SYMMETRIEN IN DER NATUR
WAS SAGT UNS DIE MATHEMATIK HIERZU

Martin Schlichenmaier

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg

9. Juli 2009

Bilder von Symmetrien

Abb: Bergkristall

ABB: Bergkristall

ABB: Farnwedel Onochea – Translationssymmetie

ABB: Blattrosette Aeonium – komplexe Radialsymmetrie

ABB: Orchidee - Paphilopedum - Spiegelsymmetrie

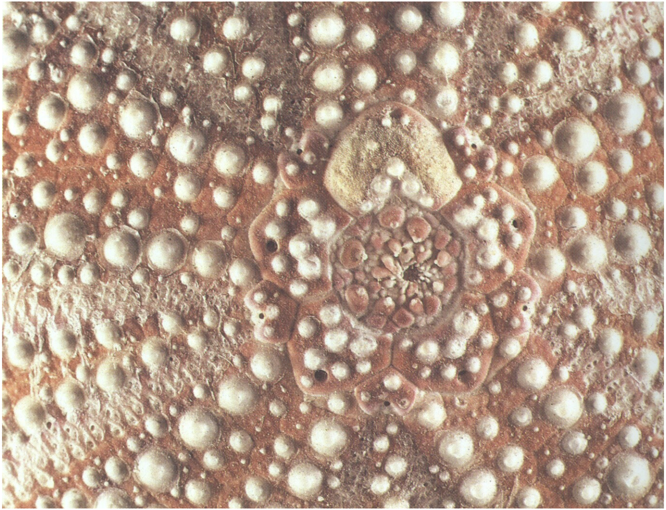


ABB: Radialsymmetrie – Seeigel

ABB: Kampfschilde aus Neuguinea

ABB: Elfenbeinbuchdeckel 980 n.Chr.

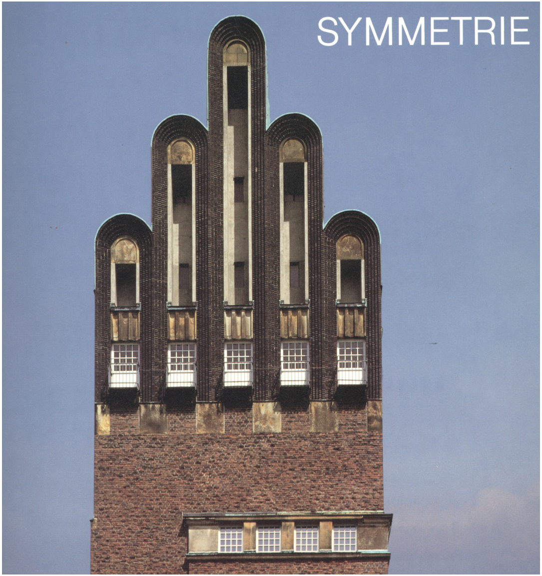


ABB: Mathildenhöhe - Darmstadt

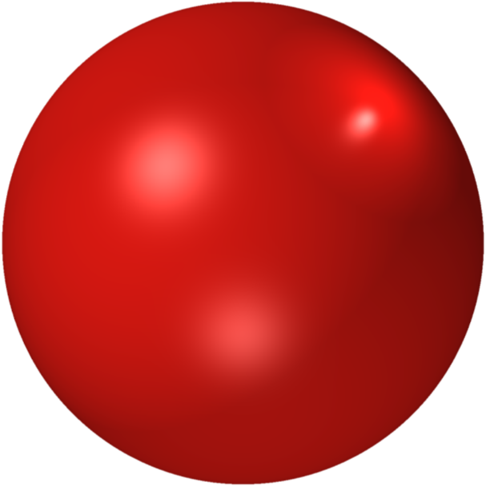
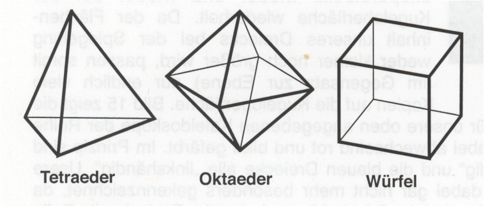
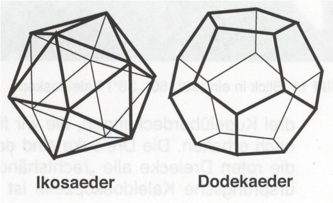


ABB: Kugel

Platonische Körper





Gruppen und Symmetrien

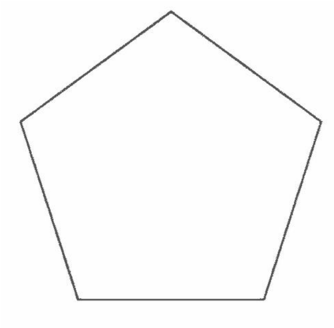


ABB: Ein reguläres Fünfeck

- betrachten nur Rotationen
- Mittelpunkt ist das einzige Drehzentrum
- Minimalwinkel ist $360^\circ/5 = 72^\circ =: \alpha$
- Symmetrieoperationen sind Drehungen um Vielfache von α
- Spiegelungen lassen wir vorläufig ausser Acht

Was ist die mathematische Struktur die wir von Symmetrien verlangen?

1. Hintereinanderausführen ist wieder eine Symmetrie. Seien S_1 und S_2 Symmetrien so ist $S_1 \circ S_2$ wieder eine Symmetrie.
   am Beispiel: $R_{\varphi_1} \circ R_{\varphi_2} = R_{\varphi_1+\varphi_2}$
2. Es kommt nicht auf die Klammersetzung an (Assoziativität): $(S_1 \circ S_2) \circ S_3 = S_1 \circ (S_2 \circ S_3)$
   vertrautes Beispiel: $(2+3)+4 = 2+(3+4)$.
3. Es gibt eine Symmetrieoperation die gar nichts macht, die nennen wir E. $S \circ E = S = E \circ S$.
   Hier ist es die Drehung um den Winkel Null
4. Zu jeder Symmetrie S gibt es eine inverse Symmetrie S^{-1}, die die Operation wieder aufhebt.
   $S \mapsto S^{-1}$ mit $S \circ S^{-1} = E = S^{-1} \circ S$.
   Invers zu R_φ ist $R_{-\varphi}$.

Definition

Eine Menge solcher Transformationen, bzw. Objekte, mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe falls die obigen 4 Bedingungen erfüllt sind.

- Die meisten Symmetrien bilden eine Gruppe.
- Es gibt jedoch Ausnahmen, z.B. Symmetrien die von Wachstumsprozessen herkommen.
- Achtung: im allgemeinen $S_1 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_1$.

Präzisieren: Wir identifizieren Elemente die mit allen Punkten genau dasselbe tun.
Insbesondere ist dann $R_{360^\circ} = R_{0^\circ}$.

Rot(5-Eck) = $\{R_0 = E, R_\alpha, R_{2\alpha}, R_{3\alpha}, R_{4\alpha}\}$

Diese Gruppe hat 5 Elemente.

DIE DREIECKSGRUPPE

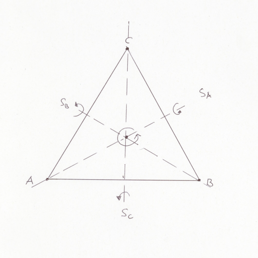


ABB: Gleichseitiges Dreieck

Ist $\beta := 120^\circ = 360^\circ/3$ der Rotationswinkel
Rot(3-Eck)=$\{R_0 = E, R_\beta, R_{2\beta}\}$.

Nehme Spiegelungen hinzu:
S_A Spiegelung an der Geraden durch Ecke A und des Mittelpunkts der Seite zwischen B und C

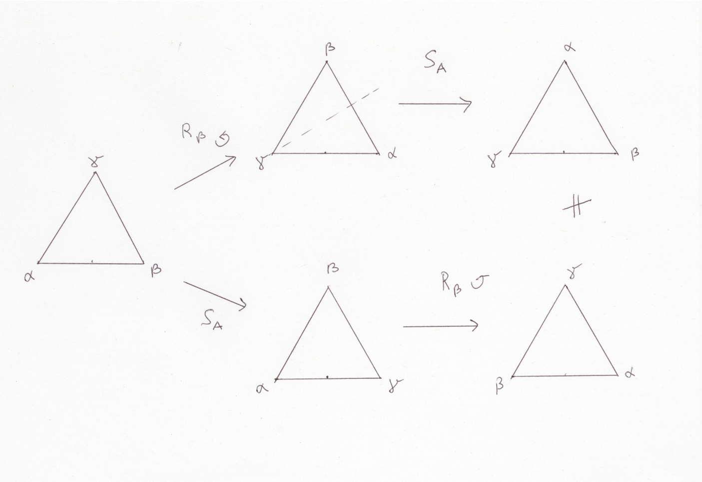
S_B und S_C entsprechend.

$$\text{Iso(3-Eck)}=\{R_0 = E, R_\beta, R_{2\beta}, S_A, S_B, S_C\}$$

$$S_B \circ S_A = R_\beta, \text{ ....}$$

Diese Gruppe ist das kleinste Beispiel bei dem die Reihenfolge von Bedeutung ist

$$S_A \circ R_\beta \quad \neq \quad R_\beta \circ S_A$$

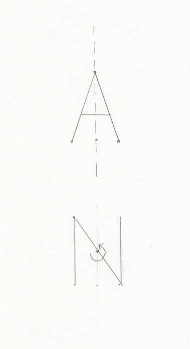


- Was nützt es einem wenn man weiss, dass eine Gruppe vorliegt?
- Sehr viel! Mathematiker können aus der Grundannahme dass Gruppe vorliegt wichtige Konsequenzen ziehen.

Satz: *Ist G eine Gruppe mit p Elementen, wobei p eine Primzahl ist, dann kann G mit der Drehgruppe des regulären $p-$Ecks identifiziert werden.*

Konsequenz: In einer Gruppe mit p Elementen, p eine Primzahl, vertauschen alle Gruppenelemente.

Achtung: Dieselbe abstrakte Gruppe kann in verschiedenen konkreten Realisierungen auftreten.



Beispiel: Die Symmetriegruppen des Buchstabens **A** und des Buchstabens **N** haben beide zwei Element, sind deshalb als abstrakte Gruppen gleich. Beim Buchstaben **A** wird das nichttriviale Element als Spiegelung realisiert, beim Buchstaben **N** als Drehung um 180 Grad.

Frage: Gibt es zu jeder Zahl n immer nur genau eine Gruppe?

Antwort: Nein.

Gegenbeispiel:
Es gibt genau zwei Typen von Gruppen welche genau 6 Elemente haben

1. Drehgruppe des regulären 6-Ecks
2. Iso(3-Eck)

Mathematische Forschungsaufgabe: Klassifiziere alle möglichen Bausteine von Gruppen.

Sätzchen: Ist G eine Gruppe mit genau 4 Elementen, dann gibt es ein Element S in G mit $S \neq E$ aber $S \circ S = E$.

Dies ist nicht richtig in einer Gruppe mit genau 5 Elementen.

Kristalle

Kristalle sind im kleinen periodisch aus Elementarzellen aufgebaut. Diese bilden ein Gitter.

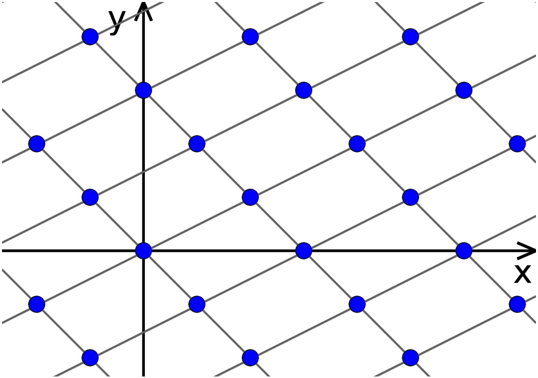


Abb: zweidimensionales Gitter

- interne Symmetrie des Gitters ist verantwortlich für die äußere Gestalt des Kristalls
- um die interne Symmetrie zu bestimmen benutzt man Röntgenbeugung

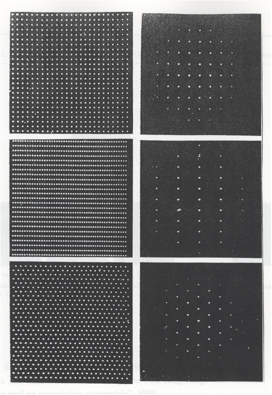
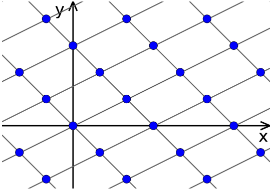


ABB: geometrisches Gitter und zugehöriges Beugungsbild



- Symmetriegruppe besitzt immer eine unendliche Menge von Translationen (Verschiebungen) der Elementarzelle
- Kristalle mit hoher Symmetrie können noch mehrzählige Drehachsen haben
- allerdings muss die ganze Symmetrie eine Gruppe sein, d.h. es muss sich schliessen.
- es gibt nur 17 ebene Kristallgruppen
- es gibt nur 230 räumliche Kristallgruppen

Theorem

(Periodische) Kristalle können höchstens 2,3, 4 oder 6 zählige Drehsymmetrien haben.

In der Tat ist der Beweis gar nicht so kompliziert.

Man muss nur die Grundeigenschaften des Gitters und seiner Symmetrie ausnutzen:

1. es ist periodisch unter Translationen
2. es gibt einen Minimalabstand zwischen den Gitterpunkten
3. wenn man eine Symmetrieoperation auf einen Gitterpunkt anwendet ergibt sich wieder ein Gitterpunkt.

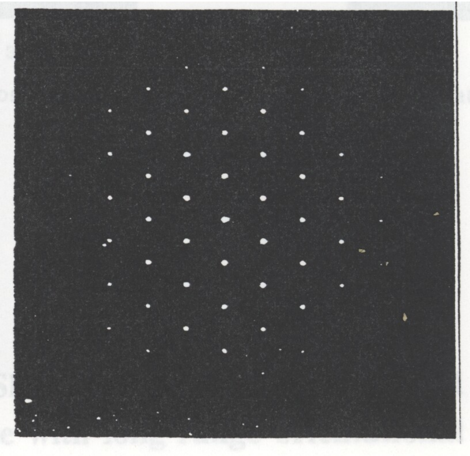


ABB: Beugung eines Kristalls mit höherer Drehsymmetrie

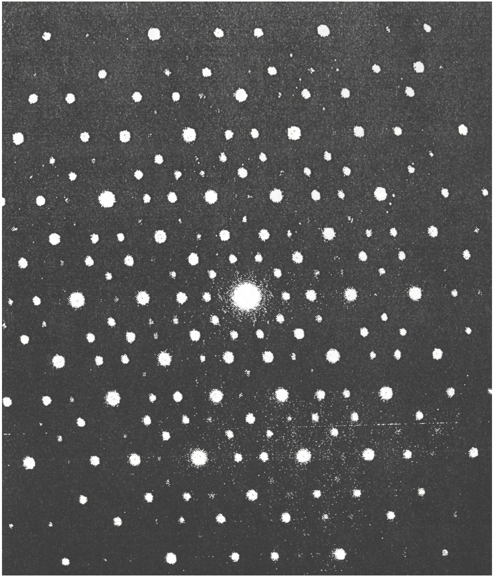
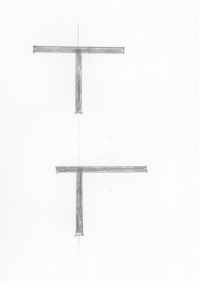


ABB: Ein Beugungsbild das es gar nicht geben dürfte

- Dies ist das Beugungsbild einer Legierung. Es besitzt 10-zählige Symmetrie.
- Ist die Mathematik falsch???
- Natürlich nicht!
- Die Modellvorstellung der Physiker war falsch: Es gäbe nur 2 Typen von festen Materialien: amorphe mit kontinuierlichen Beugungsbild und Kristalle (immer als periodisch angenommen) mit diskreten Beugungsbild.
- Aber die Mathematik sagt diese Legierung kann kein periodisches Gitter haben, also gibt es etwas drittes mit einer gewissen Ordnungsstruktur.
- **Quasikristalle** die quasiperiodisch sind.

Symmetrie in der Biologie

- Symmetrische Strukturen in der DNA tragen zur Genstabilisierung bei
- Gewisse symmetrische Formen sind unter gewissen Lebenssituationen deutlich angepasster und werden deshalb von der Evolution bevorzugt



- Auf Planetenoberfläche mit Schwerkraft ist die 1. Figur überlegen. Die Kräfte tarieren sich aus. Bei der 2. Figur gibt es einseitige resultierende Kräfte.
- Die Evolution wird im Schwerkraftfeld die 1. realisieren.
- Die 2. wird sich nur herausbilden, wenn der Greifarm gewisse Sonderfunktionen übernimmt (siehe Hummer)

- Spiegelsymmetrien sind für Lebewesen auf der Planetenoberfläche evolutionär günstig
- Ca. 19 von 20 Lebenwesen auf der Erde haben Spiegelsymmetrien
- Tiere die sich fortbewegen haben meist eine Richtung und deshalb gibt es vorne und hinten.
- wegen Gravitationsfeld gibt es oben und unten
- somit haben die meisten Tiere nur Spiegelsymmetrie (Evolution)
- Ausnahmen: Seesterne, Seeigel, Quallen, Pflanzen, bewegen sich wenig oder gar nicht vorwärts

Viren

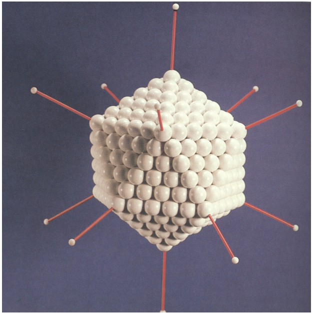


Abb: Virusmodell

- Der Ikosaeder ist der Platonische Körper der der Kugel am nächsten kommt (Oberfläche besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken)
- ist für viele Viren die bevorzugte Form ausserhalb der Wirtszelle, Kugel ist sehr stabil
- wegen der Symmetrie ist nur wenig Information nötig für den Aufbau

- Symmetrie führt zur Reduzierung der Komplexität
- Umweltsituation kann besser aufgenommen werden, es stürzen weniger Informationen auf uns herein
- Vor einem symmetrischen Hintergrund können Asymmetrien leichter als wichtige Information, Störungen, bzw. Bedrohungen erkannt werden.
- Symmetrie kann von Vorteil aber auch Nachteil sein
- zuviel Symmetrie verhindert dynamische Entwicklung, also verhindert Evolution

Symmetrien in der Physik

Geometrische Symmetrien

- aus postulierten Symmetrien folgt mit Hilfe der Mathematik, dass gewisse physikalische Größen erhalten bleiben
- Translationsinvarianz, d.h. an welchem Ort das Experiment stattfindet ist egal, erzwingt Impulserhaltung
- Impulserhaltung bedeutet: Ein Teilchen bewegt sich ohne äußere Kraft mit konstanter Geschwindigkeit
- Zeitinvarianz erzwingt Energieerhaltung
- Rotationsinvarianz erzwingt Drehimpulserhaltung

- In der modernen Physik betrachtet man auch interne Symmetrien denen die Quantenwelt und die Elementarteilchen genügen
- Postulierte Symmetriegruppen bedeuten, dass die Elementarteilchen gewisse “Darstellungen” dieser Gruppen sind
- Mathematik klassifiziert diese Darstellungen
- Aus der Existenz gewisser Teilchen folgt dann aus mathematischen Gründen (aufgrund der postulierten Symmetrie) die Existenz weiterer Teilchen
- So wurden die Vektorbosonen W und Z vorhergesagt, deren Existenz dann 1983 am Beschleuniger in CERN verifiziert wurden.

- es gibt zur Zeit vier bekannte elementare Käfte: elektromagnetische, schwache Wechselwirkung (verantwortlich fuer den radioaktiven Zerfall), starke Wechselwirkung (verantwortlich für den Atomkern) und die Gravitationskraft.
- jede hat ihre eigenen Symmetriegruppe
- Ziel der Physiker ist es diese Gruppen zu einer großen Gruppe zusammenzufassen

Grosse Vereinheitlichung

- Am Anfang des Universums bei unvorstellbaren Energien soll es nur eine einzige Kraft gegeben haben mit dieser großen Symmetriegruppe
- Bei der Abkühlung wurde die Symmetrie spontan gebrochen, die Kräfte haben sich separiert und es hat sich eine leichte Asymmetrie herausgebildet
- letztlich ist diese Asymmetrie verantwortlich für unsere Existenz

Weitere Begriffe: Supersymmetrie, Symmetrien der Stringtheorie, ...

WACHSTUMSPROZESSE

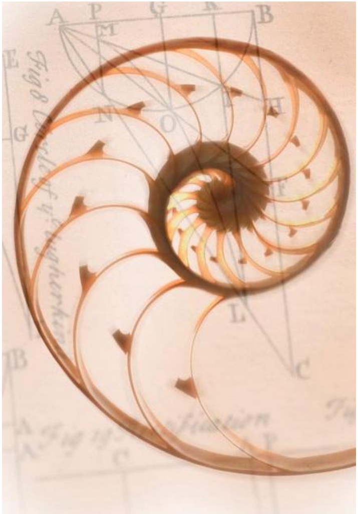


ABB: Das Wachstum eines Nautilus

ABB: Sonnenblume

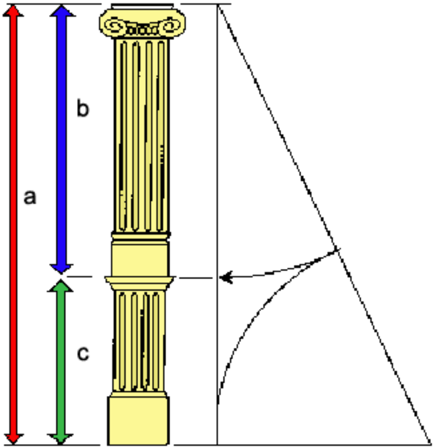
Fibonacci-Folgen

- Bei diskreten Wachstumprozessen hat man meist keine Gruppenstruktur
- jedoch trotzdem Reskalierungssymmetrien oder ähnliches
- von grosser Bedeutung ist hier die Fibonacci Folge f_n gegeben durch

$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad f_0 = 0,\ f_1 = 1.$$

- diese Zahlen werden bei den Beispielen realisiert
- was passiert für große n mit $q_n := f_n/f_{n-1}$?
- Antwort: Der Grenzwert ist $1/2\left(1+\sqrt{5}\right)$, die Zahl des goldenen Schnitts.

Goldener Schnitt



- gefordert ist $a/b = b/c$
- Normiert man b auf 1, so ist a die größere Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$
- Als Lösung ergibt sich die Zahl $1/2\left(1 + \sqrt{5}\right)$
- also dieselbe Zahl wie bei der Fibonnaci-Folge

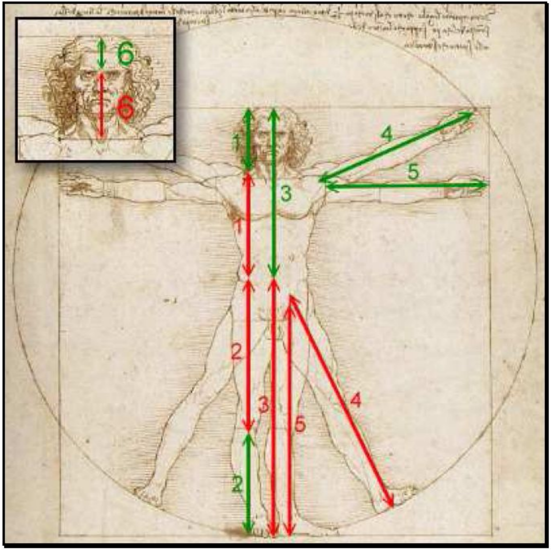


ABB: Zeichnung von Leonardo da Vinci mit goldenen Schnittzahlen