Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions

Norbert PONCIN

Département de Mathématique, Centre Universitaire de Luxembourg,
Avenue de la Faïencerie, 162 A, L-1511 Luxembourg

Résumé. L'espace des q-cochaînes locales de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, est naturellement bigradué. On ordonne totalement les termes homogènes d'une cochaîne et on représente les dérivées symboliquement par des formes linéaires sur $\mathbb{R}^m$. Cela conduit à une méthode permettant de calculer les trois premiers espaces de cohomologie.

Cohomology of the Lie algebra of differential operators on a manifold, with coefficients in the space of functions

Abstract. *The space of local q-cochains of the Lie algebra of differential operators on a manifold, with coefficients in the space of functions, is naturally graded. The homogeneous terms of a cochain are totally ordered and the derivatives may be symbolized by linear forms on $\mathbb{R}^m$. This leads to a method giving the first three cohomology spaces.*

Abridged English Version

If M is a smooth manifold and N is the space of smooth functions on M, denote by $(A(N), [.,.])$ the Nijenhuis-Richardson graded Lie algebra of N ([2]). The space $\mathcal{E} = A(N)_{loc,\, n.c.}$ of local i.e. support preserving elements of $A(N)$, which are vanishing on $1 \in N$, is a graded Lie subalgebra. Let $H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\, loc}$ be the graded cohomology of $\mathcal{E}$ associated to the adjoint representation, all cochains being support preserving and of weight -1. Observe that $\mathcal{E}^0 = gl(N)_{loc,\, n.c.}$ is a Lie algebra, subalgebra of $gl(N)$. It can be shown ([1]) that the local Chevalley-Eilenberg cohomology $H(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ (of the Lie algebra $\mathcal{E}^0$ of differential operators on M ([3]), valued in N) is a part of the graded cohomology :

$$H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\, loc} = H(\ker\theta) \oplus H(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \quad ,$$

where θ is the restriction mapping of graded cochains to $\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0$.

The purpose of this note is to give an idea of the proof of the following result :

THEOREM. - *If M is a smooth connected second-countable Hausdorff manifold of dimension $m \geq 3$, the space $H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ $(q \in \{1, 2, 3\})$ is isomorphic to the corresponding space $H^q_{DR}(M)$ of the de Rham cohomology of M.*

Let E be a certain space constructed on an arbitrary manifold V and let U be an open subset of V. We denote by E_U the space of same type than E, on U.

PROPOSITION. - *If $H^q(\mathcal{E}^0_U, N_U)_{loc} = 0$, for each $q \in \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ and each contractible domain U of chart, then $H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^q_{DR}(M)$, for each $q \in \{1, \ldots, n\}$.*

In the sequel, Ω is an open, possibly contractible, subset of $\mathbb{R}^m$. We set $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$ and $N = N_\Omega$. Moreover, we identify the space of homogeneous polynomials of degree r on $(\mathbb{R}^m)^*$, with the space $\vee^r \mathbb{R}^m$ of r-contravariant symmetric tensors on $\mathbb{R}^m$.

In view of the preceding result, it suffices to evidence the

PROPOSITION. - *For each* $q \in \{1, 2, 3\}$, $H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = 0$.

Let us give some details concerning the method used in the proof of this assertion.

It follows from a well known theorem of J. Peetre ([3]), that the arguments $A \in \mathcal{E}^0 = gl(N)_{loc,\, n.c.}$ of our cochains are locally differential operators. If we symbolize each derivative $D^\lambda_x f = D^{\lambda^1}_{x^1} \ldots D^{\lambda^m}_{x^m} f$ of $f \in N$ by the monomial $\xi^\lambda = \xi_1^{\lambda^1} \ldots \xi_m^{\lambda^m}$ in the components of $\xi \in (\mathbb{R}^m)^*$, we see that the subspace $\mathrm{Diff}^r \subset \mathcal{E}^0$ $(r \in \mathbb{N}^*)$ of all homogeneous differential operators of degree r, identifies with the space $C^\infty(\Omega, \vee^r \mathbb{R}^m)$. Hence, the restriction T_r to Diff^r of any 1-cochain T, is a local N-valued operator on $C^\infty(\Omega, \vee^r \mathbb{R}^m)$. Applying again Peetre's theorem, shows that T_r also is a locally differential operator, which may be symbolized by a smooth function on Ω valued in the polynomials in $\eta \in (\mathbb{R}^m)^*$ with coefficients in the dual of $\vee^r \mathbb{R}^m$. This notion of symbolic representation can be extended in a simple way to q-cochains $(q \in \mathbb{N}^*)$.

It is easily seen that the space of 1-cochains is naturally bigraded. The homogeneous part T^a_r $(a \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}^*)$ of any 1-cochain T, is the sum of all terms of T_r containing exactly a derivatives. Thus, the bidegree $(0/1)$ corresponds to constant vector fields and $(1/1)$ to linear vector fields. Generalizing this bigraduation to q-cochains T $(q \in \mathbb{N}^*)$, furnishes homogeneous terms $T^{\vec{a}}_{\vec{r}} = T^{a_0 \ldots a_{q-1}}_{r_0 \ldots r_{q-1}}$ $(a_i \in \mathbb{N},\ r_i \in \mathbb{N}^*)$, called *monomials* of T, which may be totally ordered by the lexicographic order associated to the total order on columns, defined by

$$(a_i/r_i) < (a_j/r_j) \Leftrightarrow a_i + r_i < a_j + r_j \text{ ou } (a_i + r_i = a_j + r_j \text{ et } r_i < r_j).$$

The method allowing us to show that the first three cohomology spaces are vanishing, is essentially based on the concepts of symbolic representation and ordered monomials. Indeed, symbolizing the equation $\partial T = 0$, where ∂ is the Chevalley-Eilenberg coboundary operator, leads to a purely algebraic equation, much easier than the original; in the main, we use this equation to prove that an arbitrary monomial of a certain cohomologous cocycle is vanishing, if each preceding monomial fades.

---

1. Introduction

Les problèmes de déformation de l'algèbre $N = C^\infty(M)$ des fonctions d'une variété M, symplectique ou de Poisson, ont mis en lumière certaines structures algébriques et les cohomologies associées. Ceci est en particulier valable pour l'espace $\mathcal{E} = A(N)_{loc,\, n.c.}$ (des applications multilinéaires, antisymétriques de $N \times \cdots \times N$ dans N, qui sont locales et nulles sur les constantes), que le crochet de Nijenhuis-Richardson ([2]) munit d'une structure d'algèbre de Lie graduée, et la cohomologie graduée de $\mathcal{E}$ associée à la représentation adjointe, soit $H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\, loc}$, les indices -1 et loc indiquant qu'on se limite aux cochaînes locales, de poids -1.

Il est clair que le terme $\mathcal{E}^0 = A^0(N)_{loc,\, n.c.} = gl(N)_{loc,\, n.c.}$ est une algèbre de Lie, admettant N comme espace de représentation canonique. On montre que la cohomologie graduée et la cohomologie $H(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ de Chevalley locale de l'algèbre de Lie $\mathcal{E}^0$ des opérateurs différentiels sur M ([3]), à valeurs dans les fonctions, sont liées par la relation ([1])

$$H_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\, loc} = H(\ker\theta) \oplus H(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \quad ,$$

où θ désigne l'application "restriction des cochaînes alternées à $\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0$".

Nous prouverons le

THEOREME 1.1. - *Si M est une variété de dimension $m \geq 3$, de classe C^∞, séparée, à base dénombrable et connexe, on a $H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^q_{DR}(M)$ $\quad (q \in \{1, 2, 3\})$, où $H_{DR}(M)$ est la cohomologie de de Rham de M.*

2. Symbolisation et graduation des q-cochaînes

Si E représente un espace lié à une variété arbitraire V et si U désigne un ouvert de V, nous noterons E_U l'espace de même type que E, construit sur U.

PROPOSITION 2.1. - *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $H^q(\mathcal{E}^0_U, N_U)_{loc} = 0$, pour tout $q \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout domaine contractile U de coordonnées locales de M, alors $H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^q_{DR}(M)$, quel que soit $q \in \{1, \ldots, n\}$.*

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^m$, que nous supposerons éventuellement contractile, $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}^0_\Omega$ et $N = N_\Omega$. D'autre part, $\vee\mathbb{R}^m$ $(\vee^r\mathbb{R}^m)$ est l'espace des tenseurs symétriques (r fois) contravariants sur $\mathbb{R}^m$, que nous identifierons à l'espace des polynômes (homogènes de degré r) sur $(\mathbb{R}^m)^*$.

Soient V et W deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $O \in gl(C^\infty(\Omega, V), C^\infty(\Omega, W))_{loc}$. D'après un théorème de J. Peetre ([3]), si $f \in C^\infty(\Omega)$ et $v \in V$, on a

$$O(fv) = \sum_\lambda O_\lambda((D^\lambda f)v),$$

la série sur $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m) \in \mathbb{N}^m$ étant localement finie et les coefficients $O_\lambda \in C^\infty(\Omega, gl(V, W))$ étant univoquement déterminés par O (il est clair que $D^\lambda_x f = D^{\lambda^1}_{x^1} \ldots D^{\lambda^m}_{x^m} f$). Nous représentons les dérivées $D^\lambda f$ par η^λ, avec $\eta \in (\mathbb{R}^m)^*$ (où $\eta^\lambda = \eta_1^{\lambda^1} \ldots \eta_m^{\lambda^m}$), de sorte que O admet le polynôme symbolisant $\text{Ø} \in C^\infty(\Omega, \vee\mathbb{R}^m \otimes gl(V, W))$, défini par

$$\text{Ø}(\eta; v) = \sum_\lambda O_\lambda(v)\eta^\lambda.$$

Cette règle permet de symboliser les arguments $A \in \mathcal{E}^0 = gl(C^\infty(\Omega),\ C^\infty(\Omega))_{loc,\, n.c.}$ de nos cochaînes, donc notamment les éléments A_r de l'espace Diff^r $(r \in \mathbb{N}^*)$ des opérateurs différentiels homogènes de degré r et de constater que $\mathrm{Diff}^r \approx C^\infty(\Omega, \vee^r\mathbb{R}^m)$. Si T désigne une 1-cochaîne et T_r sa restriction à Diff^r, il s'ensuit que $T_r \in gl(C^\infty(\Omega, \vee^r\mathbb{R}^m), C^\infty(\Omega))_{loc}$, donc que

$$T_r(fP_r) = \sum_\lambda T_{r,\lambda}((D^\lambda f)P_r)$$

$(f \in C^\infty(\Omega),\ P_r \in \vee^r\mathbb{R}^m)$. Finalement, le polynôme symbolisant $\mathcal{T}_r \in C^\infty(\Omega, \vee\mathbb{R}^m \otimes (\vee^r\mathbb{R}^m)^*)$ de T_r est donné par

$$\mathcal{T}_r(\eta; P_r) = \sum_\lambda T_{r,\lambda}(P_r)\eta^\lambda.$$

L'espace des 1-cochaînes est naturellement bigradué. Le terme homogène T_r^a ($a \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}^*$) d'une 1-cochaîne T est la somme des termes de T_r dérivant exactement a fois. Il sera appelé ci-dessous *monôme de T de bidegré* (a/r). Ainsi, le bidegré $(0/1)$ correspond aux champs de vecteurs constants et $(1/1)$ aux champs linéaires.

La généralisation de cette bigraduation aux q-cochaînes ($q \in \mathbb{N}^*$), fournit des monômes du type $T_{\vec{r}}^{\vec{a}} = T_{r_0 \ldots r_{q-1}}^{a_0 \ldots a_{q-1}}$ ($a_i \in \mathbb{N},\ r_i \in \mathbb{N}^*$), que nous ordonnons totalement par l'ordre lexicographique associé à l'ordre total sur les colonnes, défini par

$$(a_i/r_i) < (a_j/r_j) \Leftrightarrow a_i + r_i < a_j + r_j \ \text{ ou } \ (a_i + r_i = a_j + r_j \ \text{ et } \ r_i < r_j).$$

On étend la notion de représentation symbolique aux q-cochaînes ($q \in \mathbb{N}^*$) et à leurs monômes.

PROPOSITION 2.2. - *Il existe une correspondance biunivoque entre les monômes $T_{\vec{r}}^{\vec{a}} = T_{r_0 \ldots r_{q-1}}^{a_0 \ldots a_{q-1}}(A_{0,r_0}, \ldots, A_{q-1,r_{q-1}})$ des q-cochaînes et les applications $\mathcal{T}_{\vec{r}}^{\vec{a}} = \mathcal{T}_{r_0 \ldots r_{q-1}}^{a_0 \ldots a_{q-1}}(\eta^0, \ldots, \eta^{q-1};\ P_{0,r_0}, \ldots, P_{q-1,r_{q-1}})$, qui sont de classe C^∞ en $x \in \Omega$ et à valeurs dans l'espace $E_{\vec{r}}^{\vec{a}}$ des polynômes homogènes de degrés respectifs $a_0, \ldots, a_{q-1}$ en $\eta^0, \ldots, \eta^{q-1} \in (\mathbb{R}^m)^*$, eux-mêmes à valeurs dans les formes linéaires en $P_{0,r_0} \in \vee^{r_0}\mathbb{R}^m, \ldots, P_{q-1,r_{q-1}} \in \vee^{r_{q-1}}\mathbb{R}^m$ et antisymétriques en les arguments (η^i, P_{i,r_i}) correspondant à des colonnes égales de $(\vec{a}/\vec{r})$.*

Dans la suite, nous utiliserons la même notation pour désigner un objet et sa représentation symbolique.

3. Constance des coefficients et invariance sous $gl(m, \mathbb{R})$

PROPOSITION 3.1. - *Tout q-cocycle ($q \in \mathbb{N}^*$) est, à un bord près, à coefficients constants et sans colonne $(0/1)$ (i.e. les bidegrés de ses monômes ne contiennent pas la colonne $(0/1)$).*

La preuve est basée sur une utilisation privilégiée de la colonne $(0/1)$ i.e. des champs constants et une relation entre l'opérateur de cobord de Chevalley de $\mathcal{E}^0$ (associé à la représentation sur N) et celui de de Rham.

Le deuxième résultat escompté, l'invariance sous $gl(m, \mathbb{R})$, n'apparaît que graduellement et doit être établi séparément pour les cocycles de degré $1, 2$ et 3. La principale raison de cet état des choses est liée à l'absence dans $\mathcal{E}^0$ d'un idéal raisonnable, supplémentaire à $gl(m, \mathbb{R})$. Notre méthode se fonde sur une utilisation privilégiée de la colonne $(1/1)$ i.e. des champs linéaires et une relation entre les cobords de Chevalley de $\mathcal{E}^0$ et de $gl(m, \mathbb{R})$:

PROPOSITION 3.2. - *Soient T une q-cochaîne à coefficients constants et sans colonne $(0/1)$ et $T_{\vec{r}}^{\vec{a}} = T_{1 \ldots 1\, r_{k_0} \ldots r_{q-1}}^{1 \ldots 1\, a_{k_0} \ldots a_{q-1}}$ ($k_0 \in \{0, \ldots, q\},\ (1/1) < (a_{k_0}/r_{k_0}) \leq \cdots \leq (a_{q-1}/r_{q-1})$) un monôme de T. Si ∂ désigne le cobord de Chevalley de $\mathcal{E}^0$ et ∂_ρ celui de $gl(m, \mathbb{R})$ (associé à la représentation naturelle ρ sur $E_{r_{k_0} \ldots r_{q-1}}^{a_{k_0} \ldots a_{q-1}}$), on a*

$$(\partial T)_{1\vec{r}}^{1\vec{a}} = -\partial_\rho T_{\vec{r}}^{\vec{a}} + \cdots, \tag{1}$$

où $T_{\vec{r}}^{\vec{a}} = T_{1 \ldots 1\, r_{k_0} \ldots r_{q-1}}^{1 \ldots 1\, a_{k_0} \ldots a_{q-1}}$ est interprété comme k_0-cochaîne de $gl(m, \mathbb{R})$ à valeurs dans $E_{r_{k_0} \ldots r_{q-1}}^{a_{k_0} \ldots a_{q-1}}$ et où les termes supplémentaires, éventuels ..., sont dus à des monômes dont les bidegrés renferment au moins une colonne $(1/1)$ de plus que $(\vec{a}/\vec{r})$.

4. Preuve du théorème

Vu 2.1., il suffit de démontrer que $H^q(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = 0$, quel que soit $q \in \{1, 2, 3\}$.

Nous décrirons ici uniquement le calcul de $H^3(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$. Si $X \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in (\mathbb{R}^m)^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$, nous posons $X_\eta = \eta(X)$ et $(X^r)_\eta = (X_\eta)^r = X^r_\eta$, de façon à définir $X^r \in \vee^r \mathbb{R}^m$. De plus, si $X_i \in \mathbb{R}^m$ et $\eta^j \in (\mathbb{R}^m)^*$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$, nous écrirons X_{ij} et $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ au lieu de X_{i,η^j} et $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}(\eta^1, \eta^2, \eta^3;\ X^r_1, X^s_2, X^t_3)$.

L'application de (1) montre que le monôme minimum $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}$ d'un 3-cocycle arbitraire T est donné par $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1} = k\alpha(\mathrm{tr}_3)$, où $k \in \mathbb{R}$ et où α désigne l'opérateur d'antisymétrisation et tr_3 la trace d'un produit de trois matrices. Or, la constante k ne peut être annulée à ce stade des calculs. Il est facile de voir que les monômes $T^{1\,1\,c}_{1\,1\,t}$ $((1/1) < (c/t))$ sont nuls, mais $T^{1\,1\,1}_{1\,1\,1}$ engendre, lors de l'utilisation de (1) dans l'étude de certains monômes du type $T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t}$ $((1/1) < (b/s) \leq (c/t))$, des termes supplémentaires, qui ne sont pas en somme directe avec le bord de $gl(m, \mathbb{R})$. Ces termes constituent cependant eux-mêmes un bord de $gl(m, \mathbb{R})$ et finalement,

$$T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} = kX_{13}X_{21}X^t_{32}\ \delta_{\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & s & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}} + \mathrm{tr} \otimes U^{b\,c}_{s\,t},$$

où δ désigne le symbole de Kronecker et où $U^{b\,c}_{s\,t}$ appartient à l'espace $E^{b\,c}_{s\,t,\,inv}$ des éléments de $E^{b\,c}_{s\,t}$, qui sont invariants par $gl(m, \mathbb{R})$. Dans le cas des monômes $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ $((1/1) < (a/r) \leq (b/s) \leq (c/t))$, la relation (1) contient les termes supplémentaires $(\partial K)^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t}$ dû aux précédents termes en k et $(\partial(\mathrm{tr} \otimes U))^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t}$ dû à ceux du type produit tensoriel. On montre que K est cocycle aux ordres considérés. Une sorte d'antilinéarité pour la trace, du cobord de Chevalley de $\mathcal{E}^0$, permet alors de voir que les deux termes restants de (1), $-\partial_\rho T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ et $(\partial(\mathrm{tr} \otimes U))^{1\,a\,b\,c}_{1\,r\,s\,t} = -\mathrm{tr} \otimes (\partial U)^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$, sont en somme directe. La nullité du premier implique l'invariance globale de T. Celle du second entraîne que U est un 2-cocycle de $\mathcal{E}^0$, donc un 2-bord, conclusion conduisant à la suppression de la quasi-totalité des termes du type produit tensoriel dans $T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t}$:

$$T^{1\,b\,c}_{1\,s\,t} = (kX_{13}X_{21}X^t_{32} + k'X_{11}X_{23}X^t_{32})\ \delta_{\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & s & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}},$$

où $k' \in \mathbb{R}$. Vu l'invariance de T, on sait à présent prouver que $k = 0$, mais k' ne pourra être annulé que plus tard : un 3-cocycle arbitraire est cohomologue à un cocycle T à coefficients constants, invariant et sans colonnes (0/1) et (1/1), sauf que $T^{1\,t\,1}_{1\,1\,t} = k'X_{11}X_{23}X^t_{32}$ $\quad (t \geq 2)$.

L'étude des monômes à une ou plusieurs colonnes (0/2) est essentiellement une récurrence sur le bidegré. De plus, pour annuler un monôme $T^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}$ $((0/2) < (b/s) \leq (c/t),\ \ b+c = 2+s+t)$, nous corrigeons T systématiquement par les bords ∂V des cochaînes invariantes, à coefficients constants, admettant les monômes minima $(\partial V)^{0\,b\,c}_{2\,s\,t}$.

L'organigramme des cas à distinguer ne peut être donné ici. Signalons toutefois l'apparition d'un monôme critique, $T^{0\,t+1\,t}_{2\,t-1\,t} = C_t X_{01}X_{02}X^{t-1}_{12}X^t_{21}$ $\quad (t \geq 3,\ C_t \in \mathbb{R})$, difficile à annuler. On note alors que lors de l'étude de $T^{0\,2t-1\,2}_{2\,1\,2t-2}$, on corrige T notamment par $\partial\mathcal{V}_{2t-1,1} = \partial(\alpha(\beta_{2t-1}X_{12}X^{2t-1}_{21}))$ et $\partial\mathcal{V}_{2t-1,2} = \partial(\alpha(\varepsilon_{2t-1}X^2_{12}X^{2t-2}_{21}))$ $(\beta_{2t-1},\ \varepsilon_{2t-1} \in \mathbb{R},\ \beta_{2t-1}$ arbitraire). Les monômes minima de ces bords étant $(\partial\mathcal{V}_{2t-1,1})^{0\,2t-1\,2}_{2\,1\,2t-2} = -2\beta_{2t-1}X_{01}X_{02}X_{12}X^{2t-2}_{21}$ et $(\partial\mathcal{V}_{2t-1,2})^{0\,2t-1\,2}_{2\,1\,2t-2} = -2\varepsilon_{2t-1}X_{01}X_{02}X_{12}X^{2t-2}_{21}$, il est possible de corriger $\partial\mathcal{V}_{2t-1,1}$, de manière à obtenir un bord $\partial(\mathcal{V}_{2t-1,1} + \mathcal{V}_{2t-1,2})$ de monôme minimum naturel, nul. Ce type de construction, réitéré, fournit un bord $\partial\mathcal{V}_{2t-1}$, admettant le monôme minimum $(\partial\mathcal{V}_{2t-1})^{0\,t+1\,t}_{2\,t-1\,t} = (-1)^{t+1}2\beta_{2t-1}X_{01}X_{02}X^{t-1}_{12}X^t_{21}$. Le monôme critique $T^{0\,t+1\,t}_{2\,t-1\,t} = C_t X_{01}X_{02}X^{t-1}_{12}X^t_{21}$ $(t \geq 3)$ peut donc être annulé, grâce au choix convenable de β_{2t-1} $(2t-1 \in \{5, 7, 9, \ldots\})$.

Le cocycle étudié étant désormais sans colonne (0/2), on voit enfin que $k' = 0$: tout 3-cocycle est cohomologue à un cocycle à coefficients constants, invariant et sans colonnes (0/1), (1/1) et (0/2).

Une nouvelle récurrence sur le bidegré et l'étude de certains monômes $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ à partir d'un type d'équations $(\partial T)^{A\,B\,C\,D}_{R\,S\,T\,U} = 0$, où $(\partial T)^{A\,B\,C\,D}_{R\,S\,T\,U}$ n'est pas le plus petit monôme du bord auquel $T^{a\,b\,c}_{r\,s\,t}$ contribue, permettent d'annuler tous les monômes restants.

Ici encore, la place nous manque pour décrire utilement l'organigramme des cas à distinguer. Un autre monôme critique

$$T^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} = \left[\partial\left(\alpha\left(\tfrac{-2}{t(t-1)}\, C_{t,1} X_{12} X_{21}^t\right)\right)\right]^{2\,t-1\,1}_{1\,1\quad t} \ (t \geq 4,\ C_{t,1} \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

se manifeste, le monôme minimum de ce bord étant de bidegré $(0\ t\ 2/2\ 1\ t-1)$. Or, en considérant $T^{0\,t\,2}_{2\,1\,t-1}$, on corrige T en particulier par $\partial\mathcal{V}_{t,1} = \partial(\alpha(\beta_t X_{12} X_{21}^t))$ (β_t arbitraire pour t pair). On montre que le choix convenable de β_t, annule $C_{t,1}$ au cours de l'étude de $T^{0\,t\,2}_{2\,1\,t-1}$. Il est clair que les corrections par bords, effectuées ultérieurement, peuvent réintroduire $C_{t,1}$, accident se produisant effectivement pour $t \in \{5, 7, 9, \ldots\}$. Dans ce cas, (2) peut être généralisé sous la forme

$$T^{2\,t-p\,p}_{1\,p\quad t-p+1} = \left[\partial\left(\alpha\left(\frac{(-1)^p 2}{t(t-1)}\, C_{t,1} X_{12}^p X_{21}^{t-p+1}\right)\right)\right]^{2\,t-p\,p}_{1\,p\quad t-p+1} \quad \left(p \in \left\{1, \ldots, \frac{t+1}{2}\right\}\right),$$

où ∂ est à calculer formellement et α à supprimer, si $p = \frac{t+1}{2}$. Une équation en le dernier maillon $T^{2\,\frac{t-1}{2}\,\frac{t+1}{2}}_{1\,\frac{t+1}{2}\,\frac{t+1}{2}}$ de la précédente chaîne, annule alors $C_{t,1}$. Finalement, le monôme critique est nul, pour tout $t \geq 4$: $H^3(\mathcal{E}^0, N)_{loc} = 0$.

Les démonstrations détaillées de ces résultats seront présentées dans [4, 5].

Remerciements. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet R&D no MEN/CUL/96/006. L'auteur remercie les Professeurs M. De Wilde et P.B.A. Lecomte pour maintes discussions fructueuses.

References

[1] **Lecomte P.B.A., Melotte D. and Roger C., 1989**. Explicit Form and Convergence of 1-Differential Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra, *Lett. Math. Phys.*, 18, p. 275-285.

[2] **Nijenhuis A. and Richardson R., 1967**. Deformation of Lie algebra structures, *J. of Math. and Mech.*, 17, p. 89-105.

[3] **Peetre J., 1959 et 1960**. Une caractérisation des opérateurs différentiels, *Math. Scand.*, 7 et 8, p. 211-218 et 116-120.

[4] **Poncin N., 1999**. Premier et deuxième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Sc. Liège* (à paraître).

[5] **Poncin N., 1999**. Troisième espace de cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, *Bull. Soc. Sc. Liège* (à paraître).