

# Critère d'irréductibilité pour les courbes elliptiques semi-stables sur un corps de nombres

Agnès David

Laboratoire de mathématiques de Versailles  
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines  
45 avenue des États-Unis  
78035 Versailles Cedex  
Agnes.David@ens-lyon.org

## Résumé

For a fixed number field and an elliptic curve defined and semi-stable over this number field, we consider the set of prime numbers  $p$  such that the Galois representation attached to the  $p$ -torsion points of the elliptic curve is reducible. When the number field satisfies a certain necessary condition, we give an explicit bound, depending only on the number field and not on the semi-stable elliptic curve, for these primes. This generalizes previous results of Kraus.

## Introduction

Cet article traite de la réductibilité de la représentation galoisienne associée aux points de torsion d'une courbe elliptique semi-stable définie sur un corps de nombres.

Pour les points de torsion dont l'ordre est un nombre premier strictement supérieur à une certaine borne, qui ne dépend que du corps de base et qu'on explicite, on démontre que, lorsque cette représentation est réductible, sa semi-simplifiée est isomorphe à la représentation associée à une courbe elliptique semi-stable et ayant des multiplications complexes sur le corps de base (voir le théorème II).

On en déduit, lorsque le corps de base vérifie la condition nécessaire que de telles courbes semi-stables et à multiplications complexes n'existent pas, une borne supérieure uniforme pour les nombres premiers pouvant donner lieu à une représentation réductible pour une courbe elliptique semi-stable (voir le théorème I). On généralise ainsi des résultats de Kraus (voir [Kra96] et [Kra07]). Enfin, on donne des exemples de corps satisfaisant le théorème I (voir la partie 3.4).

Les notations sont les suivantes. On fixe un corps de nombres  $K$  et un plongement de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  (dans tout le texte, on considérera ainsi  $K$  comme un sous-corps de  $\mathbb{C}$ ). Soit  $\overline{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{C}$ ; on note  $G_K$  le groupe de Galois

absolu  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$  de  $K$ . À partir de la partie 2 et pour toute la fin du texte, on suppose que l'extension  $K/\mathbb{Q}$  est galoisienne.

On fixe une courbe elliptique  $E$  définie sur  $K$  qui est semi-stable sur  $K$ , c'est-à-dire qui a, en toute place finie de  $K$ , soit réduction multiplicative (déployée ou non) soit bonne réduction.

On fixe un nombre premier  $p$  supérieur ou égal à 5 et non ramifié dans  $K$ . On note  $E_p$  l'ensemble des points de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  qui sont de  $p$ -torsion ; c'est un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{F}_p$ , sur lequel le groupe de Galois absolu  $G_K$  de  $K$  agit  $\mathbb{F}_p$ -linéairement. On désigne par  $\varphi_{E,p}$  la représentation de  $G_K$  ainsi obtenue ; elle prend ses valeurs dans le groupe  $\text{GL}(E_p)$  qui, après choix d'une base pour  $E_p$ , est isomorphe à  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ . On note enfin  $\chi_p$  le caractère cyclotomique de  $G_K$  dans  $\mathbb{F}_p^\times$  ; il coïncide avec le déterminant de la représentation  $\varphi_{E,p}$ .

Lorsque le corps de base  $K$  est celui des rationnels  $\mathbb{Q}$ , Mazur a démontré dans [Maz78] que, pour  $p$  strictement supérieur à 7 et  $E$  semi-stable (ou pour  $p$  strictement supérieur à 163 et  $E$  définie sur  $\mathbb{Q}$ , pas forcément semi-stable), la représentation  $\varphi_{E,p}$  est irréductible. Le théorème de Mazur constitue, pour le corps  $\mathbb{Q}$ , une partie de la réponse au « problème de Serre uniforme » (voir la partie 4.3 de [Ser72]) qui consiste à déterminer s'il existe une borne  $B_K$  vérifiant : pour toute courbe elliptique  $E$  définie sur  $K$  et sans multiplication complexe sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et tout nombre premier  $p$  strictement supérieur à  $B_K$ , la représentation  $\varphi_{E,p}$  est surjective. On pourra à ce sujet consulter les travaux récents de Bilu, Parent et Rebolledo (voir [BPR11]).

On supposera donc dans tout ce texte que le corps  $K$  est différent de  $\mathbb{Q}$  et on se limitera à l'étude des courbes elliptiques semi-stables sur  $K$ . Dans la direction d'une généralisation du résultat de Mazur pour les courbes elliptiques semi-stables, Kraus a posé, et traité dans certains cas, la question suivante (voir [Kra96] et [Kra07]).

**Question.** *Existe-t-il une borne  $C_K$ , ne dépendant que du corps de nombres  $K$  et vérifiant : pour toute courbe elliptique  $E$  définie et semi-stable sur  $K$  et tout nombre premier  $p$  strictement supérieur à  $C_K$ , la représentation  $\varphi_{E,p}$  est irréductible ?*

Kraus a résolu cette question, en explicitant la borne  $C_K$ , pour les corps quadratiques dans [Kra96] et pour les corps vérifiant une certaine condition (C) dans [Kra07]. L'appendice B de [Kra07] mentionne également que le théorème non effectif de [Mom95], allié aux bornes de Merel (voir [Mer96]) sur l'ordre des points de torsion d'une courbe elliptique, donne des résultats semblables pour les corps  $K$  ne contenant le corps de classes de Hilbert d'aucun corps quadratique imaginaire.

Une condition nécessaire sur le corps  $K$  pour que la réponse à la question ci-dessus soit positive est qu'il n'existe pas de courbe elliptique définie et semi-stable sur  $K$ , ayant de plus des multiplications complexes sur  $K$  (on remarque qu'une telle courbe elliptique a alors bonne réduction en toute place de  $K$ ). En effet, pour une telle courbe elliptique  $E$ , ayant des multiplications complexes par un corps quadratique imaginaire  $L$  contenu dans  $K$ , la représentation  $\varphi_{E,p}$  est réductible pour tout nombre premier  $p$  décomposé dans  $L$  (voir proposition 1.2 de [Bil11]).

On montre ici que cette condition est suffisante. Lorsqu'elle est réalisée, on donne de plus une forme explicite pour une borne  $C_K$  répondant à la question (voir définition 3.5).

**Théorème I (Borne uniforme d'irréductibilité).** *On suppose que le corps  $K$  est galoisien sur  $\mathbb{Q}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il n'existe pas de courbe elliptique définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes sur  $K$  et partout bonne réduction sur  $K$ .*
2. *Il existe une borne  $C_K$ , ne dépendant que du corps de nombres  $K$  et vérifiant : pour toute courbe elliptique  $E$  définie et semi-stable sur  $K$  et tout nombre premier  $p$  strictement supérieur à  $C_K$ , la représentation  $\varphi_{E,p}$  est irréductible.*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, la borne  $C_K$  donnée par la définition 3.5 satisfait la deuxième assertion.*

On trouvera dans la partie 3.4 (théorème III) des exemples de corps  $K$  satisfaisant le théorème I.

On renvoie aux définitions 2.8, 2.10, 3.2, 3.5, pour une formule explicite pour la borne  $C_K$ . Elle dépend du degré, du discriminant, du nombre de classes et du régulateur du corps  $K$ , ainsi que d'une constante absolue intervenant dans une forme explicite du théorème de Chebotarev due à Lagarias, Montgomery et Odlyzko (voir la partie 2.3 et [LMO79]). La détermination de la borne  $C_K$  utilise également les bornes de Bugeaud et Györy (voir [BG96]) sur la hauteur d'un générateur d'un idéal (voir partie 2.2) et, de manière cruciale, la borne uniforme sur l'ordre des points de torsion d'une courbe elliptique de Merel et Oesterlé qui figure dans les introductions de [Mer96] et [Par99] (voir la proposition 3.6).

Le théorème I découle du théorème II suivant, qui précise, pour les courbes elliptiques semi-stables, les résultats de [Dav08] (théorème I), [Dav11b] (théorème II) et (dans une forme non explicite) [Mom95] (théorème A).

**Théorème II (Forme de la représentation semi-simplifiée).** *On suppose que le corps  $K$  est galoisien sur  $\mathbb{Q}$  et qu'il existe une courbe elliptique  $E$  semi-stable sur  $K$  et un nombre premier  $p$  strictement supérieur à  $C_K$  tels que la représentation  $\varphi_{E,p}$  est réductible.*

*Alors il existe une courbe elliptique  $E'$  définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes sur  $K$  et partout bonne réduction sur  $K$ , telle que la semi-simplifiée de la représentation  $\varphi_{E,p}$  est isomorphe à la représentation  $\varphi_{E',p}$ .*

On remarque que le type supersingulier du théorème II de [Dav11b] n'apparaît pas ici ; en effet, il ne se produit que pour des courbes elliptiques ayant réduction additive aux places de  $K$  au-dessus de  $p$ .

Dans tout le texte, on suppose que la courbe elliptique  $E$  est semi-stable sur  $K$  et que la représentation  $\varphi_{E,p}$  est réductible. La courbe  $E$  possède alors un sous-groupe d'ordre  $p$  défini sur  $K$ . On fixe un tel sous-groupe  $W$  ; il lui est associé une isogénie de  $E$  de degré  $p$ , définie sur  $K$ . L'action de  $G_K$  sur  $W(\overline{\mathbb{Q}})$  est donnée par un caractère continu de  $G_K$  dans  $\mathbb{F}_p^\times$  ; on le note  $\lambda$  et, suivant la terminologie introduite dans [Maz78], on l'appelle le caractère d'isogénie associé au couple  $(E, W)$ . On

fixe également une base de  $E_p$  dont le premier vecteur engendre  $W(\overline{\mathbb{Q}})$ ; dans cette base la matrice de la représentation  $\varphi_{E,p}$  est triangulaire supérieure, de caractères diagonaux  $(\lambda, \chi_p \lambda^{-1})$ .

La méthode de démonstration du théorème I suit celle de [Dav08] et [Dav11b], inspirée de [Mom95]. Plutôt qu’appliquer les résultats de [Dav11b] (ou [Dav08]) à une courbe elliptique semi-stable, on a choisi d’en retracer la démonstration, qui donne une meilleure borne  $C_K$  (comparer les définitions 2.10, 3.2 et 3.5 du présent texte avec les définitions 2.10, 2.13 et 4.3 de [Dav11b]) et permet d’exprimer directement la semi-simplifiée de la représentation  $\varphi_{E,p}$  au lieu de sa puissance douzième. Néanmoins, lorsque c’était possible, on s’est référé à des résultats connus dans le cas général, en précisant l’amélioration propre aux courbes semi-stables.

La première partie de l’article rappelle les propriétés locales du caractère d’isogénie, en l’occurrence ses restrictions aux sous-groupes de décomposition des places finies de  $K$  hors de  $p$  et ses restrictions aux sous-groupes d’inertie des places de  $K$  au-dessus de  $p$ .

La deuxième partie regroupe des propriétés globales du caractère d’isogénie et du corps  $K$  (dont on suppose à partir de ce point du texte qu’il est galoisien sur  $\mathbb{Q}$ ). On y trouve notamment la théorie du corps de classes globale pour le carré du caractère d’isogénie, qui relie entre elles les propriétés locales de la première partie.

La troisième partie comporte la démonstration du théorème II (partie 3.3), dont le théorème I est une conséquence directe. Enfin, on donne dans la partie 3.4 (théorème III) une liste de corps satisfaisant les assertions du théorème I.

## 1 Propriétés locales du caractère d’isogénie

### 1.1 Aux places finies hors de $p$

Soient  $q$  un nombre premier rationnel différent de  $p$  et  $\mathfrak{q}$  un idéal premier de  $K$  au-dessus de  $q$ .

**Proposition 1.1.** *Le caractère  $\lambda$  est non ramifié en  $\mathfrak{q}$ .*

*Démonstration.* Lorsque la courbe  $E$  a bonne réduction en  $\mathfrak{q}$ , le résultat est donné par le théorème 1 de [ST68].

Lorsque la courbe  $E$  a réduction multiplicative en  $\mathfrak{q}$ , il découle de la partie §1.12 de [Ser72]. Pour un énoncé précis, on renvoie à la proposition 1.1.1 de [Dav08], la proposition 3 de [Kra07] ou la proposition 1.4 de [Dav11b] (avec l’entier  $e_{\mathfrak{q}}$  égal à 1, voir §1.1.1 de *loc. cit.*).  $\square$

*Notations 1.2.*

1. On fixe dans  $G_K$  un élément de Frobenius  $\sigma_{\mathfrak{q}}$  pour  $\mathfrak{q}$ ; comme le caractère  $\lambda$  est d’image abélienne et non ramifié en  $\mathfrak{q}$ , l’image de  $\sigma_{\mathfrak{q}}$  par  $\lambda$  est indépendante de ce choix.
2. On note  $N_{\mathfrak{q}}$  le cardinal du corps résiduel de  $K$  en  $\mathfrak{q}$ .

**Proposition 1.3.** *On suppose que  $E$  a réduction multiplicative en  $\mathfrak{q}$ . Alors  $\lambda^2(\sigma_{\mathfrak{q}})$  vaut 1 ou  $(N\mathfrak{q})^2$  modulo  $p$ .*

*Démonstration.* Voir par exemple la proposition 1.1.1 de [Dav08] ou la proposition 1.4 de [Dav11b].  $\square$

On rappelle également les résultats de [ST68] qui serviront dans la suite (voir aussi la proposition 1.1.2 de [Dav08] ou la partie 1.3.2 de [Dav11b]).

**Proposition 1.4** (Théorème 3 de [ST68]). *On suppose que  $E$  a bonne réduction en  $\mathfrak{q}$ . Alors le polynôme caractéristique de l'action de  $\sigma_{\mathfrak{q}}$  sur le module de Tate en  $p$  de  $E$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (et indépendant de  $p$ ); ses racines ont pour valeur absolue complexe  $\sqrt{N\mathfrak{q}}$ .*

*Notations 1.5.*

1. On note  $P_{\mathfrak{q}}(X)$  le polynôme caractéristique de l'action de  $\sigma_{\mathfrak{q}}$  sur le module de Tate en  $p$  de  $E$ . Il est de la forme  $X^2 - T_{\mathfrak{q}}X + N\mathfrak{q}$  avec  $T_{\mathfrak{q}}$  un entier de valeur absolue inférieure ou égale à  $2\sqrt{N\mathfrak{q}}$ . Son discriminant  $T_{\mathfrak{q}}^2 - 4N\mathfrak{q}$  est donc un entier négatif et ses racines sont conjuguées complexes l'une de l'autre.
2. On note  $L^{\mathfrak{q}}$  le sous-corps engendré dans  $\mathbb{C}$  par les racines de  $P_{\mathfrak{q}}(X)$ ; le corps  $L^{\mathfrak{q}}$  est soit  $\mathbb{Q}$  soit un corps quadratique imaginaire.

**Proposition 1.6.** *On suppose que  $E$  a bonne réduction en  $\mathfrak{q}$ . Soit  $\mathcal{P}^{\mathfrak{q}}$  un idéal premier de  $L^{\mathfrak{q}}$  au-dessus de  $p$ . Alors les images dans  $\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}/\mathcal{P}^{\mathfrak{q}}$  des racines de  $P_{\mathfrak{q}}(X)$  sont dans  $\mathbb{F}_p^{\times}$ ; il existe une racine  $\beta_{\mathfrak{q}}$  de  $P_{\mathfrak{q}}(X)$  vérifiant :*

$$(\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}}), (\chi_p \lambda^{-1})(\sigma_{\mathfrak{q}})) = (\beta_{\mathfrak{q}} \bmod \mathcal{P}^{\mathfrak{q}}, \overline{\beta_{\mathfrak{q}}} \bmod \mathcal{P}^{\mathfrak{q}}).$$

*Démonstration.* Cela résulte de la réductibilité de la représentation  $\varphi_{E,p}$  (voir aussi la proposition 1.1.2 de [Dav08] ou la proposition 1.8 de [Dav11b]).  $\square$

## 1.2 Aux places finies au-dessus de $p$ : action de l'inertie

Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $K$  situé au-dessus de  $p$ . On fixe dans  $G_K$  un sous-groupe d'inertie  $I_{\mathfrak{p}}$  pour  $\mathfrak{p}$ .

**Proposition 1.7.**

1. *On suppose que  $E$  a réduction multiplicative en  $\mathfrak{p}$ . Alors  $\lambda$  restreint à  $I_{\mathfrak{p}}$  est trivial ou égal à  $\chi_p$ .*
2. *On suppose que  $E$  a bonne réduction en  $\mathfrak{p}$ . Alors cette réduction est ordinaire et  $\lambda$  restreint à  $I_{\mathfrak{p}}$  est trivial ou égal à  $\chi_p$ .*

*Démonstration.* Lorsque  $E$  a réduction multiplicative en  $\mathfrak{p}$ , le résultat est donné par la proposition 13 (et son corollaire) de [Ser72], §1.12.

Lorsque  $E$  a bonne réduction en  $\mathfrak{p}$ , on suppose d'abord par l'absurde que  $E$  a réduction supersingulière en  $\mathfrak{p}$ . Alors, par la proposition 12 (§1.11(2)) de [Ser72],

l'image par  $I_{\mathfrak{p}}$  de  $\varphi_{E,p}$  est un groupe cyclique d'ordre  $p^2 - 1$ . Ceci contredit l'hypothèse que la représentation  $\varphi_{E,p}$  est réductible et que l'ordre de son image divise donc  $p(p-1)^2$ . La courbe  $E$  a ainsi réduction ordinaire en  $\mathfrak{p}$ ; le résultat découle alors de la proposition 11 et son corollaire dans [Ser72] (§1.11(1)) (voir aussi la proposition 3 de [Kra07]).  $\square$

*Notation 1.8.* On note  $a_{\mathfrak{p}}$  l'entier, égal à 0 ou 1, tel que  $\lambda$  restreint au sous-groupe d'inertie  $I_{\mathfrak{p}}$  coïncide avec  $\chi_p^{a_{\mathfrak{p}}}$ .

## 2 Des propriétés globales

### 2.1 Théorie du corps de classes pour le caractère $\lambda^2$

La théorie du corps de classes globale associée au caractère abélien  $\lambda^2$  de  $G_K$  dans  $\mathbb{F}_p^\times$  un morphisme de groupes du groupe des idèles  $\mathbb{A}_K^\times$  de  $K$  dans  $\mathbb{F}_p^\times$  qui est continu et trivial sur les idèles diagonales. On note  $r$  ce morphisme.

Pour toute place (finie ou infinie)  $\nu$  de  $K$ , on note  $K_\nu$  le complété de  $K$  en  $\nu$  et  $r_\nu$  la composée de l'injection de  $K_\nu^\times$  dans les idèles  $\mathbb{A}_K^\times$  et du morphisme  $r$ . Lorsque  $\nu$  est une place finie, on note  $U_{K_\nu}$  les unités du corps local  $K_\nu$ ; dans ce cas, on utilise indifféremment en indice la place  $\nu$  et l'idéal maximal de  $K$  qui lui correspond.

Les propriétés locales du caractère  $\lambda^2$  établies dans la partie 1 ont les interprétations suivantes pour le morphisme  $r$  (voir également [Dav08] §2.1, [Dav11b] §2.1 ou [Bil11] §2.3) pour des discussions semblables) :

- (i) pour une place infinie  $\nu$  de  $K$ , l'application  $r_\nu$  est triviale;
- (ii) pour un idéal maximal  $\mathfrak{q}$  de  $K$  qui n'est pas au-dessus de  $p$ , l'application  $r_{\mathfrak{q}}$  envoie toute uniformisante de  $K_{\mathfrak{q}}$  sur  $\lambda^2(\sigma_{\mathfrak{q}})$  et sa restriction à  $U_{K_{\mathfrak{q}}}$  est triviale;
- (iii) pour un idéal maximal  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$ , la restriction de  $r_{\mathfrak{p}}$  à  $U_{K_{\mathfrak{p}}}$  coïncide avec la composée d'applications

$$U_{K_{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}} U_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow[\text{modulo } p]{\text{réduction}} \mathbb{F}_p^\times \xrightarrow[\text{à la puissance } -2a_{\mathfrak{p}}]{\text{élévation}} \mathbb{F}_p^\times.$$

*Notations 2.1.* Pour toute place  $\nu$  de  $K$ , on note  $\iota_\nu$  le plongement de  $K$  dans le complété  $K_\nu$ . Pour tout idéal maximal  $\mathfrak{L}$  de  $K$ , on note  $\text{val}_{\mathfrak{L}}$  la valuation de  $K$  associée à  $\mathfrak{L}$  dont l'image est  $\mathbb{Z}$ .

**Proposition 2.2.** *Soit  $\alpha$  un élément de  $K$  non nul et premier à  $p$ ; alors on a :*

$$\prod_{\mathfrak{q}|p} \lambda^2(\sigma_{\mathfrak{q}})^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)} = \prod_{\mathfrak{p}|p} N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(\iota_{\mathfrak{p}}(\alpha))^{2a_{\mathfrak{p}}} \pmod{p}.$$

*Démonstration.* La démonstration repose sur le même principe que celle du lemme 1 de [Mom95] (voir aussi la proposition 2.2.1 de [Dav08] ou la proposition 2.4

de [Dav11b]). L'image par  $r$  de l'idèle principale  $(\iota_\nu(\alpha))_\nu$  étant triviale, on a (tous les produits étant finis) :

$$\begin{aligned} 1 &= r((\iota_\nu(\alpha))_\nu) = \prod_\nu r_\nu(\iota_\nu(\alpha)) = \prod_{\nu|\infty} 1 \times \prod_{\mathfrak{q} \nmid p} r_\mathfrak{q}(\iota_\mathfrak{q}(\alpha)) \times \prod_{\mathfrak{p} \mid p} r_\mathfrak{p}(\iota_\mathfrak{p}(\alpha)) \\ &= \prod_{\mathfrak{q} \nmid p} \lambda^2(\sigma_\mathfrak{q})^{\text{val}_\mathfrak{q}(\alpha)} \times \prod_{\mathfrak{p} \mid p} \left( N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(\iota_\mathfrak{p}(\alpha))^{-2a_\mathfrak{p}} \pmod{p} \right). \end{aligned}$$

□

*Notations 2.3.* Pour toute la suite du texte :

- on suppose que l'extension  $K/\mathbb{Q}$  est galoisienne et on note  $G$  son groupe de Galois ;
- on fixe un idéal  $\mathfrak{p}_0$  de  $K$  au-dessus de  $p$  ;
- pour tout élément  $\tau$  de  $G$ , on note  $a_\tau$  l'entier  $a_\mathfrak{p}$  associé à l'idéal  $\mathfrak{p} = \tau^{-1}(\mathfrak{p}_0)$  ;
- on note  $\mathcal{N}$  l'application de  $K$  dans lui-même qui envoie un élément  $\alpha$  sur la norme tordue par les entiers  $(2a_\tau)_{\tau \in G}$  (c'est-à-dire qu'on a  $\mathcal{N}(\alpha) = \prod_{\tau \in G} \tau(\alpha)^{2a_\tau}$ ) ; on remarque que l'application  $\mathcal{N}$  préserve  $K^\times$ ,  $\mathcal{O}_K$  et les éléments de  $K$  premiers à  $p$ .

Avec ces notations, la proposition 2.2 admet la reformulation globale suivante.

**Proposition 2.4.** *Soit  $\alpha$  un élément de  $K$  non nul et premier à  $p$  ; alors on a :*

$$\prod_{\mathfrak{q} \nmid p} \lambda^2(\sigma_\mathfrak{q})^{\text{val}_\mathfrak{q}(\alpha)} = \iota_{\mathfrak{p}_0}(\mathcal{N}(\alpha)) \pmod{\mathfrak{p}_0}.$$

*Démonstration.* L'élément  $\prod_{\mathfrak{p} \mid p} N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(\iota_\mathfrak{p}(\alpha))^{2a_\mathfrak{p}}$  de  $\mathbb{Z}_p$  est l'image par l'injection canonique  $\iota_{\mathfrak{p}_0}$  de  $K$  dans son complété  $K_{\mathfrak{p}_0}$  de l'élément  $\prod_{\tau \in G} \tau(\alpha)^{2a_\tau}$  de  $K$ . □

## 2.2 Borne pour la hauteur d'un générateur d'idéal

Cette partie reprend les résultats de la partie 2.3 de [Dav08] (voir aussi les parties 2.3 et 2.4 de [Dav11b]) qui donnent une borne pour toutes les valeurs absolues archimédiennes de la norme tordue  $\mathcal{N}$  d'un certain générateur d'idéal dans  $\mathcal{O}_K$ .

*Notations 2.5.* On note  $d_K$  le degré du corps  $K$  sur  $\mathbb{Q}$  et  $h_K$  son nombre de classes d'idéaux. Soit  $\alpha$  un élément non nul de  $K$ . On note  $H$  la hauteur absolue de  $\alpha$  définie par

$$H(\alpha) = \left( \prod_{\nu \text{ place de } K} \max(1, |\alpha|_\nu) \right)^{1/d_K},$$

avec les normalisations suivantes pour les valeurs absolues  $|\cdot|_\nu$  :

- si  $\nu$  est une place réelle, associée à un élément  $\tau$  de  $G$ ,  $|\cdot|_\nu = |\tau(\cdot)|_\mathbb{C}$  ;
- si  $\nu$  est une place complexe, associée à un élément  $\tau$  de  $G$ ,  $|\cdot|_\nu = |\tau(\cdot)|_\mathbb{C}^2$  ;
- si  $\nu$  est une place finie, associée à un idéal premier  $\mathfrak{L}$  de  $K$ ,  $|\cdot|_\nu = (N\mathfrak{L})^{-\text{val}_\mathfrak{L}(\cdot)}$ .

Lorsque  $\alpha$  est un entier de  $K$ , les seules places apportant une contribution non triviale dans le produit définissant  $H(\alpha)$  sont les places infinies.

**Lemme 2.6.** *Soit  $\alpha$  un élément non nul de  $\mathcal{O}_K$  ; alors, pour tout  $\tau$  dans  $G$ , on a :*

$$|\tau(\mathcal{N}(\alpha))|_{\mathbb{C}} \leq H(\alpha)^{2d_K}.$$

*Démonstration.* La démonstration repose sur un calcul semblable à celui de la démonstration de la proposition 2.3.1 de [Dav08] (voir aussi le lemme 2 (partie 2.3) de [Dav11b]), à ceci près que les entiers intervenant en exposant dans la définition de  $\mathcal{N}$  valent ici 0 ou 2, alors qu'ils sont compris entre 0 et 12 dans *loc. cit.*.  $\square$

*Notations 2.7.* Suivant [BG96], on note :

- $R_K$  le régulateur de  $K$  ;
- $r_K$  le rang du groupe des unités de  $K$  ( $K$  étant supposé galoisien sur  $\mathbb{Q}$ ,  $r_K$  vaut  $d_K - 1$  si  $K$  est totalement réel et  $\frac{d_K}{2} - 1$  sinon) ;
- $\delta_K$  un réel strictement positif minorant  $d_K \ln(H(\alpha))$  pour tout élément non nul  $\alpha$  de  $K$  qui n'est pas une racine de l'unité ; si  $d_K$  est égal à 2, on peut prendre  $\delta_K$  égal à  $\frac{\ln 2}{r_K + 1}$  ; si  $d_K$  est supérieur ou égal à 3, on peut prendre  $\delta_K$  égal à  $\frac{1}{53d_K \ln(6d_K)}$  ou  $\frac{1}{1201} \left( \frac{\ln(\ln d_K)}{\ln d_K} \right)^3$ .

**Définition 2.8** (Borne  $C_1(K)$ ). *On pose :*

$$C_1(K) = \frac{r_K^{r_K+1} \delta_K^{-(r_K-1)}}{2}.$$

On remarque que  $C_1(K)$  peut s'exprimer en n'utilisant que le degré  $d_K$  de  $K$  sur  $\mathbb{Q}$ . Avec ces notations, le lemme 2 (partie 3) de [BG96] s'écrit de la manière suivante.

**Lemme 2.9.** *Pour tout élément non nul  $\alpha$  de  $\mathcal{O}_K$ , il existe une unité  $u$  de  $K$  vérifiant :*

$$H(u\alpha) \leq |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|^{1/d_K} \exp(C_1(K)R_K).$$

**Définition 2.10** (Borne  $C_2(K)$ ). *On pose :*

$$C_2(K) = \exp(2d_K C_1(K)R_K).$$

On remarque que  $C_2(K)$  ne dépend que du degré et du régulateur de  $K$ .

**Proposition 2.11.** *Soit  $\mathfrak{L}$  un idéal maximal de  $K$ . Il existe un générateur  $\gamma_{\mathfrak{L}}$  de  $\mathfrak{L}^{h_K}$  satisfaisant pour tout  $\tau$  dans  $G$  :*

$$|\tau(\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{L}}))|_{\mathbb{C}} \leq (N\mathfrak{L})^{2h_K} C_2(K).$$

*Démonstration.* Par le lemme 2.9, on peut choisir un générateur de l'idéal principal  $\mathfrak{L}^{h_K}$  dont la hauteur est bornée par  $(N\mathfrak{L})^{h_K/d_K} \exp(C_1(K)R_K)$  ; on conclut alors par le lemme 2.6 (voir aussi la proposition 2.3.4 de [Dav08] ou la proposition 2.11 de [Dav11b]).  $\square$



### 2.3 Une version effective du théorème de Chebotarev

**Théorème (Chebotarev effectif, [LMO79]).** *Il existe une constante absolue et effectivement calculable  $A$  ayant la propriété suivante : soient  $M$  un corps de nombres,  $N$  une extension finie galoisienne de  $M$ ,  $\Delta_N$  le discriminant de  $N$ ,  $C$  une classe de conjugaison du groupe de Galois  $\text{Gal}(N/M)$  ; alors il existe un idéal premier de  $M$ , non ramifié dans  $N$ , dont la classe de conjugaison des frobenius dans l'extension  $N/M$  est la classe de conjugaison  $C$  et dont la norme dans l'extension  $M/\mathbb{Q}$  est un nombre premier rationnel inférieur ou égal à  $2(\Delta_N)^A$ .*

*Notation 2.12.* On note  $\Delta_K$  le discriminant de  $K$ .

**Définition 2.13** (Ensemble d'idéaux  $\mathcal{J}_K$ ). *On note  $\mathcal{J}_K$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $K$  dont la norme dans l'extension  $K/\mathbb{Q}$  est un nombre premier rationnel totalement décomposé dans  $K$  et inférieur ou égal à  $2(\Delta_K)^{Ah_K}$ .*

**Proposition 2.14.** *Toute classe d'idéaux de  $K$  contient un idéal de  $\mathcal{J}_K$ .*

*Démonstration.* Voir [Dav08], proposition 3.1.2 ou [Dav11b], proposition 4.2.  $\square$

## 3 Démonstrations des théorèmes

### 3.1 Compatibilité des actions au-dessus et hors de $p$

*Notations 3.1.* Soit  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $K$  premier à  $p$  en lequel  $E$  a bonne réduction.

1. On fixe un idéal  $\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{q}}$  de  $KL^{\mathfrak{q}}$  au-dessus de  $\mathfrak{p}_0$  (voir notations 1.5 et 2.3). Comme le corps  $L^{\mathfrak{q}}$  est soit  $\mathbb{Q}$ , soit un corps quadratique imaginaire, il y a au plus deux choix possibles pour  $\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{q}}$  ; si  $L^{\mathfrak{q}}$  est inclus dans  $K$ , le seul choix possible pour  $\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{q}}$  est  $\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_0$ .
2. On note  $\mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}$  l'unique idéal de  $L^{\mathfrak{q}}$  situé au-dessous de  $\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{q}}$ .
3. D'après la proposition 1.6, il existe une racine du polynôme  $P_{\mathfrak{q}}(X)$  dont la classe modulo  $\mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}$  (qui est dans  $\mathbb{F}_p$ ) vaut  $\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}})$  ; on note  $\beta_{\mathfrak{q}}$  une telle racine.

**Définition 3.2** (Borne  $C(K, n)$ ). *Pour tout entier  $n$ , on pose :*

$$C(K, n) = (n^{2h_K} C_2(K) + n^{h_K})^{2d_K}.$$

**Proposition 3.3.** *Soient  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $K$  premier à  $p$  et  $\gamma_{\mathfrak{q}}$  un générateur de  $\mathfrak{q}^{h_K}$  vérifiant l'inégalité de la proposition 2.11. On suppose que  $p$  est strictement supérieur à  $C(K, N\mathfrak{q})$ . Alors on est dans l'un des trois cas suivants (avec les notations 2.3 et 3.1) :*

Type de réduction de $E$ en $\mathfrak{q}$	$\lambda^2(\sigma_{\mathfrak{q}})$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$	Cas
<i>multiplicatif</i>	$1 \bmod p$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) = 1$	<i>M0</i>
	$(N\mathfrak{q})^2 \bmod p$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) = (N\mathfrak{q})^{2h_K}$	<i>M1</i>
<i>bon</i>	$\beta_{\mathfrak{q}}^2 \bmod \mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) = \beta_{\mathfrak{q}}^{2h_K}$	<i>B</i>

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle de la proposition 2.4.1 de [Dav08] (ou de la proposition 2.14 de [Dav11b]). On en rappelle ici le principe.

D'après les propositions 1.3 et 1.6 et en appliquant la proposition 2.4 à l'élément  $\gamma_{\mathfrak{q}}$  de  $\mathcal{O}_K$ , on obtient qu'on est dans l'un des trois cas suivants :

Type de réduction de $E$ en $\mathfrak{q}$	$\lambda^2(\sigma_{\mathfrak{q}})$	Congruence	Cas
multiplicatif	$1 \pmod{p}$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_0}$	M0
	$(N\mathfrak{q})^2 \pmod{p}$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) \equiv (N\mathfrak{q})^{2h_{\mathfrak{K}}} \pmod{\mathfrak{p}_0}$	M1
bon	$\beta_{\mathfrak{q}}^2 \pmod{\mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}}$	$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) \equiv \beta_{\mathfrak{q}}^{2h_{\mathfrak{K}}} \pmod{\mathfrak{p}_0^{\mathfrak{q}}}$	B

Ainsi, selon chaque cas,  $p$  divise l'un des trois entiers relatifs  $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) - 1)$ ,  $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) - (N\mathfrak{q})^{2h_{\mathfrak{K}}})$  ou  $N_{KL^{\mathfrak{q}}/\mathbb{Q}}(\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}}) - \beta_{\mathfrak{q}}^{2h_{\mathfrak{K}}})$ . Comme  $p$  est choisi strictement supérieur à  $C(K, N\mathfrak{q})$ , qui par la proposition 2.11 est supérieur ou égal aux valeurs absolues de ces trois entiers, on obtient que dans chaque cas, l'entier relatif en question est nul, ce qui donne la conclusion de la proposition.  $\square$

**Proposition 3.4.** *Soient  $q$  un nombre premier rationnel totalement décomposé dans  $K$  et  $\mathfrak{q}$  un idéal premier de  $K$  au-dessus de  $q$ . On suppose que  $p$  est strictement plus grand que  $C(K, q)$ . Alors on est dans l'un des quatre cas suivants (avec les notations 3.1) :*

Réduction de $E$ en $\mathfrak{q}$	$\lambda^2(\sigma_{\mathfrak{q}})$	Famille $(a_{\tau})_{\tau \in G}$	Cas
<i>multiplicative</i>	$1 \pmod{p}$	$\forall \tau \in G, a_{\tau} = 0$	<i>M0</i>
	$q^2 \pmod{p}$	$\forall \tau \in G, a_{\tau} = 1$	<i>M1</i>
<i>bonne (ordinaire), corps <math>L^{\mathfrak{q}}</math> quadratique, inclus dans <math>K</math>,</i>	$N_{K/L^{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{q}) = \beta_{\mathfrak{q}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$	$\forall \tau \in \text{Gal}(K/L^{\mathfrak{q}}), a_{\tau} = 1$ et $a_{\tau} = 0$ sinon	<i>BO</i>
<i><math>p</math> décomposé dans <math>L^{\mathfrak{q}}</math></i>	$N_{K/L^{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{q}) = \overline{\beta_{\mathfrak{q}}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$	$\forall \tau \in \text{Gal}(K/L^{\mathfrak{q}}), a_{\tau} = 0$ et $a_{\tau} = 1$ sinon	<i>BO'</i>

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle de la proposition 2.15 de [Dav11b] (voir aussi la proposition 2.4.2 de [Dav08] et le lemme 2 de [Mom95]). On en rappelle ici les principaux arguments, car la proposition 3.4 est centrale pour la démonstration du théorème II.

Comme le nombre premier  $q$  est supposé totalement décomposé dans l'extension galoisienne  $K/\mathbb{Q}$ , les idéaux  $\tau(\mathfrak{q})$  sont deux à deux distincts lorsque  $\tau$  décrit  $G$ , leur produit est l'idéal  $q\mathcal{O}_K$  et la norme de  $\mathfrak{q}$  dans  $K/\mathbb{Q}$  est égale à  $q$ . En particulier, en supposant que  $p$  est strictement supérieur à  $C(K, q)$ , on se place dans les hypothèses de la proposition 3.3. On raisonne donc selon les trois cas de cette proposition.

L'idéal engendré par  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$  dans  $\mathcal{O}_K$  est :

$$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})\mathcal{O}_K = \left( \prod_{\tau \in G} \tau(\gamma_{\mathfrak{q}})^{2a_{\tau}} \right) \mathcal{O}_K = \prod_{\tau \in G} (\tau(q^{h_K}))^{2a_{\tau}} = \left( \prod_{\tau \in G} \tau(q)^{a_{\tau}} \right)^{2h_K}$$

Dans les cas M0 et M1, la comparaison de l'idéal engendré dans  $\mathcal{O}_K$  par  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$  avec celui engendré par 1 ou  $q^{2h_K}$  donne le résultat de la proposition.

Dans le cas B, l'élément  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$  de  $K$  est contenu dans  $L^{\mathfrak{q}}$ ; ainsi, soit il est rationnel, soit il engendre  $L^{\mathfrak{q}}$  (qui est alors contenu dans  $K$ ).

On suppose d'abord que  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$ , qui est égal à  $\beta_{\mathfrak{q}}^{2h_K}$ , est rationnel. Alors  $\beta_{\mathfrak{q}}^{2h_K}$  est à la fois un entier algébrique (de  $L^{\mathfrak{q}}$ ) et rationnel; il appartient donc à  $\mathbb{Z}$ . Comme sa valeur absolue complexe est  $q^{h_K}$ , on a  $\beta_{\mathfrak{q}}^{2h_K}$  égal à  $q^{h_K}$  ou  $-q^{h_K}$ . Dans les deux cas,  $\beta_{\mathfrak{q}}^{2h_K}$ , qui est égal à  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$ , engendre dans  $\mathcal{O}_K$  l'idéal :

$$\left( \prod_{\tau \in G} \tau(q)^{a_{\tau}} \right)^{2h_K} = \mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})\mathcal{O}_K = \beta_{\mathfrak{q}}^{2h_K}\mathcal{O}_K = q^{h_K}\mathcal{O}_K = \left( \prod_{\tau \in G} \tau(q) \right)^{h_K}.$$

Ceci est impossible (avec les idéaux  $(\tau(\mathfrak{q}))_{\tau \in G}$  deux à deux distincts et les entiers  $(a_{\tau})_{\tau \in G}$  valant 0 ou 1).

Ainsi, l'élément  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$  de  $K$  engendre  $L^{\mathfrak{q}}$ , qui est quadratique imaginaire et contenu dans  $K$ . La fin de la démonstration de la proposition 2.15 de [Dav11b] (à partir de la page 20; voir aussi la proposition 2.4.2 de [Dav08]) s'applique alors directement, en prenant garde que les entiers  $(a_{\tau})_{\tau \in G}$  de *loc. cit.* valent 12 fois ceux du présent texte.

On résume ici les étapes de cette démonstration. Le fait que  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$  appartienne à  $L^{\mathfrak{q}}$  donne que les entiers  $(a_{\tau})_{\tau \in G}$  sont constants sur les classes modulo  $\text{Gal}(K/L^{\mathfrak{q}})$ , sous-groupe d'indice 2 de  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ . Alors  $\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})$  engendre dans  $\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$  l'idéal (avec  $\gamma$  un élément de  $G$  induisant sur  $L^{\mathfrak{q}}$  la conjugaison complexe) :

$$\mathcal{N}(\gamma_{\mathfrak{q}})\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}} = (\beta_{\mathfrak{q}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}})^{2h_K} = \left( (N_{K/L^{\mathfrak{q}}}(q))^{a_{id}} \left( \overline{N_{K/L^{\mathfrak{q}}}(q)} \right)^{a_{\gamma}} \right)^{2h_K}.$$

Comme on a supposé  $q$  totalement décomposé dans l'extension  $K/\mathbb{Q}$ ,  $q$  est également totalement décomposé dans les extensions  $L^{\mathfrak{q}}/\mathbb{Q}$  et  $K/L^{\mathfrak{q}}$ . La norme  $N_{K/L^{\mathfrak{q}}}(q)$  est donc un idéal premier de  $L^{\mathfrak{q}}$  au-dessus de  $q$ . Or l'égalité  $q = \beta_{\mathfrak{q}}\overline{\beta_{\mathfrak{q}}}$  indique que les deux idéaux premiers (distincts) de  $L^{\mathfrak{q}}$  au-dessus de  $q$  sont  $\beta_{\mathfrak{q}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$  et  $\overline{\beta_{\mathfrak{q}}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$ . Ainsi  $N_{K/L^{\mathfrak{q}}}(q)$  est égal soit à  $\beta_{\mathfrak{q}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$  soit à  $\overline{\beta_{\mathfrak{q}}}\mathcal{O}_{L^{\mathfrak{q}}}$ . L'égalité entre idéaux ci-dessus donne alors les cas BO et BO' de la proposition.

Comme le polynôme  $X^2 - T_{\mathfrak{q}}X + q$  (voir les notations 1.5) est scindé modulo  $p$  (voir la proposition 1.6), l'entier  $T_{\mathfrak{q}}^2 - 4q$  est un carré modulo  $p$ . Ainsi, soit  $p$  est décomposé dans  $L^{\mathfrak{q}}$ , soit  $p$  divise l'entier relatif non nul  $T_{\mathfrak{q}}^2 - 4q$ . Comme la valeur absolue de  $T_{\mathfrak{q}}^2 - 4q$  est  $4q - T_{\mathfrak{q}}^2$  et inférieure ou égale à  $4q$ , le choix de  $p$  strictement supérieur à  $C(K, q)$  (cette borne étant strictement supérieure à  $4q$ ), implique que  $p$  est décomposé dans le corps quadratique  $L^{\mathfrak{q}}$ .

Enfin, on suppose par l'absurde que  $E$  a réduction supersingulière en  $\mathfrak{q}$ . Ceci équivaut à ce que  $q$  divise  $T_{\mathfrak{q}}$ , entier relatif de valeur absolue inférieure ou égale à  $2\sqrt{q}$ . Alors on est dans l'un des cas suivants :  $T_{\mathfrak{q}}$  est nul ;  $q$  est égal à 2 et  $T_{\mathfrak{q}}$  est égal à 0, 2 ou  $-2$  ;  $q$  est égal à 3 et  $T_{\mathfrak{q}}$  est égal à 0, 3 ou  $-3$ . Si  $T_{\mathfrak{q}}$  est nul ou  $q$  est égal à 3 et  $T_{\mathfrak{q}}$  vaut  $\pm 3$ , alors  $L^{\mathfrak{q}}$  est égal à  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ , dans lequel  $q$  est ramifié ; si  $q$  est égal à 2 et  $T_{\mathfrak{q}}$  vaut  $\pm 2$ , alors  $L^{\mathfrak{q}}$  est égal à  $\mathbb{Q}(i)$ , dans lequel 2 est ramifié. Or, on a montré que  $q$  est décomposé dans le corps  $L^{\mathfrak{q}}$ , qui est inclus dans  $K$ . On en déduit que  $E$  a réduction ordinaire en  $\mathfrak{q}$ .  $\square$

**Définition 3.5** (Borne  $C_K$ ). *On pose*

$$C_K = \max \left( C(K, 2(\Delta_K)^{Ah_K}), \left(1 + 3^{\frac{d_{Kh_K}}{2}}\right)^2 \right).$$

Le nombre  $C_K$  ne dépend que du corps de nombres  $K$ .

Les bornes uniformes sur l'ordre des points de torsion d'une courbe elliptique figurant dans [Mer96] ou [Par99] permettent d'éliminer les cas M0 et M1 de la proposition 3.4 (voir aussi l'appendice B de [Kra07]).

**Proposition 3.6.** *On suppose que  $p$  est strictement supérieur à  $C_K$ . Alors, en tout idéal de  $\mathcal{J}_K$ , la courbe  $E$  a bonne réduction et tous les idéaux de  $\mathcal{J}_K$  appartiennent au même cas (BO ou BO') de la proposition 3.4.*

*Démonstration.* Par construction, la borne  $C_K$  est supérieure ou égale à la borne  $C(K, q)$  pour tout nombre premier rationnel  $q$  totalement décomposé dans  $K$  et inférieur ou égal à  $2(\Delta_K)^{Ah_K}$ . Ainsi, pour tout idéal  $\mathfrak{q}$  dans  $\mathcal{J}_K$ , on est dans les conditions d'application de la proposition 3.4.

Chaque cas de la proposition 3.4 (M0, M1, BO et BO') détermine une famille différente de coefficients  $(a_{\tau})_{\tau \in G}$  (on distingue les cas BO et BO' par le fait que dans le cas BO, l'ensemble des éléments  $\tau$  de  $G$  pour lesquels  $a_{\tau}$  est égal à 1 est un sous-groupe de  $G$  alors que dans le cas BO', c'est le complémentaire d'un sous-groupe).

Pour éliminer les cas M0 et M1, on raisonne comme dans le lemme 3.8 de [Dav11a] (voir aussi la partie 3.2.1 de [Dav08] ou [Dav11b], proposition 3.4).

Dans le cas M0, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$ , le coefficient  $a_{\mathfrak{p}}$  est nul. Par définition de  $a_{\mathfrak{p}}$  (notation 1.8), cela implique que caractère  $\lambda$  est non ramifié en toute place de  $K$  au-dessus de  $p$ . Ainsi, l'extension  $K^{\lambda}$  de  $K$  trivialisant  $\lambda$ , qui est abélienne, est non ramifiée en toute place finie de  $K$  (voir proposition 1.1) ; le corps  $K^{\lambda}$  est donc inclus dans le corps de classes de Hilbert de  $K$  et son degré (sur  $\mathbb{Q}$ ) est inférieur ou égal à  $d_{Kh_K}$ . Or, la courbe  $E$  possède un point d'ordre  $p$  défini sur  $K^{\lambda}$ . D'après des travaux de Merel et Oesterlé mentionnés dans les introductions de [Par99] et [Mer96], on a alors

$$p \leq \left(1 + 3^{\frac{d_{Kh_K}}{2}}\right)^2,$$

ce qui contredit le choix de  $p$  strictement supérieur à  $C_K$ .

Dans le cas M1, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$ ,  $a_{\mathfrak{p}}$  est égal à 1. Ainsi, le caractère  $\chi_{\mathfrak{p}}\lambda^{-1}$  est non ramifié en toute place de  $K$  au-dessus de  $p$ ,

et par suite en toute place finie de  $K$ . On considère alors le quotient de  $E$  par le sous-groupe d'isogénie  $W$ . On obtient une courbe elliptique  $E'$  définie sur  $K$ , isogène à  $E$  sur  $K$ ; le sous-groupe  $E[p]/W$  de  $E'$  est défini sur  $K$  et d'ordre  $p$  et le caractère d'isogénie associé à ce sous-groupe est  $\chi_p \lambda^{-1}$ . Le caractère  $\chi_p \lambda^{-1}$  étant non ramifié en toute place finie de  $K$ , on applique le même raisonnement que précédemment.  $\square$

### 3.2 Vers un Grössencharakter

**Proposition 3.7.** *On suppose que  $p$  est strictement supérieur à  $C_K$ .*

1. *Il existe un unique corps quadratique imaginaire  $L$  contenu dans  $K$  tel que pour tout  $\mathfrak{q}$  dans  $\mathcal{J}_K$ ,  $L^{\mathfrak{q}}$  est égal à  $L$ .*
2. *Le corps de classes de Hilbert de  $L$  est contenu dans  $K$ .*
3. *Le nombre premier  $p$  est décomposé dans  $L$ .*
4. *Il existe un unique idéal premier  $\mathfrak{p}_L$  de  $L$  au-dessus de  $p$  tel que  $\lambda$  est non ramifié hors de  $\mathfrak{p}_L$ .*
5. *Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $K$  au-dessus de  $p$ ; alors  $a_{\mathfrak{p}}$  est égal à 1 si et seulement si  $\mathfrak{p}$  est au-dessus de  $\mathfrak{p}_L$ ; sinon,  $a_{\mathfrak{p}}$  est égal à 0.*
6. *Soit  $\mathfrak{q}$  dans  $\mathcal{J}_K$ ; il existe une racine  $\beta'_{\mathfrak{q}}$  de  $P_{\mathfrak{q}}(X)$  vérifiant  $N_{K/L}(\mathfrak{q}) = \beta'_{\mathfrak{q}} \mathcal{O}_L$  et  $\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}}) = \beta'_{\mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}_L}$ .*

*Démonstration.* On est dans les conditions de la partie 4.2.2 de [Dav11b] (voir aussi la partie 3.2.3 de [Dav08] et le théorème 1 de [Mom95]). Les cinq premiers points de la proposition découlent ainsi des propositions 4.6, 4.7 et 4.8 de [Dav11b] (ou de manière équivalente de la proposition 3.2.5 et des lemmes 3.2.8 et 3.2.9 de [Dav08]). Pour le point 5, on notera que l'entier  $a_{\mathfrak{p}}$  de [Dav11b] et [Dav08] vaut 12 fois l'entier  $a_{\mathfrak{p}}$  du présent texte.

On démontre enfin le point 6. En suivant les notations 3.1, on a  $\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}}) = \beta_{\mathfrak{q}} \pmod{\mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}}$ . D'après la remarque 3.2.10 de [Dav08] (voir aussi les démonstrations des propositions 4.8 et 4.10 de [Dav11b]), l'idéal  $\mathfrak{p}_L$  du point 4 est égal à  $\mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}$  si tous les idéaux de  $\mathcal{J}_K$  sont de type BO dans la proposition 3.4 et il est égal au conjugué complexe de  $\mathcal{P}_0^{\mathfrak{q}}$  si tous les idéaux de  $\mathcal{J}_K$  sont de type BO'. Or, d'après la proposition 3.4, on a  $N_{K/L}(\mathfrak{q}) = \beta_{\mathfrak{q}} \mathcal{O}_L$  dans le cas BO et  $N_{K/L}(\mathfrak{q}) = \overline{\beta_{\mathfrak{q}}} \mathcal{O}_L$  dans le cas BO'. On peut donc prendre  $\beta'_{\mathfrak{q}} = \beta_{\mathfrak{q}}$  dans le cas BO et  $\beta'_{\mathfrak{q}} = \overline{\beta_{\mathfrak{q}}}$  dans le cas BO'.  $\square$

**Lemme 3.8.** *Soit  $\alpha$  un élément non nul de  $K$  premier à  $\mathfrak{p}_L$ ; alors on a :*

$$\prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \lambda(\sigma_{\mathfrak{q}})^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)} = N_{K/L}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

*Démonstration.* On note  $r'$  et  $(r'_{\nu})_{\nu}$  les applications associées par la théorie du corps de classes au caractère  $\lambda$ , comme les applications  $r$  et  $(r_{\nu})_{\nu}$  sont associées au caractère  $\lambda^2$  au début de la partie 2.1.

D'après la proposition 3.7, le caractère  $\lambda$  est non ramifié hors de  $\mathfrak{p}_L$  et pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  au-dessus de  $\mathfrak{p}_L$ , on a  $a_{\mathfrak{p}} = 1$ . De plus, par le point 1 de la proposition 3.7 le corps  $K$  contient un corps quadratique imaginaire. Ainsi, toutes ses places archimédiennes sont complexes et pour toute telle place  $\nu$ , l'application  $r'_{\nu}$  est triviale. On obtient donc, comme dans la démonstration de la proposition 2.2 :

$$\begin{aligned} 1 &= r'((\iota_{\nu}(\alpha))_{\nu}) = \prod_{\nu} r'_{\nu}(\iota_{\nu}(\alpha)) = \prod_{\nu|\infty} 1 \times \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}_L} r'_{\mathfrak{q}}(\iota_{\mathfrak{q}}(\alpha)) \times \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_L} r'_{\mathfrak{p}}(\iota_{\mathfrak{p}}(\alpha)) \\ &= \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}_L} \lambda(\sigma_{\mathfrak{q}})^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)} \times \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_L} \left( N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(\iota_{\mathfrak{p}}(\alpha))^{-a_{\mathfrak{p}}} \pmod{p} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}_L} \lambda(\sigma_{\mathfrak{q}})^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)} \times \left( \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_L} N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(\iota_{\mathfrak{p}}(\alpha)) \pmod{p} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme le nombre premier  $p$  est décomposé dans  $L$  (point 3 de la proposition 3.7), le complété  $L_{\mathfrak{p}_L}$  de  $L$  en  $\mathfrak{p}_L$  coïncide avec  $\mathbb{Q}_p$  et on a :

$$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_L} N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(\iota_{\mathfrak{p}}(\alpha)) \pmod{p} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_L} N_{K_{\mathfrak{p}}/L_{\mathfrak{p}_L}}(\iota_{\mathfrak{p}}(\alpha)) \pmod{p} = N_{K/L}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

□

**Proposition 3.9.** *Soit  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $K$  premier à  $\mathfrak{p}_L$ . Il existe un unique élément  $\alpha_{\mathfrak{q}}$  de  $\mathcal{O}_L$  vérifiant :*

$$N_{K/L}(\mathfrak{q}) = \alpha_{\mathfrak{q}}\mathcal{O}_L \text{ et } \lambda(\sigma_{\mathfrak{q}}) = \alpha_{\mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{q}$  un idéal maximal de  $K$  premier à  $\mathfrak{p}_L$ . D'après la proposition 2.14, il existe un idéal premier  $\mathfrak{q}'$  dans  $\mathcal{J}_K$  et un élément non nul  $\alpha$  de  $K$  qui vérifient :  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cdot (\alpha\mathcal{O}_K)$ .

Soit  $\beta'_{\mathfrak{q}'}$  dans  $\mathcal{O}_L$  qui vérifie le point 6 de la proposition 3.7 pour l'idéal  $\mathfrak{q}'$ . Alors l'idéal (entier)  $N_{K/L}(\mathfrak{q})$  de  $\mathcal{O}_L$  est engendré par  $\beta'_{\mathfrak{q}'} \times N_{K/L}(\alpha)$ . De plus, par le lemme 3.8 appliqué à  $\alpha$ , on a :

$$\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}})\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}'})^{-1} = N_{K/L}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

Comme on a, par choix de  $\beta'_{\mathfrak{q}'}$ ,  $\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}'}) = \beta'_{\mathfrak{q}'} \pmod{\mathfrak{p}_L}$ , on obtient finalement :

$$\lambda(\sigma_{\mathfrak{q}}) = \lambda(\sigma_{\mathfrak{q}'}) (N_{K/L}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L}) = \beta'_{\mathfrak{q}'} \times N_{K/L}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

Ainsi, on peut prendre pour  $\alpha_{\mathfrak{q}}$  l'élément  $\beta'_{\mathfrak{q}'} \times N_{K/L}(\alpha)$  de  $\mathcal{O}_L$ .

On suppose que deux éléments  $\alpha_{\mathfrak{q}}$  et  $\alpha'_{\mathfrak{q}}$  de  $\mathcal{O}_L$  satisfont la conclusion de la proposition. Alors  $\alpha_{\mathfrak{q}}$  et  $\alpha'_{\mathfrak{q}}$  engendrent le même idéal de  $\mathcal{O}_L$ , donc sont associés par une unité  $u_{\mathfrak{q}}$  de  $\mathcal{O}_L$ . Comme  $\alpha_{\mathfrak{q}}$  et  $\alpha'_{\mathfrak{q}}$  ont même image (non nulle) modulo  $\mathfrak{p}_L$ , l'unité  $u_{\mathfrak{q}}$  se réduit sur 1 modulo  $\mathfrak{p}_L$ . Pour  $p$  supérieur ou égal à 5, cela implique que  $u_{\mathfrak{q}}$  est égal à 1, donc que  $\alpha_{\mathfrak{q}}$  et  $\alpha'_{\mathfrak{q}}$  sont égaux. □

**Lemme 3.10.** *Soit  $\alpha$  un élément non nul de  $K$  premier à  $\mathfrak{p}_L$  ; alors on a dans  $L$  :*

$$N_{K/L}(\alpha) = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)}.$$

*Démonstration.* Par la proposition 3.9, les éléments  $\prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)}$  et  $N_{K/L}(\alpha)$  engendrent le même idéal fractionnaires de  $L$ . Ils diffèrent donc d'une unité  $u_{\alpha}$  de  $L$ . Par le lemme 3.8 et la proposition 3.9, on a :

$$\prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha)} \pmod{\mathfrak{p}_L} \equiv N_{K/L}(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

Ainsi, l'unité  $u_{\alpha}$  se réduit sur 1 modulo  $\mathfrak{p}_L$ . Pour  $p$  supérieur ou égal à 5, on obtient donc que  $u_{\alpha}$  est égal à 1.  $\square$

Dans le but d'étendre la relation du lemme 3.10 à tous les éléments non nuls de  $K$ , on associe à tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $\mathfrak{p}_L$  un élément  $\alpha_{\mathfrak{p}}$  de  $L^{\times}$  de la manière suivante.

*Notation 3.11.* Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $K$  au-dessus de  $\mathfrak{p}_L$ . On fixe un élément  $x_{\mathfrak{p}}$  de  $K^{\times}$  vérifiant :

- (i)  $\text{val}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 1$  ;
- (ii) pour tout idéal  $\mathfrak{p}'$  de  $K$  au-dessus de  $\mathfrak{p}_L$  différent de  $\mathfrak{p}$ ,  $\text{val}_{\mathfrak{p}'}(x_{\mathfrak{p}}) = 0$ .

On définit alors :

$$\alpha_{\mathfrak{p}} = N_{K/L}(x_{\mathfrak{p}}) \prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{-\text{val}_{\mathfrak{q}}(x_{\mathfrak{p}})}.$$

**Lemme 3.12.** Soit  $\alpha$  un élément non nul de  $K$ . Alors on a dans  $L$  :

$$N_{K/L}(\alpha) = \prod_{\nu \nmid \infty} \alpha_{\nu}^{\text{val}_{\nu}(\alpha)}.$$

*Démonstration.* On considère :  $\alpha' = \alpha \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L} x_{\mathfrak{p}}^{-\text{val}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}$ . Par choix des  $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L}$ ,  $\alpha'$  est premier à  $\mathfrak{p}_L$  ; on a donc par le lemme 3.10 :  $N_{K/L}(\alpha') = \prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha')}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} N_{K/L}(\alpha) &= N_{K/L}(\alpha') \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L} N_{K/L}(x_{\mathfrak{p}})^{\text{val}_{\mathfrak{p}}(\alpha)} \\ &= \prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha')} \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L} \left( \alpha_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(x_{\mathfrak{p}})} \right)^{\text{val}_{\mathfrak{p}}(\alpha)} \\ &= \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{p}}^{\text{val}_{\mathfrak{p}}(\alpha)} \prod_{\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{p}_L} \alpha_{\mathfrak{q}}^{\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha') + \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L} \text{val}_{\mathfrak{q}}(x_{\mathfrak{p}}) \text{val}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Or, pour un idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $K$  premier à  $\mathfrak{p}_L$ , on a :

$$\text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha') = \text{val}_{\mathfrak{q}}(\alpha) - \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_L} \text{val}_{\mathfrak{q}}(x_{\mathfrak{p}}) \text{val}_{\mathfrak{p}}(\alpha).$$

On en déduit :  $N_{K/L}(\alpha) = \prod_{\nu \nmid \infty} \alpha_{\nu}^{\text{val}_{\nu}(\alpha)}$ .  $\square$

### 3.3 Démonstration du théorème II

On rappelle que l'existence d'une courbe semi-stable sur  $K$  et ayant des multiplications complexes sur  $K$  est caractérisée par l'existence de certains caractères des idèles de  $K$ , selon la proposition suivante (voir la partie 2.1 pour les notations).

**Proposition 3.13.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Il existe une courbe elliptique définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes sur  $K$  et partout bonne réduction sur  $K$ .
2. Il existe un corps quadratique imaginaire  $F$  contenu dans  $K$  et un caractère continu  $\varepsilon$  de  $\mathbb{A}_K^\times$  dans  $F^\times$  vérifiant :
  - (i)  $\varepsilon$  est trivial sur le sous-groupe  $\prod_{\nu|\infty} K_\nu^\times \prod_{\nu \nmid \infty} U_{K_\nu}$  de  $\mathbb{A}_K^\times$  ;
  - (ii)  $\varepsilon$  coïncide avec la norme  $N_{K/F}$  sur les idèles principales.

*Démonstration.* On renvoie à [Ser72], §4.5 (théorème 5 et remarque 2) et §3.1. On remarquera que la semi-stabilité sur  $K$  d'une courbe elliptique à multiplications complexes associée au caractère  $\varepsilon$  provient plus spécialement de la condition (i).  $\square$

**Théorème 3.14** (Théorème II). *On suppose que le corps  $K$  est galoisien sur  $\mathbb{Q}$  et qu'il existe une courbe elliptique  $E$  semi-stable sur  $K$  et un nombre premier  $p$  strictement supérieur à  $C_K$  tels que la représentation  $\varphi_{E,p}$  est réductible.*

*Alors il existe une courbe elliptique  $E'$  définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes sur  $K$  et partout bonne réduction sur  $K$ , telle que la semi-simplifiée de la représentation  $\varphi_{E,p}$  est isomorphe à la représentation  $\varphi_{E',p}$ .*

*Démonstration.* On est dans les conditions d'application de la partie 3.2. Avec les notations de cette partie, on considère le corps quadratique imaginaire  $L$  (contenu dans  $K$ ) donné par la proposition 3.7 et la famille  $(\alpha_\nu)_{\nu|\infty}$  d'éléments de  $L^\times$  donnée par la proposition 3.9 et la notation 3.11.

On définit un caractère continu  $\varepsilon$  de  $\mathbb{A}_K^\times$  dans  $L^\times$  par :

- (i)  $\varepsilon$  est trivial sur le sous-groupe  $\prod_{\nu|\infty} K_\nu^\times \prod_{\nu \nmid \infty} U_{K_\nu}$  ;
- (ii) pour toute place finie  $\nu$  de  $K$ ,  $\varepsilon$  envoie toute uniformisante de  $K_\nu$  sur  $\alpha_\nu$ .

D'après le lemme 3.12,  $\varepsilon$  coïncide donc avec la norme  $N_{K/L}$  sur les idèles diagonales.

Par la proposition 3.13 et la partie 4.5 (remarque 2) de [Ser72], le caractère  $\varepsilon$  est associé à une courbe elliptique  $E'$  définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes par un ordre de  $L$  et partout bonne réduction sur  $K$ . La représentation  $\varphi_{E',p}$  de  $G_K$  associée aux points de  $p$ -torsion de  $E'$  est abélienne et à valeurs dans  $(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)^\times$ . Comme  $p$  est décomposé dans  $L$  (proposition 3.7),  $\varphi_{E',p}$  est la somme de deux caractères de  $G_K$ , chacun à valeurs dans  $\mathbb{F}_p^\times$ , et vérifie, pour tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $K$  premier à  $p$  :

$$\varphi_{E',p}(\sigma_{\mathfrak{q}}) = (\alpha_{\mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}_L}, \alpha_{\mathfrak{q}} \pmod{\overline{\mathfrak{p}_L}}).$$



La représentation  $\varphi_{E,p}$  est réductible ; sa semi-simplifiée est donc la somme des deux caractères  $\lambda$  et  $\chi_p \lambda^{-1}$ , chacun à valeurs dans  $\mathbb{F}_p^\times$ . D'après la proposition 3.9, on a pour tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $K$  premier à  $p$  :

$$\begin{aligned}\varphi_{E,p}(\sigma_{\mathfrak{q}}) &= (\alpha_{\mathfrak{q}} \bmod \mathfrak{p}_L, (N\mathfrak{q})\alpha_{\mathfrak{q}}^{-1} \bmod \mathfrak{p}_L) \\ &= (\alpha_{\mathfrak{q}} \bmod \mathfrak{p}_L, \overline{\alpha_{\mathfrak{q}}} \bmod \mathfrak{p}_L) = (\alpha_{\mathfrak{q}} \bmod \mathfrak{p}_L, \alpha_{\mathfrak{q}} \bmod \overline{\mathfrak{p}_L}).\end{aligned}$$

Ainsi, la semi-simplifiée de  $\varphi_{E,p}$  et la représentation  $\varphi_{E',p}$  sont isomorphes.  $\square$

Le théorème I de l'introduction est une conséquence directe du théorème II.

### 3.4 Exemples de corps vérifiant le théorème I

Dans cette partie on donne quelques exemples de corps vérifiant le théorème I.

**Théorème III.** *On suppose que le corps  $K$  est galoisien sur  $\mathbb{Q}$  et vérifie l'une des propriétés suivantes.*

1. *Le corps  $K$  ne contient le corps de classes de Hilbert d'aucun corps quadratique imaginaire. Cette situation se produit notamment dans les cas suivants :*
  - (1a)  *$K$  est de degré impair sur  $\mathbb{Q}$  ;*
  - (1b)  *$K$  est totalement réel.*
2. *Pour tout corps quadratique imaginaire  $L$  dont le corps de classes de Hilbert est inclus dans  $K$ , il existe une unité de  $K$  (pouvant dépendre de  $L$ ) dont la norme dans l'extension  $K/L$  est différente de 1. Cette situation se produit notamment dans les cas suivants :*
  - (2a) *le degré de  $K$  sur  $\mathbb{Q}$  est le double d'un nombre impair ;*
  - (2b)  *$K$  est égal à  $FM$ , avec  $F$  un corps quadratique imaginaire et  $M$  un corps totalement réel, galoisien, possédant une unité de norme sur  $\mathbb{Q}$  égale à  $-1$  ;*
  - (2c)  *$K$  vérifie la condition (C) de [Kra07].*

*Alors il n'existe pas de courbe elliptique définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes sur  $K$  et partout bonne réduction sur  $K$ .*

*Démonstration.* On montre d'abord que les propriétés 1 et 2 du théorème impliquent sa conclusion.

On suppose pour cela qu'il existe une courbe elliptique  $E$  définie sur  $K$ , ayant des multiplications complexes sur  $K$  et semi-stable sur  $K$ , c'est-à-dire ayant partout bonne réduction sur  $K$ . Soit  $R$  l'anneau des endomorphismes de  $E$  sur  $K$ . Alors  $R$  est un ordre dans un corps quadratique imaginaire  $L$ , qui est donc contenu dans  $K$  (voir [Ser72] §4.5). De plus l'invariant  $j$  de  $E$  (qui est contenu dans  $K$ ) engendre sur  $L$  un corps qui contient le corps de classes de Hilbert de  $L$  (voir [Ser67]).

Ainsi,  $K$  contient  $L$  et son corps de classes de Hilbert. Ceci montre que, si  $K$  vérifie la propriété 1, alors une telle courbe elliptique n'existe pas.

De plus, il est associé à la courbe  $E$  un caractère  $\varepsilon$  de  $\mathbb{A}_K^\times$  dans  $L^\times$  comme dans la proposition 3.13. Les propriétés du caractère  $\varepsilon$  donnent alors que la norme

de toute unité de  $K$  dans l'extension  $K/L$  est égale à 1. Ceci montre donc que, si  $K$  vérifie la propriété 2, alors un tel caractère  $\varepsilon$  n'existe pas.

Si le corps  $K$  vérifie (1a) ou (1b), alors il vérifie la propriété 1 du théorème.

Si le corps  $K$  vérifie (2a), alors  $-1$  vérifie la propriété 2 pour tout corps quadratique imaginaire  $L$  contenu dans  $K$ . On suppose que le corps  $K$  vérifie (2b). Soit  $u$  une unité de  $M$  de norme (sur  $\mathbb{Q}$ ) égale à  $-1$ . Alors pour tout corps quadratique imaginaire  $L$  inclus dans  $K$ , les corps  $L$  et  $M$  sont linéairement disjoints et on a :  $N_{K/L}(u) = N_{M/\mathbb{Q}}(u) = -1$ . Ainsi,  $K$  vérifie la propriété 2.

On démontre enfin que si  $K$  vérifie la condition (C) de [Kra07], il vérifie la propriété 2 du théorème. On utilise ici les notations de la partie 1.1.2 de [Kra07]. Soit  $n$  égal à  $\frac{d_K}{2}$ . La condition (C) donne une unité  $u$  de  $K$  telle que 1 n'est pas racine du polynôme  $H_n^{(u)}(X)$ . Or, les racines de  $H_n^{(u)}(X)$  sont les produits de  $n$  racines (pas forcément distinctes) du polynôme minimal de  $u$  sur  $\mathbb{Q}$ . En particulier, pour tout corps quadratique imaginaire  $L$  inclus dans  $K$ , la norme  $N_{K/L}(u)$  de  $u$  dans l'extension  $K/L$  est une racine de  $H_n^{(u)}(X)$ . Cette norme est donc différente de 1 et l'unité  $u$  satisfait la propriété 2 pour tous les corps  $L$  considérés.  $\square$

*Remarques 3.15.*

1. D'après le théorème 1 de [Kra07], tous les corps de nombres satisfaisant la condition (C) de [Kra07] vérifient l'assertion 2 du théorème I de l'introduction. Ils vérifient donc aussi l'assertion nécessaire 1. Le théorème III donne une démonstration directe de ce fait.
2. Parmi les corps satisfaisant la condition (C) de [Kra07] et qui ne figurent pas explicitement dans les autres cas du théorème III, on notera les corps de groupe de Galois isomorphe à un groupe symétrique ou à un groupe alterné et les corps cyclotomiques engendrés par des racines de l'unité d'ordre premier (voir le théorème 2 de [Kra07]).

## Références

- [BG96] Yann Bugeaud and Kálmán Györy. Bounds for the solutions of unit equations. *Acta Arith.*, 74(1):67–80, 1996.
- [Bil11] Nicolas Billerey. Critères d'irréductibilité pour les représentations des courbes elliptiques. *Int. J. Number Theory*, 7(4):1001–1032, 2011.
- [BPR11] Yuri Bilu, Pierre Parent, and Marusia Rebolledo. Rational points on  $X_0^+(p^r)$ . *preprint*, 2011. Disponible en ligne arXiv:1104.4641v1.
- [Dav08] Agnès David. *Caractère d'isogénie et borne uniforme pour les homothéties*. PhD thesis, IRMA, Strasbourg, 2008.
- [Dav11a] Agnès David. Borne uniforme pour les homothéties dans l'image de Galois associée aux courbes elliptiques. *J. Number Theory*, 131(11):2175–2191, 2011.
- [Dav11b] Agnès David. Caractère d'isogénie et critères d'irréductibilité. *Soumis*, 2011. Disponible en ligne arXiv:1103.3892v2.

- [Kra96] Alain Kraus. Courbes elliptiques semi-stables et corps quadratiques. *J. Number Theory*, 60(2):245–253, 1996.
- [Kra07] Alain Kraus. Courbes elliptiques semi-stables sur les corps de nombres. *Int. J. Number Theory*, 3(4):611–633, 2007.
- [LMO79] J. C. Lagarias, H. L. Montgomery, and A. M. Odlyzko. A bound for the least prime ideal in the Chebotarev density theorem. *Invent. Math.*, 54(3):271–296, 1979.
- [Maz78] B. Mazur. Rational isogenies of prime degree (with an appendix by D. Goldfeld). *Invent. Math.*, 44(2):129–162, 1978.
- [Mer96] Loïc Merel. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *Invent. Math.*, 124(1-3):437–449, 1996.
- [Mom95] Fumiyuki Momose. Isogenies of prime degree over number fields. *Compositio Math.*, 97(3):329–348, 1995.
- [Par99] Pierre Parent. Bornes effectives pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.*, 506:85–116, 1999.
- [Ser67] J.-P. Serre. Complex multiplication. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 292–296. Thompson, Washington, D.C., 1967.
- [Ser72] Jean-Pierre Serre. Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. Math.*, 15(4):259–331, 1972.
- [ST68] Jean-Pierre Serre and John Tate. Good reduction of abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, 88:492–517, 1968.