma\end{pmatrix}$, $\sum_s = \sum_i$, $\mu \geq 1$, $\rho \geq 2$, écart entre $\begin{pmatrix}\mu\\\rho\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\nu\\\sigma\end{pmatrix}$ supérieur ou égal à 2) : soustraction de $\partial V$, $V = V^{\mu-1\,\nu}_{\rho+1\,\sigma} + V^{\nu\,\mu-1}_{\sigma\,\rho+1}$, $V^{\mu-1\,\nu}_{\rho+1\,\sigma} = -\frac{\rho+1}{2}\,T''^{\mu-1\,\nu}_{\rho+1\,\sigma}$.

(5) Annulation de $T^{0\,\sigma+1\,\sigma}_{2\,\sigma-1\,\sigma}$ ($\sigma \geq 3$) : soustraction de $\partial\mathcal{V}_\sigma$, $\mathcal{V}_\sigma = \sum_{i=1}^{\sigma-1}(\mathcal{V}^{2\sigma-i\;i}_{i\;\;2\sigma-i} + \mathcal{V}^{i\;\;2\sigma-i}_{2\sigma-i\;i})$, $\mathcal{V}^{2\sigma-i\;i}_{i\;\;2\sigma-i} = (-1)^{i+1}\beta_\sigma X^i_{12}X^{2\sigma-i}_{21}$.

# 5 Annulation du coefficient $k'$

**Proposition 5.1** *Tout $T \in \wedge^3(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \cap \ker\partial$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$, $N = C^\infty(\Omega)$, $m \geq 3$) est cohomologue à un cocycle à coefficients constants, invariant et sans colonnes $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. De plus, le monôme de degré $\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ de ce cycle cohomologue est nul.*

Renommons $T$ le cocycle obtenu en 4.4. Il suffit alors de démontrer que $k' = 0$ et que $T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3} = 0$.

Equation :

$$(\partial T)^{0\,2\,2\,2}_{2\,1\,1\,2} = 0. \tag{23}$$

Monômes contribuant :

$$I \quad : \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$IIa \quad : \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\ell=1\\k=0\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&2\\3&1&1\end{pmatrix}$$

Ecriture explicite de (23) :

$$\begin{aligned}&2k'X_{01}X_{03}X_{11}X_{23}X_{32}^2 - 2k'X_{02}X_{03}X_{13}X_{22}X_{31}^2\\ &\quad +X_{01}\,(X_0D_{X_1})T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(2\;1\;3;\;X_2\;X_1^2\;X_3^2)\\ &\quad -X_{02}\,(X_0D_{X_2})T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\;2\;3;\;X_1\;X_2^2\;X_3^2)\\ &\quad -\frac{2}{3}\,X_{03}\,(X_0D_{X_3})T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3}(1\;2\;3;\;X_1\;X_2\;X_3^3) = 0\end{aligned} \tag{24}$$

(noter que la 2ème ligne est - au signe près - la 3ème où l'on a échangé 1 et 2).

Posons

$$T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\;2\;3;\;X_1\;X_2^2\;X_3^2) = X_{21}^2V^1 + X_{21}X_{22}V^2 + X_{21}X_{23}V^3 + X_{22}X_{23}V^4 + X_{23}^2V^5$$

et (cf. (10))

$$T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3}(1\;2\;3;\;X_1\;X_2\;X_3^3) = X_{31}^2X_{32}W^1 + X_{31}^2X_{33}W^2 + X_{31}X_{32}^2W^3 + X_{32}^2X_{33}W^4.$$

Les termes de (24) en $X_{02}^2$ et ceux en $X_{03}^2$ n'étant pas compensables, $V^2 = V^4 = W^2 = W^4 = 0$, de sorte que

$$\begin{aligned} T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2} &= v_1^1 X_{12} X_{21}^2 X_{33}^2 + v_2^1 X_{13} X_{21}^2 X_{32} X_{33} \\ &\quad + v_1^3 X_{11} X_{21} X_{23} X_{32} X_{33} + v_2^3 X_{12} X_{21} X_{23} X_{31} X_{33} + v_3^3 X_{13} X_{21} X_{23} X_{31} X_{32} \\ &\quad + v_1^5 X_{11} X_{23}^2 X_{31} X_{32} + v_2^5 X_{12} X_{23}^2 X_{31}^2 \end{aligned}$$

et

$$T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3} = F(X_{11}X_{23}X_{31}X_{32}^2 - X_{13}X_{22}X_{31}^2X_{32}) + G(X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32} - X_{13}X_{21}X_{31}X_{32}^2).$$

Déterminons les coefficients des monômes $M(0,1,2,3)$ suivants (entre parenthèses, nous indiquons les monômes $M(0,2,1,3)$) :

Coefficient de $X_{01}X_{03}X_{12}X_{21}X_{32}X_{33}$ $(X_{02}X_{03}X_{12}X_{21}X_{31}X_{33})$ :

$$v_2^3 = 0.$$

Coefficient de $X_{01}X_{03}X_{12}X_{22}X_{31}X_{33}$ $(X_{02}X_{03}X_{11}X_{21}X_{32}X_{33})$ :

$$v_1^3 = 0.$$

Coefficient de $X_{01}X_{02}X_{13}X_{21}X_{32}X_{33}$ $(X_{01}X_{02}X_{12}X_{23}X_{31}X_{33})$ :

$$-2v_2^1 = 0.$$

Coefficient de $X_{01}X_{03}X_{11}X_{23}X_{32}^2$ $(X_{02}X_{03}X_{13}X_{22}X_{31}^2)$ :

$$2k' - \frac{2}{3}\,F = 0. \tag{25}$$

Coefficient de $X_{01}X_{03}X_{12}X_{23}X_{31}X_{32}$ $(X_{02}X_{03}X_{13}X_{21}X_{31}X_{32})$ :

$$v_3^3 - \frac{4}{3}\,G = 0. \tag{26}$$

Coefficient de $X_{01}X_{03}X_{13}X_{21}X_{32}^2$ $(X_{02}X_{03}X_{12}X_{23}X_{31}^2)$ :

$$2v_2^5 + \frac{2}{3}\,G = 0. \tag{27}$$

Coefficient de $X_{01}X_{03}X_{13}X_{22}X_{31}X_{32}$ $(X_{02}X_{03}X_{11}X_{23}X_{31}X_{32})$ :

$$2v_1^5 + \frac{4}{3}\,F = 0. \tag{28}$$

L'équation (24) ne contient pas d'information supplémentaire. Elle fournit donc les égalités

$$\begin{aligned} & T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\;2\;3;\; X_1\; X_2^2\; X_3^2) \\ &\quad = v_1^1 X_{12} X_{21}^2 X_{33}^2 + v_3^3 X_{13} X_{21} X_{23} X_{31} X_{32} \\ &\qquad + v_1^5 X_{11} X_{23}^2 X_{31} X_{32} + v_2^5 X_{12} X_{23}^2 X_{31}^2 \end{aligned} \tag{29}$$

et

$$\begin{aligned} & T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3}(0\;1\;3;\; X_0\; X_1\; X_3^3)\\ &\quad = \; F(X_{00}X_{13}X_{30}X_{31}^2 - X_{03}X_{11}X_{30}^2X_{31})\\ &\qquad +G(X_{01}X_{13}X_{30}^2X_{31} - X_{03}X_{10}X_{30}X_{31}^2) \end{aligned} \tag{30}$$

et les relations (25), (26), (27) et (28).

Equation

$$(\partial T)^{2\,2\,1\,1}_{1\,1\,2\,2} = 0. \tag{31}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{lllllll}
IIa \;\; : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 2 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex]
 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \\[2ex]
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \\[2ex]
 & & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
IIb \;\; : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex]
 & & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \quad / & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex]
 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \\[2ex]
 & & & & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \\[2ex]
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

Ecriture explicite de (31) :

$$-\tfrac{1}{2}\; X_{01}\; (0D_1)^2 T^{1\,1\,3}_{2\,2\,1}(2\;3\;1;\; X_2^2\; X_3^2\; X_1) \quad (\ell 1)$$

$$+\tfrac{1}{2}\; X_{02}\; (0D_2)^2 T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\;3\;2;\; X_1\; X_3^2\; X_2^2) \quad (\ell 2)$$

$$-\tfrac{1}{2}\; X_{03}\; (0D_3)^2 T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\;2\;3;\; X_1\; X_2^2\; X_3^2) \quad (\ell 3)$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\ X_{12}\ (1D_2)^2 T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(0\ 3\ 2;\ X_0\ X_3^2\ X_2^2) && (\ell 4)\\
&+\tfrac{1}{2}\ X_{13}\ (1D_3)^2 T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(0\ 2\ 3;\ X_0\ X_2^2\ X_3^2) && (\ell 5)\\
&-\tfrac{2}{3}\ X_{23}\ (2D_3)(X_2 D_{X_3}) T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3}(0\ 1\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^3) && (\ell 6)\\
&+X_{10}\ (0D_1)(X_0 D_{X_1}) T^{1\,1\,3}_{2\,2\,1}(2\ 3\ 1;\ X_2^2\ X_3^2\ X_1) && (\ell 7)\\
&-X_{20}\ (0D_2)(X_0 D_{X_2}) T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\ 3\ 2;\ X_1\ X_3^2\ X_2^2) && (\ell 8)\\
&+X_{30}\ (0D_3)(X_0 D_{X_3}) T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^2\ X_3^2) && (\ell 9)\\
&-k' X_{02} X_{13} X_{20}^2 X_{31}^2 && (\ell 10)\\
&+k' X_{03} X_{12} X_{21}^2 X_{30}^2 && (\ell 11)\\
&+X_{21}\ (1D_2)(X_1 D_{X_2}) T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(0\ 3\ 2;\ X_0\ X_3^2\ X_2^2) && (\ell 12)\\
&-X_{31}\ (1D_3)(X_1 D_{X_3}) T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2}(0\ 2\ 3;\ X_0\ X_2^2\ X_3^2) && (\ell 13)\\
&+k' X_{03} X_{12} X_{21}^2 X_{30}^2 && (\ell 14)\\
&-k' X_{02} X_{13} X_{20}^2 X_{31}^2 && (\ell 15)\\
&+\tfrac{1}{3}\ X_{32}\ (X_2 D_{X_3})^2 T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3}(0\ 1\ 3;\ X_0\ X_1\ X_3^3) = 0 && (\ell 16)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

(on a - avec des notations évidentes - $\ell 2 = (\ell 2)(0\ 1\ 2\ 3) = -(\ell 3)(0\ 1\ 3\ 2)$, $\ell 4 = (\ell 3)(1\ 0\ 3\ 2)$, $\ell 5 = -(\ell 3)(1\ 0\ 2\ 3)$, $\ell 8 = -(\ell 9)(0\ 1\ 3\ 2)$, $\ell 12 = (\ell 9)(1\ 0\ 3\ 2)$, $\ell 13 = -(\ell 9)(1\ 0\ 2\ 3)$).

$(*)$ Coefficient de $X_{00}X_{13}X_{20}X_{22}X_{31}^2$ :

$$-2v_1^1 = 0 \tag{33}$$

($\ell 5$ ($\ell 13$) : coefficient de $-X_{03}X_{11}X_{21}X_{22}X_{30}^2$ dans $\ell 3$ ($\ell 9$); $\ell 8$ : coefficient de $-X_{00}X_{12}$ $X_{21}^2 X_{30} X_{33}$ dans $\ell 9$).

$(*)$ Coefficient de $X_{02}X_{13}X_{20}^2X_{31}^2$ :

$$-2k' = 0 \tag{34}$$

($\ell 2$ ($\ell 5, \ell 8, \ell 13$) : coefficient de $-X_{03}X_{12}X_{21}^2X_{30}^2$ dans $\ell 3$ ($\ell 3, \ell 9, \ell 9$)).

Vu (25) et (28), $k' = 0$ entraîne $F = 0$ et $v_1^5 = 0$.

$(*)$ Coefficient de $X_{03}X_{12}X_{20}^2X_{31}^2$ :

$$-2v_2^5 = 0 \tag{35}$$

($\ell 4$ : coefficient de $X_{03}X_{12}X_{20}^2X_{31}^2$ dans $\ell 3$; $\ell 8$ ($\ell 13$) : coefficient de $-X_{02}X_{13}X_{21}^2X_{30}^2$ dans $\ell 9$ ($\ell 9$)).

Il découle alors de (27) (et (26)) que $G = 0$ (et $v_3^3 = 0$). Finalement, on a donc bien

$$k' = 0 \quad \text{et} \quad T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3} = 0 \quad (\text{et } T^{2\,1\,2}_{1\,2\,2} = 0).$$

∎

# 6 Etude des monômes restants

Ci-dessous, nous établirons la proposition I.2 (comme annoncé, les parties de la preuve exigeant un raffinement en dimension $m = 3$, seront marquées d'un astérisque et remplacées à la section VII).

Soit $T \in \wedge^3(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \cap \ker \partial$ ($\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega,\ N = C^\infty(\Omega),\ m \geq 3$). Vu 5.1, on peut supposer que $T$ soit à coefficients constants, invariant, sans colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et que $T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3} = 0$. Nous démontrerons que $T = 0$ en prouvant que tout monôme $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i\right)$ est nul, si ceux du même type qui le précèdent, le sont. Il est clair que l'hypothèse de récurrence implique que tout monôme inférieur au monôme étudié est nul. On notera également que nous ne retrancherons plus de bord dans la suite.

## 6.1 Etude de l'organigramme des cas à considérer

Pour commencer, considérons le monôme de référence

$$T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t} \quad \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i\right)$$

- ce qui signifie que les monômes qui le précèdent sont supposés être nuls - et déterminons les écritures explicites de deux équations - obtenues, l'une par création de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, l'autre par création de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - utiles ci-dessous.

**Lemme 6.1** *Soit le monôme de référence*

$$T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t} \quad \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i,\ t \geq 2\right).$$

*L'identité*

$$(\partial T)^{0\,2\,b\,c+1}_{2\,1\,s\,t-1} = 0$$

*s'écrit alors*

$$\begin{aligned} &X_{01}\ (X_0 D_{X_1}) T^{1\,b\,c+1}_{2\,s\,t-1}(1\ 2\ 3;\ X_1^2\ X_2^s\ X_3^{t-1}) \\ &\quad + \frac{2}{s+1}\ X_{02}\ (X_0 D_{X_2}) T^{2\,b-1\,c+1}_{1\,s+1\,t-1}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^{s+1}\ X_3^{t-1}) \\ &\quad + \frac{2}{t}\ X_{03}\ (X_0 D_{X_3}) T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) = 0, \end{aligned}$$

*où la 2ème ligne est à négliger, si $b = 0$.*

De fait, les monômes contribuant au degré considéré, sont :

$$
\begin{array}{lllllll}
I & : & / & & & & \\
IIa & : & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & c+1 \\ 2 & s & t-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b-1 & 2 & c+1 \\ s+1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}^{(+)} & \begin{pmatrix} c & 2 & b \\ t & 1 & s \end{pmatrix} \\
IIb & : & / & & & &
\end{array}
$$

$(+)$ : monôme à omettre, si $b = 0$. ■

**Lemme 6.2** *Si*

$$T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t} \qquad \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i,\ b \ge 1,\ b + s \ge 4 \right)$$

*est le monôme de référence, l'équation*

$$(\partial T)^{2\,2\,b-1\,c}_{1\,1\,s\quad t} = 0$$

*admet l'écriture détaillée*

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\, X_{01}\, (0D_1)^2 T^{3\,b-1\,c}_{1\,s\quad t}(1\,2\,3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) - \frac{1}{2}\, X_{02}\, (0D_2)^2 T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\,2\,3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) \\
+\frac{1}{2}\, X_{12}\, (1D_2)^2 T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}(0\,2\,3;\ X_0\ X_2^s\ X_3^t) + X_{10}\, (0D_1)(X_0 D_{X_1}) T^{3\,b-1\,c}_{1\,s\quad t}(1\,2\,3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) \\
+X_{20}\, (0D_2)(X_0 D_{X_2}) T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\,2\,3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) - X_{21}\, (1D_2)(X_1 D_{X_2}) T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}(0\,2\,3;\ X_0\ X_2^s\ X_3^t) = 0,
\end{aligned}
$$

*le 2ème et le 3ème termes étant à supprimer, si $b = 1$.*

Il suffit encore de chercher les monômes contribuant :

$I$ : /

(Si $b = 1$ ou $c = 0$, on peut créer $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ $(s \ge 3)$ resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ $(t \ge 3)$. Les monômes à trouver s'obtenant alors à partir de $\begin{pmatrix} 2 & 2 & . \\ 1 & 1 & . \end{pmatrix}$ par soustraction de 1 au moins, de deux degrés supérieurs au moins, ils sont nuls)

$$
\begin{array}{llllllll}
IIa & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 2 \le b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & b-1 & c \\ 1 & s & t \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b & 2 & c \\ s & 1 & t \end{pmatrix}^{(+)} & 0 \\
 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} b & 2 & c \\ s & 1 & t \end{pmatrix}^{(+)} & 0 & \\
 & & \begin{pmatrix} b-1 \\ s \end{pmatrix} & & 0 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
IIb\ : \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \le b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & b-1 & c \\ 1 & s & t \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b & 2 & c \\ s & 1 & t \end{pmatrix} & 0 \\[2ex]
 & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & / & 0 & 0 \\[2ex]
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \le b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b & 2 & c \\ s & 1 & t \end{pmatrix} & 0 & \\[2ex]
 & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \\[2ex]
\begin{pmatrix} b-1 \\ s \end{pmatrix} & & & 0 & &
\end{array}
$$

(+) : monômes à omettre, si $b = 1$. ■

**Preuve 6.3** Considérons un monôme arbitraire

$$T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} \quad \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} a \\ r \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}, \ \sum\nolimits_s = \sum\nolimits_i \right)$$

et montrons qu'il est nul sous l'hypothèse de récurrence.

(1) $\boxed{r \ge 2}$

Equation :

$$(\partial T)^{0\ a+1\ b\ c}_{2\ r-1\ s\ t} = 0. \tag{36}$$

Monômes contribuant :

$I$ : /

(Si l'on crée $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, les monômes cherchés s'obtiennent à partir de $\begin{pmatrix} a+1 & b & c \\ r-1 & s & t \end{pmatrix}$ par soustraction de 1 de deux degrés supérieurs : ils sont donc tous nuls. Si $b = 0$ ou $c = 0$, la création de $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ $(s \ge 3)$ resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ $(t \ge 3)$ conduit à des monômes de 1ère colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, qui sont évidemment nuls)

$$
IIa\ : \ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix} \quad 0 \quad 0
$$

(Les monômes associés à $\begin{pmatrix} a+1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix}$ renferment $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$)

$IIb$ : /

Ecriture explicite de (36) :

$$-\frac{2}{r}\ X_{01}\ (X_0 D_{X_1}) T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1^r\ X_2^s\ X_3^t) = 0.$$

En faisant $X_0 = X_1$, on trouve

$$T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t} = 0.$$

(2) $\boxed{r = 1}$

(2.1) $\boxed{r = 1,\ a \geq 3}$

Monôme de référence :

$$T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t} \quad \left( \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i,\ a \geq 3 \right).$$

Equation :

$$(\partial T)^{2\ a-1\ b\ c}_{1\ 1\quad\ s\ t} = 0. \tag{37}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{llllll}
I & : & / & & & \\
IIa & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 2 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & s & t \end{pmatrix} \quad 0 \quad 0 \\
 & & & & & \\
IIb & : & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \ell = 1 \\ k = 1 \leq b_0 \end{array} & \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & s & t \end{pmatrix} \quad 0 \quad 0 \\
 & & & & & \\
 & & & \begin{array}{l} \ell = 2 \\ k = 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \qquad / \qquad\quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Ecriture explicite de (37) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\ & X_{01}\ (0D_1)^2 T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) \\ & + X_{10}\ (0D_1)(X_0 D_{X_1}) T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Faisons $\eta^0 = \eta^1$ et $X_0 = X_1$. Il vient alors

$$-\frac{1}{2}a(a-1)X_{11}T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) + aX_{11}T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) = 0$$

ou encore

$$(3-a)T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^s\ X_3^t) = 0.$$

(2.1.1) $\boxed{r = 1,\ a \geq 4}$

Dans ce cas,

$$T^{a\,b\,c}_{1\,s\,t} = 0.$$

(∗) (2.1.2) $\boxed{r=1,\ a=3}$

Il découle de (38) que $T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\;2\;3;\;X_1\;X_2^s\;X_3^t)$ est divisible par $X_{11}$ :

$$T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t}=X_{11}(X_{21}^2T^1+X_{21}X_{31}T^2+X_{31}^2T^3),$$

où le terme en $X_{21}^2$ ($X_{31}^2$) est à omettre, si $s=1$ ($t=1$) et où les $T^i$ ($i\in\{1,2,3\}$) sont indépendants de $\eta^1$ et de $X_1$. Comme

$$(0D_1)T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t}=X_{10}(\ldots)+X_{11}(2X_{20}X_{21}T^1+X_{20}X_{31}T^2+X_{21}X_{30}T^2+2X_{30}X_{31}T^3),$$

la substitution dans (38) donne

$$\begin{array}{ll}-\frac{1}{2}\,X_{01} & [2X_{10}(2X_{20}X_{21}T^1+X_{20}X_{31}T^2+X_{21}X_{30}T^2+2X_{30}X_{31}T^3)\\ & +X_{11}(2X_{20}^2T^1+2X_{20}X_{30}T^2+2X_{30}^2T^3)]\\ +X_{10} & [X_{00}(X_{21}^2T^1+X_{21}X_{31}T^2+X_{31}^2T^3)\\ & +X_{01}(2X_{20}X_{21}T^1+X_{20}X_{31}T^2+X_{21}X_{30}T^2+2X_{30}X_{31}T^3)]=0.\end{array}\tag{39}$$

Les termes en $X_{00}$ n'étant pas compensables, $T^1=T^2=T^3=0$ et ainsi

$$T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t}=0.$$

(2.2) $\boxed{r=1,\ a=2}$

(2.2.1) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s\geq 2}$

Monôme de référence :

$$T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}\quad\Big(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}b\\s\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}c\\t\end{pmatrix},\ \textstyle\sum_s=\sum_i,\ s\geq 2\Big).$$

Equation :

$$(\partial T)^{0\,2\,b+1\,c}_{2\,1\,s-1\,t}=0.\tag{40}$$

Monômes contribuant :

$$\begin{array}{lllllll}I & : & / \\ IIa & : & \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\ell=1\\k=0\end{array} & \begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & b+1 & c\\2 & s-1 & t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b & 2 & c\\s & 1 & t\end{pmatrix} & 0\\ IIb & : & /\end{array}$$

Ecriture explicite de (40) :

$$\begin{array}{rl}-X_{01}\,(X_0D_{X_1})T^{1\,b+1\,c}_{2\,s-1\,t}(1\;2\;3;\;X_1^2\;X_2^{s-1}\;X_3^t)\\ =\dfrac{2}{s}\,X_{02}\,(X_0D_{X_2})T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}(1\;2\;3;\;X_1\;X_2^s\;X_3^t).\end{array}\tag{41}$$

Cette identité montre que $T^{1\,b+1\,c}_{2\,s-1\,t}$ est divisible par $X_{12}$ et $T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}$ par $X_{21}$ :

$$T^{1\,b+1\,c}_{2\,s-1\,t}=X_{12}\P^{1\,b\quad c}_{1\,s-1\,t}=X_{12}^k\mathcal{Q}\ \text{ et }\ T^{2\,b\,c}_{1\,s\,t}=X_{21}\mathcal{S}^{1\,b\quad c}_{1\,s-1\,t}=X_{21}^\ell\mathcal{T},\tag{42}$$

où $k$ et $\ell$ sont maximaux et égaux à 1 ou 2. Si on remplace dans (41), on obtient

$$\begin{aligned} & -X_{01}(k\ X_{02}\ X_{12}^{k-1}\mathcal{Q} + X_{12}^{k}\ (X_0 D_{X_1})\mathcal{Q}) \\ = & \ \frac{2}{s}\ X_{02}(\ell\ X_{01}\ X_{21}^{\ell-1}\mathcal{T} + X_{21}^{\ell}\ (X_0 D_{X_2})\mathcal{T}). \end{aligned} \tag{43}$$

Il s'ensuit que $(X_0 D_{X_1})\mathcal{Q}$ est divisible par $X_{02}$ et $(X_0 D_{X_2})\mathcal{T}$ par $X_{01}$ :

$$(2-k)\mathcal{Q} = X_{12}\mathcal{R} \ \text{ et } \ (s-\ell)\mathcal{T} = X_{21}\mathcal{U}. \tag{44}$$

(2.2.1.1) $\boxed{r = 1,\ a = 2,\ s \geq 2,\ b = 0}$

Alors $k = 1$, de sorte que $T_{2\ s-1\ t}^{1\ 1\ \ \ c} = 0$ ((44),(42)) et

$$T_{1\,s\,t}^{2\,0\,c} = 0$$

((41)).

(2.2.1.2) $\boxed{r = 1,\ a = 2,\ s \geq 2,\ b \geq 1}$

Les identités (44) montrent que $k = 2$ et $\ell = 2$.

(2.2.1.2.1) $\boxed{r = 1,\ a = 2,\ s \geq 3,\ b \geq 1}$

Dans ce cas (44) et (42) impliquent que

$$T_{1\,s\,t}^{2\,b\,c} = 0.$$

(2.2.1.2.2) $\boxed{r = 1,\ a = 2,\ s = 2,\ b \geq 1}$

Il découle de (43)

$$-2X_{01}X_{02}X_{12}\mathcal{Q} = 2X_{01}X_{02}X_{21}\mathcal{T}$$

et (42) que

$$T_{2\,1\ \ \ t}^{1\,b+1\,c} = AX_{12}^2 X_{21} X_{32}^{b-1} X_{33}^c \ \text{ et } \ T_{1\,2\,t}^{2\,b\,c} = -AX_{12}X_{21}^2 X_{32}^{b-1}X_{33}^c. \tag{45}$$

L'équation (40) est ainsi vidée. Examinons à présent la relation

$$(\partial T)_{1\,1\,2\ \ \ t}^{2\,2\,b-1\,c} = 0. \tag{46}$$

Si $b = 1$, elle contient la même information que (40), de sorte qu'il s'impose de traiter ce cas à part.

(2.2.1.2.2.1) $\boxed{r = 1,\ a = 2,\ s = 2,\ b \geq 2}$

L'écriture explicite de (46) est fournie par le lemme 6.2. Compte tenu de (45), son 2ème et son 5ème termes ($t2$ et $t5$) s'écrivent

$$\frac{1}{2}\ AX_{02}X_{21}^2 X_{33}^c(2(b-1)X_{10}X_{30}X_{32}^{b-2} + (b-1)(b-2)X_{12}X_{30}^2 X_{32}^{b-3}) \tag{47}$$

resp.

$$-2AX_{01}X_{20}X_{21}X_{33}^{c}(X_{10}\ X_{32}^{b-1}+(b-1)X_{12}\ X_{30}\ X_{32}^{b-2}). \tag{48}$$

Coefficient de $X_{02}X_{12}X_{21}^{2}X_{30}^{2}X_{32}^{b-3}X_{33}^{c}$ (pour $b\geq 3$) :

$$\frac{1}{2}\ A(b-1)(b-2)$$

($t3$ ($t6$) : coefficient de $-X_{02}X_{12}X_{20}^{2}X_{31}^{2}X_{32}^{b-3}X_{33}^{c}$ dans $t2$ ($t5$)).

($*$) (2.2.1.2.2.1.1) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=2,\ b\geq 3}$

Alors,

$$T_{1\,2\,t}^{2\,b\,c}=0.$$

(2.2.1.2.2.1.2) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=2,\ b=2}$

Vu (45), les monômes de (46) sont donnés par

$$T_{1\,2\,t}^{3\,1\,c}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^2\ X_3^t)=-T_{2\,1\,t}^{1\,3\,c}(2\ 1\ 3;\ X_2^2\ X_1\ X_3^t)=-AX_{12}X_{21}^{2}X_{31}X_{33}^{c}$$

et

$$T_{1\,2\,t}^{2\,2\,c}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^2\ X_3^t)=-AX_{12}X_{21}^{2}X_{32}X_{33}^{c}. \tag{49}$$

On vérifie facilement que l'équation (46) est alors triviale.

Etudions maintenant $T_{1\,2\,t}^{2\,2\,c}$ (son degré étant $bo$ et tel que $\sum_s=\sum_i$, on a nécessairement $t\geq 3$) moyennant la relation

$$(\partial T)_{2\,1\,2\,t-1}^{0\,2\,2\,c+1}=0. \tag{50}$$

En utilisant le lemme 6.1 et l'égalité (49), on voit que le terme $t3$ de (50) est égal à

$$-\frac{2}{t}\ AX_{03}X_{12}X_{21}^{2}(X_{02}\ X_{33}^{c}+c\ X_{03}\ X_{32}X_{33}^{c-1}).$$

Le second terme de cette expression n'étant pas compensable et $c$ valant au moins 2, il s'ensuit que

$$T_{1\,2\,t}^{2\,2\,c}=0.$$

(2.2.1.2.2.2) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=2,\ b=1}$

Vu (45), le monôme à annuler a la forme

$$T_{1\,2\,t}^{2\,1\,c}=T_{1\,2\,t}^{2\,1\,t}=-AX_{12}X_{21}^{2}X_{33}^{t}\quad (t\geq 2).$$

Choisissons l'équation

$$(\partial T)_{2\,1\,2\,t-1}^{0\,2\,1\,t+1}=0, \tag{51}$$

dont l'écriture détaillée est encore obtenue à l'aide de 6.1. Comme $t3$ s'écrit ici

$$-2AX_{03}^{2}X_{12}X_{21}^{2}X_{33}^{t-1}$$

et comme ce terme ne peut de nouveau être compensé, on en déduit que

$$T^{2\,1\,c}_{1\,2\,t} = 0.$$

(2.2.2) $\boxed{r = 1,\ a = 2,\ s = 1}$

C'est le dernier cas à traiter.

Monôme de référence :

$$T^{2\,b\,c}_{1\,1\,t} \quad \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}, \sum\nolimits_s = \sum\nolimits_i \Rightarrow b \geq 2,\ c \geq 1,\ t \geq 3 \right).$$

Equations :

$$(\partial T)^{0\,2\,b\,c+1}_{2\,1\,1\,t-1} = 0 \tag{52}$$

et

$$(\partial T)^{2\,2\,b-1\,c}_{1\,1\,1\quad t} = 0 \quad (\text{si } b \geq 3). \tag{53}$$

Nous nous servirons d'abord de (52), qui est une fois de plus un cas particulier du lemme 6.1. Décomposons les monômes $T^{1\,b\,c+1}_{2\,1\,t-1}$ et $T^{2\,b-1\,c+1}_{1\,2\quad t-1}$ contribuant à l'ordre $\begin{pmatrix} 0 & 2 & b & c+1 \\ 2 & 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}$, comme suit :

$$T^{1\,b\,c+1}_{2\,1\,t-1} = X_{11}X_{12}U^1 + X_{11}X_{13}U^2 + X_{12}^2U^3 + X_{12}X_{13}U^4 + X_{13}^2U^5$$

et

$$T^{2\,b-1\,c+1}_{1\,2\quad t-1} = X_{21}^2V^1 + X_{21}X_{22}V^2 + X_{21}X_{23}V^3 + X_{22}^2V^4 + X_{22}X_{23}V^5 + X_{23}^2V^6,$$

où le terme en $X_{22}^2$ est à supprimer, si $b = 2$. Les termes $t1$ et $t2$ de (52) s'écrivent donc

$$\begin{aligned} &X_{01}^2X_{12}U^1 + X_{01}X_{02}X_{11}U^1 + X_{01}^2X_{13}U^2 + X_{01}X_{03}X_{11}U^2 \\ &\qquad +2X_{01}X_{02}X_{12}U^3 + X_{01}X_{02}X_{13}U^4 + X_{01}X_{03}X_{12}U^4 + 2X_{01}X_{03}X_{13}U^5 \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} &2X_{01}X_{02}X_{21}V^1 + X_{01}X_{02}X_{22}V^2 + X_{02}^2X_{21}V^2 + X_{01}X_{02}X_{23}V^3 \\ &\qquad +X_{02}X_{03}X_{21}V^3 + 2X_{02}^2X_{22}V^4 + X_{02}^2X_{23}V^5 + X_{02}X_{03}X_{22}V^5 + 2X_{02}X_{03}X_{23}V^6. \end{aligned}$$

Comme les termes en $X_{01}^2$ et ceux en $X_{02}^2$ ne sont pas compensables, on a

$$U^1 = U^2 = V^2 = V^4 = V^5 = 0.$$

Par conséquent, (52) devient

$$\begin{aligned} &X_{01}X_{02}\left[2X_{12}U^3 + X_{13}U^4 + 2X_{21}V^1 + X_{23}V^3\right] + X_{03}\left[X_{01}X_{12}U^4\right. \\ &\qquad \left. +2X_{01}X_{13}U^5 + X_{02}X_{21}V^3 + 2X_{02}X_{23}V^6 + \frac{2}{t}\,(X_0D_{X_3})T^{2\,b\,c}_{1\,1\,t}\right] = 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie évidemment que les expressions entre crochets sont nulles.

Soient $(E1)$ et $(E2)$ les équations ainsi obtenues.

Vu que

$$\begin{array}{lcll}
U^3 & = & X_{21}U_1^3 + X_{22}U_2^3 + X_{23}U_3^3 & \text{(2ème terme à omettre, si } b=2\text{)},\\
U^4 & = & X_{21}U_1^4 + X_{22}U_2^4 + X_{23}U_3^4, & \\
U^5 & = & X_{21}U_1^5 + X_{22}U_2^5 + X_{23}U_3^5 & \text{(3ème terme à omettre, si } c=1\text{)},\\
V^1 & = & X_{12}V_2^1 + X_{13}V_3^1, & \\
V^3 & = & X_{11}V_1^3 + X_{12}V_2^3 + X_{13}V_3^3, & \\
V^6 & = & X_{11}V_1^6 + X_{12}V_2^6 + X_{13}V_3^6 & \text{(3ème terme à omettre, si } c=1\text{)}
\end{array}$$

et que $(E1)$ est d'ordre $\begin{pmatrix} 0 & 1 & b-1 & c+1 \\ 0 & 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}$, les termes en $X_{12}X_{22}$, en $X_{13}X_{22}$ et ceux en $X_{11}X_{23}$ ne sont pas compensables, de sorte que

$$U_2^3 = U_2^4 = V_1^3 = 0.$$

Finalement, $(E1)$ s'écrit

$$X_{12}X_{21}(2U_1^3 + 2V_2^1) + X_{12}X_{23}(2U_3^3 + V_2^3) + X_{13}X_{21}(U_1^4 + 2V_3^1) + X_{13}X_{23}(U_3^4 + V_3^3) = 0$$

i.e.

$$V_2^1 = -U_1^3,\ V_2^3 = -2U_3^3,\ V_3^1 = -\frac{1}{2}\,U_1^4 \ \text{ et } \ V_3^3 = -U_3^4.$$

Passons à $(E2)$. Il s'agit de l'équation

$$\begin{array}{l}
-\dfrac{2}{t}\,(X_0D_{X_3})T^{2\,b\,c}_{1\,1\,t}\\
\quad = \ X_{01}X_{12}(X_{21}U_1^4 + X_{23}U_3^4) + 2X_{01}X_{13}(X_{21}U_1^5 + X_{22}U_2^5 + X_{23}U_3^5)\\
\qquad + X_{02}X_{21}(X_{12}V_2^3 - X_{13}U_3^4) + 2X_{02}X_{23}(X_{11}V_1^6 + X_{12}V_2^6 + X_{13}V_3^6)
\end{array} \qquad (54)$$

(termes en $U_3^5$ et $V_3^6$ à supprimer, si $c=1$). En faisant $X_0 = X_3$, on trouve

$$\begin{array}{rcl}
-2T^{2\,b\,c}_{1\,1\,t} & = & X_{12}X_{31}(X_{21}U_1^4 + X_{23}U_3^4) + 2X_{13}X_{31}(X_{21}U_1^5 + X_{22}U_2^5 + X_{23}U_3^5)\\
& & + X_{21}X_{32}(X_{12}V_2^3 - X_{13}U_3^4) + 2X_{23}X_{32}(X_{11}V_1^6 + X_{12}V_2^6 + X_{13}V_3^6)
\end{array}$$

et en substituant dans (54), on obtient

$$\begin{array}{l}
(1-t)\Big[X_{01}X_{12}(X_{21}U_1^4 + X_{23}U_3^4) + 2X_{01}X_{13}(X_{21}U_1^5 + X_{22}U_2^5 + X_{23}U_3^5)\\
\quad + X_{02}X_{21}(X_{12}V_2^3 - X_{13}U_3^4) + 2X_{02}X_{23}(X_{11}V_1^6 + X_{12}V_2^6 + X_{13}V_3^6)\Big]\\
\quad + X_{12}X_{31}\Big[X_{21}\,(X_0D_{X_3})U_1^4 + X_{23}\,(X_0D_{X_3})U_3^4\Big] + 2X_{13}X_{31}\Big[X_{21}\,(X_0D_{X_3})U_1^5\\
\quad + X_{22}\,(X_0D_{X_3})U_2^5 + X_{23}\,(X_0D_{X_3})U_3^5\Big] + X_{21}X_{32}\Big[X_{12}\,(X_0D_{X_3})V_2^3 - X_{13}\,(X_0D_{X_3})U_3^4\Big]\\
\quad + 2X_{23}X_{32}\Big[X_{11}\,(X_0D_{X_3})V_1^6 + X_{12}\,(X_0D_{X_3})V_2^6 + X_{13}\,(X_0D_{X_3})V_3^6\Big] = 0
\end{array} \qquad (55)$$

(termes renfermant $U_3^5$ et $V_3^6$ à négliger, si $c=1$). Remarquons - en vue de l'exploitation complète de (55), équation d'ordre $\begin{pmatrix} 0 & 2 & b & c \\ 1 & 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}$, avec $b+c=t$ - que

$$\begin{array}{lcl}
U_1^4 & = & u_1^4 X_{32}^{b-1}X_{33}^{c},\ U_3^4 = u_3^4 X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1},\\
U_1^5 & = & u_1^5 X_{32}^{b}X_{33}^{c-1},\ U_2^5 = u_2^5 X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1},\ U_3^5 = u_3^5 X_{31}X_{32}^{b}X_{33}^{c-2} \quad (c \geq 2),\\
V_2^3 & = & v_2^3 X_{31}X_{32}^{b-2}X_{33}^{c},\\
V_1^6 & = & v_1^6 X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1},\ V_2^6 = v_2^6 X_{31}^2X_{32}^{b-2}X_{33}^{c-1},\ V_3^6 = v_3^6 X_{31}^2X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-2} \quad (c \geq 2).
\end{array}$$

Coefficient de $X_{01}X_{12}X_{21}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c}$ :

$$(1-t)u_1^4 + v_2^3 = 0.$$

Coefficient de $X_{02}X_{12}X_{21}X_{31}X_{32}^{b-2}X_{33}^{c}$ :

$$(b-1)u_1^4 + (b-t-1)v_2^3 = 0.$$

Coefficient de $X_{03}X_{12}X_{21}X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1}$ :

$$u_1^4 + v_2^3 = 0.$$

*D'où :* $u_1^4 = v_2^3 = 0.$

Coefficient de $X_{01}X_{12}X_{23}X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1}$ :

$$(2-t)u_3^4 + 4v_2^6 = 0. \tag{56}$$

Coefficient de $X_{02}X_{13}X_{21}X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1}$ :

$$(t-b)u_3^4 + 2bu_1^5 = 0. \tag{57}$$

Coefficient de $X_{01}X_{13}X_{21}X_{32}^{b}X_{33}^{c-1}$ :

$$u_3^4 + 2(t-1)u_1^5 = 0. \tag{58}$$

Coefficient de $X_{02}X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{b-2}X_{33}^{c-1}$ :

$$(b-1)u_3^4 + 2(b-t-1)v_2^6 = 0. \tag{59}$$

Coefficient de $X_{03}X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-2}$ :

$$(c-1)(u_3^4 + 2v_2^6) = 0 \;\; (c \geq 2).$$

Coefficient de $X_{03}X_{13}X_{21}X_{31}X_{32}^{b}X_{33}^{c-2}$ :

$$(1-c)(u_3^4 - 2u_1^5) = 0 \;\; (c \geq 2).$$

*Si $c \geq 2$, on trouve $u_3^4 = u_1^5 = v_2^6 = 0$. Si $c = 1$, les équations* (56) *et* (59) *sont équivalentes et il en est de même de* (57) *et* (58) $(b+c=t)$*; le système s'écrit donc*

$$\begin{cases} (2-t)u_3^4 + 4v_2^6 = 0 \\ u_3^4 + 2(t-1)u_1^5 = 0. \end{cases}$$

Coefficient de $X_{01}X_{13}X_{22}X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1}$ :

$$2(2-t)u_2^5 = 0.$$

*D'où :* $u_2^5 = 0.$

Coefficient de $X_{01}X_{13}X_{23}X_{31}X_{32}^{b}X_{33}^{c-2}$ :

$$(2-t)u_3^5+2v_3^6=0 \quad (c\geq 2). \tag{60}$$

Coefficient de $X_{02}X_{13}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-2}$ :

$$bu_3^5+(b-t)v_3^6=0 \quad (c\geq 2). \tag{61}$$

Coefficient de $X_{03}X_{13}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{b}X_{33}^{c-3}$ :

$$(c-2)(u_3^5+v_3^6)=0 \ \ (c\geq 3).$$

*Si $c\geq 3$, il résulte de ces équations que $u_3^5=v_3^6=0$. Si $c=2$, (60) et (61) sont équivalents, de sorte que le système se réduit à*

$$(2-t)u_3^5+2v_3^6=0.$$

Coefficient de $X_{02}X_{11}X_{23}X_{31}X_{32}^{b-1}X_{33}^{c-1}$ :

$$(b-t)v_1^6=0.$$

*D'où :* $v_1^6=0$.

La relation (55) ne contient pas d'information supplémentaire.

(2.2.2.1) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=1,\ c\geq 3}$

Alors

$$T^{2\,b\,c}_{1\,1\,t}=0.$$

(2.2.2.2) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=1,\ c=2}$

Dans ce cas, les résultats ci-dessus entraînent

$$T^{2\,b\,2}_{1\,1\,t}=T^{2\,t-2\,2}_{1\,1\quad t}=C_tX_{13}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2} \quad (t\geq 4,\ C_t=-\frac{t}{2}\,u_3^5). \tag{62}$$

Remarquons que

$$T^{2\,b\,2}_{1\,1\,4}=T^{2\,2\,2}_{1\,1\,4}=C_4X_{13}X_{23}X_{31}^2X_{32}^2=0,$$

vu la symétrie et l'antisymétrie de ce monôme en ses deux premiers arguments.

L'équation (52) étant vidée, utilisons (53) (ce qui est possible, car $b\geq 3$), qui est un cas particulier du lemme 6.2. Le terme $t2$ de (53) s'écrivant

$$-\frac{1}{2}\,C_t(t-2)(t-3)X_{02}X_{13}X_{23}X_{30}^2X_{31}^2X_{32}^{t-4} \tag{63}$$

et n'étant pas compensable, on a

$$(*) \quad T^{2\,b\,2}_{1\,1\,t}=0 \quad (t\geq 5).$$

(2.2.2.3) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=1,\ c=1}$

Ici, il vient

$$T^{2\,b\,1}_{1\,1\,t} = T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} = C_{t,1}X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2} + C_{t,2}X_{13}X_{21}X_{31}X_{32}^{t-1}, \tag{64}$$

avec $t \geq 3,\ C_{t,1} = -\frac{t}{4}\ u_3^4$ et $C_{t,2} = \frac{t}{2(t-1)}\ u_3^4$. On notera que

$$C_{t,2} = \frac{2}{1-t}\ C_{t,1}, \tag{65}$$

que

$$T^{2\,b\,1}_{1\,1\,3} = T^{2\,2\,1}_{1\,1\,3} = 0$$

(cf. 5.1) et que

$$\begin{aligned} T^{2\,b-1\,2}_{1\,2\quad t-1} &= T^{2\,t-2\,2}_{1\,2\quad t-1} \\ &= v_2^1X_{12}X_{21}^2X_{32}^{t-3}X_{33}^2 \\ &\quad +u_3^4\left(\frac{t-2}{4}\ X_{12}\ X_{23}^2\ X_{31}^2\ X_{32}^{t-3} - X_{13}\ X_{21}\ X_{23}\ X_{31}\ X_{32}^{t-2}\right) \quad (t \geq 3). \end{aligned}$$

La relation (52) étant triviale et l'identité (53) ainsi que d'autres équations comme

$$(\partial T)^{2\,2\,t-1\,0}_{1\,1\,1\quad t} = 0$$

par exemple, ne permettant pas non plus de conclure, ce dernier cas exige une étude plus approfondie.

## 6.2 Cas critique

**Remarque 6.4** Déterminons les monômes contribuant au degré $\begin{pmatrix} 2 & t-p & p \\ 1 & p & t-p+1 \end{pmatrix}$ $(t \geq 4,\ p \in \mathbb{N}^*,\ p \leq \frac{t+1}{2}\ (< t-1))$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$ | : | / | | | | |
| $IIa$ | : | $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\ell = 1$<br>$k = 2 \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} t-p+1 & p \\ p & t-p+1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} p+1 & t-p \\ t-p+1 & p \end{pmatrix}$ |
| | | $\begin{pmatrix} t-p \\ p \end{pmatrix}$ | $\ell \in \{1,\ldots,p\}$<br>$k = t-p \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} t-p-\ell \\ p-\ell \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} t-\ell & 2 \\ t-\ell+1 & 1 \end{pmatrix}$ | |
| $IIb$ | : | $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\ell = 1$<br>$k = 1 \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} t-p+1 & p \\ p & t-p+1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} p+1 & t-p \\ t-p+1 & p \end{pmatrix}$ |
| | | | $\ell = 2$<br>$k = 0$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} t-p & p \\ p-1 & t-p+1 \end{pmatrix}^{(+)}$ | $\begin{pmatrix} p & t-p \\ t-p & p \end{pmatrix}$ |
| | | $\begin{pmatrix} t-p \\ p \end{pmatrix}$ | $\ell \in \{1,\ldots,t-p\}$<br>$k = t-p-\ell \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} t-p-\ell \\ p-\ell \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} t-\ell & 2 \\ t-\ell+1 & 1 \end{pmatrix}$ | |

$(+)$ : monôme à omettre, si $p = 1$.

Soient $t \geq 4,\ p \in \mathbb{N}^* \cap \left[1, \frac{t+1}{2}\right[$ et $V_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p}$ un monôme de cochaîne invariant à coefficients constants. Vu ce qui précède,

$$\begin{aligned}
&\left[\partial(V_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p} + V_{t-p+1\ p}^{p\ \ t-p+1})\right]_{1\ p\ \ t-p+1}^{2\ t-p\ p} \\
&= -\frac{1}{2}\, X_{01}\, (0D_1)^2 V_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p}(1\ 2;\ X_1^p\ X_2^{t-p+1}) \\
&\quad + X_{10}\, (0D_1)(X_0 D_{X_1}) V_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p}(1\ 2;\ X_1^p\ X_2^{t-p+1}). \qquad (66)
\end{aligned}$$

Donc, si

$$\mathcal{V}_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p}(1\ 2;\ X_1^p\ X_2^{t-p+1}) = \beta_{t,p} X_{12}^p X_{21}^{t-p+1} \quad (\beta_{t,p} \in \mathbb{R}),$$

il vient

$$\begin{aligned}
&\left[\partial(\mathcal{V}_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p} + \mathcal{V}_{t-p+1\ p}^{p\ \ t-p+1})\right]_{1\ p\ \ t-p+1}^{2\ t-p\ p} \\
&= -\frac{1}{2}\, \beta_{t,p}(t-p+1)(t-p) X_{01} X_{12}^p X_{20}^2 X_{21}^{t-p-1} + \beta_{t,p} p(t-p+1) X_{02} X_{10} X_{12}^{p-1} X_{20} X_{21}^{t-p}
\end{aligned}$$

et si de plus, on évalue le monôme de bord sur des arguments indexés par $1, 2, 3$ et on choisit

$$\beta_{t,p} = \frac{(-1)^p 2}{t(t-1)}\, C_{t,1},$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left[\partial(\mathcal{V}_{p\ \ t-p+1}^{t-p+1\ p} + \mathcal{V}_{t-p+1\ p}^{p\ \ t-p+1})\right]_{1\ p\ \ t-p+1}^{2\ t-p\ p} \\
&= \frac{(-1)^{p+1}(t-p+1)(t-p)}{t(t-1)}\, C_{t,1} X_{12} X_{23}^p X_{31}^2 X_{32}^{t-p-1} \\
&\quad + \frac{(-1)^p\ 2p(t-p+1)}{t(t-1)}\, C_{t,1} X_{13} X_{21} X_{23}^{p-1} X_{31} X_{32}^{t-p}. \qquad (67)
\end{aligned}$$

**Lemme 6.5** *Soit*

$$T_{1\ 1\ \ t}^{2\ t-1\ 1} \quad (t \in \{5, 7, \ldots\})$$

*le monôme de référence. La relation*

$$(\partial T)_{2\ 1\ p\ \ t-p}^{0\ 2\ t-p\ p+1} = 0 \quad \left(p \in \left\{1, \ldots, \frac{t-1}{2}\right\}\right),$$

*s'écrit alors*

$$\begin{aligned}
&X_{01}\, (X_0 D_{X_1}) T_{2\ p\ \ t-p}^{1\ t-p\ p+1}(1\ 2\ 3;\ X_1^2\ X_2^p\ X_3^{t-p}) \\
&\quad + \frac{2}{p+1}\, X_{02}\, (X_0 D_{X_2}) T_{1\ p+1\ \ t-p}^{2\ t-p-1\ p+1}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^{p+1}\ X_3^{t-p}) \\
&\quad + \frac{2}{t-p+1}\, X_{03}\, (X_0 D_{X_3}) T_{1\ p\ \ t-p+1}^{2\ t-p\ p}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^p\ X_3^{t-p+1}) = 0.
\end{aligned}$$

En effet, les monômes contribuant à l'ordre considéré sont :

$$\begin{array}{lcl} I & : & / \\ IIa & : & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \ell=1 \\ k=0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t-p & p+1 \\ 2 & p & t-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-p-1 & 2 & p+1 \\ p+1 & 1 & t-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 2 & t-p \\ t-p+1 & 1 & p \end{pmatrix} \\ IIb & : & / \end{array}$$

■

**Preuve 6.6** (suite de 6.3) Rappelons qu'il s'agit d'établir que $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$ $(t \geq 4)$ est nul sous l'hypothèse de récurrence.

(2.2.2.3.1) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=1,\ c=1,\ t\in\{4,6,8,\ldots\}}$

Remarquons que si

$$\mathcal{V}^{t\,1}_{1\,t} = \frac{-2}{t(t-1)}\, C_{t,1}X_{12}X^t_{21},$$

où $C_{t,1}$ est le coefficient de $X_{12}X_{23}X^2_{31}X^{t-2}_{32}$ dans $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$ (cf. (64)), on a en vertu de (64), (65) et (67),

$$\begin{aligned} T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} &= C_{t,1}X_{12}X_{23}X^2_{31}X^{t-2}_{32} + \frac{2}{1-t}\, C_{t,1}X_{13}X_{21}X_{31}X^{t-1}_{32} \\ &= \left[\partial(\mathcal{V}^{t\,1}_{1\,t} + \mathcal{V}^{1\,t}_{t\,1})\right]^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}. \end{aligned}$$

Or, la soustraction de ce bord est (évidemment) impossible, son monôme minimum étant de degré $\begin{pmatrix} 0 & t & 2 \\ 2 & 1 & t-1 \end{pmatrix}$.

Il résulte de 4.5 (ii), qu'on annule le monôme $T^{0\,t\,2}_{2\,1\,t-1}$ en corrigeant le cocycle par $\partial V_1$ et $\partial V_2$, avec

$$\begin{aligned} V_1 &= V^{t\,1}_{1\,t} + V^{1\,t}_{t\,1},\ V^{t\,1}_{1\,t} = \alpha X_{11}X^{t-1}_{21}X_{22} + \beta X_{12}X^t_{21} \\ V_2 &= V^{t-1\,2}_{2\quad t-1} + V^{2\quad t-1}_{t-1\,2},\ V^{t-1\,2}_{2\quad t-1} = \cdots, \end{aligned}$$

le réel $\beta$ étant quelconque. On voit facilement qu'un choix convenable de $\beta$ permet de donner au coefficient de $X_{12}X_{23}X^2_{31}X^{t-2}_{32}$ dans $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$, une valeur arbitraire $B$. Pour cela, il suffit de prendre

$$\beta = \frac{2(A-B)}{t(t-1)},$$

où $A$ désigne la valeur du coefficient en question, avant l'addition des bords $\partial V_1$ et $\partial V_2$. En effet, d'un côté, (66) montre que

$$(\partial V_1)^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2\ X^t_3) = (B-A)X_{12}X_{23}X^2_{31}X^{t-2}_{32} + \cdots,$$

les termes représentés par $\cdots$ étant non semblables au premier; de l'autre, il découle de 6.4 que

$$(\partial V_2)^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2\ X^t_3) = 0.$$

Ainsi, si l'on note $T'$ le cocycle corrigé, on a

$$\begin{aligned} {T'}^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t} &= T^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t} + (\partial V_1)^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t} + (\partial V_2)^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t} \\ &= AX_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2} + \cdots + (B-A)X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2} + \cdots + 0. \end{aligned}$$

Ceci étant, nous choisissons évidemment $\beta$ de manière que le coefficient de $X_{12}X_{23}X_{31}^2$ $X_{32}^{t-2}$ dans $T^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t}$ soit nul après l'étude de $T^{0\;t\;2}_{2\;1\;t-1}$. Cependant, lors de l'examen des $T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i\right)$ supérieurs à $T^{0\;t\;2}_{2\;1\;t-1}$, on retranche/ajoute encore des bords, ce qui pourrait réintroduire un terme en $X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2}$. Vérifions que tel n'est pas le cas.

Soit donc $T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix},\ \sum_s = \sum_i\right)$ un monôme supérieur à $T^{0\;t\;2}_{2\;1\;t-1}$. Remarquons d'abord que $T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma}$ diffère de $T^{0\;2\;2}_{2\;1\;1}$ et de $T^{0\;3\;2}_{2\;1\;2}$ et que les degrés des 2-monômes contribuant à l'ordre $\begin{pmatrix} 2 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ sont (cf. 6.4) :

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & t-1 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-\ell & 2 \\ t-\ell+1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\ell \in \{1, \ldots, t-1\}).$$

Trois situations peuvent se présenter (cf. 4.5 (ii)) :

(i) $T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma} = T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;1\;\sigma} \quad (\mu, \nu, \sigma \geq 2)$

Alors

$$\left[\partial(V^{\mu\;\nu-1}_{1\;\sigma+1} + V^{\nu-1\;\mu}_{\sigma+1\;1})\right]^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t} = \left[\partial(V^{\mu-1\;\nu}_{2\;\;\;\;\sigma} + V^{\nu\;\mu-1}_{\sigma\;2})\right]^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t} = 0.$$

De fait,

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu-1 \\ 1 & \sigma+1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \nu-1 & \mu \\ \sigma+1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

- diffère de $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, sinon $T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma} = T^{0\;t\;2}_{2\;1\;t-1}$ $[t=1]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} 2 & t-1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, sinon $t=1$ $\left[T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma} = T^{0\;t-1\;3}_{2\;1\;\;\;t-1}\right]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$, sinon $t=2$ $\left[T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma} = T^{0\;t-1\;2}_{2\;1\;\;\;t-2}\right]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} t-\ell & 2 \\ t-\ell+1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\ell \in \{1, \ldots, t-1\})$, sinon $t=\ell$ $\left[T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma} = T^{0\;2\;t-\ell+1}_{2\;1\;t-\ell}\right]$

et les ordres

$$\begin{pmatrix} \mu-1 & \nu \\ 2 & \sigma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \nu & \mu-1 \\ \sigma & 2 \end{pmatrix}$$

diffèrent eux aussi (visiblement) des degrés précédents.

(ii) $T^{0\;\mu\;\nu}_{2\;\rho\;\sigma}$ est tel que $\mu \geq 1$ et $\rho \geq 2$, l'écart entre $\begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$ valant au moins 2.

Notons que les hypothèses sur $\begin{pmatrix} 0 & \mu & \nu \\ 2 & \rho & \sigma \end{pmatrix}$ impliquent $\nu \geq 3$ et prouvons que

$$\Big[\partial(V^{\mu-1\,\nu}_{\rho+1\,\sigma} + V^{\nu\,\mu-1}_{\sigma\,\rho+1})\Big]^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} = 0.$$

Il suffit de nouveau d'observer que

$$\begin{pmatrix} \mu-1 & \nu \\ \rho+1 & \sigma \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \nu & \mu-1 \\ \sigma & \rho+1 \end{pmatrix}\right]$$

- diffère de $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, sinon $\rho = 0$ $\Big[T^{0\,\mu\,\nu}_{2\rho\,\sigma} = T^{0\,2\quad t}_{2\,t-1\,1}$, qui n'est pas *bo*$\Big]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} 2 & t-1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, sinon $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma} = T^{0\,3\quad t-1}_{2\,t-1\,1}$ $[\rho = 0]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$, sinon $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma} = T^{0\,2\quad t-1}_{2\,t-2\,1}$ $[\rho = 0]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} t-\ell & 2 \\ t-\ell+1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\ell \in \{1,\ldots,t-1\})$, sinon $\nu = 2$ $[\rho = 0]$.

(iii) $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma}$ est de la forme $T^{0\,\sigma+1\,\sigma}_{2\,\sigma-1\,\sigma}$ $(\sigma \geq 3)$

On a encore

$$\left[\partial \sum_{i=1}^{\sigma-1} (\mathcal{V}^{2\sigma-i\;\;i}_{i\quad\;\; 2\sigma-i} + \mathcal{V}^{i\quad\;\;2\sigma-i}_{2\sigma-i\;i})\right]^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} = 0.$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 2\sigma-i & i \\ i & 2\sigma-i \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} i & 2\sigma-i \\ 2\sigma-i & i \end{pmatrix}\right] \quad (i \in \{1,\ldots,\sigma-1\})$$

- diffère de $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, sinon $t = 2\sigma-1$ [car $2\sigma - i \geq 4$] (c'est ici que joue l'hypothèse $t \in \{4,6,8,\ldots\}$; si $t \in \{5,7,9,\ldots\}$, on trouve

$$\begin{pmatrix} 2\sigma-1 & 1 \\ 1 & 2\sigma-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma} = T^{0\;\frac{t+1}{2}+1\;\frac{t+1}{2}}_{2\;\frac{t+1}{2}-1\;\frac{t+1}{2}},$$

ce qui n'est nullement contradictoire),

- diffère évidemment de $\begin{pmatrix} 2 & t-1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ [idem],

- diffère de $\begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$, car $2\sigma - i \geq 4$ $\Big[$sinon $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma} = T^{0\;\frac{t}{2}+1\;\frac{t}{2}}_{2\;\frac{t}{2}-1\;\frac{t}{2}}$, qui est inférieur à $T^{0\,t\,2}_{2\,1\,t-1}\Big]$,

- diffère de $\begin{pmatrix} t-\ell & 2 \\ t-\ell+1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\ell \in \{1,\ldots,t-1\})$, car $2\sigma - i \geq 4$ [idem].

Finalement, les corrections par des bords effectuées pour annuler les $T^{0\,\mu\,\nu}_{2\,\rho\,\sigma}$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \mu \\ \rho \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}, \sum_s = \sum_i\right)$ supérieurs à $T^{0\,t\,2}_{2\,1\,t-1}$, ne modifient pas $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$. Plus aucun bord n'étant retranché après l'étude de ces monômes à une colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (voir également la suite), le coefficient $C_{t,1}$ de $X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2}$ dans $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$ est nul et (64) et (65) permettent de conclure.

(2.2.2.3.2) $\boxed{r=1,\ a=2,\ s=1,\ c=1,\ t\in\{5,7,9,\dots\}}$

Rappelons que (52)

$$(\partial T)^{0\,2\,t-1\,2}_{2\,1\,1\quad t-1}=0$$

(monôme de référence : $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$) a fourni les résultats

$$\begin{aligned} T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} &= C_{t,1}X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2}+\frac{2}{1-t}\,C_{t,1}X_{13}X_{21}X_{31}X_{32}^{t-1}\\ ( &= \Big[\partial(\mathcal{V}^{t\,1}_{1\,t}+\mathcal{V}^{1\,t}_{t\,1})\Big]^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t},\ \mathcal{V}^{t\,1}_{1\,t}=\frac{-2}{t(t-1)}\,C_{t,1}X_{12}X_{21}^t\quad \text{(cf. (67)))}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &T^{2\,t-2\,2}_{1\,2\quad t-1}\\ &= v_2^1X_{12}X_{21}^2X_{32}^{t-3}X_{33}^2-\frac{t-2}{t}\,C_{t,1}\,X_{12}X_{23}^2X_{31}^2X_{32}^{t-3}+\frac{4}{t}\,C_{t,1}X_{13}X_{21}X_{23}X_{31}X_{32}^{t-2}\\ (&= v_2^1X_{12}X_{21}^2X_{32}^{t-3}X_{33}^2+\Big[\partial(\mathcal{V}^{t-1\,2}_{2\quad t-1}+\mathcal{V}^{2\quad t-1}_{t-1\,2})\Big]^{2\,t-2\,2}_{1\,2\quad t-1},\\ &\quad \mathcal{V}^{t-1\,2}_{2\quad t-1}=\frac{2}{t(t-1)}\,C_{t,1}X_{12}^2X_{21}^{t-1}\quad \text{(cf. (67))).}\end{aligned}$$

Il est clair que la méthode de (2.2.2.3.1) n'est pas valable ici, le terme en $X_{12}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2}$ dans $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$ se réintroduisant ($t$ impair !) lors de l'étude de

$$T^{0\ \frac{t+1}{2}+1\ \frac{t+1}{2}}_{2\ \frac{t+1}{2}-1\ \frac{t+1}{2}}.$$

Cependant, le lemme 6.5 permet de constater que le coefficient de $X_{03}^2X_{12}X_{21}^2X_{32}^{t-3}X_{33}$ dans

$$(\partial T)^{0\,2\,t-2\,3}_{2\,1\,2\quad t-2}=0$$

(monôme de référence : $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$) vaut $\frac{4}{t-1}\,v_2^1$, de sorte que $v_2^1=0$.

Considérons l'énoncé $E(p)$ $\Big(p\in\Big\{1,\dots,\frac{t+1}{2}\Big\}$ ($t$ impair !)$\Big)$ suivant (valable pour $p=1$ et $p=2$) :

$$\begin{aligned} T^{2\,t-p\,p}_{1\,p\quad t-p+1} &= \frac{(-1)^{p+1}(t-p+1)(t-p)}{t(t-1)}\,C_{t,1}X_{12}X_{23}^pX_{31}^2X_{32}^{t-p-1}\\ &\quad+\frac{(-1)^p\,2p(t-p+1)}{t(t-1)}\,C_{t,1}X_{13}X_{21}X_{23}^{p-1}X_{31}X_{32}^{t-p}\\ ( &= \Big[\partial(\mathcal{V}^{t-p+1\,p}_{p\quad t-p+1}+\mathcal{V}^{p\quad t-p+1}_{t-p+1\,p})\Big]^{2\,t-p\,p}_{1\,p\quad t-p+1},\\ &\quad \mathcal{V}^{t-p+1\,p}_{p\quad t-p+1}=\frac{(-1)^p\,2}{t(t-1)}\,C_{t,1}X_{12}^pX_{21}^{t-p+1},\ \text{ si }\ p\in\Big\{1,\dots,\frac{t-1}{2}\Big\}).\end{aligned}$$

Nous établissons à présent l'implication

$$E(p) \Rightarrow E(p+1), \quad \forall p \in \left\{2, \ldots, \frac{t-1}{2}\right\}.$$

Utilisons l'équation de 6.5 et posons

$$T_{1\;p+1\;\;t-p}^{2\;t-p-1\;p+1} = X_{21}^2 \sum_{i=0}^{p-1} X_{22}^i X_{23}^{p-i-1} V_i^1 + X_{21} \sum_{j=0}^{p} X_{22}^j X_{23}^{p-j} V_j^2 + \sum_{k=0}^{p+1} X_{22}^k X_{23}^{p-k+1} V_k^3,$$

où le terme $k = p+1$ est à négliger, si $p = \frac{t-1}{2}$ et où les $V_s^r$ sont indépendants de $X_2$. Le terme $t2$ de l'équation considérée s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\frac{2}{p+1}\, X_{02} & \Bigg( 2X_{01}X_{21} \sum_i X_{22}^i X_{23}^{p-i-1} V_i^1 + X_{02}X_{21}^2 \sum_i i X_{22}^{i-1} X_{23}^{p-i-1} V_i^1 \\
+ & \quad X_{03}X_{21}^2 \sum_i (p-i-1) X_{22}^i X_{23}^{p-i-2} V_i^1 \\
+ & \quad X_{01} \sum_j X_{22}^j X_{23}^{p-j} V_j^2 + X_{02}X_{21} \sum_j j X_{22}^{j-1} X_{23}^{p-j} V_j^2 \\
+ & \quad X_{03}X_{21} \sum_j (p-j) X_{22}^j X_{03}^{p-j-1} V_j^2 \\
+ & \quad X_{02} \sum_k k X_{22}^{k-1} X_{23}^{p-k+1} V_k^3 + X_{03} \sum_k (p-k+1) X_{22}^k X_{23}^{p-k} V_k^3 \Bigg).
\end{aligned}$$

Comme les termes en $X_{02}^2$ ne sont pas compensables, on a

$$V_i^1 = V_j^2 = V_k^3 = 0, \quad \forall i, j, k \neq 0.$$

Ainsi,

$$T_{1\;p+1\;\;t-p}^{2\;t-p-1\;p+1} = X_{21}^2 X_{23}^{p-1} V_0^1 + X_{21} X_{23}^p V_0^2 + X_{23}^{p+1} V_0^3,$$

avec

$$\begin{aligned}
V_0^1 &= v_{0,1}^1 X_{12} X_{32}^{t-p-2} X_{33}^2 + v_{0,2}^1 X_{13} X_{32}^{t-p-1} X_{33}, \\
V_0^2 &= v_{0,1}^2 X_{11} X_{32}^{t-p-1} X_{33} + v_{0,2}^2 X_{12} X_{31} X_{32}^{t-p-2} X_{33} + v_{0,3}^2 X_{13} X_{31} X_{32}^{t-p-1} \quad \text{et} \\
V_0^3 &= v_{0,1}^3 X_{11} X_{31} X_{32}^{t-p-1} + v_{0,2}^3 X_{12} X_{31}^2 X_{32}^{t-p-2}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Cela étant, $t2$ devient

$$\begin{aligned}
\frac{2}{p+1}\, X_{02} & \left( 2X_{01}X_{21}X_{23}^{p-1}V_0^1 + (p-1)X_{03}X_{21}^2X_{23}^{p-2}V_0^1 \right. \\
& \left. + X_{01}X_{23}^pV_0^2 + pX_{03}X_{21}X_{23}^{p-1}V_0^2 + (p+1)X_{03}X_{23}^pV_0^3 \right)
\end{aligned}$$

et, vu que $E(p)$ est supposé exact, $t3$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{2}{t-p+1}\, X_{03} & \left[ \not{C}_{t,p}^{(1)}\, X_{12}X_{23}^p(2X_{01}X_{31}X_{32}^{t-p-1} + (t-p-1)X_{02}X_{31}^2X_{32}^{t-p-2}) \right. \\
& \left. + \not{C}_{t,p}^{(2)}\, X_{13}X_{21}X_{23}^{p-1}(X_{01}X_{32}^{t-p} + (t-p)X_{02}X_{31}X_{32}^{t-p-1}) \right],
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\not{\mathcal{C}}^{(1)}_{t,p} = \frac{(-1)^{p+1}(t-p+1)(t-p)}{t(t-1)}\ C_{t,1} \quad \text{et} \quad \not{\mathcal{C}}^{(2)}_{t,p} = \frac{(-1)^{p}\ 2p(t-p+1)}{t(t-1)}\ C_{t,1}. \tag{69}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{12}X_{21}^2X_{23}^{p-2}X_{32}^{t-p-2}X_{33}^2$ :

$$\frac{2}{p+1}\ (p-1)v^1_{0,1} = 0 : v^1_{0,1} = 0. \tag{70}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{13}X_{21}^2X_{23}^{p-2}X_{32}^{t-p-1}X_{33}$ :

$$\frac{2}{p+1}\ (p-1)v^1_{0,2} = 0 : v^1_{0,2} = 0. \tag{71}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{11}X_{21}X_{23}^{p-1}X_{32}^{t-p-1}X_{33}$ :

$$\frac{2}{p+1}\ p\ v^2_{0,1} = 0 : v^2_{0,1} = 0. \tag{72}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{12}X_{21}X_{23}^{p-1}X_{31}X_{32}^{t-p-2}X_{33}$ :

$$\frac{2}{p+1}\ p\ v^2_{0,2} = 0 : v^2_{0,2} = 0. \tag{73}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{13}X_{21}X_{23}^{p-1}X_{31}X_{32}^{t-p-1}$ :

$$\frac{2}{p+1}\ p\ v^2_{0,3} + \frac{2}{t-p+1}\ (t-p)\not{\mathcal{C}}^{(2)}_{t,p} = 0. \tag{74}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{11}X_{23}^{p}X_{31}X_{32}^{t-p-1}$ :

$$2\ v^3_{0,1} = 0 : v^3_{0,1} = 0. \tag{75}$$

Coefficient de $X_{02}X_{03}X_{12}X_{23}^{p}X_{31}^2X_{32}^{t-p-2}$ :

$$2\ v^3_{0,2} + \frac{2}{t-p+1}\ (t-p-1)\not{\mathcal{C}}^{(1)}_{t,p} = 0. \tag{76}$$

Notons que (69), (74) et (76) permettent d'écrire

$$v^2_{0,3} = \frac{(-1)^{p+1}\ 2(p+1)(t-p)}{t(t-1)}\ C_{t,1} \quad \text{et} \quad v^3_{0,2} = \frac{(-1)^{p+2}(t-p)(t-p-1)}{t(t-1)}\ C_{t,1}. \tag{77}$$

Il résulte alors de (68), (70), (71), (72), (73), (75) et (77) qu'on a bien $E(p+1)$ (l'équation de 6.5 ne renferme pas d'autre information intéressante).

L'énoncé $E\left(\frac{t+1}{2}\right)$ étant ainsi valable,

$$T^{2\ \frac{t-1}{2}\ \frac{t+1}{2}}_{1\ \frac{t+1}{2}\ \frac{t+1}{2}} = \mathcal{C}_{t,1}X_{12}X_{23}^{\frac{t+1}{2}}X_{31}^2X_{32}^{\frac{t-3}{2}} + \mathcal{C}_{t,2}X_{13}X_{21}X_{23}^{\frac{t-1}{2}}X_{31}X_{32}^{\frac{t-1}{2}}, \tag{78}$$

avec

$$\mathcal{C}_{t,1} = \frac{(-1)^{\frac{t+3}{2}}(t+1)}{4t}\, C_{t,1} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{t,2} = \frac{(-1)^{\frac{t+1}{2}}(t+1)^2}{2t(t-1)}\, C_{t,1}. \tag{79}$$

Examinons enfin l'identité

$$(\partial T)^{2\;2\;\frac{t-1}{2}\;\frac{t-1}{2}}_{1\;1\;\frac{t+1}{2}\;\frac{t+1}{2}} = 0. \tag{80}$$

Monômes contribuant (monôme de référence : $T^{2\;t-1\;1}_{1\;1\;\;\;t}$) :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I$ : | / | | | | | |
| $IIa$ : | $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\ell = 1$, $k = 2 \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} \\ 1 & \frac{t+1}{2} & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ |
| | $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\ell = 1$, $k = 2 \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | |
| | $\begin{pmatrix} \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | | | $\begin{pmatrix} . & 2 & 2 \\ . & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ | | |
| $IIb$ : | $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\ell = 1$, $k = 1 \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} \\ 1 & \frac{t+1}{2} & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ |
| | | $\ell = 2$, $k = 0$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ | / | 0 | 0 |
| | $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\ell = 1$, $k = 1 \leq b_0$ | $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} & 2 & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & 1 & \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | |
| | | $\ell = 2$, $k = 0$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ | 0 | 0 | |
| | $\begin{pmatrix} \frac{t-1}{2} \\ \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$ | | | $\begin{pmatrix} . & 2 & 2 \\ . & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ | | |

Si l'on pose $T^1 = T^{3\;\frac{t-1}{2}\;\frac{t-1}{2}}_{1\;\frac{t+1}{2}\;\frac{t+1}{2}}$ et $T^2 = T^{2\;\frac{t-1}{2}\;\frac{t+1}{2}}_{1\;\frac{t+1}{2}\;\frac{t+1}{2}}$, (80) s'écrit :

$$-\tfrac{1}{2}\; X_{01}\; (0D_1)^2\; T^1 \left(1\;2\;3;\; X_1\; X_2^{\frac{t+1}{2}}\; X_3^{\frac{t+1}{2}}\right) \quad (\ell 1)$$

$$+\tfrac{1}{2}\; X_{02}\; (0D_2)^2\; T^2 \left(1\;3\;2;\; X_1\; X_3^{\frac{t+1}{2}}\; X_2^{\frac{t+1}{2}}\right) \quad (\ell 2)$$

$$-\tfrac{1}{2}\; X_{03}\; (0D_3)^2\; T^2 \left(1\;2\;3;\; X_1\; X_2^{\frac{t+1}{2}}\; X_3^{\frac{t+1}{2}}\right) \quad (\ell 3)$$

$$-\tfrac{1}{2}\; X_{12}\; (1D_2)^2\; T^2 \left(0\;3\;2;\; X_0\; X_3^{\frac{t+1}{2}}\; X_2^{\frac{t+1}{2}}\right) \quad (\ell 4)$$

$$+\tfrac{1}{2}\; X_{13}\; (1D_3)^2\; T^2 \left(0\;2\;3;\; X_0\; X_2^{\frac{t+1}{2}}\; X_3^{\frac{t+1}{2}}\right) \quad (\ell 5)$$

$$+X_{10}\ (0D_1)(X_0D_{X_1})\ T^1\left(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^{\frac{t+1}{2}}\ X_3^{\frac{t+1}{2}}\right)\quad(\ell 6)$$

$$-X_{20}\ (0D_2)(X_0D_{X_2})\ T^2\left(1\ 3\ 2;\ X_1\ X_3^{\frac{t+1}{2}}\ X_2^{\frac{t+1}{2}}\right)\quad(\ell 7)$$

$$+X_{30}\ (0D_3)(X_0D_{X_3})\ T^2\left(1\ 2\ 3;\ X_1\ X_2^{\frac{t+1}{2}}\ X_3^{\frac{t+1}{2}}\right)\quad(\ell 8)$$

$$+X_{21}\ (1D_2)(X_1D_{X_2})\ T^2\left(0\ 3\ 2;\ X_0\ X_3^{\frac{t+1}{2}}\ X_2^{\frac{t+1}{2}}\right)\quad(\ell 9)$$

$$-X_{31}\ (1D_3)(X_1D_{X_3})\ T^2\left(0\ 2\ 3;\ X_0\ X_2^{\frac{t+1}{2}}\ X_3^{\frac{t+1}{2}}\right)=0.\quad(\ell 10)\tag{81}$$

Donnons la forme explicite de $\ell 3$ et $\ell 8$. Vu (78), il vient

$$-\frac{1}{2}\ X_{03}\left(\mathcal{C}_{t,1}\ \frac{t+1}{2}\ \frac{t-1}{2}\ X_{12}X_{20}^2X_{23}^{\frac{t-3}{2}}X_{31}^2X_{32}^{\frac{t-3}{2}}\right.$$
$$\left.+\ \mathcal{C}_{t,2}X_{21}X_{31}X_{32}^{\frac{t-1}{2}}\left[(t-1)X_{10}X_{20}X_{23}^{\frac{t-3}{2}}+\frac{t-1}{2}\ \frac{t-3}{2}\ X_{13}X_{20}^2X_{23}^{\frac{t-5}{2}}\right]\right)\tag{82}$$

resp.

$$X_{30}\left(\mathcal{C}_{t,1}\frac{t+1}{2}\ X_{12}X_{20}X_{23}^{\frac{t-1}{2}}\left[2X_{01}X_{31}X_{32}^{\frac{t-3}{2}}+\frac{t-3}{2}\ X_{02}X_{31}^2X_{32}^{\frac{t-5}{2}}\right]\right.$$
$$+\ \mathcal{C}_{t,2}X_{21}\left[X_{10}X_{23}^{\frac{t-1}{2}}\left[X_{01}X_{32}^{\frac{t-1}{2}}+\frac{t-1}{2}\ X_{02}X_{31}X_{32}^{\frac{t-3}{2}}\right]\right.$$
$$\left.\left.+\ \frac{t-1}{2}\ X_{13}X_{20}X_{23}^{\frac{t-3}{2}}\left[X_{01}X_{32}^{\frac{t-1}{2}}+\frac{t-1}{2}\ X_{02}X_{31}X_{32}^{\frac{t-3}{2}}\right]\right]\right).\tag{83}$$

Coefficient de $X_{03}X_{13}X_{20}^2X_{21}X_{23}^{\frac{t-5}{2}}X_{31}X_{32}^{\frac{t-1}{2}}$ :

$$(*)\qquad -\frac{1}{2}\ \mathcal{C}_{t,2}\ \frac{t-1}{2}\ \frac{t-3}{2}+\mathcal{C}_{t,1}\ \frac{t+1}{2}\ \frac{t-3}{2}=0\tag{84}$$

($\ell 5$ ($\ell 10$) : coefficient de $-X_{03}X_{13}X_{20}X_{21}^2X_{23}^{\frac{t-5}{2}}X_{30}X_{32}^{\frac{t-1}{2}}$ dans $\ell 3$ ($\ell 8$); $\ell 7$ : coefficient de $-X_{02}X_{12}X_{21}X_{23}^{\frac{t-1}{2}}X_{30}^2X_{31}X_{32}^{\frac{t-5}{2}}$ dans $\ell 8$; $\ell 9$ : coefficient de $X_{02}X_{12}X_{20}X_{23}^{\frac{t-1}{2}}X_{30}X_{31}^2X_{32}^{\frac{t-5}{2}}$ dans $\ell 8$).

Comme (79) donne

$$\mathcal{C}_{t,1}=\frac{1-t}{2(1+t)}\ \mathcal{C}_{t,2},$$

l'égalité (84) devient

$$\mathcal{C}_{t,2}=0,$$

de sorte que (79) fournit finalement

$$C_{t,1}=0.$$

■

**Commentaire 6.7** L'apparition des termes en $k$ et en $k'$ (cf. 2.1), la nécessité de soustraire le bord de la chaîne $\mathcal{V}_t$ (cf. 4.2), lors de l'étude de $T^{0\,t+1\,t}_{2\,t-1\,t}$ $(t \geq 3)$ et l'annulation du monôme critique $T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t}$ $(t \geq 4)$ méritent quelques remarques.

(i) On vérifie que les termes en $k$ i.e. les termes de la cochaîne $\mathcal{B}$ (cf. preuve de 2.1) - qui est cocycle aux ordres $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & r & s & t \end{pmatrix}$ - font partie des termes du bord formel de la "cochaîne symétrique" $\mathcal{V}^{1\,1}_{1\,1} = kX_{12}X_{21}$. Ce fait suggère évidemment l'existence d'un cocycle, mais on peut montrer que $\partial\,[\mathcal{A}(\partial\mathcal{V}^{1\,1}_{1\,1})]$ (où $\mathcal{A}$ est l'opérateur d'antisymétrisation) n'est pas nul.

De manière analogue, les termes en $k'$ sont les monômes de degré $\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ $(t \in \{2, 3, 4, \ldots\})$ du bord de la "cochaîne" $\mathcal{V}'^{1\,1}_{1\,1} = k'X_{11}X_{22}$.

(ii) L'application de la méthode générale, utilisée ci-dessus pour étudier un 3-cocycle arbitraire, au cocycle

$$T = \partial\mathcal{W}_{t,1}, \;\; \text{où } \mathcal{W}_{t,1} = \mathcal{A}W^{2t-1\,1}_{1\quad\;\; 2t-1} = \mathcal{A}(c\, X_{12}\, X_{21}^{2t-1}) \quad (t \geq 3,\ c \in \mathbb{R}),$$

rend plus claire l'intervention de $\mathcal{V}_t$. Dans la suite, nous nous servirons des résultats de la preuve de 4.2, sans nous y référer explicitement. Le monôme minimum de $T$ étant

$$T^{0\;2t-1\;2}_{2\;1\quad\;\; 2t-2} = -2cX_{01}X_{02}X_{12}X_{21}^{2t-2},$$

il est du type (2.2) (cf. preuve de 4.4) et on a (avec les notations de cette démonstration) $\gamma = \delta = \alpha = 0$ et $\beta + \varepsilon = -c$. Ici, il s'impose évidemment de choisir $\beta = -c$ et $\varepsilon = 0$ i.e. de poser $T' = T + \partial\mathcal{A}(-c\; X_{12}\; X_{21}^{2t-1}) = \partial\mathcal{W}_{t,1} - \partial\mathcal{W}_{t,1} = 0$. Cependant, si l'on prend $\beta \neq -c$ et $\varepsilon = -c - \beta \neq 0$, on obtient (après correction) le cocycle

$$T = \partial\sum_{i=1}^{2}\mathcal{V}_{t,i}, \;\; \text{avec } \mathcal{V}_{t,i} = \mathcal{A}((-1)^{i+1}(c+\beta)X_{12}^{i}X_{21}^{2t-i}).$$

Un cocycle $T$ vérifiant l'énoncé $\mathcal{E}(k)$ $(k \in \{2, \ldots, t-2\})$,

$$T = \partial\sum_{i=1}^{k}\mathcal{V}_{t,i}, \;\; \text{où } \mathcal{V}_{t,i} = \mathcal{A}((-1)^{i+1}(c+\beta)\; X_{12}^{i}\; X_{21}^{2t-i}),$$

admettant

$$\begin{aligned} T^{0\;2t-k\;k+1}_{2\;k\quad\;\; 2t-k-1} &= (-1)^{k+2}\; 2(c+\beta)X_{01}X_{02}X_{12}^{k}X_{21}^{2t-k-1} \\ &= X_{01}\; (X_0 D_{X_1}) \left[(-1)^{k+2}\; \frac{2(c+\beta)}{k+1}\; X_{12}^{k+1}X_{21}^{2t-k-1}\right] \end{aligned}$$

comme plus petit monôme, il découle de (22) que sa correction conduit à un cocycle vérifiant $\mathcal{E}(k+1)$. Finalement, on trouve donc un $T$ satisfaisant à $\mathcal{E}(t-1)$. Son monôme minimum étant donné par

$$T^{0\;t+1\;t}_{2\;t-1\;t} = (-1)^{t+1}\; 2(c+\beta)X_{01}X_{02}X_{12}^{t-1}X_{21}^{t},$$

il est du genre (3.3) (cf. preuve de 4.4) et on pose $T' = T - \partial\mathcal{V}_t$, avec $\beta_t = c + \beta$, de sorte que

$$T' = \partial\sum_{i=1}^{t-1}\mathcal{A}((-1)^{i+1}(c+\beta)X_{12}^{i}X_{21}^{2t-i}) - \partial\sum_{i=1}^{t-1}\mathcal{A}((-1)^{i+1}(c+\beta)X_{12}^{i}X_{21}^{2t-i}) = 0.$$

C'est donc la correction "erronée" du cocycle lors de l'étude de $T_{2\,1\phantom{2t-1}2t-1}^{0\,2t-1\,2}$, qui est à l'origine de l'apparition de la chaîne $\mathcal{V}_t$ et la soustraction de $\partial\mathcal{V}_t$ n'est rien d'autre que la correction des "erreurs de correction" successives.

(iii) Le dernier monôme critique $T_{1\,1\phantom{t-1}t}^{2\,t-1\,1}$ $(t \geq 4)$ disparaît différemment, selon que $t$ est pair ou impair.

Pour $t \in \{5, 7, 9, \ldots\}$, on obtient une "chaîne de survivants"

$$T_{1\,p\phantom{t-p}t-p+1}^{2\,t-p\,p} \quad \left(p \in \left\{1, \ldots, \frac{t+1}{2}\right\}\right)$$

et l'annulation de son dernier maillon entraîne la nullité de la chaîne entière : le "système d'équations" n'est donc pas exactement triangulaire.

Si $t \in \{4, 6, 8, \ldots\}$, on annule $T_{1\,1\phantom{t-1}t}^{2\,t-1\,1}$ grâce à un choix convenable du coefficient $\beta$ dans $\mathcal{V}_{1\,t}^{t\,1} = \beta X_{12}X_{21}^{t}$, lors de l'étude de $T_{2\,1\,t-1}^{0\,t\,2}$.

Revenons à présent à l'"anomalie" révélée en 4.5. Vu ce qui précède, on corrige donc le cocycle par

$$\partial\mathcal{A}\mathcal{V}_{1\,t}^{t\,1} = \partial\mathcal{A}(\beta X_{12}X_{21}^{t}) \quad (t \in \{4, 6, 8, \ldots\}),$$

avec un coefficient $\beta$ bien déterminé. De plus, en retranchant $\partial\mathcal{V}_t$ $(t \geq 3)$, on corrige en particulier par

$$\partial\mathcal{A}\mathcal{V}_{1\phantom{2t-1}2t-1}^{2t-1\,1} = \partial\mathcal{A}(\beta X_{12}X_{21}^{2t-1}) \quad (2t-1 \in \{5, 7, 9, \ldots\}),$$

où $\beta$ est encore bien déterminé. Quant à

$$\partial\mathcal{A}\mathcal{V}_{1\,3}^{3\,1} = \partial\mathcal{A}(\beta X_{12}X_{21}^{3}),$$

il est soustrait au cours de l'étude de $T_{2\,1\,2}^{0\,3\,2}$ (cas limite "$t = 2$", où les monômes $T_{2\,1\phantom{2t-1}2t-2}^{0\,2t-1\,2}$ (correction par $\partial\mathcal{A}(\alpha X_{11}X_{21}^{2t-2}X_{22})$) et $T_{2\,t-1\,t}^{0\,t+1\,t}$ (correction par $\partial\mathcal{A}(\beta X_{12}X_{21}^{2t-1})$) coïncident). Le bord

$$\partial\mathcal{A}\mathcal{V}_{1\,2}^{2\,1} = \partial\mathcal{A}(\beta X_{12}X_{21}^{2})$$

enfin, n'a pas été retranché (avec un coefficient bien déterminé, cf. preuve de 3.2) et l'inventaire des bords enlevés montre qu'il en est de même uniquement des bords

$$\partial\mathcal{A}V_{2\,t}^{0\,t+2} = \partial\mathcal{A}(\gamma X_{12}^{2}X_{22}^{t}) \quad (t \geq 1).$$

Ce fait n'a cependant rien d'étonnant, $\mathcal{V}_{1\,2}^{2\,1}$ et les $V_{2\,t}^{0\,t+2}$ $(t \geq 1)$ étant les "têtes" des bords $\partial W_1^1 = \partial(\beta X_{11})$ resp. $\partial W_{t+1}^{t+1} = \partial\left(-\frac{\gamma}{2}\, X_{11}^{t+1}\right)$ [5, Lemme V.2.1].

# 7 Affinage de la preuve en dimension $m = 3$

Si $m = 3$, cinq parties de notre démonstration exigent un raffinement : cf. (31), (37), (46), (53) et (80).

Toutes ces équations étant du type $P = (\partial T)^{2\,\alpha\,\beta\,\gamma}_{1\,\rho\,\sigma\,\tau} = 0$, les hypothèses de [5, IV.4.2 (ii)] sont satisfaites par exemple avec $X_{ji} = X_{00}$. Ainsi,

$$\nu A = \left(\begin{array}{c|c} A' & A_{.0} \\ \hline A_{0.} & A_{00} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{10} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{20} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{30} \\ \hline A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{00} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^4_4$$

et on a l'identité polynomiale

$$Q = (\det A')P_0 - (\det \nu A - A_{00} \det A')\hat{P}_1 \equiv 0,$$

où $P_0$ ($\hat{P}_1$) est la somme des termes de $P$ qui sont de degré 0 (1) en $A_{00}$ (dans laquelle on a substitué 1 à $A_{00}$) et où $\det \nu A - A_{00} \det A'$ est le déterminant de $\nu A$ privé de ses termes en $A_{00}$. Nous nous référerons aux termes de $Q$ obtenus à partir de $P_0$ ($\hat{P}_1$), en utilisant l'appellation "termes de type 1 (2)".

## 7.1 Equation (31)

Les lignes $\ell 3$ et $\ell 9$ de cette équation $P = (\partial T)^{2\,2\,1\,1}_{1\,1\,2\,2} = 0$ s'écrivent

$$-X_{03}(v_1^1 X_{12} X_{21}^2 X_{30}^2 + v_3^3 X_{10} X_{20} X_{21} X_{31} X_{32} + v_1^5 X_{11} X_{20}^2 X_{31} X_{32} + v_2^5 X_{12} X_{20}^2 X_{31}^2) \quad (85)$$

resp.

$$\begin{aligned} &+X_{30}(2v_1^1 X_{00} X_{12} X_{21}^2 X_{33} + 2v_1^1 X_{03} X_{12} X_{21}^2 X_{30} \\ &\quad +v_3^3 X_{01} X_{10} X_{21} X_{23} X_{32} + v_3^3 X_{01} X_{13} X_{20} X_{21} X_{32} + v_3^3 X_{02} X_{10} X_{21} X_{23} X_{31} \\ &\quad +v_3^3 X_{01} X_{10} X_{21} X_{23} X_{32} + 2v_1^5 X_{01} X_{11} X_{20} X_{23} X_{32} + 2v_1^5 X_{02} X_{11} X_{20} X_{23} X_{31} \\ &\quad +4v_2^5 X_{01} X_{12} X_{20} X_{23} X_{31}). \end{aligned} \quad (86)$$

Le terme $-2v_1^1 A_{00} A_{13} A_{20} A_{22} A_{31}^2$ (cf. (33)) fait partie de la somme $P_1$ et ainsi

$$-2v_1^1 A_{03} A_{11} A_{13} A_{20} A_{22}^2 A_{30} A_{31}^2 \quad (87)$$

est un terme de $Q$. Montrons que ce terme n'est pas compensé.

Compensations de type 1

Soit un terme $t''$ de $P$. S'il engendre une compensation de type 1, il existe un terme $t'$ de $\det A'$, tel que $t't''$ soit semblable à (87). Etant donné que $t'$ est du genre $\mathrm{sign}(\nu) A_{1\nu_1} A_{2\nu_2} A_{3\nu_3}$, où $\nu$ est une permutation de $1, 2, 3$, on a nécessairement

$$t' = -A_{13} A_{22} A_{31} \quad \text{et} \quad t'' = -C A_{03} A_{11} A_{20} A_{22} A_{30} A_{31}.$$

Il s'ensuit que les seules lignes de (32) susceptibles de produire une compensation de type 1, sont $\ell 3$, $\ell 8$, $\ell 9$ et $\ell 13$. Vu (85) et (86), $\ell 3$ et $\ell 9$ ne fournissent pas de terme de type 1, semblable à (87). Comme $\ell 8 = -(\ell 9)(0\ 1\ 3\ 2)$ et $\ell 13 = -(\ell 9)(1\ 0\ 2\ 3)$ et comme $\ell 9$ ne contient pas de terme, ni en $A_{02}A_{11}A_{20}A_{21}A_{30}A_{33}$, ni en $A_{00}A_{13}A_{21}A_{22}A_{30}A_{31}$, $\ell 8$ et $\ell 13$ n'engendrent pas non plus de compensation de type 1.

Compensations de type 2

Si un terme $t''$ de $P$ donne une compensation de type 2, il existe un terme $t'$ de $-\det \nu A$, indépendant de $A_{00}$, tel que $t'\widehat{t''}$ ($\widehat{t''}$ désigne le terme $t''$ dans lequel on a supprimé $A_{00}$) soit semblable à (87). Le degré de $\widehat{t''}$ étant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, on a

$$t' = A_{03}A_{11}A_{22}A_{30} \quad \text{et} \quad \widehat{t''} = CA_{13}A_{20}A_{22}A_{31}^2,$$

de sorte que

$$t'' = CA_{00}A_{13}A_{20}A_{22}A_{31}^2.$$

Or, le terme de $P$ en $A_{00}A_{13}A_{20}A_{22}A_{31}^2$ a le coefficient $-2v_1^1$ (cf. (33)) : il engendre (87) et 17 autres termes, non semblables.

Finalement, (87) n'est pas compensable et

$$v_1^1 = 0. \tag{88}$$

L'expression $-2k'A_{02}A_{13}A_{20}^2A_{31}^2$ étant un terme de $P_0$,

$$-2k'A_{02}A_{11}A_{13}A_{20}^2A_{22}A_{31}^2A_{33} \tag{89}$$

est un terme de type 1 de $Q$.

Compensations de type 1

Un terme du premier type, semblable à (89) est un produit t't", avec

$$t' = A_{11}A_{22}A_{33} \quad \text{et} \quad t'' = CA_{02}A_{13}A_{20}^2A_{31}^2$$

ou

$$t' = -A_{13}A_{22}A_{31} \quad \text{et} \quad t'' = -CA_{02}A_{11}A_{20}^2A_{31}A_{33}.$$

Or, le terme de $P$ en $A_{02}A_{13}A_{20}^2A_{31}^2$ est de coefficient $-2k'$ (cf. (34)) et engendre (89) et 5 termes non semblables. Quant aux termes de $P$ en $A_{02}A_{11}A_{20}^2A_{31}A_{33}$, remarquons que les lignes $\ell 2$, $\ell 8$ et $\ell 13$ de (32) sont les seules à examiner. Vu que $\ell 2 = -(\ell 3)(0\ 1\ 3\ 2)$ ($\ell 8 = -(\ell 9)(0\ 1\ 3\ 2)$, $\ell 13 = -(\ell 9)(1\ 0\ 2\ 3)$) et que $\ell 3$ ($\ell 9, \ell 9$) ne contient pas de terme en $A_{03}A_{11}A_{21}A_{22}A_{30}^2$ ($A_{03}A_{11}A_{21}A_{22}A_{30}^2$, $A_{00}A_{12}A_{21}^2A_{30}A_{33}$) (cf. (85), (86) et (88)), $P$ ne renferme pas de terme en $A_{02}A_{11}A_{20}^2A_{31}A_{33}$.

Compensations de type 2

Le degré de $\hat{P}_1$ étant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve ici

$$t' = A_{02}A_{11}A_{20}A_{33} \quad \text{et} \quad \widehat{t''} = CA_{13}A_{20}A_{22}A_{31}^2$$

ou

$$t' = -A_{02}A_{13}A_{20}A_{31} \quad \text{et} \quad \widehat{t''} = -CA_{11}A_{20}A_{22}A_{31}A_{33}.$$

Ainsi, les termes de $P$ qui ne sont ni en $A_{00}A_{13}A_{20}A_{22}A_{31}^2$, ni en $A_{00}A_{11}A_{20}A_{22}A_{31}A_{33}$, ne produisent pas de compensation du deuxième type. Il découle de (33) et (88) que le terme de $P$ en $A_{00}A_{13}A_{20}A_{22}A_{31}^2$ est nul. En ce qui concerne les termes de $P$ en $A_{00}A_{11}A_{20}A_{22}A_{31}A_{33}$, on observe que seulement les lignes $\ell 8$ et $\ell 13$ de (32) contiennent éventuellement de tels termes. En réalité, il n'en est rien, car $\ell 9$ ne renferme pas de terme en $A_{00}$.

Par conséquent,

$$k' = 0$$

et, vu (25) et (28), on a également

$$F = v_1^5 = 0.$$

Soient enfin le terme $-2v_2^5 A_{03}A_{12}A_{20}^2A_{31}^2$ de $P_0$ et le terme

$$-2v_2^5 A_{03}A_{11}A_{12}A_{20}^2A_{31}^2A_{33} \tag{90}$$

de $Q$. De nouveau, il n'existe pas de terme semblable. En effet :

Compensations de type 1

On a, avec les notations habituelles,

$$t' = A_{11}A_{22}A_{33} \quad \text{et} \quad t'' = CA_{03}A_{12}A_{20}^2A_{31}^2.$$

Cependant, le terme de $P$ en $A_{03}A_{12}A_{20}^2A_{31}^2$ a le coefficient $-2v_2^5$ (cf. (35)) et engendre (90) et 5 autres termes, non semblables.

Compensations de type 2

On obtient

$$t' = A_{03}A_{12}A_{20}A_{31} \quad \text{et} \quad \widehat{t''} = CA_{11}A_{20}A_{22}A_{31}A_{33},$$

de sorte que les termes de $P$ en $A_{00}A_{11}A_{20}A_{22}A_{31}A_{33}$ sont les seuls qui peuvent fournir une compensation de la seconde espèce. Or, on sait (voir plus haut) que le polynôme $P$ ne possède pas de tel terme.

Ainsi,

$$v_2^5 = 0$$

et les équations (26) et (27) donnent alors

$$G = v_3^3 = 0.$$

## 7.2 Equation (37)

Posons

$$T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t} = X_{11}\mathcal{T}^1 + X_{12}\mathcal{T}^2 + X_{13}\mathcal{T}^3,$$

où les termes en $X_{12}$ et $X_{13}$ sont à omettre, si $b = 0$ resp. $c = 0$. Le 1er terme de $P = (\partial T)^{2\,2\,b\,c}_{1\,1\,s\,t}$ fait partie de $P_0$ (cf. (38)) et le 2ème s'écrit

$$X_{10}(X_{00}\mathcal{T}^1 + X_{01}\ (0D_1)\mathcal{T}^1 + X_{02}\ (0D_1)\mathcal{T}^2 + X_{03}\ (0D_1)\mathcal{T}^3).$$

Ceci étant, l'identité $Q \equiv 0$ devient

$$(\det A')\Big(-\frac{1}{2}\ A_{01}\ (0D_1)^2 T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t} + A_{01}A_{10}\ (0D_1)\mathcal{T}^1 + A_{02}A_{10}\ (0D_1)\mathcal{T}^2$$
$$+A_{03}A_{10}\ (0D_1)\mathcal{T}^3\Big) - (\det \nu A - A_{00} \det A')A_{10}\mathcal{T}^1 \equiv 0,$$

les dérivées directionnelles et $\mathcal{T}^1$ étant évalués sur les variables indépendantes $A_{ji}$. Il découle alors du lemme de divisibilité [5, IV.4.4] que

$$(0D_1)^2 T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t} \equiv A_{10}.R,$$

où $R$ désigne un polynôme en les $A_{\ell k}$ ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\ell \in \{2, 3\}$). Finalement, on a donc

$$T^{3\,b\,c}_{1\,s\,t} = X_{11}.R = X_{11}(X_{21}^2 T^1 + X_{21}X_{31}T^2 + X_{31}^2 T^3),$$

les termes en $X_{21}^2$ et $X_{31}^2$ étant à supprimer, si $s = 1$ resp. $t = 1$. Le 1er membre de (39) ne dépendant pas de toutes les évaluations, on termine comme au cas $m \geq 4$.

## 7.3 Equation (46)

Considérons le terme $\frac{1}{2}\,A(b-1)(b-2)A_{02}A_{12}A_{21}^2A_{30}^2A_{32}^{b-3}A_{33}^c$ ($b \geq 3$) de $P = (\partial T)^{2\,2\,b-1\,c}_{1\,1\,2\quad\ t}$ et le terme

$$\frac{1}{2}\ A(b-1)(b-2)A_{02}A_{11}A_{12}A_{21}^2A_{22}A_{30}^2A_{32}^{b-3}A_{33}^{c+1} \tag{91}$$

de $Q$.

Compensations de type 1

Il suffit évidemment d'examiner les termes de $P$ qui sont en $A_{02}A_{30}^2$. Les termes $t1$, $t4$ et $t5$ de (46) (cf. 6.2) ne contiennent pas de tels termes. Il en est de même de $t3 = -(t2)(1\ 0\ 2\ 3)$ et de $t6 = -(t5)(1\ 0\ 2\ 3)$, car il résulte de (47) et (48) que les termes de $t3$ et $t6$ sont en $A_{20}^2$ resp. en $A_{10}A_{20}$. Quant à $t2$, son second terme engendre (91) et 5 autres termes, non semblables.

Compensations de type 2

Si $P_1 \neq 0$, ses termes proviennent de $t4$ : ils sont donc en $A_{10}$ et ne fournissent pas de compensation.

D'où

$$A = 0.$$

## 7.4 Equation (53)

Ici, $P = (\partial T)^{2\,2\,b-1\,2}_{1\,1\,1\quad t}$ et les termes à considérer dans $P$ et $Q$ sont respectivement $-\frac{1}{2}\, C_t(t-2)(t-3)A_{02}A_{13}A_{23}A_{30}^2A_{31}^2A_{32}^{t-4}$ et

$$-\frac{1}{2}\, C_t(t-2)(t-3)A_{02}A_{11}A_{13}A_{22}A_{23}A_{30}^2A_{31}^2A_{32}^{t-4}A_{33}. \tag{92}$$

Compensations de type 1

Cherchons les termes de $P$ en $A_{02}A_{30}^2$. De nouveau, les termes $t1$, $t4$ et $t5$ de (53) (cf. 6.2) ne conviennent pas. Comme $T^{2\,b\,2}_{1\,1\,t} = C_tX_{13}X_{23}X_{31}^2X_{32}^{t-2}$ (cf. (62)), les termes $t2$ et $t5$ sont en $A_{13}$ et ainsi, $t3$ et $t6$ renferment $A_{03}$. Enfin, il découle de (63) que $t2$ donne (92) et des termes non semblables.

Compensations de type 2

Même argument qu'en VII.3.

D'où

$$C_t = 0.$$

## 7.5 Equation (80)

Soient le polynôme $P = (\partial T)^{2\,2\,\frac{t-1}{2}\,\frac{t-1}{2}}_{1\,1\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t+1}{2}}$ $(t \in \{5, 7, 9, \ldots\})$ et le terme

$$\left(-\frac{1}{2}\,\mathcal{C}_{t,2}\frac{t-1}{2}\,\frac{t-3}{2} + \mathcal{C}_{t,1}\frac{t+1}{2}\,\frac{t-3}{2}\right) A_{03}A_{11}A_{13}A_{20}^2A_{21}A_{22}A_{23}^{\frac{t-5}{2}}A_{31}A_{32}^{\frac{t-1}{2}}A_{33} \tag{93}$$

de $Q$.

Compensations de type 1

Les lignes $\ell1$, $\ell2$, $\ell6$ et $\ell8$ de (81) ne contiennent pas de terme en $A_{03}A_{20}^2$. Vu (82) et (83), $\ell5 = -(\ell3)(1\ 0\ 2\ 3)$, $\ell7 = -(\ell8)(0\ 1\ 3\ 2)$ et $\ell10 = -(\ell8)(1\ 0\ 2\ 3)$ sont à leur tour sans tels termes. Les termes en $A_{03}A_{20}^2$ contenus dans $\ell3$, $\ell4 = (\ell3)(1\ 0\ 3\ 2)$ et $\ell9 = (\ell8)(1\ 0\ 3\ 2)$ étant

$$\begin{aligned}&-\mathcal{C}_{t,1}\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t-1}{2}\,A_{03}A_{12}A_{20}^2A_{23}^{\frac{t-3}{2}}A_{31}^2A_{32}^{\frac{t-3}{2}}\\ &\quad+\left(-\frac{1}{2}\,\mathcal{C}_{t,2}\,\frac{t-1}{2}\,\frac{t-3}{2} + \mathcal{C}_{t,1}\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t-3}{2}\right) A_{03}A_{13}A_{20}^2A_{21}A_{23}^{\frac{t-5}{2}}A_{31}A_{32}^{\frac{t-1}{2}},\end{aligned}$$

ils ne produisent pas de compensation.

Compensations de type 2

Si $P_1 \neq 0$, ses termes proviennent de $\ell6$, renferment $A_{10}$ et ne fournissent pas de compensation.

Finalement, on a donc bien

$$-\frac{1}{2}\,\mathcal{C}_{t,2}\,\frac{t-1}{2}\,\frac{t-3}{2}+\mathcal{C}_{t,1}\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t-3}{2}=0. \tag{94}$$

## 7.6 Méthode alternative

Voici un deuxième procédé permettant d'établir (notamment) (94).

Si $P=(\partial T)^{2\,2\,\frac{t-1}{2}\,\frac{t-1}{2}}_{1\,1\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t+1}{2}}$ $(t\in\{5,7,9,\ldots\})$, il découle de [5, IV.4.3 (i)] qu'en dimension $m=3$, il existe un entier positif, non nul $\rho$ et un polynôme $Q$ tels que

$$P^\rho({}^tA)=\det A.Q({}^tA),\quad \forall A\in \mathbb{R}^4_4 \tag{95}$$

(avec la convention habituelle). Notons que $P({}^tA)$ contient le terme

$$t_1=\left(-\frac{1}{2}\,\mathcal{C}_{t,2}\,\frac{t-1}{2}\,\frac{t-3}{2}+\mathcal{C}_{t,1}\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t-3}{2}\right)A_{03}A_{13}A_{20}^2A_{21}A_{23}^{\frac{t-5}{2}}A_{31}A_{32}^{\frac{t-1}{2}}$$

et posons

$$P({}^tA)=\sum_{k=1}^{p}t_k,$$

les $t_k$ étant non semblables. L'identité (95) s'écrit alors

$$\sum_{\rho_1+\cdots+\rho_p=\rho}\mathsf{C}_\rho^{\rho_1,\ldots,\rho_p}\prod_{k=1}^{p}t_k^{\rho_k}-\det A.Q({}^tA)\equiv 0. \tag{96}$$

Nous allons montrer que le terme

$$t_1^\rho=(\ldots)^\rho A_{03}^\rho A_{13}^\rho A_{20}^{2\rho}A_{21}^\rho A_{23}^{\frac{t-5}{2}\rho}A_{31}^\rho A_{32}^{\frac{t-1}{2}\rho}$$

de (96) n'est pas compensé (ce qui implique évidemment (94)). Il ne l'est pas par un terme de $\det A.Q({}^tA)$, ces derniers contenant un facteur du type $A_{0\nu_0}A_{1\nu_1}A_{2\nu_2}A_{3\nu_3}$ ($\nu$ : permutation de $0,1,2,3$). Il ne l'est pas non plus par un terme de $P^\rho({}^tA)$. De fait, sinon il existe un produit $\prod_{k=1}^p t_k^{\rho_k}$ (avec $\rho_1+\cdots+\rho_p=\rho$ et $(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_p)\neq(\rho,0,\ldots,0)$) semblable à $t_1^\rho$. Soit alors $k\neq 1$, tel que $\rho_k\neq 0$. Le terme $t_k$ étant de degré $\begin{pmatrix}2&2&\frac{t-1}{2}&\frac{t-1}{2}\\ 1&1&\frac{t+1}{2}&\frac{t+1}{2}\end{pmatrix}$, il est en $A_{03}A_{13}$ et indépendant de $A_{22},A_{30}$ et $A_{33}$. Il s'ensuit qu'on a nécessairement

$$\begin{aligned}t_k &= CA_{03}A_{13}A_{20}^aA_{21}^bA_{23}^cA_{31}^dA_{32}^e\quad (C\in\mathbb{R},\ a,b,c,d,e\in\mathbb{N})\\ &= CA_{03}A_{13}A_{20}^2A_{21}^bA_{23}^{\frac{t-5}{2}}A_{31}^dA_{32}^{\frac{t-1}{2}}\\ &= CA_{03}A_{13}A_{20}^2A_{21}A_{23}^{\frac{t-5}{2}}A_{31}A_{32}^{\frac{t-1}{2}},\end{aligned}$$

ce qui est absurde, $t_1$ et $t_k$ n'étant pas semblables.

**Remerciements.** Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet R&D no MEN/CUL/96/006. L'auteur remercie les Professeurs M. De Wilde et P.B.A. Lecomte pour les discussions fructueuses qu'il a pu avoir avec eux.

# References


[1] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte, Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations, *NATO ASI Serie C*, **247** (1988), pp. 897-960.

[2] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, *preprint de l'IHES*, (1997).

[3] P.B.A. Lecomte, D. Melotte and C. Roger, Explicit Form and Convergence of 1-Differential Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra, *Letters in Mathematical Physics*, **18** (1989), pp. 275-285.

[4] A. Nijenhuis and R. Richardson, Deformation of Lie algebra structures, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), pp. 89-105.

[5] N. Poncin, Premier et deuxième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Sc. Liège*, **67** n° 6 (1998), pp.



Norbert PONCIN
Département de Mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162 A, avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg

E-mail : poncin@cu.lu